

論文審査の要旨

博士の専攻分野の名称	博 士 (理 学)	氏名	Hoang Thanh Hoai
学位授与の要件	学位規則第 4 条第 ①・② 項該当		
論文題目			
Degeneration of Fermat hypersurfaces in positive characteristic (正標数の体上定義されたフェルマー多様体の退化)			
論文審査担当者			
主 査	教 授	島田 伊知朗	
審査委員	教 授	木村 俊一	
審査委員	教 授	石井 亮	
審査委員	准教授	高橋 宣能	
〔論文審査の要旨〕			
<p>p を素数とし、q を p のある冪とする。標数 p の体上定義された次数 $q+1$ の $(n-1)$ 次元フェルマー多様体</p> $x_0^{q+1} + \cdots + x_n^{q+1} = 0$ <p>は、多くの興味深い性質をもち、様々な観点からの研究がなされてきた。次元についてのある条件の下で、この多様体は小平次元が非負であるにもかかわらず単有理的でありまた超特異的であることが示されている。これは正標数に特有の現象（いわゆる病的現象）である。また、この多様体を有限体上で考えた場合、その有理点の集合からよい誤り訂正符号を構成できることがわかっている。さらに、この多様体は極めて大きな自己同型群をもち、この多様体に含まれる部分多様体（例えば線形部分空間）を用いて興味深い組合せ論的構造がいくつか発見されてきている。</p> <p>この論文においては、標数 p の代数閉体上定義された次数 $q+1$ のフェルマー多様体を退化させて得られる多様体の定義方程式の標準形が決定され、さらにその射影的自己同型群が計算された。</p> <p>標数 p における次数 $q+1$ のフェルマー多様体 X は射影空間において有限体上の非退化なエルミート形式の零点として定義されている。標数 2 でない体上の双線形 2 次形式の標準形、あるいは複素数体上のエルミート形式の標準形は、退化した場合も含めて古典的に知られている。有限体上のエルミート形式の標準形は、退化した場合も含めて Segre により求められている。さらに代数閉体上の非退化な線形 - 準線形形式の標準形が次数 $q+1$ のフェルマー多様体 X の定義方程式となることは、Lang, Beauville 等により証明されている。したがって、退化した正標数の線形 - 準線形形式の標準形を代数閉体上で求めるという問題は極めて自然なものである。しかしながら、この観点からフェルマー多様体 X の退化を調べた研究はまだなかった。したがって、本論文で示された標準形定理により、正標数の体上の射影多様体の研究が大きく進むことが期待される。</p>			

本論文の主結果である標準形定理とは以下の定理である。

定理. 標数 p の代数閉体 k を考える。 q を p の冪とする。成分がすべて k の元であるサイズ $n+1$ の正方行列 $A = (a_{ij})$ を考える。(ただし添字 i, j は 0 から n までを走るとする。) $n+1$ 個の変数 x_i (ただし $i = 0, \dots, n$) をもつ $q+1$ 次の同次多項式

$$\sum a_{ij} x_i x_j^q = 0 \quad (\text{ただし和はすべての添字 } i, j \text{ についてとる})$$

により定義される n 次元射影超曲面を X_A とする。

(1) A の階数が n ならば、 n 以下のある非負整数 s が存在して、 X_A は次の超曲面 X_s と射影同値である。

$$\sum x_i^{q+1} + \sum x_i^q x_{i+1} = 0.$$

ここで最初の和において添字 i は 0 から $s-1$ までを走り、2番目の和においては添字 i は s から $n-1$ までを走る。

(2) 異なる s に対する超曲面 X_s は射影同値ではない。

A が非退化の場合、すなわち A の階数が $n+1$ の場合に、 X_A が X_{n+1} と射影同値になるという事実が、上記の Lang, Beauville の結果に他ならない。したがってこの結果は Lang, Beauville の結果の自然な一般化となっている。

さらに本論文では、各 s に対しこの超曲面 X_s の射影的自己同型群も計算されている。また、 X_A の次元が 1 の場合、つまり X_A が射影平面曲線となる場合には、 A の階数が 1 となる場合も含めて完全な分類を与えており、Ballico-Hefez による non-reflexive な既約平面曲線の分類との関連も調べられている。

この主定理は、座標変換により X_A の定義方程式を標準形に直していくという構成的な方法により証明されるが、必要な変換のステップ数が非常に多く、また分岐の場合分けが複雑で、証明を書き下すにあたっては、次元についての帰納法を巧妙に組み合わせる必要がある。

以上、審査の結果、本論文の著者は博士(理学)の学位を授与される十分な資格があるものと認める。

公表論文

Degeneration of Fermat hypersurfaces in positive characteristic.
Hiroshima Mathematical Journal. 出版予定.

参考論文

(1) On Ballico-Hefez curves and associated supersingular surfaces.
Thanh Hoai Hoang and Ichiro Shimada.
Kodai Mathematical Journal, volume 38, Number 1 (2015), 23-36.