

## 論文審査の要旨

博士の専攻分野の名称	博 士 ( 理 学 )	氏名	風呂川 幹央
学位授与の要件	学位規則第4条第①・2項該当		
論文題目			
<p>Commensurability between once-punctured torus groups and once-punctured Klein bottle groups (一点穴あきトーラス群と一点穴あきクラインボトル群の通約可能性)</p>			
論文審査担当者			
主 査 教 授 作 間 誠 審査委員 教 授 田 丸 博 士 審査委員 准教授 古宇田 悠 哉 審査委員 教 授 寺垣内 政 一 (教育学研究科) 審査委員 准教授 秋 吉 宏 尚 (大阪市立大学理学研究科)			
〔論文審査の要旨〕			
<p>一点穴あきトーラスは、その完備双曲構造全体が作るタイヒミュラー空間が非自明となる曲面の中で最も単純な有向曲面である。Jorgensen は、この一点穴あきトーラスに対して、その双曲構造の擬等角変形全体が作る擬フックス空間を、フォード領域の観点から詳細に調べた。その結果、穴あきトーラス擬フックス群のフォード領域の組み合わせ構造が完全に記述され、応用として、円周上の一点穴あきトーラス束の完備双曲構造が初めて構成された。この研究は、Riley による (円周上の一点穴あきトーラス束である) 8 の字結び目補空間の双曲構造の構成と共に Thurston を刺激し、Thurston によるハーケン多様体の幾何化定理、そして後に Perelman によって解決された幾何化予想に繋がった。また Jorgensen の研究により、クライン群の世界で起こる様々な現象が明らかにされ、それが Minsky 等による終層予想の解決に繋がった。更に Jorgensen の研究は、秋吉-作間-和田-山下により、擬フックス空間の外部にまで拡張され、双曲的二橋絡み目補空間のフォード領域の組み合わせ構造が解明された。このように一点穴あきトーラスは、それ自体豊かな研究対象であると同時に、様々な研究の先駆けとなった重要な研究対象である。</p> <p>このような状況の下で、本論文の著者は、その完備双曲構造全体が作るタイヒミュラー空間が非自明となる曲面の中で最も単純な非有向曲面である一点穴あきクラインボトルに注目し、Jorgensen 理論の類似が成立するのではないかと期待して研究を行った。まずは参考論文において、一点穴あきクラインボトルの場合も (その基本群の表現として得られる) フックス群に対しては、Jorgensen 理論の類似が成立することを証明した。</p> <p><b>定理</b> 一点穴あきクラインボトルフックス群の同値類全体の集合から一点穴あきクラインボトルの弧複体への自然な同相写像が存在する。加えて、各一点穴あきクラインボトルフックス群のフォード領域の組み合わせ構造はその像により決定される。</p>			

更に、参考論文では、一点穴あきトーラス擬フックス群のフォード領域では現れない特異なフォード領域を持つ一点穴あきクラインボトル擬フックス群を構成した。この例により、一般の一点穴あきクラインボトル擬フックス群に対しては単純には Jorgensen 理論の類似が成立するわけではなく、事情はより複雑である事がわかった。

そこで、著者は、一点穴あきトーラスと一点穴あきクラインボトルが位相的に通約可能、すなわち、二点穴あきトーラスを共通の被覆空間として持つことに着目し、一点穴あきトーラスと一点穴あきクラインボトルの基本群の  $\mathrm{PSL}(2, \mathbb{C})$  表現に対し、通約可能性の概念を導入し、次の自然な問題を設定した。

**問題** 与えられた一点穴あきクラインボトルの基本群の  $\mathrm{PSL}(2, \mathbb{C})$  表現がいつ通約可能な一点穴あきトーラスの基本群の  $\mathrm{PSL}(2, \mathbb{C})$  表現を持つか？

この問題を解決するために、著者は一点穴あきトーラス群に対する Jorgensen 理論で重要な役割を果たす楕円の生成系と呼ばれる一点穴あきトーラスの基本群の幾何的生成元、及び複素確率と呼ばれる一点穴あきトーラスの基本群の表現の幾何的パラメータの類似を、一点穴あきクラインボトルに対して導入し、それらの性質を詳細に調べた。そして、この研究成果を足場として、本論文の主結果である、忠実な型保存  $\mathrm{PSL}(2, \mathbb{C})$  表現に対する上記問題の完全解を与えた。

**主結果** 一点穴あきクラインボトルの基本群の忠実な型保存  $\mathrm{PSL}(2, \mathbb{C})$  表現に対し、それが通約可能な一点穴あきトーラスの基本群の忠実な型保存  $\mathrm{PSL}(2, \mathbb{C})$  表現を持つための必要十分条件を複素確率の言葉で与えた。

加えて、著者は一点穴あきトーラスと一点穴あきクラインボトルの基本群の離散的な型保存  $\mathrm{PSL}(2, \mathbb{C})$  表現が通約可能であれば、それらのフォード領域は一致することを示した。このことと主結果を合わせれば、一点穴あきクラインボトルの基本群の離散的かつ忠実な型保存  $\mathrm{PSL}(2, \mathbb{C})$  表現で、一点穴あきトーラスの型保存  $\mathrm{PSL}(2, \mathbb{C})$  表現と通約可能であるものに対して、そのフォード領域の組み合わせ構造を記述できる。これにより、幾何的無限群を含む一点穴あきクラインボトル群の無限族に対するフォード領域の記述が与えられた。この結果はフォード領域の研究の一つの指針となるものであると考えられる。

以上、審査の結果、本論文の著者は博士（理学）の学位を授与される十分な資格があるものと認める。

公表論文

Commensurability between once-punctured torus groups and once-punctured Klein bottle groups,

Mikio Furokawa,

Hiroshima Mathematical Journal, 掲載決定

参考論文

Ford domains of fuchsian once-punctured Klein bottle groups,

Mikio Furokawa,

Topology and its Applications, 196 (2015), 421-447.