

平成 27 年度 博士論文

連続体損傷力学を用いた延性破壊に関する研究

(Study on the ductile fracture using continuum damage mechanics)

平成 27 年 9 月

広島大学大学院工学研究科

輸送・環境システム専攻

構造システム研究室

D126490 山王丸 将吾

論文の要旨

題目 連続体損傷力学を用いた延性破壊に関する研究
(Study on the ductile fracture using continuum damage mechanics)

氏名 山王丸 将吾

機械部品を設計するにあたり強度要件は1つの大きな重要項目となる。強度要件として多くの機械部品では定格負荷において長い寿命を確保しようとする。このため定格負荷環境下では高サイクル疲労破壊に分類される破壊を考える。しかし自動車における衝突やクラッチの急締結、大型建造物の大地震、電子機器の落下衝撃などの定格負荷よりも非常に大きな荷重が入力されるとき、延性材料は大きな塑性変形を伴う。これにより1回の負荷による破壊や極低サイクル疲労破壊を生じる。この際、人命や環境に大きな損害を与えることのないように破壊をコントロールする設計が重要となる。この設計に関して軽量性や低コスト、短期開発を同時に実現しようとする破壊現象の高精度な予測と最小限の試作による開発が必要不可欠となる。このような開発を進めるに当たって近年のコンピュータ資源の進化に伴ってコンピュータシミュレーションが有効な手段となっている。本研究では1回負荷による破壊や極低サイクル疲労破壊を表現するための損傷弾塑性モデルに関する研究を行う。

従来の延性破壊シミュレーションに関する研究には大きく分類すると Coffin-Manson 則によるひずみ振幅から寿命を算出する簡易的な手法、非線形破壊力学による手法、材料損傷モデルによるローカルアプローチによる手法がある。このうち Coffin-Manson 則による手法は簡便に使用できる利点があるものの応力三軸度によるボイド成長の影響や微視的損傷の発達に応じた応力積載能力の低下挙動が考慮されておらず定性的な破壊起点すら予測できないことが多々ある。また非線形破壊力学による手法はJ積分という破壊力学パラメータを用いてき裂進展を評価するが、き裂深さや負荷形式や部材板厚によって破壊靱性値の有効性が失われる拘束効果に関する課題がある。さらに破壊力学は初期き裂が存在していなければ適用できず円孔縁やリブ付け根などの応力集中部からのき裂発生を表現することができないといった課題がある。そして材料損傷モデルによる手法の1つに連続体損傷力学に基づくものがあり、異方損傷や移動硬化則を考慮したモデルなどへ発展してきた。そして様々な損傷問題に適用されており、破壊力学で取り扱うことが困難であったき裂の発生と進展を予測する有効な手段として研究されてきた。しかし連続体損傷力学に関してはまだ実験との詳細な比較を交えながらの検証が十分になされておらず、今後の基礎研究によってそのモデルの妥当性や実用性が大きく高

まる可能性は十分にあると考える. そこで本研究では延性破壊シミュレーションモデルに対する損傷モデルとして連続体損傷力学を用いることとした.

さらに弾塑性モデルのシミュレーションを行う際の流れ則の数値積分に関して従来の研究を見るとモデルが複雑になるほど定式化が比較的容易な前進形 Euler 積分によりモデル化している例が多く, 計算実用性が高いが定式化が煩雑となる後退形 Euler 積分による定式化が行われていない. 両者の手法では計算時間が数倍から数十倍も異なり大型構造物の数値計算には後退形 Euler 法による定式化が必要不可欠であると考え. 以上より本研究では 1 回の負荷による延性破壊から極低サイクル疲労破壊をシミュレーションするために以下の 4 つのモデルが要件であると考えた.

要件① 分割背応力モデルを考慮した複合硬化則の弾塑性モデル

要件② 連続体損傷力学による損傷モデル

要件③ ①と②を連成したモデルの後退形 Euler 法による応力積分およびそれに厳密に整合した Consistent 接線剛性の導出

要件④ 要素積分点毎に破壊判定を与えたき裂発生, き裂進展の表現

しかし既存の研究を見るとこれら 4 つの要件を全て満たすモデルは見られない. そこで本研究ではまず①, ②の要件を満たすモデルの定式化を行った. そしてこのモデルに対してつり合い状態を優れた収束性で得るために後退形 Euler 積分による定式化も行った. さらにき裂進展も可能なモデルにすることで, 実測で比較的観測が容易なき裂発生, き裂進展の側面からモデルの妥当性を評価した. 以下に各章の要点を示す.

第 1 章では本研究の目的と研究背景について詳細に述べた. き裂の発生も含めた損傷モデルとして連続体損傷力学によるものが有効であると考えられる. そして本研究が目的とする極低サイクル疲労破壊の表現には上述の 4 要件が必要であると考えが, 全ての要件を満足するモデルが見当たらない. そのため本研究では 4 要件を満足する損傷モデルとその積分手法を開発し, 実験との詳細な比較によりその妥当性を示した.

第 2 章で延性破壊という損傷弾塑性変形をシミュレーションするために必要な基礎理論について述べた. すなわち本研究では空間の離散化に有限要素法, 動的な問題を扱う時の時間の離散化に Newmark- β 法を用いているためその基礎理論の概要を記した. また計算速度を向上させるために導入した計算並列化に関する基礎理論も記した. さらに第 2 章では第 3 章で提案する損傷弾塑性モデルを理解するために必要不可欠な背景知識として等方硬化非損傷モデルを用いた積分法について詳細に説明する. また残差の力計算収束性向上のために導入した試行増分計算についても触れる.

第 3 章では初めに要件①と要件②に該当する分割背応力モデルと連続体損傷力学の基礎知識に触れる. その後, 本研究で提案するこの 2 つを連成したモデルについて説明し, 要件③の後退形 Euler 積分の定式化を行ってゆく. また計算速度の向上に向けた縮

約積分法への改良について触れる。また焼結材など静水圧が弾塑性変形に大きな影響を及ぼす材料へ拡張するために静水圧依存型の分割背応力型損傷モデルへの改良もその定式化と共に説明する。さらに引張負荷下と圧縮負荷下での損傷の違いを表現するための **Unilateral** 効果のモデルも追加し、より実現象に近いモデルへと拡張している。

分割背応力型弾塑性モデルと損傷モデルを連成したことで同定すべき材料定数は増える。そこで第 4 章ではこれらの材料定数を半自動的に同定するための材料同定システムについて述べる。ここでは単軸負荷試験の実験結果とフィットするように材料定数を逐次変えながら幾度も数値計算を行って行く。その際に計算時間を大幅に削減するために単軸負荷条件下に特化した簡易応力積分法について述べる。

第 5 章ではこれまでに記述した損傷弾塑性モデルを有限要素法に組み込み数値計算を実施する。既存の研究では損傷力学を用いたき裂進展挙動についてまだ多くの未知な部分がある。そこでまずは基礎的なき裂進展挙動を詳細に調べるために **Mode I** 貫通き裂を用いた 3 次元解析を行った。これにより基礎的な延性破壊として知られるシャリップ破壊を含めた破壊領域が連続体損傷力学を用いて表現できるかを実験結果と詳細に比較しながら明らかにした。またき裂進展時の **J** 積分も計算し連続体損傷力学から計算した破壊靱性値が妥当なものか調べた。さらに **Mode I** と **Mode II** の混合モードき裂についても取扱い実験結果との比較から連続体損傷力学によるモデルの妥当性を調べた。この結果を踏まえて段違いき裂についても計算し実験結果との定性的な考察を行った。また塑性加工問題や動的破壊問題そして極低サイクル疲労破壊といった多種の破壊問題についても本モデルでシミュレーションを実施しその定性的妥当性について検証した。

最後に第 6 章では本研究の総括について示した。分割背応力型の複合硬化則と連続体損傷力学を連成した損傷弾塑性モデルとその後退形 **Euler** 積分法について提案した。さらに静水圧依存性や **Unilateral** 効果を考慮したモデルへと発展させた。また後退形 **Euler** 積分法をより高速にするための縮約積分法の開発も行った。このモデルを有限要素法に組み込んだ数値計算と実験結果を比較し、従来の破壊力学では取扱いが困難であったシャリップ領域も含めた延性破壊を表現できることが分かった。また混合モード問題や段違いき裂問題、塑性加工問題にも発展させ実験結果との定性的な比較を行った。その結果、数値計算結果と実験結果が良く一致した。これにより連続体損傷力学に基づくモデルにより様々なき裂発生、き裂進展挙動を表現することができることが分かった。同時に後退形 **Euler** 法の提案により大規模 3 次元損傷解析に対しても高速に計算が可能となった。今後の課題として材料や問題に応じてより以下に示すような詳細なモデルへの改良が考えられる。

- [1] 2 曲面モデルといったラチェット現象をより詳細に表現するモデルへの拡張
- [2] クリープ損傷と熱伝導との連成モデルへの拡張
- [3] コンクリート材などへも適用可能な異方損傷モデルへの拡張

目次

第 1 章 諸言	1
1.1 研究背景	1
1.2 延性破壊に対する従来の研究	2
1.3 弾塑性シミュレーションの積分法に対する従来の研究	6
1.4 本研究の位置づけ	8
1.4 本論文の構成	9
第 2 章 数値解析の原理	11
2.1 有限要素法	11
2.2 有限変形理論の有限要素法への導入	13
2.3 Newmark- β 法による動的解法	25
2.4 階層型領域分割による並列化	26
2.5 弾塑性有限要素法と積分手法	32
2.5.1 弾塑性力学の基礎原理	32
2.5.2 陽解法による弾塑性モデルの積分	36
2.5.3 陰解法による弾塑性モデルの積分	38
2.5.4 陰解法における残差力の収束性を向上する工夫	43
第 3 章 損傷弾塑性モデル	47
3.1 Bauschinger 効果と複合硬化モデル	47
3.2 Chaboche による分割背応力を用いた複合硬化モデル	51
3.3 連続体損傷力学による損傷モデル	53
3.4 「流れ則積分法」による強連成モデルの陰解法積分の提案	65
3.4.1 Return-Mapping 方程式	65
3.4.2 Consistent 接線剛性	72
3.4.3 流れ則積分法による検証計算	74
3.5 「縮約積分法」による陰解法積分への改良	85
3.5.1 縮約された Return-Mapping 方程式	85
3.5.2 陽的記述による Consistent 接線剛性	90
3.5.3 流れ則積分法と縮約積分法の比較検証	92
3.5.4 微小変動解との比較による妥当性検証	100
3.6 静水圧依存性を考慮したモデルへの拡張	106
3.6.1 静水圧依存性と分割背応力を考慮した複合硬化モデル	108

3.6.2 Return-Mapping 方程式の提案と収束性に関する課題	111
3.6.3 Return-Mapping の収束性の改良	119
3.6.4 陽的記述による Consistent 接線剛性	123
3.7 Unilateral 効果の考慮	128
3.8 本章のまとめ	132
第 4 章 材料定数の同定方法の提案	133
4.1 直接的に同定できる材料定数の求め方	133
4.2 その他の材料定数の求め方	135
4.3 単軸負荷状態における高速な簡易積分法	137
4.4 材料定数の探索範囲の決め方	143
4.5 材料定数の同定結果	148
4.6 本章のまとめ	154
第 5 章 工学的問題の数値解析	155
5.1 Mode I 貫通き裂	155
5.2 混合 Mode 貫通き裂	175
5.3 段違い貫通き裂	185
5.4 段違い表面き裂	191
5.5 円柱圧縮破壊	197
5.6 動的打ち抜き破壊	201
5.7 極低サイクル疲労問題	206
5.8 本章のまとめ	212
第 6 章 結言	213
謝辞	214
参考文献	215

第1章 諸言

本論文では、損傷弾塑性モデルをより実用的なモデルへ発展させる手法および有限要素法を用いた数値計算によるモデルの妥当性に関する研究について報告する。本章では本研究の研究背景や従来の損傷弾塑性モデルに対する本研究の位置づけと意義について述べる。また本論文の構成について記す。

1.1 工学的研究背景

まず本研究の工学的な背景について述べる。機械部品を設計するにあたり強度要件は1つの大きな項目となる。すなわち目標とする強度に応じた破壊寿命を満足させるように強度設計を行う。たとえば自動車設計の強度要件を考えてみる。この強度要件を大きく分類するとまず定格走行における負荷に対して数十年単位の比較的長い寿命もしくは無限寿命を満足させる高サイクル疲労破壊に対するものがある。高サイクル疲労破壊に対しては材料を弾性体と近似しても差し支えないことが多く、き裂進展を考える場合でも小規模降伏を仮定し線形破壊力学で取り扱っても工学的に問題が無いことが過去の研究から分かっている(岡村, 1976)。

一方、衝突や大きな段差の急な乗り上げまたはマニュアルトランスミッション車の急なクラッチ締結による衝撃入力などといった定格負荷を大きく超えるような負荷に対して1回から数千回の有限寿命を対象とする極低サイクル疲労破壊がある。このような大負荷に対する極低サイクル疲労破壊は自動車部品に限らず建築部材の大地震に対する破壊、大型船舶の比較的大きな波による船舶の曲げ破壊、電子機器が落下した時のはんだの破損など延性材料を取り扱う幅広い分野で工学的に極めて重要な破壊現象である。極低サイクル疲労では部品が大きな塑性変形を起こすため高サイクル疲労のように弾性体の近似は難しく非線形材料としての取り扱いが必要不可欠となり高サイクル疲労よりも扱いが難しくなる。さらに非線形材料を数値的に取り扱うにあたり応力積分や接線剛性のアルゴリズムで力学的釣り合い状態に至るまでの収束性に大きな影響を与えるため数値計算上の工夫が必要となる。

またこのような大負荷入力に対して軽量の部品の強度設計を効率的に行うためには極低サイクル疲労に伴う材料損傷や変形挙動を精度よくシミュレーションし、机上で設計することがコンピュータ資源の進化と共に非常に有効な手段となっている。本研究は1回の大負荷による破壊および極低サイクル疲労破壊を表現するための数値シミュレーションに関する研究である。また実験結果との比較も行い数値シミュレーションの妥当性も調べた。

1.2 延性破壊に対する従来の研究

ここで極低サイクル疲労破壊大きな塑性ひずみを伴う破壊に対する過去の研究について述べる．この現象を表現するには次の2つのモデルが大きな要となる．

- ・弾塑性変形を表現するための弾塑性モデル
- ・材料損傷を表現するモデル

まず弾塑性モデルについて述べる．弾塑性論について包括的には(Hill, 1950; Prager, 1959; Lubliner, 1990, Jirasek and Bazant, 2002)によってまとめられ、数学的なアプローチとしては(Halphen and Nguyen, 1975; Duvaut, 1976; Matthies, 1979; Suquet, 1981, Han and Reddy, 1999)によって詳しくまとめられている．最も基礎的な弾塑性モデルは降伏曲面の膨張のみを考慮した等方硬化モデルである．これにより1回の大負荷が掛かった時の弾塑性変形を表現することが可能となる．しかし等方硬化のみでは負荷方向が変わった時の Bauschinger 効果(八高, 長谷川, 1984)を表現することができない．そこで降伏曲面の中心を移動させることで Bauschinger 効果を表現する移動硬化モデルが提案されてきた．簡易的な線形移動硬化則(Prager, 1949)を始めとし非線形モデル(Armstrong and Frederick, 1966)へと発展した．また多面モデル(Iwan, 1967; Mroz, 1967), 二面モデル(Krieg, 1975; Dafalias and Popov, 1975), 非線形移動硬化モデル(Ohno and Wang, 1993)や分割背応力モデル(Chaboche, 1986)などが挙げられる．

一方、材料損傷を表現するモデルについて述べる．最も簡易的なものは S-N 線図を弾塑性問題に拡張した Coffin-Manson 則(Coffin, 1954; Manson, 1953)がある．これはまず塑性ひずみ振幅に対する破壊寿命の特性をあらかじめ材料特性として計測しておく．そして任意の形状の部材に発生した塑性ひずみ振幅から破断寿命に対する現在荷重が負荷した回数の比率を損傷と定義し寿命を予測する手法である．この手法は非常に簡便に計算できることや初期き裂を含まない場合でも適用可能といった長所がある．このため現在に至っても産業界では広く使用されており、その実用性について研究(Mediratta, et al., 1986; 嶋田, 1987; Susmel, 2009; Ricotta, 2015)されている．また Coffin-Manson 則に基づく極低サイクル疲労寿命の予測は現在でも電子機器のはんだの破壊問題(向井, 2005; 向井, 2006; 寺崎, 2008)など産業的に幅広く利用されている．しかしこの手法は塑性ひずみ振幅と負荷サイクル数が明確に定義できるような単調負荷に対して有効な手法であり非比例負荷となる場合などへの適用には曖昧さがある．また延性破壊は材料内部のボイドの発生、成長、合体によって生じることが実験的に観測されており広く知られている．そしてボイドの成長には応力三軸度が強い影響因子として作用することも実験的に知られている(Feng, et al., 1992;. Biel and Golaski, 1988; Sun, 1991)．これにより応力三軸度の大きさによって破断に至るまでの相当塑性ひずみの値が大きく変化することも実験的に確認されている(Bonora, 1997)．Coffin-Manson 則に基づく評価指標にはこのような応力三軸度の効果が考慮されておらず相当塑性ひずみの値のみで損傷を評価している

ため破壊起点を定性的にすら予測できないこともある。すなわち Coffin-Manson 則は簡便評価指標としての使いやすさが最大の長所であるがその力学的な根拠や延性破壊メカニズムと整合させるには多くの課題が残っていると考える。

一方、延性破壊を力学的に取り扱う方法として破壊力学によるものがある。破壊力学は弾性体においてき裂先端近傍の変位場を弾性論から導出している。そしてき裂先端近傍の応力場、変位場の大きさを応力拡大係数により表記しこれを破壊力学パラメータとして定義する線形破壊力学が土台となっている(Tada, 1973; Sih, 1973, Sneddon, 1969, Kobayashi, 1965, Rice, 1972)。き裂先端が小規模降伏とみなせる場合は線形破壊力学として扱えるものと近似しても差し支えなく、高サイクル疲労き裂進展のき裂進展速度を Paris 則(Paris, 1963)で定義すれば高サイクル疲労き裂進展のシミュレーションが可能となる。この手法により 2 次元および 3 次元のき裂進展シミュレーションが実施され実験結果と良く一致している成果がある(Kikuchi, et al., 2011; Jurenka and Spaniel, 2013; Nguyen, et al., 2014)。

その後、材料を非線形弾性体へと拡張した非線形破壊力学に発展し J 積分は非線形弾性体および除荷を伴わない弾塑性体に対する破壊力学パラメータとして用いられてきた(Rice, 1968)。また実験的に J 積分値を簡便に算出する研究も行われ J 積分による破壊評価はその実用性も高められてきた(Rice, et al., 1973; Merkle and Corten, 1974)。さらに Hutchinson, Rice, Rosengren は非線形弾性体を含んだき裂先端の応力場、変位場の特異性が J 積分値によって一義的に表現できることを平面ひずみ条件下のもと解析的に示した。この応力場、変位場のことを HRR 場(Hutchinson, 1968; Rice and Rosengren, 1968)と呼ぶ。すなわち J 積分によるき裂進展評価にはき裂先端に HRR 場が存在していなければならず、これと異なった応力場、変位場がき裂先端に現われる時には J 積分は破壊靱性値としての有効性を失う。そして HRR 場は 2 次元の平面ひずみ条件を仮定して導出されているため、実構造物のき裂を取り巻く力学的環境に平面ひずみ条件が成立していなければならない。すなわち平面ひずみ条件が成立していなければ HRR 場が存在せず J 積分の有効性が失われる。これを拘束効果と呼び破壊靱性値の有効性を問う工学的に重要な問題となっている。HRR 場とは異なった応力場が現れるケースとしてき裂深さ、負荷形式、試験片の板厚などが大きな因子として挙げられる(Sorem, et al., 1991; O'Dowd and Shih, 1991; 菊池, 永井, 1998; 菊池, 高橋, 2001; 菊池, 佐々木, 2003; 菊池, 石原, 2004)。すなわち破壊力学を適用するにはき裂が十分深く、き裂先端から自由表面までのリガメント幅を十分に有し、板厚が十分大きい必要がある。平面ひずみ破壊靱性試験を行う際の試験片寸法については文献に詳細に記されている(日本機械学会, 1981)。

しかし実際に機械構造物に含まれるき裂には浅い表面き裂などが多く、むしろ HRR 場が存在しないき裂であることの方が多い。さらに近年、機械構造物の軽量化、薄肉化によって板厚が小さな材料にき裂が入る事例が多く平面応力状態にある部材が次第に増えてきている。よって平面ひずみ条件を前提とした破壊靱性値による評価を任意のき

裂形状や薄肉の実構造物に適用することには課題がある。さらに破壊力学は初期き裂の存在を前提としているため初期き裂を含まずに構造物の円孔やリブの付け根といった応力集中部から破断に至るような問題には適用できない。よってたとえば原子力压力容器のようにき裂許容設計を考える場合には破壊力学が適用できるが、自動車部品のように初期き裂を含むものは不具合品として廃棄し初期き裂を含まないものを製品として扱うものへの破壊力学の適用は難しい。また破壊力学は本質的にはき裂先端の応力場が破壊時の応力場に等しくなったときにき裂が進展するという考えに基づいて破壊を評価していることを忘れてはいけない。そのため破壊力学では実際に延性破壊を引き起こしているミクロスケールの破壊メカニズムそのもの自体を一切取り扱っていないことにも注意が必要である。

延性破壊を取り扱うもう一つの手法としてその破壊メカニズムである微小ボイドの発生、成長機構をモデル化して材料中に占めるボイドの割合を損傷値として取り扱う手法がある。この主流なモデルとして Gurson によって提案された多孔質材モデルがある (Gurson, 1977)。このモデルでは母材中に空孔を含む材料を複合材として扱い降伏関数を導出しこの降伏関数を用いた流れ則により構成則を定式化している。ボイドの発生はある応力と塑性ひずみで発生量がピークとなる正規分布に従うものとしてモデル化され、ボイドの成長は母材の塑性ひずみ質量保存則に基づいてモデル化されている (Chu and Needleman, 1980)。さらにボイドの合体による急速なボイド率の増加挙動が実験的に測定され (Goods and Brown, 1979; Needleman and Tvergaard, 1984)、これは数理モデルとして導入された (Needleman, 1987; Tvergaard, 1982)。

このモデルは弾塑性破壊力学で問題となっていた拘束効果の解析に用いられた。そして J_{IC} 破壊条件を必要とせずに、試験片寸法や初期き裂長さなどが破壊開始条件にどのように影響するかボイド発達の視点から調べられた。この拘束問題に対応するために Gurson モデルを用いた Local Approach が提案された (Beremin, 1983; Murdy, 1987)。この手法により拘束効果問題として負荷形式の違い (Xia, et al., 1995; Ma FS, 1995) や初期き裂長さの違い (Betegon, et al., 1997) について解析されクラッド材の破壊解析 (Sun, 1996) も行われている。この結果、拘束条件に対する破壊靱性値の変化が定性的に表現できていることを確認している。また Gurson モデルを用いた大規模 3 次元モデルによる計算を行い平面ひずみ条件が満たされない板厚表面近傍で生じるシャリップ破壊領域のシミュレーションが行われた。ここでは Mode I 型貫通き裂について巨視的、微視的な実験観測により解析結果との詳細な比較が行われシャリップ破壊領域も含む延性破壊領域が Gurson モデルで表現可能であることが示された (菊池, 山王丸, 2007)。

これらの研究により拘束効果の問題はボイドといった微視的損傷メカニズムのモデル化により解決できることが分かった。さらにボイド発生機構に主に用いられている相当塑性ひずみ支配モデルに加えて静水圧を考慮したモデルを併用することによって Mode I と Mode II の混合モード問題のき裂進展も良く表現できることが分かった (菊池,

山王丸, 2008). このように Gurson モデルは延性破壊のシミュレーション手法として非常に有効なモデルであることが分かってきており, その実用性の高さから ABAQUS などの商用ソフトウェアにも積極的に導入されている.

しかし極低サイクル疲労のように繰り返し負荷を与えるとき, Gurson モデルではボイド体積率は増加するが, 逆に圧縮状態では損傷が回復してしまうため引張, 圧縮の両振り繰り返し負荷のもとではいつまで負荷を繰り返しても破断しないことがある. しかし実際に実験では極低サイクル疲労破壊が生じる. このように繰り返し負荷をかける実験で観測されるような連続的な損傷進展を予測できないことも分かっている(de Souza Neto, et al., 1998). 彼らの研究では繰り返し負荷の影響が重要なケースでの損傷予測には Gurson モデルは適さないと主張されている (de Souza, et al., 2008).

一方, Gurson モデルとは別の損傷モデルとして連続体損傷力学によるものがある. 連続体損傷力学の基礎概念は脆性的なクリープ破断時間を算定する目的から提案された(Kachanov, 1958). その後, Rabotnov(Rabotnov,1969)によって損傷過程で生じるボイドやマイクロクラックといった材料損傷によって内力を支持できる有効断面積低下率で損傷変数が定義された. この段階では損傷発展に多軸度の影響などの考慮はされておらず簡易的なものでありその妥当性には限界があることが指摘された(Lin, et al., 2005). まずは損傷によって巨視的な剛性低下が引き起こされるとして弾性係数の変化によっても損傷状態がモデル化できるとした(Lemaitre and Chaboche, 1978; Lemaitre, 1992). ここが Gurson モデルに対して連続体損傷力学モデルの利点の 1 つであり, 破断に至らなくても弾塑性変形の過程で生じる弾性係数の低下を表現できる. 弾性係数の低下は機械部品が負荷を受けた時の部品の組付性や異音発生, 性能低下を引き起こすため連続体損傷力学における弾性係数変化のモデル化は工学的にも重要な役割を持つ.

さらに連続体損傷力学は異方損傷状態への拡張(Kachanov, 1974; Kachanov, 1986; Davison and Stevens, 1973; Krajcinovic, 1983; Murakami and Ohno 1981; Murakami 1988)が試みられ, これによりコンクリート材といった特に損傷の異方性が強く表れる材料への応用も可能となった(Ju, 1989; Lubarda, et al., 1994; Murakami and Kamiya, 1997). 同時に損傷発展という不可逆過程に対して Clausius-Duhem の不等式を用いた熱力学的アプローチが試みられエネルギー散逸の視点から損傷発展則が系統的に定式化された(Perzyna, 1971; Rice, 1971; Rice, 1975; Lemaitre and Chaboche, 1990; Maugin, 1992). この時にボイドの成長の寄与因子として実験的に知られていた応力三軸度と損傷発展則との関連がその一般化力である損傷エネルギー解放率を介して定式化された(Lemaitre, 1985).

この基礎的な損傷発展則を土台として以後はさらなるモデルの精密化が行われてきた. まず非線形等方硬化則へと発展し(Lemaitre, 1992), さらに移動硬化則を考慮した複合硬化則への発展し Bauschinger 効果も表現可能なモデルとなった (Lemaitre, 1992; Lemaitre and Desmorat, 2005). また粘塑性体への構成則(Lemaitre and Chaboche, 1990)やき

裂閉口効果(Ladeveze and Lemaitre, 1984)についてもモデル化されより実現象に近いモデルへと進化してきた。

また近年、コンピュータの進化から計算資源も豊かになり数値シミュレーションによる工学的な問題の数値解析が行われるようになる。銅とアルミニウムの平板のクリープき裂解析が Hayhurst らによっではじめて提案された(Hayhurst, et al., 1975)。この時に連続体損傷力学による損傷モデルが広範囲の破壊問題に対する系統的な解析法として優れた可能性を持ち、以後数多くの破壊問題の解析に適用された。例として圧力容器 T ジョイント溶接部の弾塑性破壊(Jubran and Cofer 1991)、地震によるコンクリートダムの損傷(Ghrib and Tinawi, 1995)、円周切欠き円筒の破損起点の予測(Dufailly and Lemaitre, 1995)、高温高圧配管溶接部の損傷解析(Hayhurst, 2001)また塑性加工問題への応用として押し出しダイスの損傷解析(Pedersen, 2000)、据え込加工や打ち抜き加工(Saanouni, et al., 2000)などが挙げられ連続体損傷力学の実用性が示されてきた。

以上の歴史を踏まえて本研究でも極低サイクル疲労破壊を表現するための損傷モデルとして連続体損傷力学を採用する。本研究では連続体損傷モデルのさらなる工学的実用性を考えたモデルへの発展およびその効率的な数値解法のアルゴリズムについて追究してゆく。

1.3 弾塑性シミュレーションの積分法に対する従来の研究

ここでは有限要素法による離散化による弾塑性シミュレーションの解法に関する過去の研究について述べる。弾塑性材料のように材料挙動が負荷経路に依存する材料に対して各物理量を更新するには、その速度形式の構成方程式に対して数値的に時間積分を行うアルゴリズムを定式化が必要となる。なぜならば弾塑性構成則に対する初期値問題は非比例負荷のように複雑な負荷経路に対して解析解が求められないためである。この数値的な時間積分を行う際に重要な点は有限要素解析全体の精度が用いている数値積分アルゴリズムの精度に強く依存することである。

不可逆変形である弾塑性変形に対する各物理量は速度形発展則である流れ則によって記述される。これは無限小増分を仮定した数学的な記述であるが、数値計算に反映させる際には有限増分として離散化して取り扱う必要がある。このとき最も定式化が容易な離散化手法は前進形 Euler 法で陽的に解くものである。なぜなら降伏関数の適合条件と各流れ則を組み合わせるだけで塑性乗数が陽的に得られ各物理量も陽的に得られるためである(Marcial, 1965; Marcal, 1971; 山田, 1980; Yamada, 1968)。しかし前進形 Euler 法では応力やひずみが有限増分として計算されることに対して、その接線剛性が数学的に無限小増分として扱う速度形のものと同じになってしまう。このため増分量を大きくとると力学的なつり合い状態を得るための残差力収束性が極めて悪くなり計算が発散

してしまう問題がある。そのため他の離散化手法に対して極めて小さな時間増分量が必要となり計算時間が膨大となってしまう。

そこで次の計算ステップで降伏条件を満たし、各流れ則を後退形 Euler 法で離散化した完全陰解法が開発された(Krieg, 1997; Schreyer, et al., 1979; Simo and Taylor, 1986)。この時、塑性乗数や次のステップの各物理量を解く方程式は陰的な方程式となり応力積分を実施する段階で Newton-Raphson 法などを用いた数値的な反復計算が必要となる。この積分計算が数式上、あたかも一度弾性変形を仮定して応力を予測した後に降伏曲面に引き戻す修正を行っているように見えるため Elastic predictor/Return mapping 法と呼ばれることもある。後退形 Euler 法では応力積分で反復計算が必要となり一見すると陽解法よりも数値計算箇所が多くなっているように感じるが、完全陰解法における接線剛性は陽解法のように無限小増分を仮定した接線剛性と同一にはならず塑性乗数の数値的な有限増分量に応じた値となる。このため完全陰解法では接線剛性が増分量に応じた自動修正機能を持ち比較的大きな時間増分を採用しても計算が安定する利点がある。この接線剛性は Consistent 接線剛性と呼ばれている。この Consistent 接線剛性に加えて応力積分経路を前の時間ステップの釣合い状態からの総和として正しく経路とすることで Newton-Raphson 法特有の2次収束が得られることが知られている(Simo and Taylor, 1985)。このことから前進形 Euler 法に対して後退形 Euler 法の方が非線形の剛性方程式を Newton-Raphson 法により線形化した大規模連立方程式を解く回数が圧倒的に少なくなり計算時間と収束性の面で大きな優位性を持つ。

またその他の積分法として応力積分を行う際の Newton-Raphson 法の収束半径を広げるために Line-Searches の手続きを組み込む方法も提案された(Dutko, et al., 1993)。またひずみ増分をいくつかのサブステップに分割して積分を行うサブステップ法(Huerta, et al., 1999)が提案されたが Newton-Raphson 法の収束が十分得られるように各ひずみ増分を小さく設定しなければならない課題がある。また弾塑性問題に対する積分法について弾塑性構成則の初期値問題における全ひずみ速度の加算分解を利用して計算するアルゴリズムが導出された(Simo and Hughes, 1987; Chorin, et al., 1978)。また後退 Euler 差分以外の離散化として、台形則や中点則を採用する事で導出したもの(Ortiz and Popov, 1985; Simo and Ortiz, 1985)や Cutting-plane アルゴリズムに基づく手法も提案された。Cutting-plane の反復アルゴリズムは陽的な解析コードの場合は釣合い方程式を解く必要がないため利点がある。しかし力学的釣り合い状態を満たそうとすると増分形式の応力ひずみ関係に対する Consistent 接線剛性とそぐわないという特徴があり、その結果として釣り合い方程式に対する Newton-Raphson 法の2次収束性が得られないという欠点を有する。また弾塑性モデルのポテンシャルと凸解析の考え方を適用し数理計画法に基づくアルゴリズムも提案されたが(Maier, 1970; Martin, et al., 1987; Feijoo and Zouain, 1988; Zouain, et al., 1988; Caddemi and Martin, 1991; Reddy and Martin, 1991)、後退形 Euler 法と比較して計算効率において優位性とはいえない(Souza Neto, et al., 2008)。

結局のところ応力積分における計算速度や安定性また釣合いを取るための残差力の収束性を考えると後退形 Euler 法による積分法が優れていると考える。ただし弾塑性モデルが複雑になるほど後退形 Euler 法は前進形 Euler 法や Cutting plane 法に対してその導出過程が非常に煩雑になる課題がある。同時に後退形 Euler 法と厳密に整合した Consistent 接線剛性の導出も陽的なものに対して非常に煩雑となる課題もある。

1.4 本研究の位置づけ

以上に挙げた背景を踏まえて本研究では 1 回負荷の延性破壊から極低サイクル疲労破壊のシミュレーションに以下の 4 つの要件が必要であると考えた。

要件① 分割背応力モデルを考慮した複合硬化則の弾塑性モデル

要件② 連続体損傷力学による損傷モデル

要件③ ①と②を連成したモデルの後退形 Euler 法による応力積分およびそれに厳密に整合した Consistent 接線剛性の導出

要件④ 要素積分点毎に破壊判定を与えたき裂発生、き裂進展の表現

要件①で分割背応力を用いる理由としては複数の非線形移動硬化モデルを組み合わせることにより複雑な背応力発展挙動を記述でき、線形移動硬化則や単純な非線形硬化則と比べて実験データとフィッティングしやすいという実用性があることが挙げられる。1 回の除荷過程で済む塑性加工のスプリングバック解析などは線形移動硬化則でも実用上問題ないが、極低サイクル疲労破壊のように何度も負荷を繰り返す場合はより多くのサイクル数に渡って実験で観測される非線形硬化特性を追従できる基礎モデルとして分割背応力モデルが有効であると考えたためである。また分割背応力モデルを用いる別の理由は ADVENTUREcluster や ABAQUS などの商用ソフトに組み込まれているモデルであり材料データベースが蓄積されていると考えられ工学的実用性があると考えたためである。②で連続体損傷力学を用いる理由は Gurson モデルなどでは表現できない損傷に伴う巨視的弾性係数の低下挙動を表現できるという利点と大負荷の繰り返し負荷に対する損傷を表現できる実績があるためである。また前節で述べたように大きな時間増分を取ったときに優れた計算速度や収束性を得るには要件③が必須である。さらに要件④を付加することでき裂発生からき裂進展に至るまで本モデルの妥当性を実験データと詳細に比較検証することができる。

従来の研究を見ても要件①から要件④までのうち要件①②③を兼ね備えたモデルですら存在しない(Hayakawa, et al., 2010; Sawyer, et al., 2001; Doghri, 1995)。特に複雑な弾塑性モデルと損傷モデルとの連成モデルといったようにモデルが複雑になるほど陽解法

に基づく積分法が多いようである。本研究では第3章で述べるように後退形 Euler 法積分を発展させより実用性の高い縮約積分法による定式化も行い計算速度の向上も試みた。要件④について実験では巨視的き裂の発生やき裂進展挙動は比較的容易に観察することができるため、要件④を取り入れる事はき裂発生からき裂進展まで扱えるモデルへの拡張は損傷モデルの妥当性を検証するために非常に有効な手段となる。さらに要件④を取り入れることによって塑性加工時の割れなど工学的な実用性も向上する。

本研究では要件①から要件④を全て考慮したモデルの定式化を行い、1回負荷による延性破壊から極低サイクル疲労破壊のシミュレーションを実施し実験結果との詳細な比較検証を行う。

1.5 本論文の構成

本論文では第2章で延性破壊という大きな弾塑性変形をシミュレーションするために必要な基礎理論について述べる。すなわち本研究では空間の離散化に有限要素法、動的な問題を扱う時の時間の離散化に Newmark- β 法を用いているためその基礎理論の概要を記した。また計算速度を向上させるために導入した計算並列化に関する基礎理論も記した。さらに第2章では第3章で提案する損傷弾塑性モデルを理解するために必要不可欠な背景知識として等方硬化非損傷モデルを用いた積分法について詳細に説明する。また残差の力計算収束性向上のために導入した試行増分計算についても触れる。

第3章では前節で述べたまず要件①と要件②に該当する分割背応力モデルと連続体損傷力学の基礎知識に触れる。その後、本研究で提案するこの2つのモデルを連成したモデルについて説明し、要件③の後退形 Euler 積分の定式化を行ってゆく。また計算速度の向上に向けた縮約積分法への改良について触れる。また焼結材など静水圧が弾塑性変形に大きな影響を及ぼす材料へ拡張するために静水圧依存型の分割背応力型損傷モデルへの改良もその定式化と共に説明する。さらに引張負荷下と圧縮負荷下での損傷の違いを表現するための Unilateral 効果のモデルも追加しより実現象に近いモデルへと拡張している。

分割背応力型弾塑性モデルと損傷モデルを連成したことで同定すべき材料定数は増える。そこでこれらの材料定数を半自動的に同定するための材料同定システムについて本研究で提案するものを第4章で触れる。ここでは単軸負荷試験の実験結果とフィットするように材料定数を逐次変えながら幾度も数値計算を行って行く。その際に計算時間を大幅に削減するために単軸負荷条件下に特化した簡易応力積分法について述べる。

第5章ではこれまでに記述した損傷弾塑性モデルを有限要素法に組み込み数値計算を実施する。既存の研究では損傷力学を用いた損傷モデルでき裂進展までも考慮した挙動についてまだ多くの未知な部分があるため、まずはその基礎的問題として Mode I 貫

通き裂を用いた3次元解析を行った。これにより基礎的な延性破壊として知られるシャリップ破壊を含めた破壊領域が連続体損傷力学を用いて表現できるかどうかを実験結果と詳細に比較しながら明らかにした。またき裂進展時のJ積分も計算し連続体損傷力学から計算した破壊靱性値が妥当なものか調べた。さらにMode IとMode IIの混合モードき裂についても取扱い実験結果との比較から連続体損傷力学によるモデルの妥当性を調べた。この結果を踏まえて工学的重要性の高い段違いき裂についても計算し実験結果との定性的な考察を行った。また塑性加工問題、動的破壊問題、極低サイクル疲労破壊問題といった多種の破壊問題についても本モデルでシミュレーションを実施しその定性的妥当性について検証した。

第 2 章 数値解析の原理

2.1 有限要素法

本研究では空間の離散化に有限要素法(鷺津, 他, 1981; 鷺津, 他, 1983)を用いた. 構造体における力学的な釣り合い方程式は Cauchy 応力 $\boldsymbol{\sigma}$ と体積力 \mathbf{F}_B を用いて式(2.1.1)で示される.

$$\operatorname{div} \boldsymbol{\sigma} + \mathbf{F}_B = 0 \quad (2.1.1)$$

この釣り合い方程式に重み関数 θ を掛け領域全体 V で積分すると式(2.1.2)が得られる.

$$\int_V \theta \cdot (\operatorname{div} \boldsymbol{\sigma} + \mathbf{F}_B) dV = 0 \quad (2.1.2)$$

さらにこの式に Gauss-Green の定理を適用する事で仮想仕事の原理と等価である弱形式を導出することができる. ただし \mathbf{n} は領域表面の外側に向く単位法線ベクトルを示し ∂V は領域表面である.

$$\int_V \boldsymbol{\sigma} : \frac{\partial \theta}{\partial \mathbf{x}} dV = \int_{\partial V} (\boldsymbol{\sigma} \mathbf{n}) \cdot \theta dS + \int_V \mathbf{F}_B \cdot \theta dV \quad (2.1.3)$$

これを M^e 個の要素の和で離散化すると次式を得る. すなわち図 2.1.1, 図 2.1.2 のように連続体の領域を有限個の要素で近似的に表現して離散化している.

$$\sum_{k^e}^{M^e} \left(\int_{V_{k^e}} \boldsymbol{\sigma} : \frac{\partial \theta}{\partial \mathbf{x}} dV \right) = \sum_{k^e}^{M^e} \left(\int_{\partial V_{k^e}} (\boldsymbol{\sigma} \mathbf{n}) \cdot \theta dS \right) + \sum_{k^e}^{M^e} \left(\int_{V_{k^e}} \mathbf{F}_B \cdot \theta dV \right) \quad (2.1.4)$$

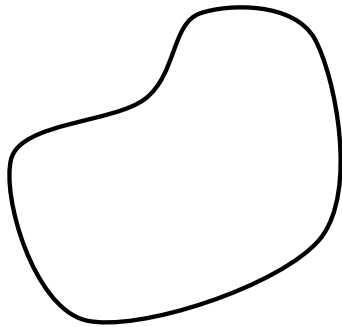


Fig. 2.1.1 Continuum

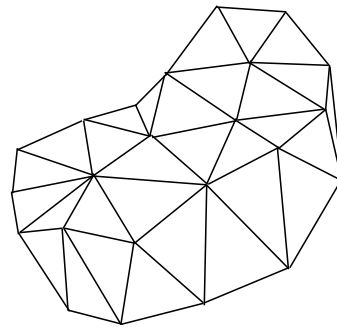


Fig. 2.1.2 Discretization of space by elements

変位法に基づく有限要素法では形状関数 N^e を用いて要素内の変位 $\{\mathbf{u}\}$ を節点変位 $\{\mathbf{u}^e\}$ から次のように内挿する.

$$\left. \begin{aligned} \{\mathbf{u}\} &= [N^e] \{\mathbf{u}^e\} \\ \{\mathbf{u}\} &\equiv \begin{Bmatrix} u_x \\ u_y \\ u_z \end{Bmatrix} \end{aligned} \right\} \quad (2.1.5)$$

形状関数 $[N]$ の節点 α に関する成分 $[N_\alpha]$ および節点変位ベクトルの節点 α に関する成分 $\{\mathbf{u}_\alpha^e\}$ を記述すると式(2.1.6)となる.

$$[N_\alpha] \equiv \begin{bmatrix} N_\alpha & 0 & 0 \\ 0 & N_\alpha & 0 \\ 0 & 0 & N_\alpha \end{bmatrix}, \quad \{\mathbf{u}_\alpha^e\} \equiv \begin{Bmatrix} u_{x\alpha} \\ u_{y\alpha} \\ u_{z\alpha} \end{Bmatrix} \quad (2.1.6)$$

またひずみ $\boldsymbol{\varepsilon}$ と変位関係である式(2.1.7)を用いる事で節点変位と要素内変位の関係が式(2.1.8)のように $[B]$ マトリックスを用いて記述される. $[B_\alpha]$ は $[B]$ のうち節点 α に関する成分を示している.

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon_x &\equiv \frac{\partial u_x}{\partial x}, \varepsilon_y \equiv \frac{\partial u_y}{\partial x}, \varepsilon_z \equiv \frac{\partial u_z}{\partial x} \\ \gamma_{xy} &\equiv \frac{\partial u_x}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial x}, \gamma_{yz} \equiv \frac{\partial u_y}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial y}, \gamma_{zx} \equiv \frac{\partial u_z}{\partial x} + \frac{\partial u_x}{\partial z} \end{aligned} \right\} \quad (2.1.7)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \varepsilon_z \\ \gamma_{xy} \\ \gamma_{yz} \\ \gamma_{zx} \end{array} \right\} = [B] \{\mathbf{u}^e\}, \quad [B_\alpha] = \begin{bmatrix} \frac{\partial N_\alpha^e}{\partial x} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\partial N_\alpha^e}{\partial y} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\partial N_\alpha^e}{\partial z} \\ \frac{\partial N_\alpha^e}{\partial y} & \frac{\partial N_\alpha^e}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial N_\alpha^e}{\partial z} & \frac{\partial N_\alpha^e}{\partial y} \\ \frac{\partial N_\alpha^e}{\partial x} & 0 & \frac{\partial N_\alpha^e}{\partial z} \end{bmatrix} \quad (2.1.8)$$

本研究では Galerkin 法に基づく有限要素法を用いている. この時, 重み関数の要素内分布 $\{\boldsymbol{\theta}\}$ は要素内変位と同じ形で与えられる. すなわち節点における任意定数 $\{\boldsymbol{\theta}^e\}$ を介して

$$\{\boldsymbol{\theta}\} = [N^e] \{\boldsymbol{\theta}^e\} \quad (2.1.9)$$

と表現される. これらを弱形式である式(2.1.3)に代入して整理する事で式(2.1.9)に示す剛性方程式が得られる.

$$\sum_{k^e}^{M^e} \left(\int_{V_{k^e}} [B_a]^T [D] [B_a] dV \right) \{u^e\} = \sum_{k^e}^{M^e} \left(\int_{\partial V_{k^e}} [N]^T \{t\} dS \right) + \sum_{k^e}^{M^e} \left(\int_{V_{k^e}} [N]^T \{F_B\} dV \right) \quad (2.1.10)$$

ただし $[D]$ は材料剛性, $\{t\}$ は Cauchy の式により式変形された表面力を示す.

2.2 有限変形理論

本研究で取り扱う問題は1回の負荷による破壊もしくは極低サイクル疲労の破壊であるため, 大きな弾塑性変形を伴い微小変形で取り扱うには無理がある. そこで有限変形理論の導入を行う. 以下, 有限変形理論(Crisfield, 1991; Kleiber, 1991; 久田, 1992) について説明する.

時刻 $t=0$ において, 位置ベクトル \mathbf{X} が図2.2.1 のようにある. これが時刻 t において, 関数 $\boldsymbol{\varphi}$ により, 位置ベクトル \mathbf{X} が \mathbf{x} に移動した運動 $\boldsymbol{\varphi}$ を考える. このとき \mathbf{X} と \mathbf{x} の関係は以下の式であらわされる.

$$\mathbf{x} = \boldsymbol{\varphi}(\mathbf{X}, t) \quad (2.2.1)$$

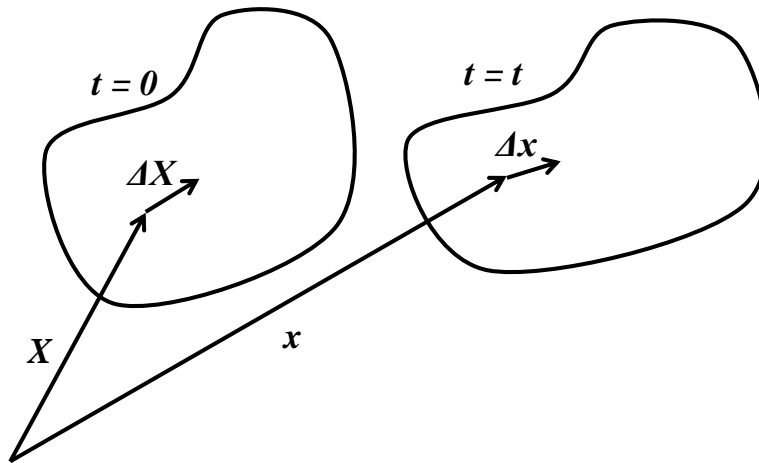


Fig. 2.2.1 Deformation

この時, 任意の時刻 t において常に物質点 \mathbf{X} とその位置 \mathbf{x} の対応は一対一であるとする. よって $\boldsymbol{\varphi}$ はベクトルを異なるベクトルへ写像することを意味する. また関数 $\boldsymbol{\varphi}$ はすべての物質点の動きを表しているという意味で, 連続体の運動を完全に記述する. 運動 $\boldsymbol{\varphi}(\mathbf{X}, t)$ が定めれば, 各物質点の移動量を知ることができる. よって, 基準配置からの移動量が分かる, すなわち変位ベクトル \mathbf{u} が以下のように記述できる.

$$\mathbf{u}(\mathbf{X}, t) = \mathbf{x}(\mathbf{X}, t) - \mathbf{X} = \boldsymbol{\varphi}(\mathbf{X}, t) - \mathbf{X} \quad (2.2.2)$$

変位ベクトルは物質点の移動の様子を表すが、それらベクトル場だけでは、連続体の変形の様子は分からない。したがって、変形については、各物質点の移動そのものではなく、隣り合う物質点の移動の仕方の違いが関係する。そこで、図2.2.1のように、物質点 \mathbf{X} とその近傍の物質点 $\mathbf{X} + \Delta\mathbf{X}$ がどのように移動するかを調べる。

時刻0 から現在時刻 t までの間に、これら二つの物質点 \mathbf{X} , $\mathbf{X} + \Delta\mathbf{X}$ は、現在配置 V_t における $\mathbf{x} = \boldsymbol{\varphi}(\mathbf{X}, t)$, $\mathbf{x} + \Delta\mathbf{x} = \boldsymbol{\varphi}(\mathbf{X} + \Delta\mathbf{X}, t)$ の位置へ移動する。このとき現在配置 V_t における位置の差 $\Delta\mathbf{x}$ は、運動 $\boldsymbol{\varphi}(\mathbf{X} + \Delta\mathbf{X}, t)$ のテイラー展開によって、

$$\begin{aligned} \Delta\mathbf{x} &= \boldsymbol{\varphi}(\mathbf{X} + \Delta\mathbf{X}, t) - \boldsymbol{\varphi}(\mathbf{X}, t) \\ &= \frac{\partial \boldsymbol{\varphi}(\mathbf{X}, t)}{\partial \mathbf{X}} \Delta\mathbf{X} + O(\|\Delta\mathbf{X}\|^2) \end{aligned} \quad (2.2.3)$$

と与えられる。 O は二次以降の誤差である。式(2.2.3)で二次以降の項を無視すると以下の式を得られる。

$$\begin{aligned} d\mathbf{x} &= \frac{\partial \boldsymbol{\varphi}(\mathbf{X}, t)}{\partial \mathbf{X}} d\mathbf{X} \\ &= \mathbf{F}(\mathbf{X}, t) d\mathbf{X} \end{aligned} \quad (2.2.4)$$

ここで、変形勾配を次のように定義する。

$$\mathbf{F}(\mathbf{X}, t) \equiv \frac{\partial \boldsymbol{\varphi}(\mathbf{X}, t)}{\partial \mathbf{X}} = \frac{d\mathbf{x}}{d\mathbf{X}} \quad (2.2.5)$$

式(2.2.4)は、物質点 \mathbf{X} は近傍の微分ベクトル $d\mathbf{X}$ が連続体の運動にともなって微分ベクトル $d\mathbf{x}$ に変換されることを意味する。この変換の仕方は \mathbf{X} 近傍における物質点の移動の仕方の違い、すなわち \mathbf{X} 近傍の変形の様子を直接反映している。そしてそれを特徴付けているのは変換作用素である二階テンソル \mathbf{F} であり、これを物質点 \mathbf{X} 近傍の変形の様子を定量的に表す指標として採用する。この \mathbf{F} を変形勾配テンソルと呼ぶ。

次に変形の数値に関する量について説明する。変形勾配テンソル \mathbf{F} を物質時間微分すると、

$$\dot{\mathbf{F}} = \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial \boldsymbol{\varphi}(\mathbf{X}, t)}{\partial \mathbf{X}} \right) = \frac{\partial}{\partial \mathbf{X}} \left(\frac{\partial \boldsymbol{\varphi}(\mathbf{X}, t)}{\partial t} \right) \quad (2.2.6)$$

となる。速度ベクトル \mathbf{v} を導入すると式(2.2.6)は、

$$\dot{\mathbf{F}} = \frac{\partial}{\partial \mathbf{X}} \left(\frac{\partial \boldsymbol{\varphi}(\mathbf{X}, t)}{\partial t} \right) = \frac{\partial \mathbf{v}(\mathbf{x}, t)}{\partial \mathbf{X}} \quad (2.2.7)$$

と表せる。ここで変形勾配の物質時間微分は現在配置 V_t における速度ベクトル場 \mathbf{v} の物質座標 \mathbf{X} に関する勾配である。これを右から \mathbf{F}^{-1} を作用させると、次に示すように物質座標 \mathbf{X} に関する偏微分が空間座標 \mathbf{x} に関する偏微分が変わる。

$$\dot{\mathbf{F}}\mathbf{F}^{-1} = \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial \mathbf{X}} \left(\frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \mathbf{X}} \right)^{-1} = \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial \mathbf{X}} \frac{\partial \mathbf{X}}{\partial \mathbf{x}} = \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial \mathbf{x}} \quad (2.2.8)$$

こうして得られる速度ベクトル場の空間座標に関する勾配を

$$\mathbf{l} \equiv \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial \mathbf{x}} = \dot{\mathbf{F}}\mathbf{F}^{-1} \quad (2.2.9)$$

と表して速度勾配テンソルという。ある時刻 t の現在配置 V_t における瞬間の速度ベクトルを $\mathbf{v}(\mathbf{x})$ とすれば、その全微分を与える式は、

$$d\mathbf{v} = \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial \mathbf{x}} d\mathbf{x} = \mathbf{l}d\mathbf{x} \quad (2.2.10)$$

であるから、速度勾配テンソル \mathbf{l} は点 \mathbf{x} 近傍において微分ベクトル $d\mathbf{x}$ を速度の微分ベクトル $d\mathbf{v}$ に変換する二階テンソルである。速度勾配テンソルを対称部分と反対称部分に直交分解すると、

$$\mathbf{l} = \mathbf{d} + \mathbf{w} \quad (2.2.11)$$

$$\mathbf{d} \equiv \frac{1}{2}(\mathbf{l} + \mathbf{l}^T) \quad (2.2.12)$$

$$\mathbf{w} \equiv \frac{1}{2}(\mathbf{l} - \mathbf{l}^T) \quad (2.2.13)$$

となる。この対称部 \mathbf{d} を変形速度テンソル、反対称部 \mathbf{w} をスピンテンソルと呼ぶ。変形速度テンソル \mathbf{d} とスピンテンソル \mathbf{w} の幾何学的意味については、次のような解釈もできる。 \mathbf{d} と \mathbf{w} を次のように \mathbf{F} の極分解を用いて表す。

$$\begin{aligned} \mathbf{d} &\equiv \frac{1}{2}\mathbf{R}(\dot{\mathbf{U}}\mathbf{U}^{-1} + \mathbf{U}^{-1}\dot{\mathbf{U}})\mathbf{R}^T \\ &= \frac{1}{2}(\dot{\mathbf{V}}\mathbf{V}^{-1} + \mathbf{V}^{-1}\dot{\mathbf{V}} + \mathbf{V}\dot{\mathbf{R}}\mathbf{R}^T\mathbf{V}^{-1} - \mathbf{V}^{-1}\dot{\mathbf{R}}\mathbf{R}^T\mathbf{V}) \end{aligned} \quad (2.2.14)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{w} &\equiv \frac{1}{2}\dot{\mathbf{R}}\mathbf{R}^T + \frac{1}{2}\mathbf{R}(\dot{\mathbf{U}}\mathbf{U}^{-1} + \mathbf{U}^{-1}\dot{\mathbf{U}})\mathbf{R}^T \\ &= \frac{1}{2}(\dot{\mathbf{V}}\mathbf{V}^{-1} - \mathbf{V}^{-1}\dot{\mathbf{V}} + \mathbf{V}\dot{\mathbf{R}}\mathbf{R}^T\mathbf{V}^{-1} + \mathbf{V}^{-1}\dot{\mathbf{R}}\mathbf{R}^T\mathbf{V}) \end{aligned} \quad (2.2.15)$$

ただし、 $\mathbf{R}, \mathbf{U}, \mathbf{V}$ は変形勾配 \mathbf{F} を極分解した時の直行テンソル、右ストレッチ、左ストレッチを示す。そして、現在配置 V_t を基準とした相対的な運動・変形を考える。それには V_t を基準配置として $\mathbf{x}=\mathbf{X}$ とおけばよい。すると $\mathbf{F}=\mathbf{R}=\mathbf{U}=\mathbf{V}=\mathbf{I}$ より \mathbf{d} と \mathbf{w} はそれぞれ

$$\mathbf{d} = \dot{\mathbf{U}} = \dot{\mathbf{V}}, \quad \mathbf{w} = \dot{\mathbf{R}} \quad (2.2.16)$$

となる。すなわち現在配置 V_t を基準として V_t からのさらなる変形におけるストレッチテ

ソルの時間変化率が \mathbf{d} , 回転の時間変化率が \mathbf{w} である.

次に基準は位置と現在配置を区別した有限変形における仮想仕事式について示す. 仮想変位を $\delta\mathbf{u}$ としたとき, 仮想仕事の原理は

$$\int_{V_t} \boldsymbol{\sigma} : \delta\boldsymbol{\varepsilon} dV_t = \int_{\partial V_t} \mathbf{t} \cdot \delta\mathbf{u} dS_t + \int_{V_t} \mathbf{F}_B \cdot \delta\mathbf{u} dV_t \quad (2.2.17)$$

となる. 式の第一項が内部仮想仕事を表し, 第二・三項が外部仮想仕事を表す. この仮想仕事式では, 内部仮想仕事を与える体積積分の被積分項には, 現在配置の単位体積当たりの仕事として, $\boldsymbol{\sigma}$ と $\delta\boldsymbol{\varepsilon}$ の内積が表せている. それは, それらの内積が外力仕事に等しくなるという意味で, $\boldsymbol{\sigma}$ と $\boldsymbol{\varepsilon}$ が正しく仕事を与える力の変数と運動学的変数の組み合わせであることを示している. この $\boldsymbol{\sigma}$ と $\boldsymbol{\varepsilon}$ のように, 内積が正しく単位体積当たりの仕事を与える応力テンソルとひずみテンソルを, 互いに仕事に関して共役であるという. また, 仮想仕事式(2.2.17)は, 変位ベクトルを速度ベクトルに代えて,

$$\int_{V_t} \boldsymbol{\sigma} : \delta\mathbf{d} dV_t = \int_{\partial V_t} \mathbf{t} \cdot \delta\mathbf{v} dS_t + \int_{V_t} \mathbf{F}_B \cdot \delta\mathbf{v} dV_t \quad (2.2.18)$$

の形で成立する. この式の意味することは, 内部仕事率と外部仕事率に等しいという意味で, $\boldsymbol{\sigma}$ と \mathbf{d} は仕事率に関して共役である. 仮想仕事式(2.2.18)を $\mathbf{x}=\boldsymbol{\varphi}(\mathbf{X}, t)$ の関係を用いて, 空間座標 \mathbf{x} から物質座標 \mathbf{X} に変換すると, すべての関数は物質表示され空間定義域は基準配置 V_0 となり, 基準配置 V_0 を参照した積分の式として表される.

積分変数を \mathbf{x} から \mathbf{X} に変換すると, 体積の微分と面積の微分はそれぞれ,

$$ds = \frac{J}{\sqrt{\mathbf{n} \cdot \mathbf{b}\mathbf{n}}} dS \quad (2.2.19)$$

と変わる. したがって, 外部仮想仕事, すなわち式(2.2.17)の第二項・第三項が次のように表される.

$$\int_{\partial V_t} \mathbf{t}_t \cdot \delta\mathbf{u} dS_t + \int_{V_t} \mathbf{F}_B \cdot \delta\mathbf{u} dV_t = \int_{\partial V_0} \mathbf{t}_0 \cdot \delta\mathbf{u} dS_0 + \int_{V_0} \mathbf{F}_B \cdot \delta\mathbf{u} dV_0 \quad (2.2.20)$$

ただし,

$$\left. \begin{aligned} \rho_0 &= \det \mathbf{F} \rho \\ \mathbf{t}_0 &= \frac{J}{\sqrt{\mathbf{n} \cdot \mathbf{b}\mathbf{n}}} \mathbf{t}_t \end{aligned} \right\} \quad (2.2.21)$$

このように密度と表面力ベクトル \mathbf{t}_t は基準配置 V_0 における単位体積および単位面積あたりに換算した量となる. また \mathbf{t}_0 と \mathbf{t}_t は面積比を比例係数とする互いに平行なベクトルである. 一方, 内部仮想仕事は変数変換によって次のようになる.

$$\int_{V_t} \boldsymbol{\sigma} : \delta\boldsymbol{\varepsilon} dV_t = \int_{V_0} (\det \mathbf{F}) \boldsymbol{\sigma} : \delta\boldsymbol{\varepsilon} dV_0 \quad (2.2.22)$$

したがって, 仮想仕事式(2.2.17)は次のように基準配置 V_0 を積分領域とする式に書き換えられる.

$$\int_{V_0} (\det \mathbf{F}) \boldsymbol{\sigma} : \delta \boldsymbol{\varepsilon} dV_0 = \int_{\partial V_0} \mathbf{t}_0 \cdot \delta \mathbf{u} dS_0 + \int_{V_t} \mathbf{F}_B \cdot \delta \mathbf{u} dV_0 \quad (2.2.23)$$

この仮想仕事式は、基準配置 V_0 の単位体積当たりの内部仮想仕事が内積 $(\det \mathbf{F}) \boldsymbol{\sigma} : \delta \boldsymbol{\varepsilon}$ によって与えられることを示している。すなわち $(\det \mathbf{F}) \boldsymbol{\sigma}$ と $\boldsymbol{\varepsilon}$ は基準配置 V_0 を参照する仕事に関して互いに共役である。この応力テンソル $\mathbf{J}\boldsymbol{\sigma}$ のことを

$$\boldsymbol{\tau} = \mathbf{J}\boldsymbol{\sigma} \quad (2.2.24)$$

と表して Kirchhoff 応力テンソルと呼ぶ。

次に、式(2.2.23)の内部仮想仕事の運動学的変数を、微小ひずみテンソル $\boldsymbol{\varepsilon}$ から変形勾配テンソル \mathbf{F} に書きかえる。まず、Cauchy 応力テンソルの対称性から、対称テンソルと反対称テンソルの内積はゼロになることから次式が成り立つ。

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\tau} : d\boldsymbol{\varepsilon} &= (\det \mathbf{F}) \boldsymbol{\sigma} : \delta \boldsymbol{\varepsilon} \\ &= (\det \mathbf{F}) \boldsymbol{\sigma} : \frac{1}{2} \left(\frac{\partial(\delta \mathbf{u})}{\partial \mathbf{x}} + \left(\frac{\partial(\delta \mathbf{u})}{\partial \mathbf{x}} \right)^T \right) \\ &= (\det \mathbf{F}) \boldsymbol{\sigma} : \frac{\partial(\delta \mathbf{u})}{\partial \mathbf{x}} \end{aligned} \quad (2.2.25)$$

また $\delta \mathbf{u}$ に対する変分 $\delta \mathbf{F}$ は、次式のように与えられる。

$$\delta \mathbf{F} = \frac{d}{dh} \left[\frac{\partial(\mathbf{x} + h\delta \mathbf{u})}{\partial \mathbf{X}} \right]_{h=0} = \frac{\partial(\delta \mathbf{u})}{\partial \mathbf{x}} \mathbf{F} \quad (2.2.26)$$

これから、

$$\frac{\partial(\delta \mathbf{u})}{\partial \mathbf{x}} = (\partial \mathbf{F}) \mathbf{F}^{-1} \quad (2.2.27)$$

が得られ、単位体積あたりの内部仮想仕事が、 \mathbf{F} を用いて次のように表される。

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\tau} : \delta \boldsymbol{\varepsilon} &= (\det \mathbf{F}) \boldsymbol{\sigma} : \mathbf{F} \frac{\partial(\delta \mathbf{u})}{\partial \mathbf{x}} \\ &= (\det \mathbf{F}) \boldsymbol{\sigma} \mathbf{F}^{-T} : \delta \mathbf{F} \end{aligned} \quad (2.2.28)$$

これは、運動学的変数 \mathbf{F} と仕事に関して互いに共役な応力テンソルが $\mathbf{J}\boldsymbol{\sigma} \mathbf{F}^{-T}$ であることを示している。この応力テンソルを

$$\boldsymbol{\Pi} = (\det \mathbf{F}) \boldsymbol{\sigma} \mathbf{F}^{-T} \quad (2.2.29)$$

と表して、第一 Piola-Kirchhoff 応力という。仮想仕事式(2.2.23)は第一 Piola-Kirchhoff 応力を用いて次のように表される。

$$\int_{V_0} \boldsymbol{\Pi} : d\mathbf{F} dV_0 = \int_{\partial V_0} \mathbf{t}_0 \cdot d\mathbf{u} dS_0 + \int_{V_t} \mathbf{F}_B \cdot \delta \mathbf{u} dV_0 \quad (2.2.30)$$

ここで、現在配置 V_t において微小面積 dS_t に表面力が \mathbf{t}_t 働いているとする。これを基準

配置 V_0 を参照して記述する際、微小面積が dS_0 、表面力が \mathbf{t}_0 となる。ここで現在配置を参照する微小面積 dS_t に働く合力 $\mathbf{t}_t dS_t$ と基準配置を参照する微小面積 dS_0 に働く合力 $\mathbf{t}_0 dS_0$ は等しいことと、Cauchyの式及び以下の関係式

$$\mathbf{n}_t dS_t = (\det \mathbf{F}) \mathbf{F}^{-T} \mathbf{n}_0 dS_0 \quad (2.2.31)$$

を用いて

$$\begin{aligned} \mathbf{t}_0 dS_0 &= \mathbf{t}_t dS_t \\ &= \boldsymbol{\sigma} \mathbf{n}_t dS_t \\ &= \mathbf{I} \mathbf{n}_0 dS_0 \end{aligned} \quad (2.2.32)$$

となりCauchyの式を基準配置に置き換えた式(2.2.31)を得る。すなわち、基準配置を参照し、Cauchyの式と同様の線形変換によって換算表面力ベクトルを与える二階のテンソルが、第一Piola-Kirchhoff応力である。また第一Piola-Kirchhoff応力を公称応力と呼ぶこともある。

次に客観性を持つ応力速度について述べる。応力-ひずみ関係を表す式を構成則というが、これは物体固有の性質を表し、観測者によってこれらの性質が異なることはない、すなわち構成式は座標系には依存しない。

いま現在配置 V_t において、変形と力の関係、ひずみと応力の関係が次式のような構成式によって表されているとする。

$$\boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{\varphi}(\boldsymbol{\varepsilon}) \quad (2.2.33)$$

この式の形は材料の性質から決まる。そして材料の性質は観測者に依存せず不変なので、剛体運動した後の V_t においてもその式は変わらない。すなわち $\boldsymbol{\varphi}$ が正しく材料の性質を現していれば V_t におけるコーシー応力 $\boldsymbol{\sigma}'$ とひずみ $\boldsymbol{\varepsilon}'$ には

$$\boldsymbol{\sigma}' = \boldsymbol{\varphi}(\boldsymbol{\varepsilon}') \quad (2.2.34)$$

の関係が成立するはずである。このように「物理的事実は任意の並進・回転運動をする観測者に依存しない」ということを客観性の原理といい、構成則は客観性がなくてはならない。また客観性があるためには回転テンソルを \mathbf{Q} としたとき、次式を満たさなければならない。

$$\boldsymbol{\varphi}(\boldsymbol{\varepsilon}') = \mathbf{Q} \boldsymbol{\sigma} \mathbf{Q}^T = \mathbf{Q} \boldsymbol{\varphi}(\boldsymbol{\varepsilon}) \mathbf{Q}^T \quad (2.2.35)$$

非線形な応力ひずみ関係のモデル化においては、しばしば変形の数値とそれに対応する

応力の変化速度が注目される。その際、変形の数に関する変数には、客観性がある変形速度テンソル \mathbf{d} がしばしば用いられる。ところが、その \mathbf{d} と仕事に関して共役な Cauchy 応力テンソルの物質時間微分には、次式に示すとおり客観性がない。

$$\begin{aligned}\sigma' &= \frac{d}{dt}(\mathbf{Q}\sigma\mathbf{Q}^T) \\ &= \dot{\mathbf{Q}}\sigma\mathbf{Q}^T + \mathbf{Q}\dot{\sigma}\mathbf{Q}^T + \mathbf{Q}\sigma\dot{\mathbf{Q}}^T \neq \mathbf{Q}\dot{\sigma}\mathbf{Q}^T\end{aligned}\quad (2.2.36)$$

したがっては構成則に用いることができない。したがって、客観性のある速度形の構成則を定式化するためには、物質時間微分の代わりに

$$\dot{\sigma}' = \mathbf{Q}\dot{\sigma}\mathbf{Q}^T \quad (2.2.37)$$

を満足する応力速度 $\dot{\sigma}'$ が必要である。

ここで、式(2.2.9)に示される速度勾配テンソル \mathbf{l} について考える。速度勾配テンソルは次の式で示されるように客観性がなく

$$\mathbf{l}' = \dot{\mathbf{Q}}\mathbf{Q}^T + \mathbf{Q}\mathbf{l}\mathbf{Q}^T \quad (2.2.38)$$

である。また式(2.2.13)で示されるスピンテンソル \mathbf{w} について、

$$\begin{aligned}\mathbf{w}' &= \frac{1}{2}(\mathbf{l}' - \mathbf{l}'^T) \\ &= \frac{1}{2}(\dot{\mathbf{Q}}\mathbf{Q}^T + \mathbf{Q}\mathbf{l}\mathbf{Q}^T - (\dot{\mathbf{Q}}\mathbf{Q}^T + \mathbf{Q}\mathbf{l}\mathbf{Q}^T)^T) \\ &= \dot{\mathbf{Q}}\mathbf{Q}^T + \mathbf{Q}\mathbf{w}\mathbf{Q}^T\end{aligned}\quad (2.2.39)$$

となり、客観性がないことが示される。ここでこの式を用いて客観性がなくなる原因であり、次のように物質時間微分をふくまない形に書きかえる。

$$\dot{\mathbf{Q}} = \mathbf{w}'\mathbf{Q} - \mathbf{Q}\mathbf{w} \quad (2.2.40)$$

そして、これを客観性がないことを示す式

$$\dot{\sigma}' = \dot{\mathbf{Q}}\sigma\mathbf{Q}^T + \mathbf{Q}\dot{\sigma}\mathbf{Q}^T + \mathbf{Q}\sigma\mathbf{Q}^T \quad (2.2.41)$$

に代入して $\dot{\mathbf{Q}}$ を消去し、反対称テンソルの性質 $\mathbf{w}^T = -\mathbf{w}$ および $\mathbf{w}'^T = -\mathbf{w}'$ などを用いると次式を得る。

$$\dot{\sigma}' - \mathbf{w}'\sigma' + \sigma'\mathbf{w}' = \mathbf{Q}(\dot{\sigma} - \mathbf{w}\sigma + \sigma\mathbf{w})\mathbf{Q}^T \quad (2.2.42)$$

こうして、式(2.2.42)に得られた $\dot{\sigma} - \mathbf{w}\sigma + \sigma\mathbf{w}$ は、コーシー応力の物質微分を含んでい

ながら客観性を満たす量である。これを応力速度として

$$\dot{\tilde{\boldsymbol{\sigma}}} = \dot{\boldsymbol{\sigma}} - \boldsymbol{w}\boldsymbol{\sigma} + \boldsymbol{\sigma}\boldsymbol{w} \quad (2.2.43)$$

と表し、これをJaumannの応力速度という。

次に有限変形を考慮した有限要素法の接線行列について述べる。

加速度による慣性力も含めて全領域に関する重み付き残差方程式を表現すると以下を得る。ただし $\delta\boldsymbol{u}$ は仮想変位を示す。

$$\int_{V_i} (\rho \delta\boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{a}) dV + \int_{V_i} ((\delta\boldsymbol{u} \otimes \nabla) : \boldsymbol{T}) dV = \int_{\partial V_i} (\boldsymbol{t}_i : \delta\boldsymbol{u}) dS_i + \int_{V_i} (\boldsymbol{F}_B : \delta\boldsymbol{u}) dV \quad (2.2.44)$$

式(2.1.10)と同様に要素内の物理量を形状関数で補完し空間の離散化を行うと以下となる。ただし $\delta\boldsymbol{u}_\alpha$ は節点 α における $\delta\boldsymbol{u}$ の値を示す。

$$\begin{aligned} \sum_{\alpha, \beta \in V_i} \delta\boldsymbol{u}_\alpha \left\{ \int_{V_i} (\rho N_\alpha N_\beta) dV \right\} \boldsymbol{a}_\beta + \sum_{\alpha \in V_i} \delta\boldsymbol{u}_\alpha \int_{V_i} (\boldsymbol{\sigma} \cdot \nabla N_\alpha) dV = \\ \sum_{\alpha \in V_i} \delta\boldsymbol{u}_\alpha \int_{\partial V_i} (N_\alpha \boldsymbol{t}_i) dS_i + \sum_{\alpha \in V_i} \delta\boldsymbol{u}_\alpha \int_{V_i} (N_\alpha \boldsymbol{F}_B) dV \end{aligned} \quad (2.2.45)$$

重み関数（仮想変位）の任意性を考慮して整理すると以下となる。

$$\sum_{\alpha, \beta \in V_i} M_{\alpha\beta} \boldsymbol{a}_\beta + \sum_{\alpha \in V_i} I_\alpha = \sum_{\alpha \in V_i} F_\alpha \quad (2.2.46)$$

ここで次のように定義した。

$$\text{質量マトリックス} \quad M_{\alpha\beta} \equiv \int_{V_i} \rho N_\alpha N_\beta dV \quad (2.2.47)$$

$$\text{内力ベクトル} \quad I_\alpha \equiv \int_{V_i} \boldsymbol{\sigma} \cdot \nabla N_\alpha dV \quad (2.2.48)$$

$$\text{外力ベクトル} \quad F_\alpha \equiv \int_{\partial V_i} N_\alpha \boldsymbol{t}_i dS + \int_{V_i} N_\alpha \boldsymbol{F}_B dV \quad (2.2.49)$$

これを全領域について重ね合わせれば次式となります。

$$\left. \begin{aligned}
[M]\{\alpha\} + \{I\} &= \{F\} \\
[M] &\equiv \sum_e \sum_{\alpha, \beta \in V_i} M_{\alpha\beta} \\
\{\alpha\} &\equiv \sum_e \sum_{\alpha \in V_i} \alpha_\alpha \\
\{I\} &\equiv \sum_e \sum_{\alpha \in V_i} I_\alpha \\
\{F\} &\equiv \sum_e \sum_{\alpha \in V_i} F_\alpha
\end{aligned} \right\} \quad (2.2.50)$$

ここで e の和は全ての要素での重ね合わせを示す．また $[]$ はマトリックスを $\{ \}$ はベクトルを示す．内力ベクトルの微小変化 $\{dI\}$ と変位ベクトルの微小変化 $\{du\}$ の関係は

$$\{dI\} = [K]\{du\} \quad (2.2.51)$$

となる．このときの $[K]$ が接線行列になる．内力ベクトルによる微小変化 $\{dI\}$ は次の4つに分類する事ができる．

- ・変形による応力 σ の変化に起因する項 $\{dI^1\}$
- ・回転による応力 σ の変化に起因する項 $\{dI^2\}$
- ・変形および回転による ∇N_α の変化に起因する項 $\{dI^3\}$
- ・変形による積分領域の変化に起因する項 $\{dI^4\}$

これらを用いて

$$\{dI\} = \{dI^1\} + \{dI^2\} + \{dI^3\} + \{dI^4\} \quad (2.2.52)$$

と書く事ができる．以下で、それぞれについて考える．

(1)変形による応力 σ の変化に起因する項 $\{dI^1\}$

この項は材料特性によって異なるが、次のようになる．

$$\left. \begin{aligned}
\{dI^1\} &= \sum_e \sum_{\alpha \in V} \{dI^1_\alpha\} \\
\{dI^1_\alpha\} &= \sum_{\beta \in V} \int_V [B_\alpha] [D^{ep}] [B_\beta]^T \{du_\beta\} dV \\
[B_\alpha] &= \begin{bmatrix} \frac{\partial N_\alpha}{\partial x} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\partial N_\alpha}{\partial y} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\partial N_\alpha}{\partial z} \\ \frac{\partial N_\alpha}{\partial y} & \frac{\partial N_\alpha}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial N_\alpha}{\partial z} & \frac{\partial N_\alpha}{\partial y} \\ \frac{\partial N_\alpha}{\partial z} & 0 & \frac{\partial N_\alpha}{\partial x} \end{bmatrix}
\end{aligned} \right\} \quad (2.2.53)$$

ここで $[D^{ep}]$ は構成則における材料剛性を示す．第3章で述べるように $[D^{ep}]$ は応力積分のアルゴリズムと整合した接線剛性として用いなければならない．

(2)変形による応力 σ の変化に起因する項 $\{dI^2\}$

回転による応力の変化は式 (2.2.43)で示したように次のようになる．

$$\left. \begin{aligned}
& [W][\sigma] - [\sigma][W] \\
[W]_{ij} &= \sum_{\beta \in V} \frac{1}{2} \left(\frac{\partial N_\beta}{\partial x_j} \{du_\beta\}_i - \frac{\partial N_\beta}{\partial x_i} \{du_\beta\}_j \right)
\end{aligned} \right\} \quad (2.2.54)$$

ここで $[\sigma]$ は応力テンソルの 3×3 行列表現である．このことから $\{dI^2\}$ は次のようになる．

$$\{dI^2\} = \sum_e \sum_{\alpha \in V} \{dI^2_\alpha\} \quad (2.2.55)$$

$$\begin{aligned}
\{dI_a^2\}_i &= \sum_{\beta \in V} \int_V \sum_{j,k} \frac{1}{2} \left(\frac{\partial N_\beta}{\partial x_j} \{du_\beta\}_i - \frac{\partial N_\beta}{\partial x_i} \{du_\beta\}_j \right) [T]_{jk} \frac{\partial N_a}{\partial x_k} dV \\
&\quad - \sum_{\beta \in V} \int_V \sum_{j,k} \frac{1}{2} [T]_{ij} \left(\frac{\partial N_\beta}{\partial x_k} \{du_\beta\}_j - \frac{\partial N_\beta}{\partial x_j} \{du_\beta\}_k \right) \frac{\partial N_a}{\partial x_k} dV \\
&= \sum_{\beta \in V} \int_V \sum_{j,k} \frac{1}{2} \left(\frac{\partial N_\beta}{\partial x_j} [\sigma]_{jk} \frac{\partial N_a}{\partial x_k} \right) \{du_\beta\}_i dV \\
&\quad - \sum_{\beta \in V} \int_V \sum_{j,k} \frac{1}{2} \left(\frac{\partial N_\beta}{\partial x_i} \frac{\partial N_a}{\partial x_k} [\sigma]_{jk} \right) \{du_\beta\}_j dV \\
&\quad - \sum_{\beta \in V} \int_V \sum_{j,k} \frac{1}{2} \left(\frac{\partial N_\beta}{\partial x_k} \frac{\partial N_a}{\partial x_k} [\sigma]_{ij} \right) \{du_\beta\}_j dV \\
&\quad + \sum_{\beta \in V} \int_V \sum_{j,k} \frac{1}{2} \left([\sigma]_{ij} \frac{\partial N_\beta}{\partial x_j} \frac{\partial N_a}{\partial x_k} \right) \{du_\beta\}_k dV
\end{aligned} \tag{2.2.56}$$

(3)変形および回転による ∇N_a の変化に起因する項 $\{dI^3\}$

変形および回転による相対変形勾配によって ∇N_a は次のようになる。

ここで $[F]$ は変形勾配テンソルの 3×3 行列表示である。また δ はクロネッカーのデルタを示す。

$$\left. \begin{aligned}
\frac{\partial N_a}{\partial x_i} &\rightarrow \sum_j ([F]^T)_{ij} \frac{\partial N_a}{\partial x_j} \\
[F]_{ij} &= \delta_{ij} + \sum \frac{\partial N_\beta}{\partial x_j} \{du_\beta\}_i
\end{aligned} \right\} \tag{2.2.57}$$

変位が小さい場合は $[F]$ の逆行列は次のように近似できる。

$$([F]^{-1})_{ij} = \delta_{ij} - \sum \frac{\partial N_\beta}{\partial x_j} \{du_\beta\}_i \tag{2.2.58}$$

よって ∇N_a の変化量は次のようになる。

$$- \sum \frac{\partial N_\beta}{\partial x_j} \{du_\beta\}_i \tag{2.2.59}$$

このことから $\{dI^3\}$ は次のようになる。

$$\left. \begin{aligned} \{dI^3\} &= \sum_e \sum_{a \in V} \{dI_a^3\} \\ \{dI_a^3\}_i &= - \sum_{\beta \in V} \int_V \sum_{j,k} \left([T]_{ij} \frac{\partial N_\beta}{\partial x_j} \frac{\partial N_a}{\partial x_k} \right) \{du_\beta\}_k \end{aligned} \right\} \quad (2.2.60)$$

(4)変形による積分領域の変化に起因する項 $\{dI^4\}$

変形による相対変形勾配によって微小体積 dV は次のように変換される.

$$\left. \begin{aligned} dV &\rightarrow \det[F] dV \\ [F]_{ij} &= \delta_{ij} + \sum_{\beta \in V} \frac{\partial N_\beta}{\partial x_j} \{du_\beta\}_i \end{aligned} \right\} \quad (2.2.61)$$

変形が小さい場合には $\det[F]$ を次のように近似できる.

$$\det[F] = 1 + \sum_{\beta \in V} \sum_i \frac{\partial N_\beta}{\partial x_i} \{du_\beta\}_i \quad (2.2.62)$$

よって dV の変化量は次のようになる.

$$\sum_{\beta \in V} \sum_i \frac{\partial N_\beta}{\partial x_i} \{du_\beta\}_i \quad (2.2.63)$$

このことから $\{dI^4\}$ は次のようになる.

$$\left. \begin{aligned} \{dI^4\} &= \sum_e \sum_{a \in V} \{dI_a^4\} \\ \{dI_a^4\}_i &= \sum_{\beta \in V} \int_V \sum_{j,k} \left([\sigma]_{ij} \frac{\partial N_a}{\partial x_j} \frac{\partial N_\beta}{\partial x_k} \right) \{du_\beta\}_k dV \end{aligned} \right\} \quad (2.2.64)$$

2.3 Newmark- β 法による動的解法

本研究では動的問題を解くための時間の離散化法としてNewmark- β 法を用いている。Newmark- β 法(Newmark, 1959)では変位と速度を次のように仮定している。

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{u}_{n+1} &= \mathbf{u}_n + \Delta t \dot{\mathbf{u}}_n + \Delta t^2 \left(\frac{1}{2} - \beta' \right) \ddot{\mathbf{u}}_n + \Delta t^2 \beta' \ddot{\mathbf{u}}_{n+1} \\ \dot{\mathbf{u}}_{n+1} &= \dot{\mathbf{u}}_n + \Delta t (1 - \gamma') \ddot{\mathbf{u}}_n + \Delta t \gamma' \ddot{\mathbf{u}}_{n+1} \end{aligned} \right\} \quad (2.3.1)$$

ここで γ' と β' はパラメータである。通常、 $\gamma'=1/2$ としており上式の愛2式は次のような差分式になる。

$$\dot{\mathbf{u}}_{n+1} = \dot{\mathbf{u}}_n + \frac{\Delta t}{2} (\ddot{\mathbf{u}}_n + \ddot{\mathbf{u}}_{n+1}) \quad (2.3.2)$$

この式は数値積分における台形硬式となっている。一方、 β' の値には

$$0 \leq \beta' \leq \frac{1}{2} \quad (2.3.3)$$

となる制約があるが、その選び方には様々な考え方がある。 $\beta'=0$ の場合式(2.3.1)の第1式は次のようになる。

$$\mathbf{u}_{n+1} = \mathbf{u}_n + \Delta t \dot{\mathbf{u}}_n + \frac{\Delta t^2}{2} \ddot{\mathbf{u}}_n \quad (2.3.4)$$

この式は無条件安定とはならず一般にはあまり使われていない。

$\beta'=1/4$ の場合、式(2.3.1)は次のようになる。

$$\mathbf{u}_{n+1} = \mathbf{u}_n + \Delta t \dot{\mathbf{u}}_n + \frac{\Delta t^2}{2} \left(\frac{\ddot{\mathbf{u}}_n + \ddot{\mathbf{u}}_{n+1}}{2} \right) \quad (2.3.5)$$

この式を用いる方法は平均加速度法と呼ばれており、加速度は Δt 時間の間は一定とみなしている。Newmark- β 法は本来、無条件安定な積分法としてこの方法を提案している。 $\beta'=1/6$ の場合、式(2.3.1)は次のようになる。

$$\mathbf{u}_{n+1} = \mathbf{u}_n + \Delta t \dot{\mathbf{u}}_n + \Delta t^2 \left(\frac{\ddot{\mathbf{u}}_n}{3} + \frac{\ddot{\mathbf{u}}_{n+1}}{6} \right) \quad (2.3.6)$$

この式はNewmark- β 法において最も一般的な選択であるが、この場合は線形加速度法に他ならない。

次に変位を求める式を導く。運動方程式は

$$[M]\{\ddot{\mathbf{u}}_{n+1}\} + [K]\{\mathbf{u}_{n+1}\} = \{F_{n+1}\} \quad (2.3.7)$$

となる。ここで加速度、速度を次のように変形しておく。

$$\left. \begin{aligned} \ddot{\mathbf{u}}_{n+1} &= \frac{6}{\beta' \Delta t^2} (\mathbf{u}_{n+1} - \mathbf{u}_n) - \frac{1}{\beta' \Delta t} \dot{\mathbf{u}}_n - \left(\frac{1}{2\beta'} - 1 \right) \ddot{\mathbf{u}}_n \\ \dot{\mathbf{u}}_{n+1} &= \frac{1}{2\beta' \Delta t} (\mathbf{u}_{n+1} - \mathbf{u}_n) - \left(\frac{1}{2\beta'} - 1 \right) \dot{\mathbf{u}}_n - \left(\frac{1}{4\beta'} - 1 \right) \Delta t \ddot{\mathbf{u}}_n \end{aligned} \right\} \quad (2.3.8)$$

これらの式を式(2.3.7)に代入すれば次の式が得られる。

$$\left(\frac{6}{\beta' \Delta t^2} [M] + [K] \right) \{\mathbf{u}_{n+1}\} = \{\mathbf{F}_{n+1}\} + [M] \left\{ \left(\frac{1}{2\beta' - 1} \right) \{\ddot{\mathbf{u}}_n\} + \frac{1}{\beta' \Delta t} \{\dot{\mathbf{u}}_n\} + \frac{1}{\beta' \Delta t^2} \{\mathbf{u}_n\} \right\} \quad (2.3.9)$$

この連立一次方程式を解くことで次のステップの変位 $\{\mathbf{u}_{n+1}\}$ を求める事ができる。

2.4 階層型領域分割による並列化

弾塑性有限要素法ではその積分手法によって計算の収束性や安定性が大きく左右される。本解析の様なき裂先端部でのディンプル破壊をシミュレーションするには、破壊要素形状の影響を極力小さくするためにき裂先端近傍の要素分割を非常に細かく、一様にする必要がある。2次元解析の場合、1節点あたりの自由度は2であり、計算機要領が不足することはほとんどない。しかし、本解析のような3次元数値解析の場合、1節点あたりの自由度は3となり、解析する問題の自由度は非常に大きなものとなる。そのためはや1台の計算機のみで解析することは時間的にもメモリの的にも解析が困難になることは少なくない。そのような場合、複数台のコンピュータに負荷を分散させて有限要素法を並列処理させることで数値解析を行うことができる。本研究では3次元の延性破壊シミュレーションのために有限要素法の並列化方法として階層型領域分割法 (HDDM: Hierarchical Domain Decomposition Method) を用いている(矢川, 塩谷, 1998; 矢川, 2002)。以下、階層型領域分割法と領域分割されて領域の計算機への割り当て方法について述べる。

領域分割法とは、解析対象となる領域を幾つかの部分領域に分割し、各部分ごとに解析を行うことで全体領域の解を求める手法の総称である。領域分割法は各部分領域における有限要素法を1つの単位として、しかも全ての部分領域の解析を独立に並列に実行可能なため、並列化に適した手法である。領域分割法ではモデルの分割により内部に新たな境界が生じる。これを内部境界と呼ぶが、内境界上に反力がつり合うような変位境界条件を反復法により求める必要があり、特に反復型の領域分割法とも呼ばれている。

反復型の領域分割では、反復計算を行う **Parent**(親)と呼ばれる1つのプロセッサと各部分の計算を行う **Child**(子)と呼ばれる複数のプロセッサが存在する。しかし、大規模なモデルの解析や使えるプロセッサでのメモリ容量を超えてしまう。そこで、**Parent** の計

算負荷も複数のプロセッサに分散させるようにしたのが階層型領域分割法である。

図 2.4.1 に階層型領域分割法を一般の構造問題に適応した際のモデル分割概念図を示す。階層型領域分割法は、全体モデルを 2 段階に領域分割する方法である。

1 段階目の分割は解析対象のモデル(Solid Model)を Part と呼ばれる単位に分割する。さらに 2 段階目として、各 Part を Subdomain と呼ばれる単位に分割し、各 Part が行う FEM 解析のためのメモリ使用量を節約する。一般には、Part の 1 つが全体の管理を行う。

次に重みつき残差法を用いた反復型の領域分割法の定式化について述べる。今、図 2.4.2 に示すような変位境界条件と表面力が与えられている弾性問題を考える。図 2.4.2 において、領域 Q には体積力 \mathbf{F}_B が、境界 Γ_u 上に変位境界条件 $\bar{\mathbf{u}}_i$ が境界 Γ 上には表面力 $\bar{\mathbf{t}}_i$ が与えられているものとする。ただし、全境界 Γ は次式で与えられる。

$$\Gamma = \Gamma_u + \Gamma_t \quad (2.4.1)$$

この時、全体領域 Q において考慮すべき系の方程式は以下の様になる。

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon_{ij} &= \frac{1}{2}(\mathbf{u}_{i,j} + \mathbf{u}_{j,i}) \text{ in } \Omega \\ \sigma_{ij} &= \mathbf{D}_{ijkl}^e \varepsilon_{kl} \text{ in } \Omega \\ \sigma_{ij,j} + \mathbf{F}_{Bi} &= \mathbf{0} \text{ in } \Omega \\ \sigma_{ij} \mathbf{n}_j - \bar{\mathbf{t}}_i &= \mathbf{0} \text{ on } \Gamma \\ \mathbf{u}_i &= \bar{\mathbf{u}}_i \text{ on } \Gamma_u \end{aligned} \right\} \quad (2.4.2)$$

ここで \mathbf{u} , ε^e , σ はそれぞれ変位ベクトル、ひずみテンソル、応力テンソルを \mathbf{D}^e は弾塑性一ひずみテンソル、 \mathbf{n} は境界 Γ に関する外向き単位法線ベクトルを表している。次に 2 領域に分割した場合を考える。各部分領域における支配方程式は基本的に式(2.2.17)と同様であるが、部分領域間に新たに定義された境界 γ_{12} に関する境界条件について考える必要がある。なお、上付き添え字 k はその値が部分領域 k で定義されていることを示すものとする。

部分領域 k における境界 $\Gamma^{(k)}$ は $\Gamma_u^{(k)}$, $\Gamma_t^{(k)}$, γ_{12} の 3 種類の境界から構成されていることとなる。すなわち、次式のとおりである。

$$\Gamma^{(k)} = \Gamma_u^{(k)} + \Gamma_t^{(k)} + \gamma_{12} \quad (2.4.3)$$

ただし γ_{12} 上における境界条件は与えられていないため、新たに与える必要が生じる。1 領域の問題を幾つかの部分領域に分割して解く場合、得られた解が正解であるためには、部分領域間の境界で、応力の釣り合い、変位の連続性が満たされている必要がある。従って、 γ_{12} 上における境界条件としては以下の 3 式が必要となる。

$$\left. \begin{aligned} \sigma_{ij}^{(1)} n_j^{(1)} + \sigma_{ij}^{(2)} n_j^{(2)} &= \mathbf{0} \quad \text{on } \gamma_{12} \\ \mathbf{u}_i^{(1)} - \mathbf{u}_i^{(2)} &= \mathbf{0} \quad \text{on } \gamma_{12} \\ \mathbf{n}_i^{(1)} &= \mathbf{n}_i^{(2)} \quad \text{on } \gamma_{12} \end{aligned} \right\} \quad (2.4.4)$$

これらをまとめると，領域分割法における基礎方程式と以下の式が得られる．

$$\left. \begin{aligned} \sigma_{ij}^{(k)} &= D_{ijkl}^{e(k)} \varepsilon_{kl}^{(k)} \quad \text{in } \Omega^{(k)} \\ \varepsilon_{ij}^{(k)} &= \frac{1}{2} (\mathbf{u}_{i,j}^{(k)} + \mathbf{u}_{j,i}^{(k)}) \quad \text{in } \Omega^{(k)} \\ \sigma_{ij,j}^{(k)} + \bar{\mathbf{b}}_i^{(k)} &= \mathbf{0} \quad \text{in } \Omega^{(k)} \\ \sigma_{ij}^{(k)} n_j^{(k)} - \bar{\mathbf{t}}_i^{(k)} &= \mathbf{0} \quad \text{in } \Gamma_i^{(k)} \\ \mathbf{u}_i^{(k)} &= \bar{\mathbf{u}}_i^{(k)} \quad \text{on } \Gamma_i^{(k)} \\ \sigma_{ij}^{(k)} n_j^{(k)} + \sigma_{ij}^{(l)} n_j^{(l)} &= \mathbf{0} \quad \text{on } \Gamma_i^{(k)} \\ \mathbf{u}_i^{(k)} &= \mathbf{u}_i^{(l)} \quad \text{on } \gamma_{kl} \end{aligned} \right\} \quad (2.4.5)$$

ここで右肩の添え字は，その値が部分領域 $\Omega^{(k)}$ に隣接する部分領域 $\Omega^{(l)}$ で定義された量であることを示す．

次にこれらの方程式を弱形式で定式化することを考える．弱形式による定式化では，与えられた方程式のうち，幾つかの方程式を厳密に満足させ，残りの方程式については積分形を用いて平均的な意味合いで満足させるというアプローチを取る．ここでは，通常の変位法に基づく定式化と同様に積分形で満足させることにする．またどちらか片方を厳密に，他方を積分系で満足させることにより 2 通りの定式化が考えられる．

1 つは領域間境界 γ_{kl} 上には $\Gamma_i^{(k)}$ と同じく応力（荷重）が境界条件として与えられていることとなる．このため，与えられる境界条件が荷重条件のみとなり，解を得られない部分領域が生じる可能性がある．この問題は，各部分領域が必ず少なくとも 1 点の変位拘束を受ける点を持つように領域分割を行うことにより，回避可能である．しかし，一般に構造問題においては，変位拘束を受ける境界は全境界に対して非常に少なく，このような領域分割を行うことは特に領域数が増えた場合には困難となる．一方後者の場合には，領域間境界 γ_{kl} 上には変位境界条件が与えられているため，任意の領域分割に対して有効である．そこで，以降はこの方法に対して定式化を進めることにする．

ここで，境界条件の取り扱いを容易にするため，新しく変数 μ を導入し，以下の様におく．

$$\mathbf{u}_i^{(k)} = \mathbf{u}_i^{(l)} = \boldsymbol{\mu}_i \quad \text{on } \gamma_{kl} \quad (2.4.6)$$

従って，積分系で満足させるには次式によって評価することとする．

$$\sum_{k=1}^2 \left[- \int_{\Omega^{(k)}} (\boldsymbol{\sigma}_{ij}^{(k)} + \mathbf{F}_{Bi}^{(k)}) \delta u_i^{(k)} d\Omega + \int_{\Gamma_i^{(k)}} (\boldsymbol{\sigma}_{ij}^{(k)} n_j^{(k)} - \bar{t}_i^{(k)}) \delta u_i^{(k)} d\Gamma + \int_{\gamma_{kl}} (\boldsymbol{\sigma}_{ij}^{(k)} n_j^{(k)} + \boldsymbol{\sigma}_{ij}^{(l)} n_j^{(l)}) \delta u_i^{(k)} d\Gamma \right] = 0 \quad (2.4.7)$$

さらに発散定理を用いて整理することにより、最終的には以下の弱形式が得られる。

$$\sum_{k=1}^2 \left[- \int_{\Omega^{(k)}} (\boldsymbol{\sigma}_{ij}^{(k)} \delta \boldsymbol{\varepsilon}_{ij}^{(k)} + \bar{\mathbf{b}}_i^{(k)} \delta u_i^{(k)}) d\Omega - \int_{\Gamma_i^{(k)}} \bar{t}_i^{(k)} \delta u_i^{(k)} d\Gamma + \int_{\gamma_{kl}} (\boldsymbol{\sigma}_{ij}^{(l)} n_j^{(l)} + \boldsymbol{\sigma}_{ij}^{(2)} n_j^{(2)}) \delta u_i^{(k)} d\Gamma \right] = 0 \quad (2.4.8)$$

式(2.4.3)は部分領域 $\Omega^{(k)}$ における通常の重みつき残差関数に部分領域間境界 γ_{12} 上における制約条件を加えたものになっており、共役勾配法 (CG 法) などの反復法により解くことができる。

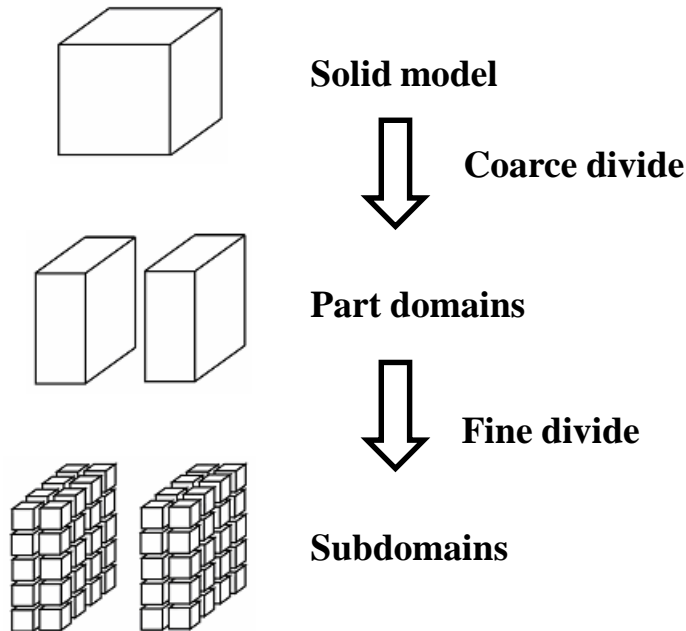


Fig. 2.4.1 Hierarchical domain decomposition method

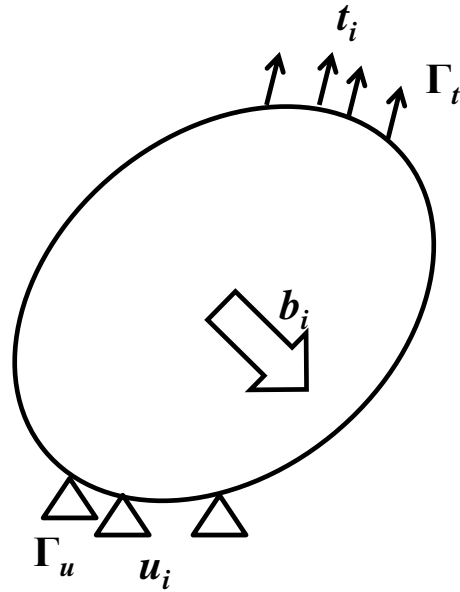


Fig. 2.4.2 Configuration of domain to be divided into two domains

領域分割法や階層型領域分割法では、解析領域をあらかじめ幾つかの部分領域に分割し、並列処理の際には部分領域を各プロセッサに割り当てる。この際、各プロセッサへの割り当ての方法として、静的に与える静的負荷分散と、動的に割り当てる動的負荷分散の2つの方法が考えられる。以下に各場合の特徴を述べる。

動的負荷分散とは、解析前には割り当てを決めず、解析状況により割り当てを最適にコントロールする方法である。不均等な領域分割問題に対し、1領域1プロセッサの割り当てでは良好な負荷分散が得られないのは明らかであり、複数領域の組み合わせによりこの問題を解決する。図2.4.3に動的負荷分散の場合に1プロセッサに複数の領域を割り当てた際の負荷分散の様子を示す。この方法では、複数領域の組み合わせにより、各プロセッサでの待機時間を減らすことができるのがわかる。この動的負荷分散の場合では、割り当ての方法としてまず各プロセッサに1つずつ割り当て、解析が終了したプロセスに次のプロセッサを直ちに次の解析領域を得ることができ、待機時間を減少させることができる。しかし、この手法では、領域を解析するアナライザプロセッサ以外に、データの割り当てをコントロールするコントローラプロセッサが必要となり、プロセッサ間での役割分担の差が生じる。また、静的負荷分散に対して動的に領域を割り当てるので、アナライザへの領域の通信料も大きくなる事が多い。

静的負荷分散とは、あらかじめプロセッサへのタスクの割り当てを決めておき、解析中はその割り当てを変更することなく処理を行う手法である。分割された領域をプロセッサに割り当てる方法は幾つか考えられるが、最も簡単な方法は、全ての部分領域での計算量が等しく全てのプロセッサの計算能力が等しい時、全てのプロセッサは同時に部分領域の計算を開始し同時に終了するので、負荷分散は均一になる。このような負荷分

散が行えるのは、全領域を均等に分割することができ、一般的な並列計算機のように全プロセッサの計算能力が常に均一である場合である。よって領域の形状が複雑なときにはこのような分割は困難となる。また、異機種を同時に使うクラスタ形の並列計算機では、プロセッサ間の計算能力に差が生じ、良好な負荷分散は得られない。不均等に分割された領域や、プロセッサ間に計算能力の差があるときの静的割り当てによる負荷分散の様子を図 2.4.5 に示す。このようにプロセッサ間で計算時間に差が生じると、計算が早く終了したプロセッサはほかのすべてのプロセッサが計算を終了するまで待機する必要があり効率低下を招く。図 2.4.5 の空白部分が各プロセッサの待機時間（アイドルングタイム）を示しており、効率を高めるにはこの部分を減らす必要がある。不均一分割問題に対する有効なタスク割り当て技術としては動的負荷分散のほうが適している。しかし、部分領域計算量が均一であり、均等な計算能力のプロセッサで並列計算環境が構成されている場合には、計算領域のアナライザへの通信がない静的負荷分散の方が全体の計算時間として早く計算を行うことができる。

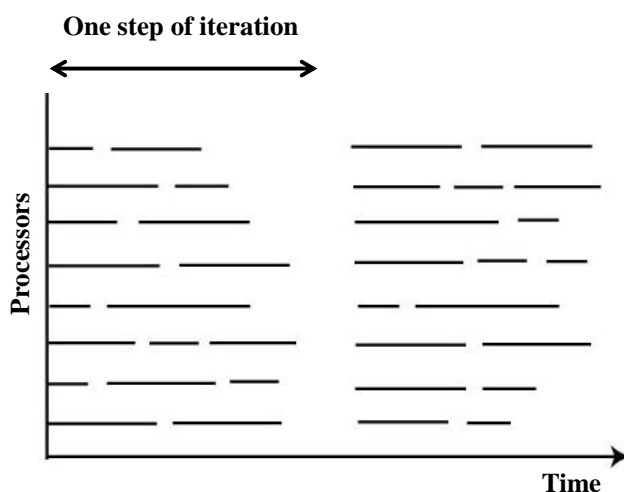


Fig. 2.4.3 Dynamic load balancing

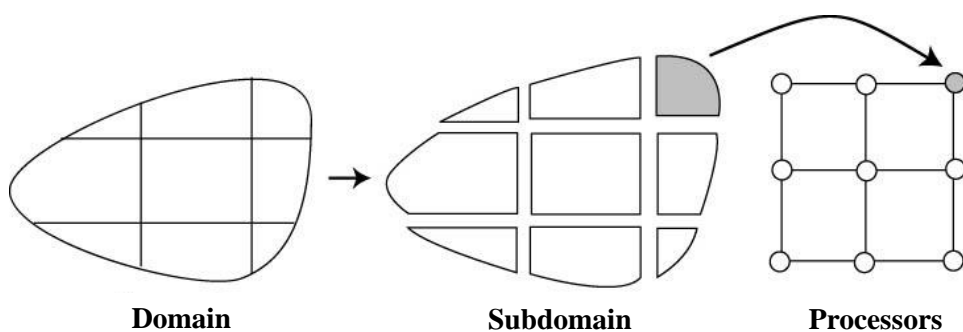


Fig. 2.4.4 Static assignment of irregular mesh

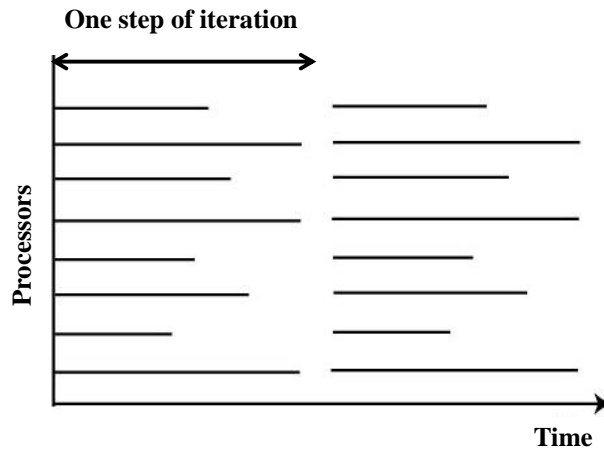


Fig. 2.4.5 Static load balancing

2.5 弾塑性有限要素法の積分手法

弾塑性有限要素法ではその積分手法によって計算の収束性や安定性が大きく左右される。積分手法には主に陽解法と陰解法に基づく手法がある。本節では簡便な弾塑性モデルである等方硬化Misesモデルを用いてそれぞれの積分手法に長所と短所に触れながら説明する。

2.5.1 弾塑性力学の基礎原理

応力とひずみは構成則により関係づけられる。特に非線形の応力ひずみ関係をモデル化する際には、降伏関数と流れ則の二つが重要な役割を果たす。本章では、これらについて記述する(橋口, 1990; 北川, 1987)。

あらかじめ塑性変形していない材料は、材料に作用する応力が材料に固有な強度に到達すれば降伏が生じる。また、塑性変形後の材料の降伏は、その材料の負荷履歴の影響を受ける。したがって、塑性変形の進行に伴い変化する有限個のパラメータ $\xi(\kappa)(\kappa=1,2,\dots,n)$ で負荷履歴で代表できるものとすれば、塑性変形を継続しているとき、降伏関数 ϕ は一般的に次のように表せる。

$$\phi(\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\xi}) = 0 \quad (2.5.1)$$

また降伏条件式を応力空間に描いたものを降伏曲面(yield locus)という。降伏曲面 ϕ の

内部 ($\phi < 0$)における応力変化に対しては、弾性的な応力-ひずみ応答となる。

次にドラッカーの仮説よりある応力状態 σ^* から応力変化が生じ元の応力状態に戻るようなサイクルにおいて、応力変化部分 ($\sigma - \sigma^*$) によってなされた正味仕事は負とならないこととより、塑性ひずみを ε^p としたとき、以下の式が成立する。

$$\oint_{\sigma} (\sigma - \sigma^*) : d\varepsilon^p \geq 0 \quad (2.5.2)$$

ここで、 σ^* は降伏条件を破らない任意の応力状態 $\phi(\sigma^*, \xi) \leq 0$ である。式 (2.5.2) がいかなる応力経路についても成り立つためには

$$(\sigma - \sigma^*) : d\varepsilon^p \geq 0 \quad (2.5.3)$$

となる必要がある。 $d\varepsilon^p$ は応力 σ にとって生じる塑性ひずみ増分である。式(2.5.3)は”塑性ひずみ増分 $d\varepsilon^p$ が規定されたとき $d\varepsilon^p$ と関連する応力 σ によってなされる塑性仕事増分 $\sigma : d\varepsilon^p$ は降伏条件を破ることのない任意の応力 σ^* によってなされる塑性仕事増分 $\sigma^* : d\varepsilon^p$ より小さくなることはない”ということを示し、これを最大塑性仕事の原理と呼ぶ。

最大塑性仕事の原理から、”降伏曲面 ϕ は応力空間中で外向きに凸な曲面となる。降伏曲面が滑らかなときは、塑性ひずみ増分ベクトルの方向は降伏曲面 ϕ の外向き法線方向と一致する”ということが導かれる。

塑性ひずみ増分ベクトル $d\varepsilon^p$ の降伏曲面 ϕ の対する垂直性は垂直則とよばれ次式で表現できる。

$$d\varepsilon^p = \frac{\partial \phi}{\partial \sigma} dy \quad (2.5.4)$$

ここで dy は正のスカラー値である。降伏関数 ϕ が塑性ひずみ増分ベクトル方向を決定するポテンシャルの役割を果たしているので、降伏関数 ϕ を塑性ポテンシャルとよび、この式(2.5.3)を関連流れ則という。

次に降伏関数について述べる。均質材を仮定し純すべりのみによる塑性変形を仮定した金属材料を考える。この場合、降伏は滑りによってのみ生じるため静水圧には依存しない。また材料の性質は座標系には依存しない客観性を有する。まず前者のことから、材料の降伏は応力テンソルから静水圧を引いた偏差応力テンソルにより表す。また座標系に依存しない量として不変量を用いることが望ましい。Von Mises は偏差応力の二次不変量を用いて次のような降伏条件を提案した。ただし $\tilde{\mathbf{I}}_d$ は偏差射影テンソル、 $\tilde{\mathbf{I}}$ は4階の恒等テンソル、 \mathbf{I} は2階の等方テンソルでありその成分はクロネッカーのデルタと等しい。また σ_Y は降伏応力を表す。

$$\left. \begin{aligned} \sigma_y &= \sqrt{\frac{3}{2}} \|\tilde{\mathbf{I}}_d : \boldsymbol{\sigma}\| \\ \tilde{\mathbf{I}}_d &\equiv \tilde{\mathbf{I}} - \frac{1}{3} \mathbf{I} \otimes \mathbf{I} \\ [\tilde{\mathbf{I}}]_{ijkl} &\equiv \frac{1}{2} (\delta_{ik} \delta_{jl} + \delta_{il} \delta_{jk}) \\ [\mathbf{I}]_{ij} &\equiv \delta_{ij} \end{aligned} \right\} \quad (2.5.5)$$

この式をMisesの降伏条件という。この偏差応力の二次不変量という考えが次の節で重要な役割を担う。降伏関数にMisesの降伏関数と同じ形を採用する。すると降伏関数 ϕ は次式で表される。

$$\phi = \sqrt{\frac{3}{2}} \|\tilde{\mathbf{I}}_d : \boldsymbol{\sigma}\| - \sigma_y \quad (2.5.6)$$

ただし $\tilde{\mathbf{I}}_d : \boldsymbol{\sigma}$ は偏差応力を示す。ここで、この降伏関数の関連流れ則は式 (2.5.4)より、

$$d\boldsymbol{\varepsilon}^p = \frac{\tilde{\mathbf{I}}_d : \boldsymbol{\sigma}}{\|\tilde{\mathbf{I}}_d : \boldsymbol{\sigma}\|} d\gamma \quad (2.5.7)$$

この式は、ロイスが提案した”塑性ひずみ増分の方向は偏差応力の方向に一致する”としたひずみ増分理論と呼ばれるものと一致する。ミーゼスの降伏関数が偏差応力の第二不変量 J_2 のみで表されることからひずみ増分理論は J_2 流れ理論とよばれる。

多軸応力状態における降伏条件が”単軸引張り降伏応力であるような応力成分のスカラ関数を多軸応力における応力を単軸応力値に換算するという意味合いを込めて相当応力という。特にMisesの降伏条件を基にした相当応力(Mises応力) q を次式に示す。

$$q = \sqrt{\frac{3}{2}} \|\tilde{\mathbf{I}}_d : \boldsymbol{\sigma}\| \quad (2.5.8)$$

が一般に広く使われるので、単に相当応力というとき式(2.5.8)の定義を指すことが多い。また式(2.5.8)をMises応力と呼ぶこともある。相当塑性ひずみ増分 $d\boldsymbol{\varepsilon}_{eq}^p$ は塑性ひずみ $\boldsymbol{\varepsilon}^p$ および塑性仕事増分 $d\boldsymbol{w}^p$ から定義される。

$$d\boldsymbol{w}^p = \boldsymbol{\sigma} : d\boldsymbol{\varepsilon}^p = (\tilde{\mathbf{I}}_d : \boldsymbol{\sigma}) : \boldsymbol{\varepsilon}^p = q d\boldsymbol{\varepsilon}_{eq}^p \quad (2.5.9)$$

ひずみ増分理論の式(2.5.7)より、

$$d\boldsymbol{w}^p = (\tilde{\mathbf{I}}_d : \boldsymbol{\sigma}) : \boldsymbol{\varepsilon}^p = (\tilde{\mathbf{I}}_d : \boldsymbol{\sigma}) : (\tilde{\mathbf{I}}_d : \boldsymbol{\sigma}) d\gamma = \frac{2}{3} q^2 d\gamma = q d\boldsymbol{\varepsilon}_{eq}^p \quad (2.5.10)$$

また

$$d\boldsymbol{\varepsilon}^p : d\boldsymbol{\varepsilon}^p = \frac{3}{2} d\boldsymbol{\varepsilon}_{eq}^p \quad (2.5.11)$$

より相当塑性ひずみ増分は

$$d\varepsilon_{eq}^p = \sqrt{\frac{2}{3}} d\varepsilon^p : d\varepsilon^p \quad (2.5.12)$$

となる。相当塑性ひずみ増分を積分した

$$\varepsilon_{eq}^p = \int d\varepsilon_{eq}^p \quad (2.5.13)$$

を相当塑性ひずみと呼ぶ。さらに構成則について考える。応力増分は弾性剛性に弾性ひずみ増分を乗じる事で

$$\left. \begin{aligned} d\boldsymbol{\sigma} &= \tilde{\mathbf{D}}^e : (d\boldsymbol{\varepsilon} - d\boldsymbol{\varepsilon}^p) \\ \tilde{\mathbf{D}}^e &\equiv \frac{E}{1-\nu} \tilde{\mathbf{I}} + \frac{E\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)} \mathbf{I} \otimes \mathbf{I} \end{aligned} \right\} \quad (2.5.14)$$

のように得られる。ここで $\tilde{\mathbf{D}}^e$ は弾性テンソルで E はヤング率、 ν はポアソン比である。また弾塑性状態の負荷状態、中立負荷状態においては応力状態が常に降伏曲面上に存在していなければならないため

$$d\phi = 0 \quad (2.5.15)$$

でなければならない。等方硬化Mises材の場合は降伏関数が応力 $\boldsymbol{\sigma}$ と降伏応力 σ_y で記述されるため全微分を取ると

$$\begin{aligned} \frac{\partial \phi}{\partial \boldsymbol{\sigma}} : d\boldsymbol{\sigma} + \frac{\partial \phi}{\partial \sigma_y} d\sigma_y &= 0 \\ \therefore \sqrt{\frac{3}{2}} \|\tilde{\mathbf{I}}_d : \boldsymbol{\sigma}\| : d\boldsymbol{\sigma} - \frac{d\sigma_y}{d\varepsilon_{eq}^p} d\varepsilon_{eq}^p &= 0 \end{aligned} \quad (2.5.16)$$

という条件が得られる。ここで構成則とひずみ増分理論を代入すると

$$\sqrt{\frac{3}{2}} \|\tilde{\mathbf{I}}_d : \boldsymbol{\sigma}\| : (\tilde{\mathbf{D}}^e : (d\boldsymbol{\varepsilon} - d\boldsymbol{\varepsilon}^p)) - \frac{d\sigma_y}{d\varepsilon_{eq}^p} d\varepsilon_{eq}^p = 0 \quad (2.5.17)$$

この式を整理する事で次式が得られる。 G はせん断弾性係数、 H は加工硬化係数である。

$$\left. \begin{aligned} d\gamma &= \frac{\sqrt{6}G}{\sqrt{6}G + H} \frac{\tilde{\mathbf{I}}_d : \boldsymbol{\sigma}}{\|\tilde{\mathbf{I}}_d : \boldsymbol{\sigma}\|} : d\boldsymbol{\varepsilon} \\ H &\equiv \frac{d\sigma_y}{d\varepsilon_{eq}^p} \end{aligned} \right\} \quad (2.5.18)$$

これを元の構成則に代入して整理すると

$$\begin{aligned}
d\sigma &= \tilde{D}^e : (d\varepsilon - d\varepsilon^p) \\
&= \tilde{D}^e : \left(d\varepsilon - dy \frac{\tilde{\mathbf{I}}_d : \sigma}{\|\tilde{\mathbf{I}}_d : \sigma\|} \right) \\
&= \tilde{D}^e : \left(d\varepsilon - \frac{\sqrt{6}G}{\sqrt{6}G+H} \frac{\tilde{\mathbf{I}}_d : \sigma}{\|\tilde{\mathbf{I}}_d : \sigma\|} : d\varepsilon \frac{\tilde{\mathbf{I}}_d : \sigma}{\|\tilde{\mathbf{I}}_d : \sigma\|} \right) \\
&= \left(\tilde{D}^e - \tilde{D}^e : \frac{\sqrt{6}G}{\sqrt{6}G+H} \frac{\tilde{\mathbf{I}}_d : \sigma}{\|\tilde{\mathbf{I}}_d : \sigma\|} \otimes \frac{\tilde{\mathbf{I}}_d : \sigma}{\|\tilde{\mathbf{I}}_d : \sigma\|} \right) : d\varepsilon
\end{aligned} \tag{2.5.19}$$

これより接線剛性は

$$\tilde{D}_{continuum}^{ep} = \frac{d\sigma}{d\varepsilon} = \tilde{D}^e - \tilde{D}^e : \frac{\sqrt{6}G}{\sqrt{6}G+H} \frac{\tilde{\mathbf{I}}_d : \sigma}{\|\tilde{\mathbf{I}}_d : \sigma\|} \otimes \frac{\tilde{\mathbf{I}}_d : \sigma}{\|\tilde{\mathbf{I}}_d : \sigma\|} \tag{2.5.20}$$

となるこの式導出にはどの微分項にも差分近似を用いていない。よってこの接線剛性は無限小増分のひずみを仮定した時のもので連続接線剛性と呼ばれる。

2.5.2 陽解法による弾塑性モデルの積分

次に弾塑性モデルの積分手法について述べてゆく。ここでは例を示すために以下のような微分方程式を考えてみる。右辺は関数 f の三乗である。

$$\frac{df(t)}{dt} = f^3(t) \tag{2.5.21}$$

次の時刻の状態を知るために左辺を差分で表記し、この微分方程式が時刻 n で成立すると仮定すると右辺は時刻 n で表記され

$$\frac{f_{n+1} - f_n}{t_{n+1} - t_n} = f_n^3 \tag{2.5.22}$$

となる。これを式変形すると

$$f_{n+1} = f_n + (t_{n+1} - t_n) f_n^3 \tag{2.5.23}$$

を得る。このように右辺を時刻 n のもので記述したことにより次のステップにおける f_{n+1} が既知量のステップ n のみの代入計算のみで良い。この方法を前進形Euler法もしくは陽解法と呼ぶ。この差分式から導かれる f_{n+1} と t_{n+1} に関する導関数は

$$\frac{df_{n+1}}{dt_{n+1}} = f_n^3 \tag{2.5.24}$$

となり無限小増分が仮定される元の微分方程式の導関数に時刻 n の状態を代入したものと一致する. この陽解法による積分を弾塑性モデルに適用する.

$$d\sigma = \tilde{D}^e : (d\varepsilon - d\varepsilon^p) \quad (2.5.25)$$

さきほどと同様にこの式から導かれる各物理量の性質がステップ n で成立すると仮定する. すなわちステップ n の物理量を用いて降伏関数の適合条件 $d\phi=0$ を満たすものとする. すると以降の式導出は2.5.1節と全く同じになる. よって式(2.5.20)と同様に陽解法の時の接線剛性 \tilde{D}_{Exp}^{ep} は連続接線剛性と同じものとなる.

$$\left. \begin{aligned} \sigma_{n+1} &= \sigma_n + \tilde{D}_{Exp}^{ep} : d\varepsilon \\ \tilde{D}_{Exp}^{ep} &= \tilde{D}^e - \tilde{D}^e : \frac{\sqrt{6}G}{\sqrt{6G+H}} \frac{\tilde{I}_d : \sigma}{\|\tilde{I}_d : \sigma\|} \otimes \frac{\tilde{I}_d : \sigma}{\|\tilde{I}_d : \sigma\|} \end{aligned} \right\} \quad (2.5.26)$$

陽解法では前のステップの応力値を上式の第2式に代入する事で接線剛性が得られ, その接線剛性と剛性方程式の解から得られた全ひずみ増分を第1式に代入する事で次のステップの応力が求まる. この計算過程ではどこにも反復計算や連立方程式の求解を必要とせず全ての計算を陽的に実施できる点が計算負荷の面から利点となる.

ただしこの方法では降伏関数の適合条件をステップ n で成立すると仮定した定式化を行っているため, ステップ $n+1$ で応力状態が降伏曲面上にある保証がない. それを回避する手法に以下がある. すなわち上式で得られた応力 σ_{n+1} を

$$\sigma_{n+1} \rightarrow \sigma_{n+1} \frac{\sigma_y (\varepsilon_{eq}^p + \Delta\varepsilon_{eq}^p)}{\sqrt{\frac{3}{2}} \|\tilde{I}_d : \sigma\|} \quad (2.5.27)$$

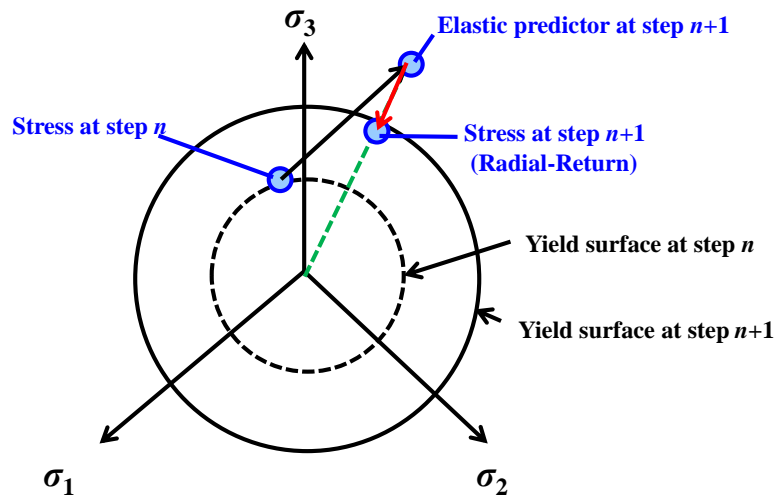


Fig. 2.5.1 Radial-Return in explicit integration

と置き換えて応力状態を強引に降伏曲面に引き戻す処理を加える。これは図2.5.1に示すように一度降伏曲面外に飛び出た応力を降伏曲面の半径方向に引き戻す処理と対応している。

2.5.3 陰解法による弾塑性モデルの積分

陽解法の時と同様に次のような簡単な微分方程式で考える。

$$\frac{df(t)}{dt} = f^3(t) \quad (2.5.28)$$

次の時刻における値を求めるために、左辺を差分で表記する。右辺については陽解法ではステップ n で成立すると仮定していたが、陰解法ではステップ $n+1$ で成立すると仮定する。

$$\frac{f_{n+1} - f_n}{t_{n+1} - t_n} = f_{n+1}^3 \quad (2.5.29)$$

これを式変形すると

$$f_{n+1} = f_n + (t_{n+1} - t_n) f_{n+1}^3 \quad (2.5.30)$$

となる。まず着目すべきことは上式が次のステップの f_{n+1} の非線形方程式になっている点である。すなわちこの方程式はNewton法などの数値解法によって陰的に解く必要がある。この点において陽解法と陰解法では積分計算が異なってくる。さらに f_{n+1} と t_{n+1} に関する導関数を考えてみる。上式を t_{n+1} で微分すると

$$\begin{aligned} \frac{df_{n+1}}{dt_{n+1}} &= f_{n+1}^3 + 3(t_{n+1} - t_n) f_{n+1}^2 \frac{df_{n+1}}{dt_{n+1}} \\ \therefore \frac{df_{n+1}}{dt_{n+1}} &= \frac{f_{n+1}^3}{1 - 3\Delta t f_{n+1}^2} \end{aligned} \quad (2.5.31)$$

となる。ただし $t_{n+1} - t_n$ を Δt とおいた。前節で述べたように陽解法では導関数が無限小増分を仮定した連続接線と一致していた。しかし陰解法では上式のように導関数が連続接線と一致せず有限増分値である Δt に応じて調整された値になっている。このように微分方程式の差分アルゴリズムとしっかりと「整合」した導関数を用いる事が弾塑性計算の収束性において極めて重要となる(Simo and Taylor, 1985; Simo and Taylor, 1986; Simo and Govindjee, 1988)。

以上の陰的積分法をまずは簡単な等方硬化Misesモデルに適用する方法について述べる。構成則における接線剛性は応力の関数であり、陰解法を使う場合はこの接線剛性の変数としてステップ $n+1$ における値を用いるため始めの段階では未知状態である。そこ

でまずは次のステップにおける各状態量を求める積分計算を行い、それを用いて接線剛性を計算するという流れとする。

まず構成則と流れ則は弾塑性の各定理から

$$\left. \begin{aligned} \sigma_{n+1} &= \sigma_n + \tilde{\mathbf{D}}^e : (\Delta \boldsymbol{\varepsilon} - \Delta \boldsymbol{\varepsilon}^p) \\ \Delta \boldsymbol{\varepsilon}^p &= \Delta \gamma \frac{\tilde{\mathbf{I}}_d : \sigma_{n+1}}{\|\tilde{\mathbf{I}}_d : \sigma_{n+1}\|} \\ \Delta \gamma &= \Delta \varepsilon_{eq}^p \\ \sigma_{y_{n+1}} &= \sigma_y(\varepsilon_{eq_{n+1}}^p) \end{aligned} \right\} \quad (2.5.32)$$

となる。この第2式を第1式に代入すると

$$\sigma_{n+1} = \sigma_n + \tilde{\mathbf{D}}^e : \Delta \boldsymbol{\varepsilon} - 2G\Delta\gamma \frac{\tilde{\mathbf{I}}_d : \sigma_{n+1}}{\|\tilde{\mathbf{I}}_d : \sigma_{n+1}\|} \quad (2.5.33)$$

ここで右辺第1項と第2項をまとめて

$$\boldsymbol{\sigma}^{try} \equiv \sigma_n + \tilde{\mathbf{D}}^e : \Delta \boldsymbol{\varepsilon} \quad (2.5.34)$$

のように試行応力 $\boldsymbol{\sigma}^{try}$ とおく。全ひずみ増分 $\Delta \boldsymbol{\varepsilon}$ は剛性方程式を解いた段階で既知であるため、試行応力は既知量となる。この時、構成則は

$$\sigma_{n+1} = \boldsymbol{\sigma}^{try} - 2G\Delta\gamma \frac{\tilde{\mathbf{I}}_d : \sigma_{n+1}}{\|\tilde{\mathbf{I}}_d : \sigma_{n+1}\|} \quad (2.5.35)$$

となる。今、求めたいものは塑性乗数 $\Delta\gamma$ と応力 σ_{n+1} と相当塑性ひずみ $\varepsilon_{eq_{n+1}}^p$ である。まず応力の静水圧成分を求めるために式(2.5.35)の tr を取ると

$$tr(\sigma_{n+1}) = tr(\boldsymbol{\sigma}^{try}) - 2G\Delta\gamma \operatorname{tr} \left(\frac{\tilde{\mathbf{I}}_d : \sigma_{n+1}}{\|\tilde{\mathbf{I}}_d : \sigma_{n+1}\|} \right) \quad (2.5.36)$$

となるが右辺第2項はの括弧の中身は偏差成分であるためゼロになり

$$tr(\sigma_{n+1}) = tr(\boldsymbol{\sigma}^{try}) \quad (2.5.37)$$

となる。すなわち試行応力の静水圧の値をそのままステップ $n+1$ の静水圧として用いることができる。次に偏差成分を考える。式(2.5.35)から式(2.5.37)×1/3を引いて偏差射影テンソル $\tilde{\mathbf{I}}_d$ を掛けると

$$\left(1 + 3G \frac{\Delta \varepsilon_{eq}^p}{q_{n+1}} \right) (\tilde{\mathbf{I}}_d : \sigma_{n+1}) = \tilde{\mathbf{I}}_d : \boldsymbol{\sigma}^{try} \quad (2.5.38)$$

が得られる．さらに両辺に2/3を掛けてノルムを取ると相当応力 q を用いて

$$q_{n+1} + 3G\Delta\varepsilon_{eq}^p = q^{try} \quad (2.5.39)$$

となる．また相当応力は降伏応力と等しいため q_{n+1} を σ_y と置き換えると

$$\sigma_y(\Delta\varepsilon_{eq}^p) + 3G\Delta\varepsilon_{eq}^p - q^{try} = 0 \quad (2.5.40)$$

を得る．このモデルの場合は塑性乗数と相当塑性ひずみ増分は等しくなるため上式を

$$f(\Delta\gamma) = \sigma_y(\Delta\gamma) + 3G\Delta\gamma - q^{try} = 0 \quad (2.5.41)$$

と書くことができる．これは塑性乗数のみを未知変数とする非線形方程式である．この方程式をNewton法などによって解くことで相当塑性ひずみ増分が求まり，式(2.5.38)から偏差応力も分かる．これまでの応力積分の流れは試行応力によって仮の応力を求めてから式(2.5.41)および式(2.5.38)でそれを降伏曲面上に乗る応力状態へと引き戻すためReturn-Mappingと呼ばれ，式(2.5.41)をReturn-Mapping方程式と言う．これが等方硬化Mises材における陰解法による応力積分である．

次にこの応力積分法と整合した接線剛性について述べる．まず式(2.5.38)は左辺と右辺で定数倍されているにすぎないのでその方向は同じである．よって

$$\frac{\tilde{\mathbf{I}}_d : \boldsymbol{\sigma}_{n+1}}{\|\tilde{\mathbf{I}}_d : \boldsymbol{\sigma}_{n+1}\|} = \frac{\tilde{\mathbf{I}}_d : \boldsymbol{\sigma}^{try}}{\|\tilde{\mathbf{I}}_d : \boldsymbol{\sigma}^{try}\|} \quad (2.5.42)$$

と書ける．これを式(2.5.35)に代入すると

$$\boldsymbol{\sigma}_{n+1} = \boldsymbol{\sigma}^{try} - 2G\Delta\gamma \frac{\tilde{\mathbf{I}}_d : \boldsymbol{\sigma}^{try}}{\|\tilde{\mathbf{I}}_d : \boldsymbol{\sigma}^{try}\|} \quad (2.5.43)$$

さらに試行応力に対して試行弾性ひずみを次式のように導入する．

$$\left. \begin{aligned} \boldsymbol{\sigma}^{try} &\equiv \tilde{\mathbf{D}}^e : (\boldsymbol{\varepsilon}_n^e + \Delta\boldsymbol{\varepsilon}) = \tilde{\mathbf{D}}^e : \boldsymbol{\varepsilon}^{etry} \\ \boldsymbol{\varepsilon}^{etry} &\equiv \boldsymbol{\varepsilon}_n^e + \Delta\boldsymbol{\varepsilon} \end{aligned} \right\} \quad (2.5.44)$$

これを式(2.5.43)に代入して整理すると

$$\left. \begin{aligned} \boldsymbol{\sigma}_{n+1} &= \left(\tilde{\mathbf{D}}^e - \frac{6\Delta\gamma(\boldsymbol{\varepsilon}^{etry})G^2}{q^{try}(\boldsymbol{\varepsilon}^{etry})} \tilde{\mathbf{I}}_d \right) : \boldsymbol{\varepsilon}^{etry} \\ q^{try} &\equiv \sqrt{\frac{3}{2}} \|\tilde{\mathbf{I}}_d : \boldsymbol{\sigma}^{try}\| = \sqrt{6G} \|\tilde{\mathbf{I}}_d : \boldsymbol{\varepsilon}^{etry}\| \end{aligned} \right\} \quad (2.5.45)$$

と書ける．ここで q^{try} は上式第2式のように試行弾性ひずみによって記述できる．また応力積分の説明で述べたように塑性乗数 $\Delta\gamma$ は試行応力，試行弾性ひずみによってその値が変わるので上式のように試行弾性ひずみの関数として記述できる．以上により応力

が全て試行弾性ひずみを内部変数として記述する事ができる。この時、接線剛性は

$$\tilde{\mathbf{D}}^{ep} \equiv \frac{d\boldsymbol{\sigma}_{n+1}}{d\boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}} = \frac{d\boldsymbol{\sigma}_{n+1}}{d(\boldsymbol{\varepsilon}_n + \Delta\boldsymbol{\varepsilon})} = \frac{d\boldsymbol{\sigma}_{n+1}}{d(\boldsymbol{\varepsilon}_n^e + \boldsymbol{\varepsilon}_n^p + \Delta\boldsymbol{\varepsilon})} = \frac{d\boldsymbol{\sigma}_{n+1}}{d(\boldsymbol{\varepsilon}_n^e + \Delta\boldsymbol{\varepsilon})} = \frac{d\boldsymbol{\sigma}_{n+1}}{d\boldsymbol{\varepsilon}^{etry}} \quad (2.5.46)$$

と書ける。よって式(2.5.45)の試行弾性ひずみのみを変数として記述された応力を試行弾性ひずみで微分し次式を得る。

$$\tilde{\mathbf{D}}^{ep} \equiv \frac{\partial\boldsymbol{\sigma}_{n+1}}{\partial\boldsymbol{\varepsilon}^{etry}} + \frac{\partial\boldsymbol{\sigma}_{n+1}}{\partial(\Delta\gamma)} \otimes \frac{\partial(\Delta\gamma)}{\partial\boldsymbol{\varepsilon}^{etry}} + \frac{\partial\boldsymbol{\sigma}_{n+1}}{\partial q^{try}} \otimes \frac{\partial q^{try}}{\partial\boldsymbol{\varepsilon}^{etry}} \quad (2.5.47)$$

各微分について計算すると

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial\boldsymbol{\sigma}_{n+1}}{\partial\boldsymbol{\varepsilon}^{etry}} &= \tilde{\mathbf{D}}^e - \frac{\Delta\gamma 6G^2}{q^{try}} \tilde{\mathbf{I}}_d \\ \frac{\partial\boldsymbol{\sigma}_{n+1}}{\partial(\Delta\gamma)} &= -\frac{6G^2}{q^{try}} \tilde{\mathbf{I}}_d : \boldsymbol{\varepsilon}^{etry} \\ \frac{\partial\boldsymbol{\sigma}_{n+1}}{\partial q^{try}} &= \frac{6\Delta\gamma G^2}{(q^{try})^2} \\ \frac{\partial q^{try}}{\partial\boldsymbol{\varepsilon}^{etry}} &= \sqrt{6G} \frac{\tilde{\mathbf{I}}_d : \boldsymbol{\sigma}^{try}}{\|\tilde{\mathbf{I}}_d : \boldsymbol{\sigma}^{try}\|} \end{aligned} \right\} \quad (2.5.48)$$

残った $\frac{\partial(\Delta\gamma)}{\partial\boldsymbol{\varepsilon}^{etry}}$ については以下のようにして求める。この微分は試行弾性ひずみの変化に対して塑性乗数がどれほど変化するかを意味しているが、その程度は応力積分計算で決まる。すなわちこの微分を求めるには式(2.5.41)の Return-Mapping 方程式を用いる必要がある。Return-Mapping 方程式(2.5.41)の変分=0 より

$$\begin{aligned} df &= \frac{\partial f}{\partial\boldsymbol{\varepsilon}^{etry}} : \partial\boldsymbol{\varepsilon}^{etry} + \frac{\partial f}{\partial(\Delta\gamma)} \partial(\Delta\gamma) = 0 \\ \therefore \frac{\partial(\Delta\gamma)}{\partial\boldsymbol{\varepsilon}^{etry}} &= -\frac{\frac{\partial f}{\partial\boldsymbol{\varepsilon}^{etry}}}{\frac{\partial f}{\partial(\Delta\gamma)}} \end{aligned} \quad (2.5.49)$$

このように Return-Mapping 方程式の微分を用いる事で $\frac{\partial(\Delta\gamma)}{\partial\boldsymbol{\varepsilon}^{etry}}$ が求まる。以上のように

陰解法における接線剛性を求める事ができる。既に式(2.5.31)による簡単な例題で陽解法と陰解法の導関数の違いについて述べたが、その性質はこの弾塑性モデルでも見て取れる。すなわち陰解法においてそれに整合した接線剛性を用いると接線剛性に $\Delta\gamma$ が含まれ有限増分量に応じた値に調整される。一方、式(2.5.26)にあるように陽解法の場合、接線剛性に $\Delta\gamma$ が含まれず有限増分量に応じた調整機能が無い。また陽解法では接線剛性が無限小増分を仮定しているため、実際の数値解析である有限増分量とのミスマッチ

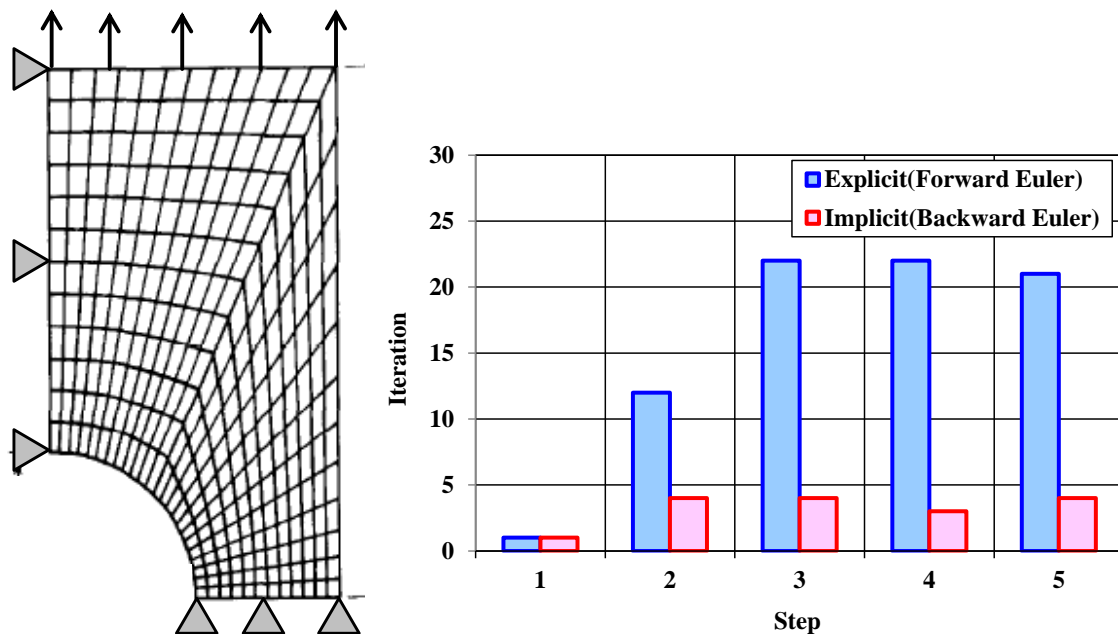
を生じて残差力の収束性が陰解法に比べて非常に悪いという欠点を有する。

表 2.5.1 に弾塑性モデルの積分について陽解法と陰解法の長所と短所をまとめる。簡潔に述べると陽解法は式導出が容易だが、計算が安定せず実用的ではない。一方陰解法は収束性に優れており大きな時間増分をとっても安定に計算できるロバスト性と計算コストに優れた利点があるが、解析式の導出が陽解法に比べて非常に煩雑になる欠点がある。安定性や計算時間（時間増分）などの実用面を考えると陰解法の方が優れているため静的な問題を解く商用 FEM ソフトウェア (Marc, ABAQUS, ADVENTURECluster, etc) のほとんどでは陰解法が用いられている。

Table 2.5.1 Property of integration in explicit scheme with implicit scheme

	応力積分	接線剛性	残差力収束性	解析式の導出
陽解法	陽的代入計算	無限小増分を仮定	悪い	容易
陰解法	非線形方程式の求解	有限増分に対応	良い	非常に煩雑

図 2.5.2 はそのベンチマークとして円孔板の引張問題を陽解法と陰解法のそれぞれで解いたものである (Simo and Taylor, 1985; Simo and Taylor, 1986)。モデルは対称性を考慮して 1/4 領域のみ要素を作成し円孔形状となるように変位拘束を用いた対称条件を用いている。図 2.5.2(b) は引張変位の計算ステップに対して非線形剛性方程式を解く際、残差力が収束するまでに要した反復回数を陽解法と陰解法で比較した結果を示す。1 ステップ目は弾性状態であったため剛性方程式は線形となり陽解法と陰解法ともに 1 ステップで求解できている。2 ステップ目以降弾塑性状態となっている。この時、陰解法では 3~4 ステップ程度で求解できていることに対して陽解法では 20 回以上もの反復を要している。このとき反復 1 回あたりにつき剛性方程式という大きな連立方程式を解かなければならないため計算時間への寄与も大きい。一般的に節点数が多くなり問題の規模が大きくなるほど全体の計算のうち剛性方程式の求解に費やす時間の割合が大部分を占めるため、陰解法による残差力収束性の向上の利点は非常に大きいと考えられる。



(a) Tensile plane model with hole

(b) Iteration to satisfy equilibrium equation

Fig. 2.5.2 Comparison of convergence in explicit scheme with implicit scheme

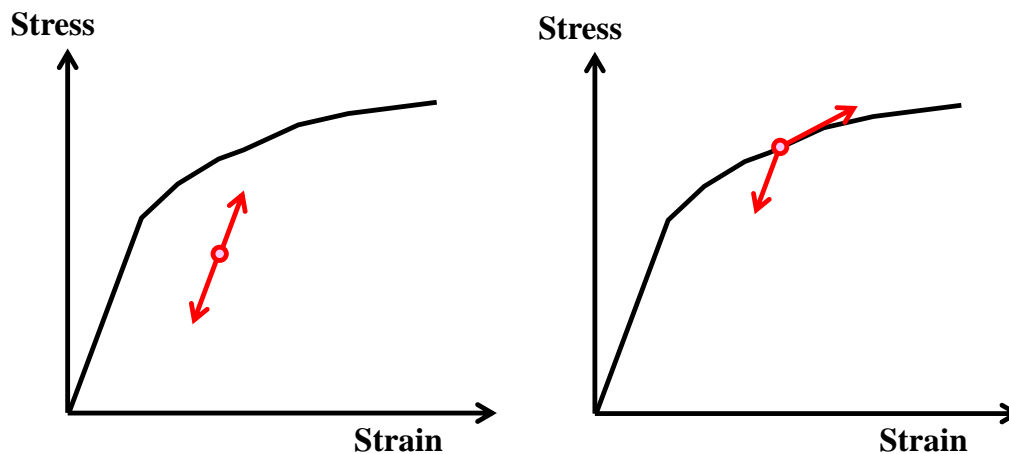
2.5.4 陰解法における残差力収束性を向上する工夫

前述のように弾塑性有限要素法の計算では全体の計算時間のうち剛性方程式の求解の占める割合が大きい。そのため残差力の収束計算を1回でも少なくする事で計算時間を大きく削減する事ができる。

図 2.5.3 の赤点はあるステップにおいてつり合いが取れている状態である。この状態から負荷状態が変化しそれに伴って変形状態も変化する場合を考える。赤矢印の傾きは負荷、除荷に対する材料剛性を示す。図 2.5.3(a)はもともと弾性状態にあった場合、図 2.5.3(b)はもともと弾塑性状態にあった場合を示している。この時、材料の剛性について次のように考えられる。

- ・もともと弾性状態だった場合
 - 応力が上昇⇒弾性の材料剛性
 - 応力が低下⇒弾性の材料剛性

- ・もともと弾塑性状態だった場合
 - 応力が上昇（負荷） ⇒ 弾塑性の剛性
 - 応力が低下（除荷） ⇒ 弾性の剛性



(a) Elastic condition

(b) Elasto-plastic condition

Fig. 2.5.3 Stiffness under loading or unloading

残差力の収束性について工夫が必要なのは、もともと弾塑性状態だった場合である。なぜなら次の変形が負荷と除荷のどちらかに応じて材料剛性が大きく変化するためである。この事は図 2.5.3(b)中の赤印の勾配が負荷、除荷で大きく異なることから分かる。よって本来、除荷状態なのにも関わらず初期状態が弾塑性状態であるからといって弾塑性の剛性を用いてしまうと剛性マトリックスの材料剛性を大きく見誤ってしまい初期の反復解（変位）が釣り合い状態から大きく外れてしまう。この大きな誤差を含む変位を以降の反復で収束させようとした時、多くの反復を要してしまい残差力がなかなか収束しないという症状が出る。

この問題を避けるために剛性方程式を解く時の第 1 回目の反復をダミー計算として扱う。すなわちその要素積分点が次に「負荷状態」か「除荷状態」のどちらに属するかを判別するための計算を行う。その後、この判定結果に基づいた材料剛性で剛性マトリックスを作成し初期変位解を求めて以降の反復に続けてゆく。本研究では以上のような各時間ステップの初期判定計算を「試行増分計算」と呼んでいる。

この「試行増分計算」を取り入れる事による反復回数への優位性を調べる。この検証として図 2.5.4 に示すような片持ち梁の曲げ問題(有限変形を考慮)を扱った。全体寸法 10 mm×20 mm×100 mm の片持ち梁の一端を完全拘束し他端を z 方向に 10 mm 強制変位で曲げた。ヤング率は 200GPa, ポアソン比は 0.3, 初期降伏応力は 100MPa, 弾塑性モデルは等方硬化で加工硬化係数を 2000MPa の一定値とした。この問題を変位増分 0.2mm の合計 50 ステップを掛けて解いた。図 2.5.5 は 10 mm 曲げた時の降伏域の分布(赤)を示すもので弾塑性域が広く分布している様子が分かる。図 2.5.6 は各ステップにおいて残差力を収束させるまでの剛性方程式求解回数を示す。また図 2.5.7 はその連立方程式を解くために費やした C.G.C.G 法(Coerce Gridbased CG)の反復回数である。この節で述べ

た試行増分プロセスを考慮しない場合と考慮した場合について比較した。その結果、試行増分プロセスの考慮によって反復回数が大きく減少している結果が得られた。この例題では試行増分プロセスを考慮している方が全計算時間で約 30%削減する結果となった。

よって本節で述べた試行増分プロセスは弾塑性計算の計算負荷を低減する手段として非常に有効であると考えられるため次節以降で述べる損傷弾塑性モデルに対しても同様に取り入れる。

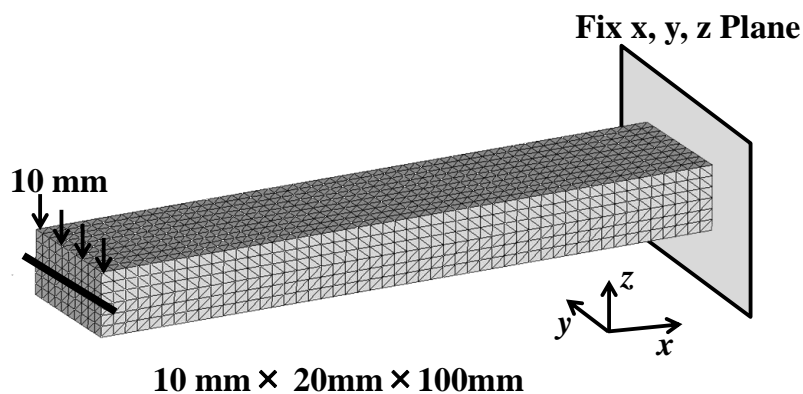


Fig. 2.5.4 Cantilever model

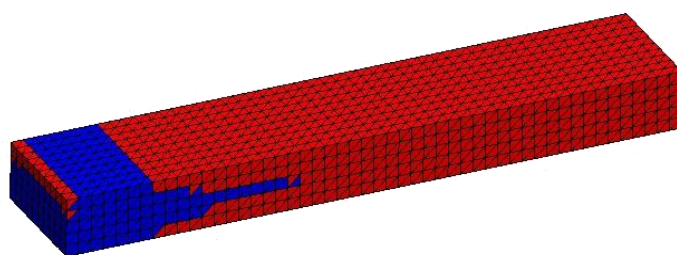


Fig. 2.5.5 distribution of yield condition
(red reason is elasto-plastic zone, blue zone is elastic zone)

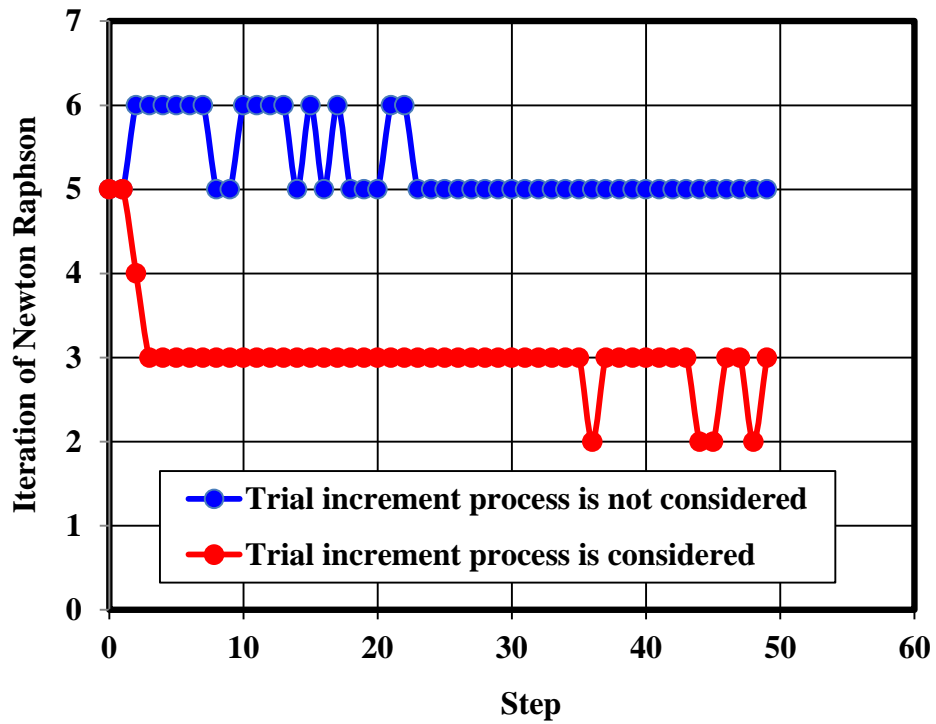


Fig. 2.5.6 Number of iteration to converge residual force

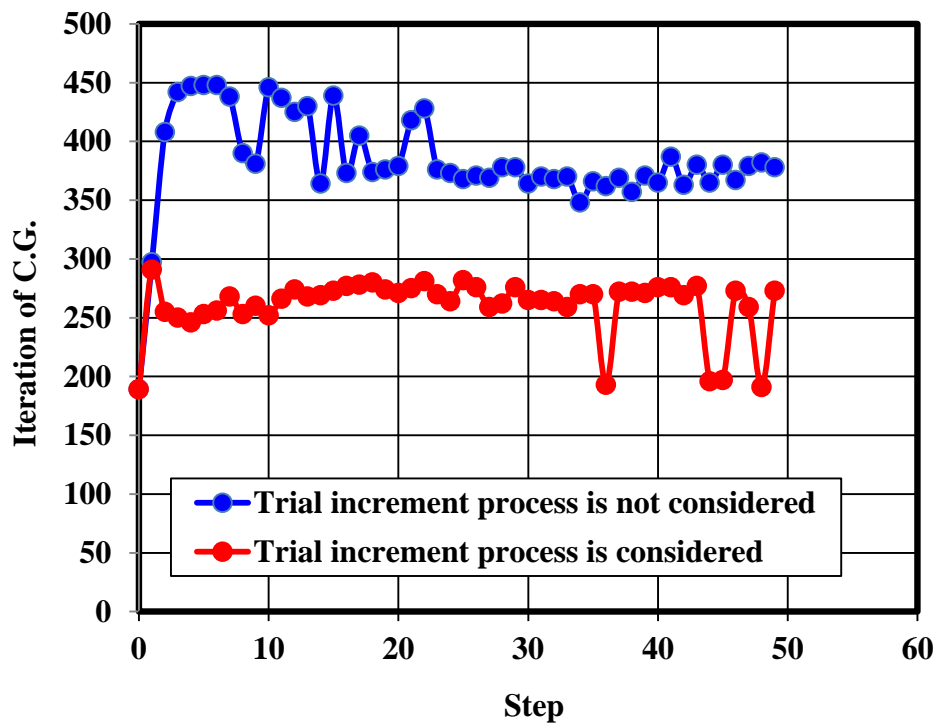


Fig. 2.5.7 Number of iteration of C.G. C.G scheme to converge residual force

第3章 損傷弾塑性モデル

3.1 Bauschinger 効果と複合硬化モデル

多くの金属材料は弾塑性状態に至る大負荷を受けた後、除荷や負荷方向が変わると Bauschinger 効果を生じる。Bauschinger 効果について説明する。図 3.1.1 は SPFC 鋼材の単軸負荷試験片に対し引張 - 圧縮の繰り返し負荷を与えた時の応力ひずみ線図の実測結果を示す(Yoshida, et al., 2001)。初期降伏状態を通過した後、1 回目の最大引張応力 σ_{Tens} に達したところで除荷および圧縮を開始し圧縮側の降伏応力 σ_{Comp} に達する。この時に

$$|\sigma_{Tens}| \neq |\sigma_{Comp}| \quad (3.1.1)$$

となる現象を Bauschinger 効果と呼ぶ。この図の例のように初期に引張応力で弾塑性変形させた場合は σ_{Tens} の方が σ_{Comp} よりも絶対値が大きな値になる事が知られている。本研究でシミュレーションを目指す極低サイクル疲労破壊は繰り返し大負荷を伴う。またこの図のように Bauschinger 効果は応力ひずみ挙動に対して大きな影響を持つ。よって適切に極低サイクル疲労破壊を表現するために、まずはその弾塑性モデルとして Bauschinger 効果を表現できるものを導入する必要がある。

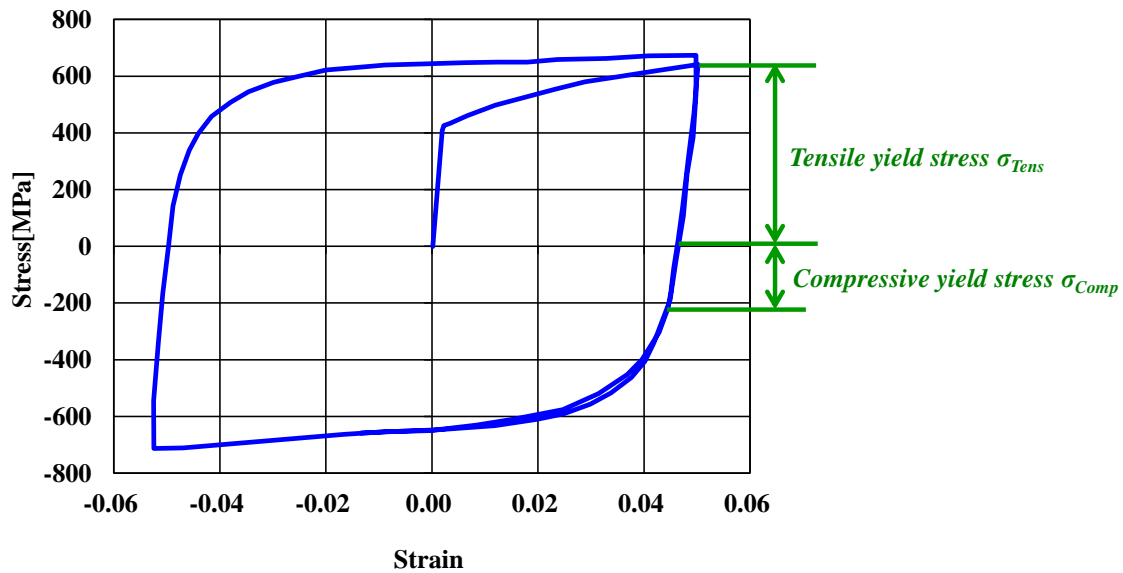


Fig. 3.1.1 Stress-strain curve in cyclic loading

Bauschinger 効果を表現するための弾塑性モデルについて説明する。図 3.1.2 から図 3.1.5 は無負荷状態から引張側の弾塑性変形を得た後、圧縮側の弾塑性変形に至る過程を示したものである。各図の緑色の図は図 3.1.1 に示したような単軸負荷下の実材料挙

動の **Bauschinger** 効果を概念的に表現したものである。また青の図は弾塑性モデルとして等方硬化モデルを用いたものである。ここで等方硬化モデルとは弾塑性変形中に降伏曲面の中心点は動かずに降伏曲面が等方的に膨張すると仮定したモデルのことを示す。ただしここで示す降伏曲面の図は平面応力状態において主応力 σ_1 , σ_2 が作用する場合を想定している。単軸負荷下における負荷方向を σ_2 とする。また赤図は弾塑性モデルとして等方硬化と移動硬化を組み合わせた複合硬化モデルを用いたものである。ここで移動硬化とは弾塑性変形に伴って降伏曲面の中心点が移動する硬化モデルである。すなわち複合硬化モデルとは弾塑性変形に伴って降伏曲面が移動しながら膨張するモデルである。また各図の丸点はその時の応力状態を示す点であり緑図の応力ひずみ曲線における緑点と降伏曲面における青点、赤点のそれぞれが互いに対応している。

まず図 3.1.2.は無負荷時の応力状態を示す。無負荷状態であるため各点は原点上に存在する。初期降伏応力は等方硬化モデルと複合硬化モデルで共に等しいため加工硬化を生じる前は両者の降伏曲面は同一のものとなる。

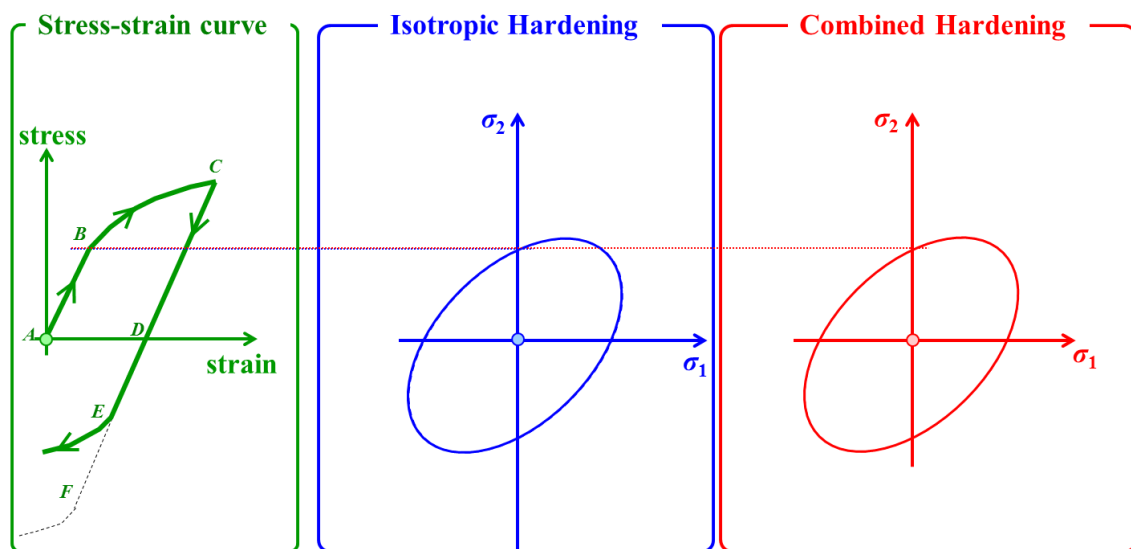


Fig. 3.1.2 stress state in no loading

図 3.1.3 は徐々に引張負荷を大きくして初期降伏応力に達した状態を示す。この時、降伏曲面における応力はちょうど降伏曲面に接した状態となる。この段階でも両者の加工硬化モデルで差は見られない。

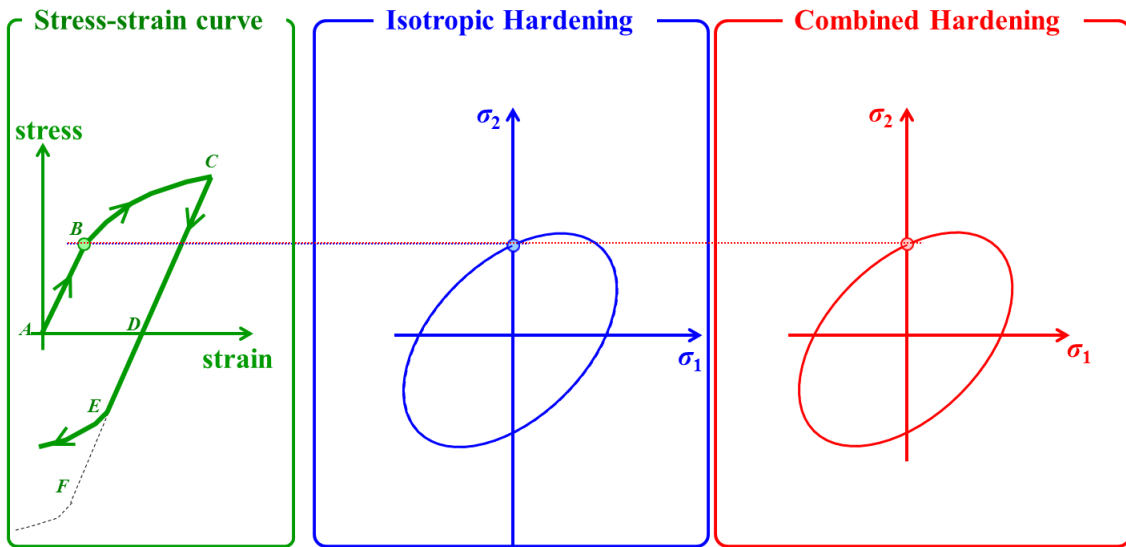


Fig. 3.1.3 stress state in initial yield

図 3.1.4 はさらに引張負荷を大きくし弾塑性変形を進行させ最大引張応力に達した状態を示す。この時、等方硬化モデルでは降伏曲面の中心点は動かず降伏曲面が等方的に膨張する。一方、複合硬化モデルでは降伏曲面の中心点が移動しながら等方的な膨張も同時に生じる。この負荷状態でも両者のモデルには大きな差があるように見えるが共に加工硬化後の最大引張応力として同一の値を表現できるため計算結果に差は現れない。すなわち1回の大負荷を掛け続けるような問題では等方硬化モデルと移動硬化モデルのどちらを用いても差は現れない。

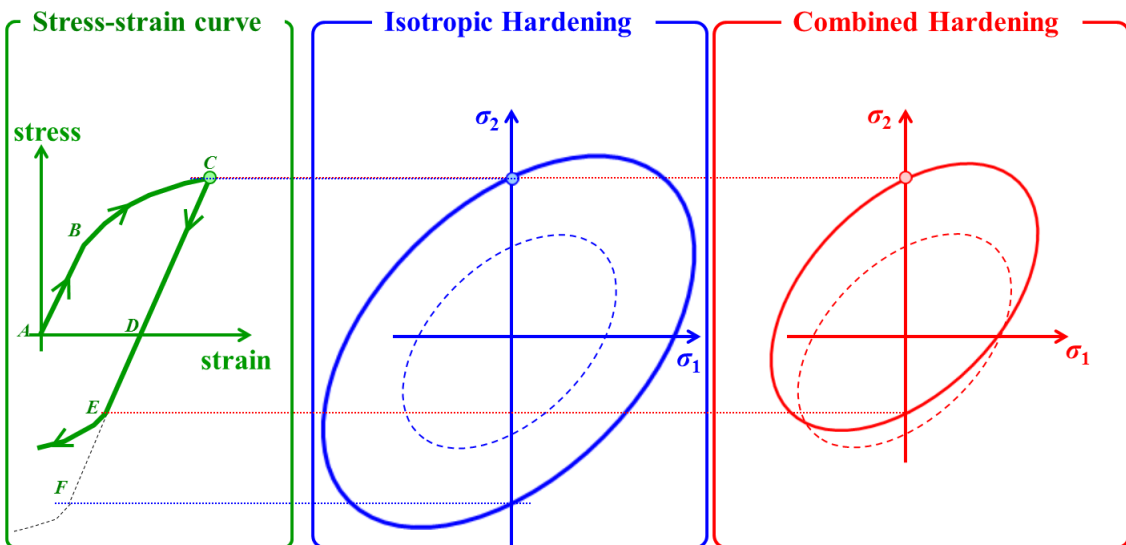


Fig. 3.1.4 stress state after hardening in tensile loading

図 3.1.5 は図 3.1.4 の引張側の加工硬化の後, 除荷を経て圧縮側の降伏応力に達した状態を示す. 実材料挙動 (緑図) では図中の CD の長さと DE の長さが異なり Bauschinger 効果を生じる. しかし等方硬化モデルでは降伏曲面が飽くまで等方的な膨張しか表現できないため引張側の降伏応力と同じ F 点で圧縮側の降伏が生じる. すなわち等方硬化モデルでは Bauschinger 効果を表現する事ができない. 一方, 複合硬化モデルでは降伏曲面の中心点が動く事で Bauschinger 効果を表現する事が可能となる.

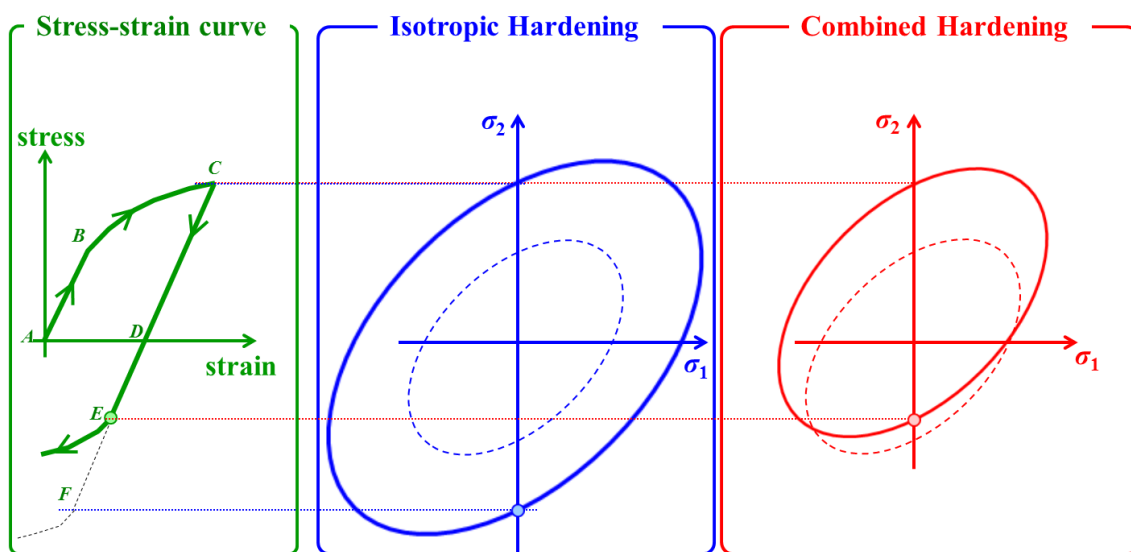


Fig. 3.1.5 stress state after hardening in tensile loading

以上のように等方硬化モデルと複合硬化モデルの違いを説明してきたが, 極低サイクル疲労破壊のように繰り返し大負荷により弾塑性変形を伴う場合は Bauschinger 効果が生じてしまうため複合硬化まで考慮する必要がある. 複合硬化モデルを用いていれば 1 回の大負荷から繰り返し大負荷まで表現できる「大は小を兼ねる」という意味での利点がある. しかし第 4 章で説明するように等方硬化モデルに対して複合硬化モデルは材料定数の同定が比較的難しくなる課題がある.

3.2 Chaboche による分割背応力を用いた複合硬化モデル

Bauschinger 効果を表現するための移動硬化モデルとして線形移動硬化則(Prager, 1949)を始めとし非線形モデル(Armstrong and Frederick, 1966)へと発展した. 多面モデル(Iwan, 1967; Mroz, 1967), 二面モデル(Krieg, 1975; Dafalias and Popov, 1975), 非線形移動硬化モデル(Ohno and Wang, 1993)や分割背応力モデル(Chaboche, 1986)などが挙げられる. 本研究では極低サイクル疲労損傷を表現するための移動硬化モデルとして分割背応力モデルを用いた. このモデルは非線形背応力発展則を複数組み合わせることで多くのサイクル数まで実験結果を追従可能で, さらに既存の多くの商用ソフトに標準装備されていることから材料定数のデータベースも揃っており工学的実用性を考えたためである.

Chaboche らによって提案された分割背応力モデル(Chaboche, 1986)は式(3.2.1)で示されるように N_{kin} 組の分割背応力 β_k を重ね合わせることで全体背応力 β を表現するものである. 移動硬化による降伏曲面の移動は全体背応力を用いて表現される. 各分割背応力は式(3.2.2)のように非線形の背応力挙動を表現する Armstrong-Frederick 則によって表現される(Lemaitre, 1992; 村上, 2008). ただし a_k, b_k は材料定数である. また以降はスカラー量を細字、2 階のテンソル量を太字、4 階のテンソル量をチルダ付太字で示す.

$$\beta = \sum_{k=1}^{N_{kin}} \beta_k \quad (3.2.1)$$

$$\dot{\beta}_k = a_k \dot{\varepsilon}^p - b_k \dot{\gamma} \beta_k \quad (3.2.2)$$

等方硬化則は式(3.2.3)のように N_{iso} 個の指数関数則を組み合わせた形式を用いる. ただし A_k, B_k は材料定数, R は等方硬化の内部変数を示す. 分割背応力モデルと損傷モデルを連成モデルさせた降伏条件は式(3.2.4)となる. ただし η は相対応力である. また本研究の複合硬化則は等方硬化則と移動硬化則を独立とする古典的な仮定に基づく.

$$\sigma_y = \sigma_{y0} + \sum_{k=1}^{N_{iso}} [A_k (1 - e^{-B_k R})] \quad (3.2.3)$$

$$\left. \begin{aligned} q - \sigma_y &= 0 \\ q &\equiv \sqrt{\frac{3}{2}} \|\eta\| \\ \eta &\equiv \tilde{\mathbf{I}}_d : \sigma - \beta \end{aligned} \right\} \quad (3.2.4)$$

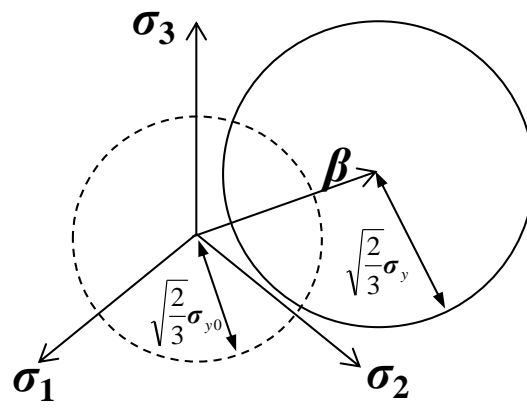


Fig. 3.2.1 Deformation of yield function considering isotropic hardening and kinematic hardening on π plane

3.3 連続体損傷力学による損傷モデル

材料損傷を記述するモデルは幾つかある。その1つのアプローチとして散逸ポテンシャルや降伏関数に材料の微視的損傷を組込み構成則へ反映させて損傷計算を行う手法が用いられている。例えば汎用ソフトウェアで代表的に用いられる損傷モデルとして延性破壊の微視的機構であるポイドをポイド体積率として降伏関数に組込んだ Gurson の降伏関数(Gurson, 1977)による損傷モデルがあり多くの計算事例と実績(Xia, et al., 1995; Ma FS, 1995)がある。しかし繰返し負荷を受ける状態においてこの Gurson モデルは引張り負荷下で損傷が進展するが、逆に圧縮状態では損傷が回復してしまうため実験で観測されるような損傷進展を表現する事ができないとの指摘がある(de Souza Neto, et al., 1998; de Souza, et al., 2008)。よって Gurson モデルは極低サイクル疲労のような繰返し負荷問題を取り扱うにはあまり適していない。

図 3.3.1 は S45C 鋼の丸棒に単軸負荷を掛けながら逐次除荷を行い、その時点の弾塑性変形におけるヤング率を測定したものである。図 3.3.2 は負荷-除荷サイクルのサイクル数に対するヤング率の値である。このデータから弾塑性変形の進行につれてヤング率が 50%程度まで低下している様子が分かる。さらに文献(Apostolopoulos and Rodopoulos, 2010)によると図 3.3.3 のようにひずみ振幅一定のもと両振幅で繰返し負荷を掛けた時にも同様にヤング率の低下がみられる。このように弾塑性変形の進行による材料損傷の進展により見かけの巨視的弾性材料剛性が低下する事が報告されており、この事実は工学的には大負荷を受けた機械部品の巨視的弾性材料剛性が変化し、その後の変形挙動に大きな影響を与え機械部品の性能低下に繋がる危険を含んでいる。よってこの巨視的な弾性材料剛性を机上で予測する事は工学的に重要となる。しかし前述の Gurson モデルではこの巨視的弾性材料剛性の変化挙動を表現する事ができない。そこで本研究では材料内の微視的損傷とそれによる巨視的弾性材料剛性の変化を共に表現する事ができる点で工学的実用性に優れていると考え連続体損傷力学に着目した。

連続体損傷力学では、損傷状態を巨視力学的損傷変数によってモデル化するとともに、この損傷変数によって損傷材料の力学的挙動と損傷の発達を記述する。はじめに損傷状態の力学的モデル化の方法とこれによって導かれた損傷変数を紹介する。損傷力学による損傷・破壊解析では損傷の発達による応力の拡大を有効応力によって表現しこの有効応力を用いて損傷材料と非損傷材料の間の力学的等価性を仮定する。またこれらの有効応力と力学的等価性の仮説によって損傷の発達に伴う材料の弾性特性の変化を表現する。

材料の損傷状態を適切にモデル化するには次の 3 つの問題を解決しなければならない。すなわち

- 1)分布空隙のどのようなメゾ力学的効果に着目して損傷状態を定義するか。
- 2)それをどのような数学的特性を持った損傷変数として表現するか。

3)その損傷変数の大きさをどのようにして定量化するか.
である. これらについては以降に示すようなアプローチがとられた.

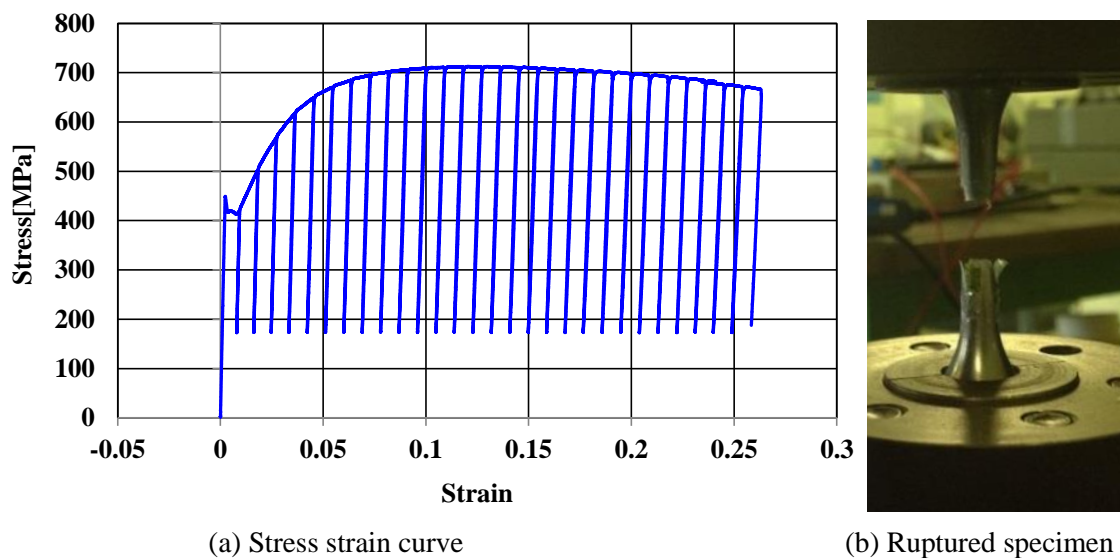


Fig. 3.3.1 Stress strain curve with unloading

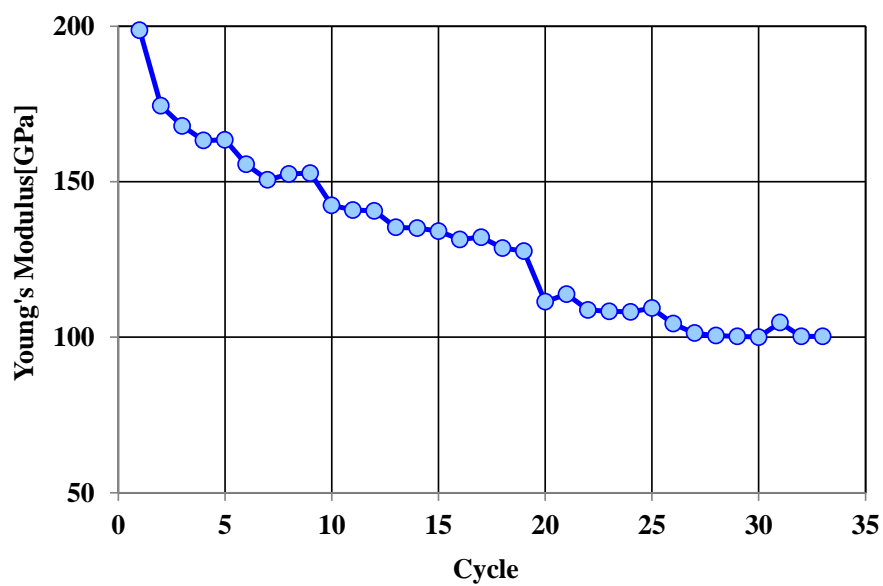


Fig. 3.3.2 Change of Young's modulus

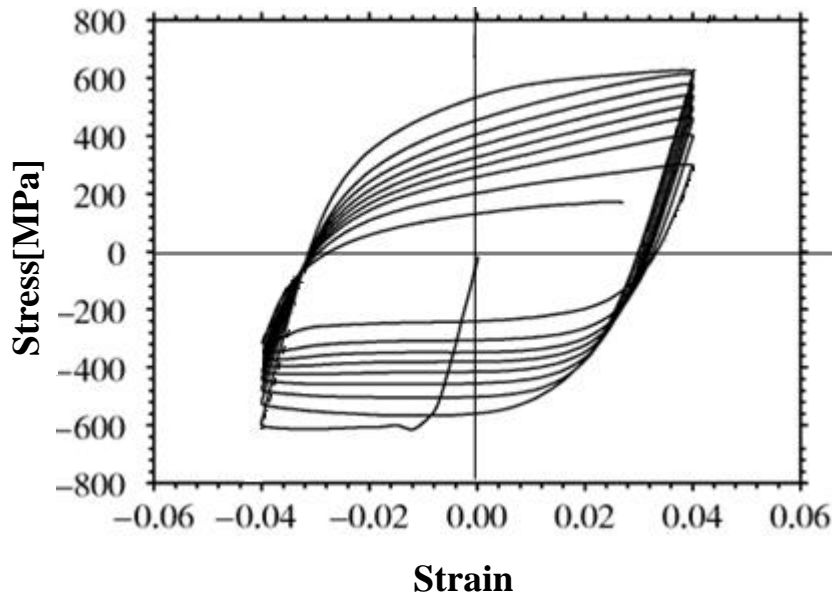


Fig. 3.3.3 Deterioration of macroscopic elastic stiffness
(Apostolopoulos and Rodopoulos, 2010)

まず連続体損傷力学の概念は脆性的なクリープ破断時間を算定する目的から提案された(Kachanov1958). 彼はクリープ損傷はクリープの進行過程での微小空隙の発達によってもたらされると考えその損傷状態を初期の非損傷状態では $\Psi=1$ 完全に損傷した状態では $\Psi=0$ となるようなスカラー損傷変数 Ψ を用いて表現した. そして Kachanov は損傷を

$$\dot{\Psi} = -A_c \left(\frac{\sigma}{\Psi} \right)^{m_c} \quad (3.3.1)$$

のような発展式によって記した. ただし, ここで A_c, m_c は材料定数である. その後, Rabotov は Ψ の代わりに新しい損傷変数 $D=1 - \Psi$ を用いるとともに損傷はクリープ速度 de/dt にも影響を及ぼすとして Kachanov の理論を修正した (Rabotov 1969). この理論は

$$\begin{aligned} \dot{D} &= A_c \frac{\sigma^{m_c}}{(1-D)^{p_c}} \\ \dot{\epsilon} &= B_c \frac{\sigma^{n_c}}{(1-D)^{q_c}} \end{aligned} \quad (3.3.2)$$

と記述されている. ここで $A_c, m_c, B, n_c, p_c, q_c$ は材料定数である. この式は Kachanov-Rabotnov の理論としてその後の連続体損傷力学の原型となった. 損傷変数 D の物理的意味は微小空隙の存在による荷重負担有効面積の減少と関連付けて解釈する事ができる.

まず図 3.3.4 のような物体を考えその中の任意の 1 点 $P(x)$ において図のような代表体積要素 (RVE) を考える. そして RVE 中で所定の法線方向 \mathbf{n} を持つ面積要素 dA の損傷状態を考える. 面積要素 dA 上の微小空隙面積の総和を dA_D とする. 面積要素 dA の効果は微小空隙の発達によって実質的に dA_D だけ現象する. このため実際に内力を受け持つ面積は有効面積

$$dA' = dA - dA_D \quad (3.3.3)$$

として平均化できる. この時, 損傷変数 D は

$$D \equiv \frac{dA - dA'}{dA} = \frac{dA_D}{dA} \quad (3.3.4)$$

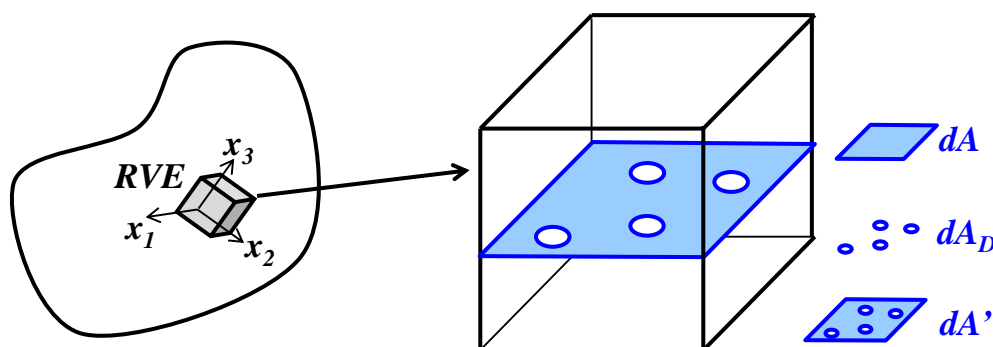


Fig.3.3.4 Reduction effective area by micro voids

のように解釈できる. ここで損傷変数 D は $D=0$ の時に初期非損傷状態であり $D=1$ の時に最終的破壊状態であり, 損傷過程での分布空隙の発達に伴う有効面積の減少率と解釈できる. これらの損傷変数はクリープ損傷に限らず広範囲の損傷にも適用できる.

次に図 3.3.5 のような単軸負荷を受ける棒の損傷を考えてみる. 図 3.3.5(b)では断面積 dA の棒が引張荷重 dF を受けて損傷状態 D にあるものとする. この棒で実質的に荷重を負担する棒断面積は見かけ上の面積 dA ではなく微小空隙の存在によって減少した有効面積 dA' であり, その値は

$$dA' = (1 - D)dA \quad (3.3.5)$$

となる. 荷重負担面積の減少は外力 dF によって引き起こされる応力 σ を拡大する. この拡大された応力は

$$\sigma' = \frac{dF}{dA'} = \frac{\sigma}{1 - D} \quad (3.3.6)$$

となる. この応力 σ' は損傷によって実質的に拡大された応力の効果を表すため有効応力あるいは実質応力と呼ばれている.

以上によると断面積が dA で損傷状態にある図 3.3.5(b) のような棒は図 3.3.5(c) のように同一の外力 dF を受け, 断面積が dA' , 応力が σ' であるような空隙を含まない仮想的な棒と力学的に等価であると考えることができる. このため図 3.3.5(c) の仮想的状態は仮想的非損傷状態と呼ばれ, 損傷のモデル化の重要な概念となっている.

式(3.3.6)で定義された有効応力 σ' は単に損傷による幾何学的な面積減少を表しているのではなく空隙の存在による応力集中あるいは空隙の相互作用の効果も含んでいると解釈できる. そしてメゾスケールの減少を対象とする損傷力学ではこのような応力集中などの効果は材料の巨視的力学挙動から損傷変数を同定する際に自然に反映される. しかしこの応力効果の拡大はあくまで平均的なものでありボイド周辺で生じる微視的な応力分布を正確に表現するものではない. 実際の現象ははるかに複雑であるためその妥当性には限界がある (Lin, et al., 2005).

さらに損傷にともなう微小空隙の発達には材料の剛性低下を引き起こすため, 弾性係数の変化によっても損傷状態をモデル化できる (Lemaitre and Chaboche 1978, Lemaitre 1992). 図 3.3.5 において損傷状態と仮想的非損傷状態での力学的等価性を考えれば応力 σ を受ける損傷状態の弾性ひずみ ε と有効応力 σ' を受ける等価な仮想的非損傷状態の弾性ひずみ ε は互いに等しいため

$$\varepsilon = \frac{\sigma}{E} = \frac{\sigma'}{E_0} \quad (3.3.7)$$

これによって有効応力は

$$\sigma' = \frac{E_0}{E} \sigma \quad (3.3.8)$$

と与えられる. ここで E_0 と E はそれぞれ初期非損傷状態と負荷後の損傷状態における巨視的ヤング率である. 式(3.3.6)はひずみ等価性の仮説に対する一つの論拠となっている. 式(3.3.8)は有効応力 σ' を弾性係数の変化によって定義しており式(3.3.6)とは別の概念を示している. 式(3.3.8)と式(3.3.6)を組み合わせれば

$$E = (1 - D)E_0$$

$$D = 1 - \frac{E}{E_0} \quad (3.3.9)$$

となり損傷変数 D を弾性係数変化 E と関連づけることができる. 式(3.3.9)の概念の妥当性は損傷材料の除荷過程での弾性係数を測定する事によって検討できる. これは図 3.3.1, 図 3.3.2, 図 3.3.3 の実験結果に示す通りで弾塑性変形が進行し損傷発達と共にヤング率が減少している事からも分かる.

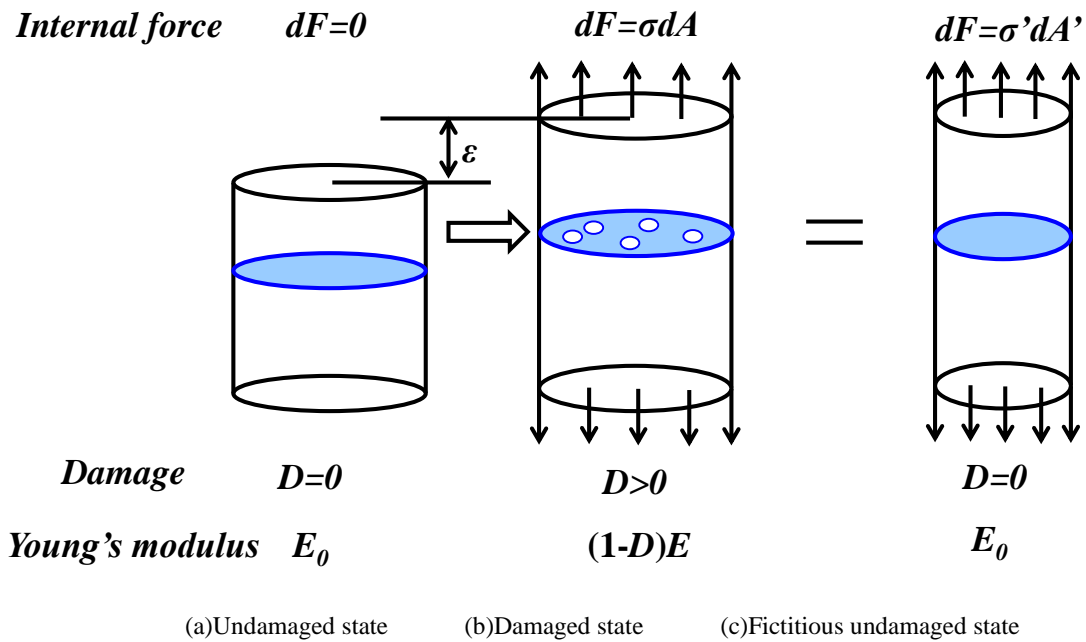


Fig. 3.3.5 Deformation and damage of bar under tensile loading condition

次に損傷発展則について述べる. 熱力学における局所状態の原理によれば連続体の不可逆過程は状態変数の変化の過程として記述できる. ひずみ硬化材料の3次元変形における熱力学的状態は全ひずみ $\boldsymbol{\varepsilon}$ のほかに材料の損傷状態とひずみ硬化状態を表す適切な内部変数 $V_k(k=1,2,3,\dots)$ によって規定できる.

このうち損傷状態は損傷の等方性を仮定すればスカラー損傷変数 D によって記述できる. 材料のひずみ硬化状態についてはそれを等方硬化と移動硬化に分け, それぞれの硬化状態をスカラー内部変数 R とテンソル内部変数 \mathbf{X} によって表現できるものとする. そしてこれらの R, \mathbf{X} をそれぞれ等方硬化内部変数ならびに移動硬化内部変数と呼ぶことにする. この時, ひずみ硬化損傷材料の内部変数は $V_k(R, \mathbf{X}, D)$ と表現できる. したがって, 損傷を伴うひずみ硬化非弾性変形に対する単位質量あたりの Helmholtz の自由エネルギー Ψ は $\Psi(\boldsymbol{\varepsilon}^e, R, \mathbf{X}, D)$ のように与えられる. これを Clausius-Duhem の不等式に代入すると

$$\left(\boldsymbol{\sigma} - \rho \frac{\partial \Psi}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}^e} \right) : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^e + \boldsymbol{\sigma} : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p - \rho \frac{\partial \Psi}{\partial R} \dot{R} - \rho \frac{\partial \Psi}{\partial \mathbf{X}} : \dot{\mathbf{X}} - \rho \frac{\partial \Psi}{\partial D} \dot{D} \geq 0 \quad (3.3.10)$$

となりどのような状態変化もこの関係を満足しなければならない. まずこの関係式が弾性ひずみ $\boldsymbol{\varepsilon}^e$ と任意の変化に対して成立するためには式(3.3.10)の第1項と第2項の係数がゼロでなければならない. この条件から弾性構成式として次式が導かれる.

$$\boldsymbol{\sigma} = \rho \frac{\partial \Psi}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}^e} \quad (3.3.11)$$

この関係式を式(3.3.10)に代入すると

$$\boldsymbol{\sigma} : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p - \rho \frac{\partial \psi}{\partial \mathbf{R}} \dot{\mathbf{R}} - \rho \frac{\partial \psi}{\partial \mathbf{X}} : \dot{\mathbf{X}} - \rho \frac{\partial \psi}{\partial D} \dot{D} \geq 0 \quad (3.3.12)$$

となる. この式の第2項以降の内部変数に対して新しい同伴変数を以下のように定義する.

$$\sigma_y = \rho \frac{\partial \psi}{\partial R}, \quad \boldsymbol{\beta} = \rho \frac{\partial \psi}{\partial \mathbf{X}}, \quad Y = -\rho \frac{\partial \psi}{\partial D} \quad (3.3.13)$$

この時 Chausius-Duhem の不等式は

$$\boldsymbol{\sigma} : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p - \sigma_y \dot{R} - \boldsymbol{\beta} : \dot{\mathbf{X}} - Y \dot{D} \geq 0 \quad (3.3.14)$$

ここで変数 σ_y と $\boldsymbol{\beta}$ は等方硬化応力 (等方硬化変数) と背応力 (移動硬化変数) となる. 式(3.3.12)の散逸過程に対して一般化流速ベクトル \mathbf{J} ならびに一般化力ベクトル \mathbf{H} を

$$\begin{aligned} \mathbf{J} &\equiv \{\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p, \dot{R}, \dot{\mathbf{X}}, \dot{D}\} \\ \mathbf{H} &= \{\boldsymbol{\sigma}, -\sigma_y, -\boldsymbol{\beta}, Y\} \end{aligned} \quad (3.3.15)$$

のように定義すれば式(3.3.12)は

$$\Phi = \mathbf{H} \cdot \mathbf{J} \geq 0 \quad (3.3.16)$$

と書ける. すなわち散逸 Φ がこのように書ける時, 一般化流速 \mathbf{J} の発展式は一般化力 \mathbf{H} のポテンシャル関数 $F^{Total}(\mathbf{H})$ から導くことができる. このため一般化力 \mathbf{H} に関して非負な凸関数であるような散逸ポテンシャル関数

$$F^{Total} = F^{Total}(\boldsymbol{\sigma}, \sigma_y, \boldsymbol{\beta}, Y; \boldsymbol{\varepsilon}^p, R, \mathbf{X}, D) \quad (3.3.17)$$

が定義できると仮定する. この式は現在の状態を規定する状態変数をセミコロンの後にパラメータとして含めてある. ポテンシャル F^{Total} はさらに $\mathbf{H}=0$ の時 $F=0$ の条件を満たすものとする. このとき一般化流速 \mathbf{J} は

$$\mathbf{J} = \dot{\gamma} \frac{\partial F^{Total}}{\partial \mathbf{H}} \quad (3.3.18)$$

のように求められる. ここで $\dot{\gamma}$ は正值の未定スカラー乗数であって弾塑性力学において塑性乗数と呼ばれるものである. この値は整合性条件などによって定められる. これより散逸不等式(3.3.16)は常に満足される. 最後に内部変数の発展式を詳しく書けば以下のようなになる.

$$\begin{aligned}\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^P &= \dot{\gamma} \frac{\partial F^{Total}}{\partial \boldsymbol{\sigma}}, \quad \dot{R} = -\dot{\gamma} \frac{\partial F^{Total}}{\partial \sigma_y}, \\ \dot{\boldsymbol{X}} &= -\dot{\gamma} \frac{\partial F^{Total}}{\partial \boldsymbol{\beta}}, \quad \dot{D} = \dot{\gamma} \frac{\partial F^{Total}}{\partial Y}\end{aligned}\tag{3.3.19}$$

散逸 Φ について非弾性損傷過程の原因である塑性変形の進行，材料の等方硬化と移動硬化ならびに損傷の発達の合計 3 つの機構を考えている．そして実験結果によれば塑性変形は損傷が無くても進行した損傷は塑性変形を伴わなくも発達する．したがって散逸ポテンシャル F^{Total} は塑性散逸ポテンシャル F^P ，ひずみ硬化散逸ポテンシャル F^H ならびに損傷散逸ポテンシャル F^D に分けて，次のように表す事ができる．

$$F^{Total}(\boldsymbol{\sigma}, \sigma_y, \boldsymbol{\beta}, Y) = F^P + F^H + F^D\tag{3.3.20}$$

塑性散逸ポテンシャル F^P は一般化力空間における塑性ポテンシャル曲面

$$F^P(\boldsymbol{\sigma}, \sigma_y, \boldsymbol{\beta}; D) = 0\tag{3.3.21}$$

を規定する．塑性力学における関連流れ則に従い降伏関数 f と塑性ポテンシャル F^P が同一であるとすれば関数 F^P の具体的表現は単軸応力状態に対する降伏関数を 3 次元応力状態に拡張できる．ここで塑性変形にともなうひずみ硬化は等方硬化による降伏曲面の大きさ σ_y の増大と移動硬化による降伏曲面中心の移動 $\boldsymbol{\beta}$ によって表されるものとする．また有効応力テンソルを用いれば塑性散逸ポテンシャルは

$$F^P = \sqrt{\frac{3}{2}} \left\| \frac{\tilde{\boldsymbol{I}}_d : \boldsymbol{\sigma}}{1-D} - \boldsymbol{\beta} \right\| - \sigma_y\tag{3.3.22}$$

とかける．

また式(3.3.17)の第 2 項のひずみ硬化散逸ポテンシャル F^H については各移動硬化則モデルに応じたものがある．本研究では極低サイクル疲労という多くのサイクル数に対して実験結果を精度よく追従させたいという目的から **Chaboche** による複合硬化則を用いている．この複合硬化則と損傷モデルとの連成モデルについては次節で詳しく述べる．損傷散逸ポテンシャル F^D については式(3.3.19)から

$$\dot{D} = \dot{\gamma} \frac{\partial F^D}{\partial Y}\tag{3.3.23}$$

で与えられる．**Lemaitre** は延性損傷，脆性損傷などの微視的機構をマイクロメカニクス観点から検討し散逸ポテンシャル F^D と損傷発展式を次のように導いた．

$$F^D = \frac{Y^2}{2r(1-D)} \quad (3.3.24)$$

$$\dot{D} = \frac{\dot{\gamma}}{1-D} \frac{Y}{r}$$

ここで r は損傷発展速度を決める材料定数である。これらの式は損傷同伴変数である損傷エネルギー解放率 Y のべき関数を用いてさらに一般化することもできる。この場合、損傷散逸ポテンシャル F^D と損傷発展式は

$$F^D = \frac{r}{(S+1)(1-D)} \left(\frac{Y}{r} \right)^{S+1} \quad (3.3.25)$$

$$\dot{D} = \frac{\dot{\gamma}}{1-D} \left(\frac{Y}{r} \right)^S$$

と表現される。本研究ではこの一般化された損傷発展則を用いる。本節の最後に損傷同伴変数である損傷エネルギー解放率 Y の物理的な意味について触れておく。

まず式(3.3.13)より

$$Y = -\rho \frac{\partial \psi^E}{\partial D} \quad (3.3.26)$$

と表せる。ここで ψ^E は弾性ひずみエネルギーである。また損傷による弾性係数の低下も考慮して弾性ひずみエネルギーを記すと

$$\psi^E = \frac{1}{2} (1-D) \tilde{\mathbf{D}}^e : \boldsymbol{\varepsilon}^e : \boldsymbol{\varepsilon}^e \quad (3.3.27)$$

と書ける。これを式(3.3.26)に代入すると損傷エネルギー解放率 Y は

$$Y = \frac{1}{2} \tilde{\mathbf{D}}^e : \boldsymbol{\varepsilon}^e : \boldsymbol{\varepsilon}^e \quad (3.3.28)$$

と書ける。また損傷の分だけ弾性剛性が低下することから構成則は

$$\boldsymbol{\sigma} = (1-D) \tilde{\mathbf{D}}^e : \boldsymbol{\varepsilon}^e \quad (3.3.29)$$

で与えられる。よって単位体積あたりの弾性ひずみエネルギー W^E の増分は

$$dW^E = \boldsymbol{\sigma} : d\boldsymbol{\varepsilon}^e = (1-D) \tilde{\mathbf{D}}^e : \boldsymbol{\varepsilon}^e : d\boldsymbol{\varepsilon}^e \quad (3.3.30)$$

と書ける。 D =一定のもとでこの式を積分すると

$$W^E = \int (1-D) \tilde{\mathbf{D}}^e : \boldsymbol{\varepsilon}^e : d\boldsymbol{\varepsilon}^e \quad (3.3.31)$$

$$= \frac{1}{2} (1-D) \tilde{\mathbf{D}}^e : \boldsymbol{\varepsilon}^e : \boldsymbol{\varepsilon}^e$$

となりこれより次式を得る。

$$Y = \frac{W^E}{1-D} \quad (3.3.32)$$

この式は Y は弾性ひずみエネルギー W^E に比例し、その比例係数の大きさ $1/(1-D)$ は損傷の発達とともに増大することを示している。 σ_{ij} =一定のもとでの状態変化を考えると式(3.3.29)から

$$d\varepsilon^e = \frac{\varepsilon^e}{1-D} dD \quad (3.3.33)$$

の関係が求められる。この式を式(3.3.30)に代入すれば

$$dW^E = \boldsymbol{\sigma} : d\varepsilon^e = \tilde{\boldsymbol{D}}^e : \varepsilon^e : \varepsilon^e dD = 2Y d \quad (3.3.34)$$

となり、以上より

$$Y = \frac{1}{2} \left(\frac{dW^E}{dD} \right) \quad (3.3.35)$$

が導かれる。すなわち Y は損傷 D の発達に伴う弾性ひずみエネルギーの解放率を与えるものであり損傷エネルギー解放率と呼ばれている。これは破壊力学におけるひずみエネルギー解放率と類似の役割を果たすものと解釈できる (Chaboche, 1988)。

図 3.3.6 はこの関係を示したものである。すなわち単軸引張の応力ひずみ線図上で点 A まで負荷された状態を考える。そして応力一定の元で損傷が dD だけ進行し、これにともなって弾性ひずみが $d\varepsilon^e$ だけ増加して点 B に至るとする。式(3.3.34)によれば三角形 ABC は損傷の発達 dD によるひずみエネルギーの解放 YdD になる。これから Y は D の発達によって引き起こされる弾性ひずみエネルギーの解放率を与えることが分かる。

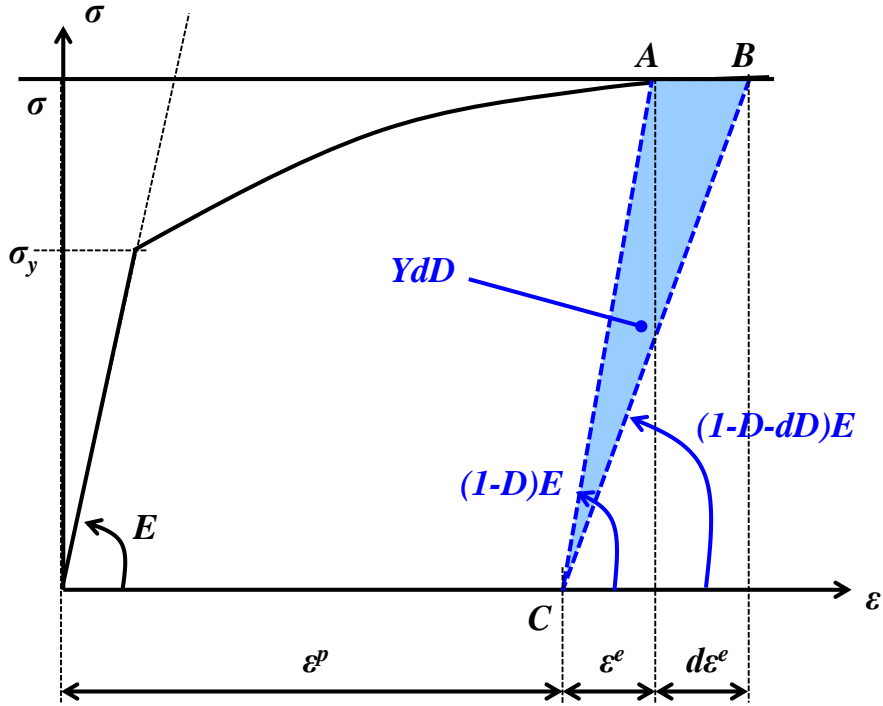


Fig. 3.3.6 Release of strain energy by damage evolution

また損傷エネルギー解放率 Y と各応力との関係について考える。弾性係数はヤング率 E 、ポアソン比 ν 、クロネッカーのデルタを用いて

$$\tilde{D}_{ijkl}^e = \frac{E\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)} \delta_{ij}\delta_{kl} + 2\frac{E}{2(1+\nu)} \delta_{il}\delta_{jk} \quad (3.3.36)$$

とかけるため弾性ひずみエネルギー密度 W^E は

$$\begin{aligned} W^E &= \frac{1}{2}(1-D) \left[\frac{E\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)} \delta_{ij}\delta_{kl} + 2\frac{E}{2(1+\nu)} \delta_{il}\delta_{jk} \right] \varepsilon_{ij}^e \varepsilon_{kl}^e \\ &= \frac{1}{2}(1-D) \left[\frac{E}{1+\nu} (\tilde{\mathbf{I}}_d : \boldsymbol{\varepsilon}^e) : (\tilde{\mathbf{I}}_d : \boldsymbol{\varepsilon}^e) + \frac{3E}{1-2\nu} \left(\frac{\mathbf{I} : \boldsymbol{\varepsilon}^e}{3} \right)^2 \right] \end{aligned} \quad (3.3.37)$$

また弾性構成則により

$$\tilde{\mathbf{I}}_d : \boldsymbol{\varepsilon}^e = \frac{1+\nu}{E} \frac{\tilde{\mathbf{I}}_d : \boldsymbol{\sigma}}{1-D}, \quad \frac{\mathbf{I} : \boldsymbol{\varepsilon}^e}{3} = \frac{1-2\nu}{E} \frac{p}{1-D} \quad (3.3.38)$$

となる。ただし p は静水圧である。これより損傷エネルギー解放率 Y は

$$\begin{aligned}
Y &= \frac{W^E}{1-D} \\
&= \frac{2}{3} \frac{1+\nu}{2E} \left(\frac{q}{1-D} \right)^2 + 3 \frac{1-2\nu}{2E} \left(\frac{p}{1-D} \right)^2 \\
&= \frac{q^2}{2E(1-D)^2} R_\nu
\end{aligned} \tag{3.3.39}$$

とかける。ただし q は相当応力を示し、また R_ν は応力三軸度関数と呼ばれ

$$R_\nu = \frac{2}{3}(1+\nu) + 3(1-2\nu) \left(\frac{p}{q} \right)^2 \tag{3.3.40}$$

この式は、損傷はその一般化力である損傷エネルギー解放率によって大きくなるが、その損傷エネルギー解放率は応力三軸度(p/q)によって影響を受けることを意味する。これはボイドを含む材料を三軸の各方向に膨張させるように引張るとその中に存在するボイドも大きく変形し損傷が発達するという直観的にも分かりやすいイメージと整合している。よって破壊起点などを調べる解析を行う上で、応力やひずみといった物理量の分布だけではなく応力三軸度の分布も良く調べる事が損傷解析の考察に有効であることを意味する。

3.4 流れ則積分法による強連成モデルの積分の提案

3.4.1 Return-Mapping 方程式

本研究では極低サイクル疲労損傷をより適切に表現するために Chaboche による分割背応力モデルと連続体損傷力学による損傷モデルの両者を考慮する。実際の現象ではポイドなどといった損傷によってその周辺の母材の応力やひずみ状態が影響を受ける。また逆に母材の応力やひずみ状態が損傷の成長度合いに影響を与える。すなわち母材金属の弾塑性変形と損傷現象は互いに影響を及ぼし合うため両者を連成したモデルである事が望まれる。また第2章で触れたように弾塑性モデルの効率的な数値解析には陰解法による積分が必要となる。しかし既存の研究では Chaboche モデルと損傷モデルの連成モデルを陰解法で解いたものが存在しないため本研究ではそのモデル構築と積分手法を開発した。本節ではまず以降に述べる流れ則積分法による手法について説明する。

分割背応力による複合硬化と損傷を考慮した散逸ポテンシャルは前節より次式のように書ける。

$$\left. \begin{aligned} F^{Total} &= F^p + F^\beta + F^D \\ F^p &\equiv \sqrt{\frac{3}{2}} \left\| \frac{\tilde{\mathbf{I}}_d : \boldsymbol{\sigma}}{1-D} - \boldsymbol{\beta} \right\| - \sigma_y \\ F^\beta &\equiv \sum_{k=1}^{N_{kin}} \frac{b_k}{2a_k} \boldsymbol{\beta}_k : \boldsymbol{\beta}_k \\ F^D &\equiv \frac{r}{(1-D)(S+1)} \left(\frac{Y}{r} \right)^{S+1} \end{aligned} \right\} \quad (3.4.1)$$

式(3.4.1)の第1式の右辺の第1項は塑性ポテンシャル項、第2項は背応力項、第3項は損傷項である。ここで硬化応力と硬化内部変数について対応関係を示すと表 3.4.1 のとなる。

Table 3.4.1 Relationship of hardening stress with hardening internal variable

Hardening stress	Hardening internal variable
Cauchy stress $\boldsymbol{\sigma}$	plastic strain $\boldsymbol{\varepsilon}^p$
Isotropic stress σ_y	Isotropic variable R
Divided Back stress $\boldsymbol{\beta}_k$	Divided kinematic internal variable \mathbf{X}_k
Damage D	Damage energy release ratio Y

各物理量が次の時間ステップでどのような値になるのか計算する必要がある。弾塑性変形において各物理量は Clausius-Duhem の不等式を満たす必要があるため、式(3.3.19)の流れ則をそれぞれ満たす必要がある。ここで各物理量の時間変化における増分量を Δ

を用いて表現する．さらに各物理量は弾塑性変形中に降伏条件を満たす必要がある．以上より物理量を満たすべき関係式として次式を得る．

$$\left. \begin{aligned} \Delta \varepsilon^p &= \Delta \gamma \frac{\partial F^{Total}}{\partial \boldsymbol{\sigma}} \\ \Delta R &= -\Delta \gamma \frac{\partial F^{Total}}{\partial \sigma_y} \\ \Delta X_k &= -\Delta \gamma \frac{\partial F^{Total}}{\partial \boldsymbol{\beta}_k} \\ \Delta D &= \Delta \gamma \frac{\partial F^{Total}}{\partial Y} \\ \sqrt{\frac{3}{2}} \left\| \frac{\tilde{\mathbf{I}}_d : \boldsymbol{\sigma}}{1-D} - \boldsymbol{\beta} \right\| - \sigma_y &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (3.4.2)$$

増分量はステップ n から $n+1$ にかけての変化であるため Δ を差分表記する．また式(3.4.2)の第5式は降伏条件であるが，計算安定性のための後退形 Euler 表記として次のステップ $n+1$ にて満足する必要がある．よって各流れ則と降伏条件は次のように書き直す事ができる．

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon_{n+1}^p - \varepsilon_n^p &= \Delta \gamma \frac{\partial F^{Total}}{\partial \boldsymbol{\sigma}_{n+1}} \\ R_{n+1} - R_n &= -\Delta \gamma \frac{\partial F^{Total}}{\partial \sigma_{y_{n+1}}} \\ X_{k_{n+1}} - X_{k_n} &= -\Delta \gamma \frac{\partial F^{Total}}{\partial \boldsymbol{\beta}_{k_{n+1}}} \\ D_{n+1} - D_n &= \Delta \gamma \frac{\partial F^{Total}}{\partial Y_{n+1}} \\ \sqrt{\frac{3}{2}} \left\| \frac{\tilde{\mathbf{I}}_d : \boldsymbol{\sigma}_{n+1}}{1-D_{n+1}} - \boldsymbol{\beta}_{n+1} \right\| - \sigma_{y_{n+1}} &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (3.4.3)$$

式(3.4.3)の第1式を弾性ひずみと試行弾性ひずみを用いて以下のように書き直す．

$$\begin{aligned} \varepsilon_{n+1}^p - \varepsilon_n^p &= \Delta \gamma \frac{\partial F^{Total}}{\partial \boldsymbol{\sigma}} \\ \therefore (\boldsymbol{\varepsilon}_{n+1} - \boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^e) - (\boldsymbol{\varepsilon}_n - \boldsymbol{\varepsilon}_n^e) &= \Delta \gamma \frac{\partial F^{Total}}{\partial \boldsymbol{\sigma}} \\ \therefore \Delta \boldsymbol{\varepsilon} - \boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^e + \boldsymbol{\varepsilon}_n^e &= \Delta \gamma \frac{\partial F^{Total}}{\partial \boldsymbol{\sigma}} \\ \therefore \boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^e - \boldsymbol{\varepsilon}^{etry} + \Delta \gamma \frac{\partial F^{Total}}{\partial \boldsymbol{\sigma}} &= \mathbf{0} \end{aligned} \quad (3.4.4)$$

この式をさらに構成式を用いて変形すると式(3.4.5)となる．

$$\frac{(\tilde{D}^e)^{-1}}{1-D_{n+1}} : \boldsymbol{\sigma}_{n+1} - \boldsymbol{\varepsilon}^{etry} + \Delta\gamma \mathbf{N}_\sigma = \mathbf{0} \quad (3.4.5)$$

また各微分項を以下のように置いて具体的に計算すると式(3.4.6)から式(3.4.8)を得る.

$$\bar{N}_\sigma \equiv \frac{\frac{\tilde{\mathbf{I}}_d : \boldsymbol{\sigma}_{n+1}}{1-D_{n+1}} - \boldsymbol{\beta}_{n+1}}{\left\| \frac{\tilde{\mathbf{I}}_d : \boldsymbol{\sigma}_{n+1}}{1-D_{n+1}} - \boldsymbol{\beta}_{n+1} \right\|}} \quad (3.4.6)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial F^{Total}}{\partial \sigma_{y_{n+1}}} &= \frac{\partial}{\partial \sigma_{y_{n+1}}} (-\sigma_{y_{n+1}}) \\ &= -1 \end{aligned} \quad (3.4.7)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial F^{Total}}{\partial \boldsymbol{\beta}_{k_{n+1}}} &= \frac{\partial}{\partial \boldsymbol{\beta}_{k_{n+1}}} \left(\sqrt{\frac{3}{2}} \left\| \frac{\tilde{\mathbf{I}}_d : \boldsymbol{\sigma}_{n+1}}{1-D_{n+1}} - \boldsymbol{\beta}_{n+1} \right\| + \sum_{k=1}^{N_{kn}} \frac{b_k}{2a_k} \boldsymbol{\beta}_{k_{n+1}} : \boldsymbol{\beta}_{k_{n+1}} \right) \\ &= -\sqrt{\frac{3}{2}} \bar{N}_\sigma + \frac{b_k}{a_k} \boldsymbol{\beta}_{k_{n+1}} \end{aligned} \quad (3.4.8)$$

これを式(3.4.3)の第3式に代入すると

$$\mathbf{X}_{k_{n+1}} - \mathbf{X}_{k_n} + \Delta\gamma \left(-\sqrt{\frac{3}{2}} \bar{N}_\sigma + \frac{b_k}{a_k} \boldsymbol{\beta}_{k_{n+1}} \right) = \mathbf{0} \quad (3.4.9)$$

ここで一般化変位である内部変数 \mathbf{X}_k と一般化力である $\boldsymbol{\beta}_k$ との関係

$$\boldsymbol{\beta}_{k_{n+1}} = a_k \mathbf{X}_{k_{n+1}} \quad (3.4.10)$$

と式(3.4.10)を用いて式(3.4.9)を変形すると以下が得られる.

$$\boldsymbol{\beta}_{k_{n+1}} - \boldsymbol{\beta}_{k_n} = a_k (1-D) \Delta \boldsymbol{\varepsilon}^p - b_k \Delta\gamma \boldsymbol{\beta}_{k_{n+1}} \quad (3.4.11)$$

$$\begin{aligned} N_Y &\equiv \frac{\partial F^{Total}}{\partial Y_{n+1}} \\ &= \frac{\partial}{\partial Y_{n+1}} \left(\frac{r}{(1-D)(S+1)} \left(\frac{Y_{n+1}}{r} \right)^{S+1} \right) \\ &= \frac{1}{1-D} \left(\frac{Y_{n+1}}{r} \right)^S \end{aligned} \quad (3.4.12)$$

式(3.4.3)に代入するとステップ $n+1$ の物理量を得るための方程式として次式を得る.

$$\left. \begin{aligned} & \frac{(\tilde{D}^e)^{-1}}{1-D_{n+1}} : \boldsymbol{\sigma}_{n+1} - \boldsymbol{\varepsilon}^{ery} + \Delta\gamma \mathbf{N}_\sigma = \mathbf{0} \\ & R_{n+1} - R_n - \Delta\gamma = 0 \\ & \boldsymbol{\beta}_{kn+1} - \boldsymbol{\beta}_{kn} + a_k(1-D)\Delta\boldsymbol{\varepsilon}^p - b_k\Delta\gamma \boldsymbol{\beta}_{kn+1} = \mathbf{0} \\ & D_{n+1} - D_n - \Delta\gamma N_y = 0 \\ & \sqrt{\frac{3}{2}} \left\| \tilde{\mathbf{I}}_d : \boldsymbol{\sigma}_{n+1} - \boldsymbol{\beta}_{n+1} \right\| - \sigma_{yn+1} = 0 \end{aligned} \right\} \quad (3.4.13)$$

これはステップ $n+1$ の各物理量 $\boldsymbol{\sigma}_{n+1}$, R_{n+1} , $\boldsymbol{\beta}_{kn+1}$, D_{n+1} および塑性乗数 $\Delta\gamma$ に関する非線形連立方程式となっている. Clausius-Duhem の不等式を経て各流れ則から導かれたこの非線形連立方程式を解くことによってステップ $n+1$ の物理量を求める方法を本研究では便宜的に「流れ則積分法」と呼ぶこととする.

非線形連立方程式は未知数の数が多くなるほど計算負荷が増大するが, 式(3.4.13)を見ると第3式に各分割背応力が含まれる. すなわちこのままでは全ての分割背応力を未知数として扱っているため, 分割背応力の組数を増やせば増やすほど非線形連立方程式の未知数が増大し計算負荷も大きくなってゆく課題がある. この課題を解決するために式(3.4.13)の第3式について以下のような処置を施す. まず分割背応力発展則を微分方程式として扱うために有限増分形の表記を微小増分の形に書き換え式(3.4.14)を得る.

$$d\boldsymbol{\beta}_k = a_k(1-D)d\boldsymbol{\varepsilon}^p - b_k d\gamma \boldsymbol{\beta}_k \quad (3.4.14)$$

さらに式(3.4.4)を適用すると

$$\begin{aligned} d\boldsymbol{\beta}_k &= a_k \sqrt{\frac{3}{2}} \bar{N}_\sigma d\gamma - b_k d\gamma \boldsymbol{\beta}_k \\ \therefore d\boldsymbol{\beta}_k &= \left(a_k \sqrt{\frac{3}{2}} \bar{N}_\sigma - b_k \boldsymbol{\beta}_k \right) d\gamma \end{aligned} \quad (3.4.15)$$

ここでステップ n から $n+1$ にかけては塑性ひずみ増分の変化しないと仮定すると式(3.4.15)において右辺第1項は定数となり式(3.4.16)のように解析的に積分できる.

$$\int_{\boldsymbol{\beta}_{kn}}^{\boldsymbol{\beta}_{kn+1}} \frac{d\boldsymbol{\beta}_k}{a_k \sqrt{\frac{3}{2}} \bar{N}_\sigma - b_k \boldsymbol{\beta}_k} = \int_{\gamma_n}^{\gamma_{n+1}} d\gamma \quad (3.4.16)$$

また

$$\begin{aligned}
\mathbf{T} &\equiv a_k \sqrt{\frac{3}{2} \bar{N}_\sigma} - b_k \boldsymbol{\beta}_k \\
\mathbf{T}_n &\equiv a_k \sqrt{\frac{3}{2} \bar{N}_\sigma} - b_k \boldsymbol{\beta}_{kn} \\
\mathbf{T}_{n+1} &\equiv a_k \sqrt{\frac{3}{2} \bar{N}_\sigma} - b_k \boldsymbol{\beta}_{kn+1}
\end{aligned} \tag{3.4.17}$$

とおくと式(3.4.16)の積分は次のように置き換えられる.

$$\int_{\mathbf{T}_n}^{\mathbf{T}_{n+1}} -\frac{1}{b_k} \frac{d\mathbf{T}}{\mathbf{T}} = \int_{\gamma_n}^{\gamma_{n+1}} d\gamma \tag{3.4.18}$$

これを計算すると

$$\frac{\mathbf{T}_{n+1}}{\mathbf{T}_n} = e^{-b_k \Delta\gamma} \tag{3.4.19}$$

となる. これに式(3.4.17)を代入して整理すると

$$\boldsymbol{\beta}_{kn+1} = \boldsymbol{\beta}_{kn} e^{-b_k \Delta\gamma} + \frac{a_k}{b_k} \sqrt{\frac{3}{2} \bar{N}_\sigma} (1 - e^{-b_k \Delta\gamma}) \tag{3.4.20}$$

となり分割背応力に関してステップ増分間の解析解を得ることができる. 全体背応力は各々の分割背応力を足し合わせたものなので式(3.4.20)の和を取り,

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{N_{kin}} \boldsymbol{\beta}_{kn+1} &= \sum_{k=1}^{N_{kin}} (\boldsymbol{\beta}_{kn} e^{-b_k \Delta\gamma}) + \sum_{k=1}^{N_{kin}} \left(\frac{a_k}{b_k} \sqrt{\frac{3}{2} \bar{N}_\sigma} (1 - e^{-b_k \Delta\gamma}) \right) \\
\therefore \boldsymbol{\beta}_{n+1} &= \mathbf{E}(\Delta\gamma) + \sqrt{\frac{3}{2} \bar{N}_\sigma} \mathbf{F}(\Delta\gamma)
\end{aligned} \tag{3.4.21}$$

ただし \mathbf{E} と \mathbf{F} を次のように定義する.

$$\begin{aligned}
\mathbf{E}(\Delta\gamma) &\equiv \sum_{k=1}^{N_{kin}} (\boldsymbol{\beta}_{kn} e^{-b_k \Delta\gamma}) \\
\mathbf{F}(\Delta\gamma) &\equiv \sum_{k=1}^{N_{kin}} \left(\frac{a_k}{b_k} (1 - e^{-b_k \Delta\gamma}) \right)
\end{aligned} \tag{3.4.22}$$

とした. 以上によって背応力の増分関係式を分割背応力表記である式(3.4.13)から全体背応力表記へと変換する事ができた. これを含めてステップ増分間における全物理量の発展則を記すと式(3.4.23)となる.

$$\left. \begin{aligned}
f_1 &\equiv \frac{(\tilde{\mathbf{D}}^e)^{-1}}{1-D_{n+1}} : \boldsymbol{\sigma}_{n+1} - \boldsymbol{\varepsilon}^{etry} + \Delta\gamma \mathbf{N}_\sigma = 0 \\
f_2 &\equiv R_{n+1} - R_n - \Delta\gamma = 0 \\
f_3 &\equiv \boldsymbol{\beta}_{n+1} - \mathbf{E}(\Delta\gamma) - \sqrt{\frac{3}{2}} \bar{N}_\sigma F(\Delta\gamma) = 0 \\
f_4 &\equiv D_{n+1} - D_n - \Delta\gamma N_Y = 0 \\
f_5 &\equiv \sqrt{\frac{3}{2}} \left\| \frac{\tilde{\mathbf{I}}_d : \boldsymbol{\sigma}_{n+1}}{1-D_{n+1}} - \boldsymbol{\beta}_{n+1} \right\| - \sigma_{yn+1} = 0
\end{aligned} \right\} \quad (3.4.23)$$

式(3.4.23)が「流れ則積分法」による Return-Mapping 方程式の最終形となる。このように背応力を全体背応力で記した事によって未知変数の数が分割背応力の組数に依存しない。これによって Return-Mapping 方程式における未知数の数が分割背応力の組数分だけ増大する課題が解決された。

式(3.4.23)は非線形連立方程式であり未知数は次のステップ $n+1$ における物理量と塑性乗数である。すなわち Cauchy 応力 $\boldsymbol{\sigma}_{n+1}$ の独立 6 成分と等方硬化内部変数 R_{n+1} , 全体背応力 $\boldsymbol{\beta}_{n+1}$ の独立 6 成分, 材料損傷値 D_{n+1} , 塑性乗数 $\Delta\gamma$ の合計 15 個である。各方程式を式(3.4.23)のように f_1 から f_5 とおいた。本研究ではこの Return-Mapping 方程式を Newton-Rahson 法を用いて解く。

この時、解の逐次修正量を $d\boldsymbol{\sigma}_{n+1}$ のように d を付けて表現すると式(3.4.24)を解く事で修正解を得る事ができる。

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial \boldsymbol{\sigma}_{n+1}} & \frac{\partial f_1}{\partial R_{n+1}} & \frac{\partial f_1}{\partial \boldsymbol{\beta}_{n+1}} & \frac{\partial f_1}{\partial D_{n+1}} & \frac{\partial f_1}{\partial (\Delta\gamma)} \\ \frac{\partial f_2}{\partial \boldsymbol{\sigma}_{n+1}} & \frac{\partial f_2}{\partial R_{n+1}} & \frac{\partial f_2}{\partial \boldsymbol{\beta}_{n+1}} & \frac{\partial f_2}{\partial D_{n+1}} & \frac{\partial f_2}{\partial (\Delta\gamma)} \\ \frac{\partial f_3}{\partial \boldsymbol{\sigma}_{n+1}} & \frac{\partial f_3}{\partial R_{n+1}} & \frac{\partial f_3}{\partial \boldsymbol{\beta}_{n+1}} & \frac{\partial f_3}{\partial D_{n+1}} & \frac{\partial f_3}{\partial (\Delta\gamma)} \\ \frac{\partial f_4}{\partial \boldsymbol{\sigma}_{n+1}} & \frac{\partial f_4}{\partial R_{n+1}} & \frac{\partial f_4}{\partial \boldsymbol{\beta}_{n+1}} & \frac{\partial f_4}{\partial D_{n+1}} & \frac{\partial f_4}{\partial (\Delta\gamma)} \\ \frac{\partial f_5}{\partial \boldsymbol{\sigma}_{n+1}} & \frac{\partial f_5}{\partial R_{n+1}} & \frac{\partial f_5}{\partial \boldsymbol{\beta}_{n+1}} & \frac{\partial f_5}{\partial D_{n+1}} & \frac{\partial f_5}{\partial (\Delta\gamma)} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} d\boldsymbol{\sigma}_{n+1} \\ dR_{n+1} \\ d\boldsymbol{\beta}_{n+1} \\ dD_{n+1} \\ d(\Delta\gamma) \end{Bmatrix} = - \begin{Bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \\ f_4 \\ f_5 \end{Bmatrix} \quad (3.4.24)$$

この係数行列である Jacobi マトリックスの各成分を具体的に計算すると最終的に式(3.4.25)が導かれる。具体的に各成分を計算すると以下のようなになる。以上により流れ則そのものを Return-Mapping 方程式として応力積分を計算することが可能となる。上記の式を Newton-Raphson 法で逐次解を更新しながら解が収束するまで繰り返し計算を行ってステップ $n+1$ における物理量を得る。これが本研究にて導出した「流れ則積分法」における応力積分の計算方法である。ただし Newton-Raphson 法の計算において式

(3.4.24)の15個の未知数を含む線形連立方程式を毎回の反復ごとに解くこととなりこの計算を弾塑性状態にある全ての積分点に対して行うため計算負荷は小さくはない. この解決法については次節に述べる「縮約積分法」で詳しく述べる.

$$\left. \begin{array}{l} \frac{\partial f_1}{\partial \sigma_{n+1}} = \frac{(\tilde{D}^e)^{-1}}{1-D_{n+1}} + \Delta\gamma \frac{\partial N_\sigma}{\partial \sigma_{n+1}} \\ \frac{\partial f_1}{\partial R_{n+1}} = 0 \\ \frac{\partial f_1}{\partial \beta_{n+1}} = \Delta\gamma \frac{\partial N_\sigma}{\partial \beta_{n+1}} \\ \frac{\partial f_1}{\partial D_{n+1}} = \frac{\varepsilon_{n+1}^e}{1-D_{n+1}} + \Delta\gamma \frac{\partial N_\sigma}{\partial D_{n+1}} \\ \frac{\partial f_1}{\partial(\Delta\gamma)} = \sqrt{\frac{3}{2}} \frac{\bar{N}_\sigma}{1-D_{n+1}} \end{array} \right\} \left. \begin{array}{l} \frac{\partial f_2}{\partial \sigma_{n+1}} = 0 \\ \frac{\partial f_2}{\partial R_{n+1}} = 1 \\ \frac{\partial f_2}{\partial \beta_{n+1}} = 0 \\ \frac{\partial f_2}{\partial D_{n+1}} = 0 \\ \frac{\partial f_2}{\partial(\Delta\gamma)} = -1 \end{array} \right\} \quad (3.4.25)$$

$$\left. \begin{array}{l} \frac{\partial f_3}{\partial \sigma_{n+1}} = -\sqrt{\frac{3}{2}} \frac{\partial \bar{N}_\sigma}{\partial \sigma_{n+1}} F \\ \frac{\partial f_3}{\partial R_{n+1}} = 0 \\ \frac{\partial f_3}{\partial \beta_{n+1}} = \tilde{I} - \sqrt{\frac{3}{2}} \frac{\partial \bar{N}_\sigma}{\partial \beta_{n+1}} F \\ \frac{\partial f_3}{\partial D_{n+1}} = -\left(\frac{\partial N_\sigma}{\partial \sigma_{n+1}} : \sigma_{n+1} \right) F \\ \frac{\partial f_3}{\partial(\Delta\gamma)} = -\frac{\partial E}{\partial(\Delta\gamma)} - \sqrt{\frac{3}{2}} \bar{N}_\sigma \frac{\partial F}{\partial(\Delta\gamma)} \end{array} \right\} \left. \begin{array}{l} \frac{\partial f_4}{\partial \sigma_{n+1}} = \Delta\gamma \frac{\partial N_Y}{\partial \sigma_{n+1}} \\ \frac{\partial f_4}{\partial R_{n+1}} = 0 \\ \frac{\partial f_4}{\partial \beta_{n+1}} = 0 \\ \frac{\partial f_4}{\partial D_{n+1}} = 1 + \Delta\gamma \frac{\partial N_Y}{\partial D_{n+1}} \\ \frac{\partial f_4}{\partial(\Delta\gamma)} = N_Y \end{array} \right\} \quad (3.4.26)$$

$$\left. \begin{array}{l} \frac{\partial f_5}{\partial \sigma_{n+1}} = \sqrt{\frac{3}{2}} \frac{1}{1-D_{n+1}} \bar{N}_\sigma \\ \frac{\partial f_5}{\partial R_{n+1}} = -H(R_{n+1}) \\ \frac{\partial f_5}{\partial \beta_{n+1}} = -\sqrt{\frac{3}{2}} \bar{N}_\sigma \\ \frac{\partial f_5}{\partial D_{n+1}} = \sqrt{\frac{3}{2}} \frac{\bar{N}_\sigma : \sigma_{n+1}}{(1-D_{n+1})^2} \\ \frac{\partial f_5}{\partial(\Delta\gamma)} = 0 \end{array} \right\} \quad (3.4.27)$$

ただし各微分項は式(3.4.28)となる.

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \mathbf{N}_\sigma}{\partial \boldsymbol{\sigma}_{n+1}} &= \frac{1}{(1-D_{n+1})^2} \frac{3}{2\bar{q}_{n+1}} (\tilde{\mathbf{I}}_d - \bar{\mathbf{N}}_\sigma \otimes \bar{\mathbf{N}}_\sigma) \\
\frac{\partial \mathbf{N}_\sigma}{\partial \boldsymbol{\beta}_{n+1}} &= \frac{1}{1-D_{n+1}} \frac{3}{2\bar{q}_{n+1}} (-\tilde{\mathbf{I}} + \bar{\mathbf{N}}_\sigma \otimes \bar{\mathbf{N}}_\sigma) \\
\frac{\partial \mathbf{N}_\sigma}{\partial D_{n+1}} &= \frac{\partial \mathbf{N}_\sigma}{\partial \boldsymbol{\sigma}_{n+1}} : \frac{\boldsymbol{\sigma}_{n+1}}{1-D_{n+1}} + \sqrt{\frac{3}{2}} \frac{\bar{\mathbf{N}}_\sigma}{(1-D_{n+1})^2} \\
\frac{\partial N_Y}{\partial \boldsymbol{\sigma}_{n+1}} &= -\frac{S(Y_{n+1})^{S-1}}{(1-D_{n+1})^2 r^S} \boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^e \\
\frac{\partial N_Y}{\partial D_{n+1}} &= \frac{2S-1}{(1-D_{n+1})^2} \left(\frac{Y_{n+1}}{r} \right)^S \\
\frac{\partial E}{\partial (\Delta\gamma)} &= -\sum_{k=1}^{N_{kn}} (\boldsymbol{\beta}_{kn} b_k e^{-b_k \Delta\gamma}) \\
\frac{\partial F}{\partial (\Delta\gamma)} &= \sum_{k=1}^{N_{kn}} (a_k e^{-b_k \Delta\gamma}) \\
\bar{q}_{n+1} &\equiv \sqrt{\frac{3}{2}} \left\| \frac{\tilde{\mathbf{I}}_d : \boldsymbol{\sigma}_{n+1}}{1-D_{n+1}} - \boldsymbol{\beta}_{n+1} \right\| \\
H(R_{n+1}) &\equiv \frac{d\sigma_{yn+1}(R_{n+1})}{dR_{n+1}}
\end{aligned} \tag{3.4.28}$$

また本研究では Updated-Lagrange 形の有限変形モデルに対応できるように応力積分計算の前に Cauchy 応力と背応力およびひずみに対して式(3.4.29)で示される共回転変換(久田, 野口, 1996)を行った。ただし \mathbf{L} は増分内でのスピンの一定であると仮定した時の物質点の回転を示す直交テンソルである。

$$\mathbf{L} \boldsymbol{\sigma} \mathbf{L}^T \tag{3.4.29}$$

3.4.2 Consistent 接線剛性

次に「流れ則積分法」における Consistent 接線剛性を導出する。第2章で述べたように Consistent 接線剛性は応力積分である Return-Mapping のアルゴリズムと厳密に整合した応力とひずみの勾配を意味する。本研究で取り扱う分割背応力モデルに基づく損傷弾塑性計算では式(3.4.23)によって応力積分を行っているためこの式と整合した Consistent 接線剛性を計算する。まず式(3.4.23)のすべての式について全微分を計算し式(3.4.30)を得る。

$$\left. \begin{aligned}
\frac{\partial f_1}{\partial \boldsymbol{\sigma}_{n+1}} : d\boldsymbol{\sigma}_{n+1} + \frac{\partial f_1}{\partial R_{n+1}} dR_{n+1} + \frac{\partial f_1}{\partial \boldsymbol{\beta}_{n+1}} : d\boldsymbol{\beta}_{n+1} + \frac{\partial f_1}{\partial D_{n+1}} dD_{n+1} + \frac{\partial f_1}{\partial (\Delta\gamma)} d(\Delta\gamma) + \frac{\partial f_1}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}^{etry}} : d\boldsymbol{\varepsilon}^{etry} &= \mathbf{0} \\
\frac{\partial f_2}{\partial \boldsymbol{\sigma}_{n+1}} : d\boldsymbol{\sigma}_{n+1} + \frac{\partial f_2}{\partial R_{n+1}} dR_{n+1} + \frac{\partial f_2}{\partial \boldsymbol{\beta}_{n+1}} : d\boldsymbol{\beta}_{n+1} + \frac{\partial f_2}{\partial D_{n+1}} dD_{n+1} + \frac{\partial f_2}{\partial (\Delta\gamma)} d(\Delta\gamma) &= 0 \\
\frac{\partial f_3}{\partial \boldsymbol{\sigma}_{n+1}} : d\boldsymbol{\sigma}_{n+1} + \frac{\partial f_3}{\partial R_{n+1}} dR_{n+1} + \frac{\partial f_3}{\partial \boldsymbol{\beta}_{n+1}} : d\boldsymbol{\beta}_{n+1} + \frac{\partial f_3}{\partial D_{n+1}} dD_{n+1} + \frac{\partial f_3}{\partial (\Delta\gamma)} d(\Delta\gamma) &= 0 \\
\frac{\partial f_4}{\partial \boldsymbol{\sigma}_{n+1}} : d\boldsymbol{\sigma}_{n+1} + \frac{\partial f_4}{\partial R_{n+1}} dR_{n+1} + \frac{\partial f_4}{\partial \boldsymbol{\beta}_{n+1}} : d\boldsymbol{\beta}_{n+1} + \frac{\partial f_4}{\partial D_{n+1}} dD_{n+1} + \frac{\partial f_4}{\partial (\Delta\gamma)} d(\Delta\gamma) &= 0 \\
\frac{\partial f_5}{\partial \boldsymbol{\sigma}_{n+1}} : d\boldsymbol{\sigma}_{n+1} + \frac{\partial f_5}{\partial R_{n+1}} dR_{n+1} + \frac{\partial f_5}{\partial \boldsymbol{\beta}_{n+1}} : d\boldsymbol{\beta}_{n+1} + \frac{\partial f_5}{\partial D_{n+1}} dD_{n+1} + \frac{\partial f_5}{\partial (\Delta\gamma)} d(\Delta\gamma) &= 0
\end{aligned} \right\} \quad (3.4.30)$$

ここで要点となるのは試行弾性ひずみが方程式 f_1 にしか含まれていないことである。また応力積分の計算では試行弾性ひずみは既知量であったが、Consistent 接線剛性は「試行弾性ひずみが微小量変化した時の応力変化」を示すため試行弾性ひずみを変数として取り扱う点に注意が必要である。以上により式(3.4.30)において第 1 式のみ 6 項目に試行弾性ひずみによる変分項が存在する。この項の微分箇所を計算すると以下となる。

$$\begin{aligned}
\frac{\partial f_1}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}^{etry}} &= \frac{\partial}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}^{etry}} \left(\frac{(\tilde{\mathbf{D}}^e)^{-1}}{1 - D_{n+1}} : \boldsymbol{\sigma}_{n+1} - \boldsymbol{\varepsilon}^{etry} + \Delta\gamma \mathbf{N}_\sigma \right) \\
&= -\tilde{\mathbf{I}}
\end{aligned} \quad (3.4.31)$$

これを式(3.4.30)に代入し試行弾性ひずみ項を右辺に移項して全体を行列表記すると次式が得られる。

$$\left[\begin{array}{ccccc}
\frac{\partial f_1}{\partial \boldsymbol{\sigma}_{n+1}} & \frac{\partial f_1}{\partial R_{n+1}} & \frac{\partial f_1}{\partial \boldsymbol{\beta}_{n+1}} & \frac{\partial f_1}{\partial D_{n+1}} & \frac{\partial f_1}{\partial (\Delta\gamma)} \\
\frac{\partial f_2}{\partial \boldsymbol{\sigma}_{n+1}} & \frac{\partial f_2}{\partial R_{n+1}} & \frac{\partial f_2}{\partial \boldsymbol{\beta}_{n+1}} & \frac{\partial f_2}{\partial D_{n+1}} & \frac{\partial f_2}{\partial (\Delta\gamma)} \\
\frac{\partial f_3}{\partial \boldsymbol{\sigma}_{n+1}} & \frac{\partial f_3}{\partial R_{n+1}} & \frac{\partial f_3}{\partial \boldsymbol{\beta}_{n+1}} & \frac{\partial f_3}{\partial D_{n+1}} & \frac{\partial f_3}{\partial (\Delta\gamma)} \\
\frac{\partial f_4}{\partial \boldsymbol{\sigma}_{n+1}} & \frac{\partial f_4}{\partial R_{n+1}} & \frac{\partial f_4}{\partial \boldsymbol{\beta}_{n+1}} & \frac{\partial f_4}{\partial D_{n+1}} & \frac{\partial f_4}{\partial (\Delta\gamma)} \\
\frac{\partial f_5}{\partial \boldsymbol{\sigma}_{n+1}} & \frac{\partial f_5}{\partial R_{n+1}} & \frac{\partial f_5}{\partial \boldsymbol{\beta}_{n+1}} & \frac{\partial f_5}{\partial D_{n+1}} & \frac{\partial f_5}{\partial (\Delta\gamma)} \\
\frac{\partial \boldsymbol{\sigma}_{n+1}}{\partial \boldsymbol{\sigma}_{n+1}} & \frac{\partial R_{n+1}}{\partial R_{n+1}} & \frac{\partial \boldsymbol{\beta}_{n+1}}{\partial \boldsymbol{\beta}_{n+1}} & \frac{\partial D_{n+1}}{\partial D_{n+1}} & \frac{\partial (\Delta\gamma)}{\partial (\Delta\gamma)}
\end{array} \right] \begin{Bmatrix} d\boldsymbol{\sigma}_{n+1} \\ dR_{n+1} \\ d\boldsymbol{\beta}_{n+1} \\ dD_{n+1} \\ d(\Delta\gamma) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} d\boldsymbol{\varepsilon}^{etry} \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \end{Bmatrix} \quad (3.4.32)$$

この式の係数行列を見ると Return-Mapping 方程式を Newton-Raphson 法で解く際に用いた修正解を求める方程式(3.4.24)の係数行列と全く同じになる。すなわちこの係数行列の成分の値は Return-Mapping 方程式を解く際に最後の反復で用いた係数行列の値をそのまま用いて良い。この係数行列の逆行列の成分を \mathbf{C}_{ij} と置くと式(3.4.32)を以下のように変形できる。

$$\left\{ \begin{array}{l} d\sigma_{n+1} \\ dR_{n+1} \\ d\beta_{n+1} \\ dD_{n+1} \\ d(\Delta\gamma) \end{array} \right\} = \left[\begin{array}{ccccc} \tilde{C}_{11} & C_{12} & \tilde{C}_{13} & C_{14} & C_{15} \\ C_{21} & C_{22} & C_{23} & C_{24} & C_{25} \\ \tilde{C}_{31} & C_{32} & \tilde{C}_{33} & C_{34} & C_{35} \\ C_{41} & C_{42} & C_{43} & C_{44} & C_{45} \\ C_{51} & C_{52} & C_{53} & C_{54} & C_{55} \end{array} \right] \left\{ \begin{array}{l} d\boldsymbol{\varepsilon}^{etry} \\ 0 \\ \boldsymbol{0} \\ 0 \\ 0 \end{array} \right\} \quad (3.4.33)$$

さらにこの式を第 1 行目について展開すると式(3.4.34)が得られる.

$$d\sigma_{n+1} = \tilde{C}_{11} : d\boldsymbol{\varepsilon}^{etry} \quad (3.4.34)$$

\tilde{C}_{11} は応力と試行弾性ひずみの勾配を示すため, \tilde{C}_{11} が Consistent 接線剛性となる. 以上が「流れ則積分法」における Consistent 接線剛性の求め方である. この計算の特徴として式(3.4.32)の係数行列の逆行列 C_{ij} の全成分(15×15)を計算しなければならない. これが次節で述べる「縮約積分法」に対して計算負荷が掛かる理由の一つである.

3.4.3 流れ則積分法による検証計算

以上に述べた「流れ則積分法」の妥当性を調べる基礎的な確認計算として図 3.4.1 に示すような単軸引張負荷の計算を行った. この検証のために用いた 4 面体 2 次要素の有限要素モデルを図 3.4.1 に示す. 全体寸法 10 mm × 10 mm × 30 mm に対し要素寸法 1 mm とした. 局所くびれを表現するために上面を X 方向および Y 方向を固定し, Z 方向に引張強制変位を負荷した. その他の面は単軸引張負荷を表現する対称条件を満たすように拘束し Updated-Lagrange 形の有限変形を考慮した損傷弾塑性モデルとして計算した. ステンレス鋼のデータ(Lemaitre and Desmorat, 2005; 櫻庭, 2009)を参考にした材料定数を表 3.4.2 に示す. さらに巨視的き裂発生条件を決める損傷値の臨界値 D_c について金属材料ではおおよそ 0.2 から 0.5 程度となる事が知られており(Lemaitre, 1992), 本計算では $D_c = 0.5$ を用い全積分点のうち最大の損傷値が D_c に達した時点で計算を終了させた. また損傷モデルに対する比較用のモデルとして損傷定数以外の材料定数は表 3.4.2 と同じ値を用いた非損傷モデルについても計算した.

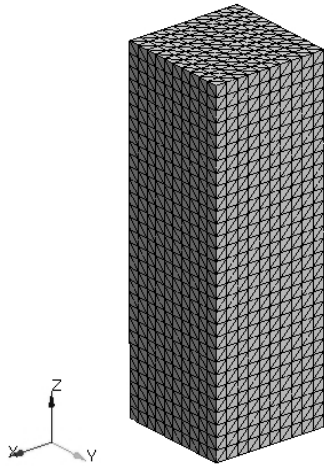


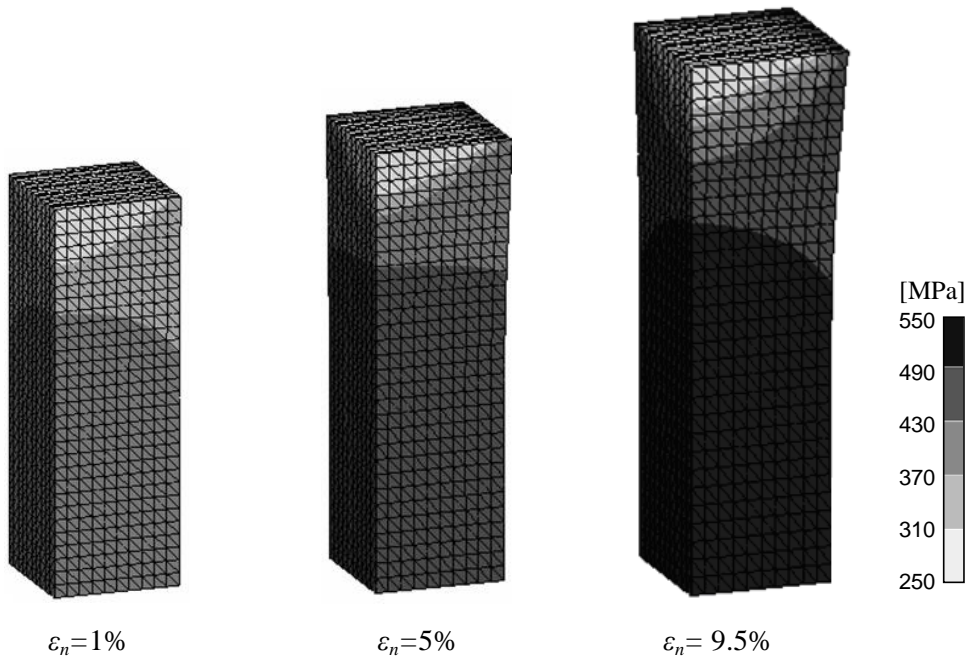
Fig. 3.4.1 Tensile bar model

Table 3.4.2 Material constants

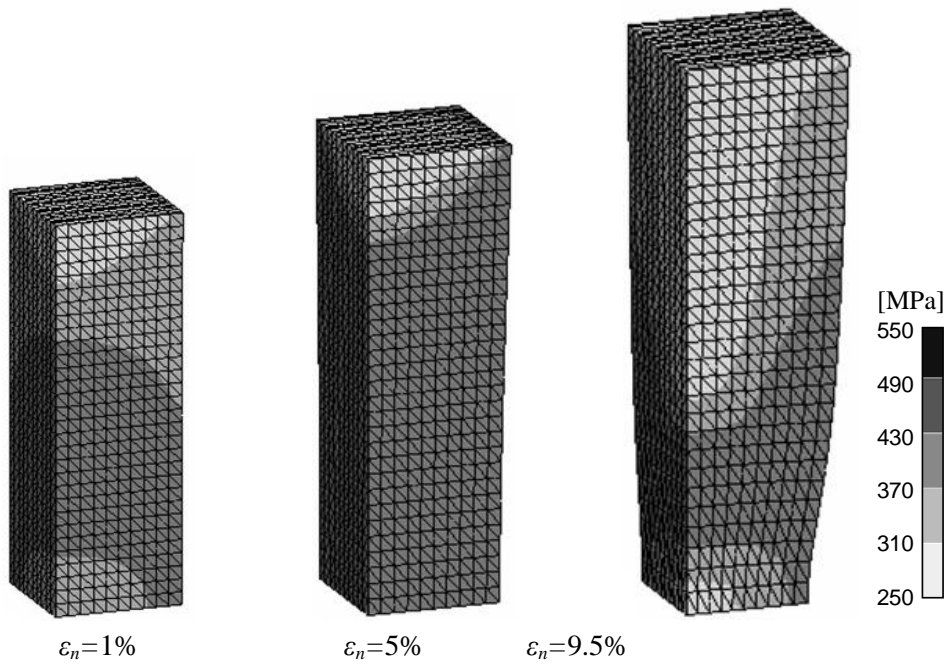
Young's Modulus	E[MPa]	160000.0
Poisson's Ratio	ν	0.34
Initial Yield Stress	σ_{y0} [MPa]	250.0
Isotropic Hardening Constant	A_1 [MPa]	350.0
	B_1	1.0
	A_2 [MPa]	160.0
	B_2	4.0
	A_3 [MPa]	260.0
	B_3	1.0
Kinematic Hardening Constant	a_1 [MPa]	19000.0
	b_1	4000.0
	a_2 [MPa]	19000.0
	b_2	5000.0
	a_3 [MPa]	16000.0
	b_3	200.0
Damage Constant	S	0.500
	r[MPa]	0.350

図 3.4.2 に非損傷モデルと損傷モデルの変形に伴う相当応力(Mises 応力)の分布を示す。ただし引張強制変位量を変形前の長さで割った値を公称ひずみ ϵ_n として定義し $\epsilon_n = 1\%$, 5% , 9.5% の状態を示す。図 3.4.2(a) から非損傷モデルでは公称ひずみが増加しても局所的な変形は見られず均一に伸びており応力は最小断面部でほぼ均一となっている。一方、図 3.4.2(b) から損傷モデルでは下面で局所くびれ変形が発生している様子が見られ、局所くびれ部の断面内では応力が低下している事が確認される。

図 3.4.3 は横軸に公称ひずみ、縦軸にモデルの下面の断面積減少率を示し局所くびれ状態を調べたものである。この図から非損傷モデルでは断面がほぼ一定の割合で減少している事がわかる。一方、損傷モデルでは公称ひずみ 3% 程度までは非損傷モデルと同等の断面積減少の振舞いを示すが、それ以降は加速的な局所くびれ変形により一気に断面積が減少している。さらに図 3.4.4 は横軸に公称ひずみ、縦軸に引張面の荷重合計値を変形前の断面積で割った公称応力を用いた公称応力-公称ひずみ線図を示す。この図からも損傷モデルでは局所くびれによる応力積載能力の低下挙動が確認できる。



(a) Undamage model



(b) Damage model

Fig. 3.4.2 Equivalent stress(Mises stress)

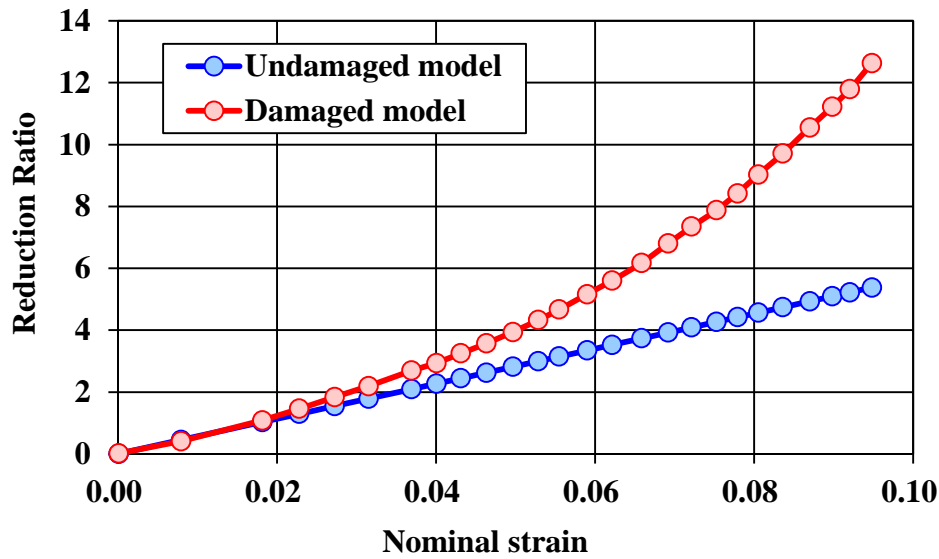


Fig. 3.4.3 Reduction of cross section area

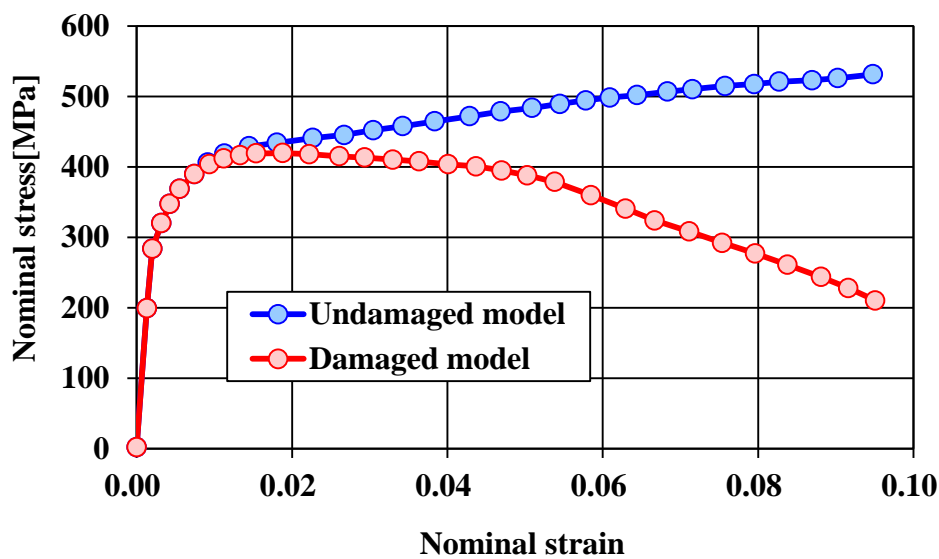


Fig. 3.4.4 Stress-strain curve

以上の様に損傷モデルの有無で局所くびれが発生するか否かが明瞭に別れる結果となった。この事について以下に考察を行う。図 3.4.5 に損傷モデルで計算した損傷値の分布を示す。この図から変形の進行と共に局所くびれ部で損傷が集中している様子が見られ、断面中央で損傷値が最大となっている様子がわかる。また図 3.4.6 に損傷モデルで計算した応力三軸度の分布を示す。変形の初期段階 ($\epsilon_n=1\%$) では比較的均一に応力三軸が分布しているが、変形が進むに連れて応力三軸度の高い領域が断面中央部に集中する。

損傷発展則は式(3.3.25)で表現され損傷エネルギー解放率 Y は式(3.3.39)のように応力三軸度が高くなるに従って大きくなる事から応力三軸度の高い領域では損傷が発展し易くなる。よって応力三軸度の高い断面中央部では図 3.4.5 のように損傷が集中する。さらに損傷の増加と共に降伏関数が縮小し応力積載能力の低下による加工軟化が表現されるため損傷が集中している断面中央部では変形が加速されさらに損傷が進展し易くなる。その結果として損傷モデルでは局所くびれ変形が発生し、図 4 (b)のような局所くびれ領域での応力積載能力の低下や図 3.4.4 のような公称応力-公称ひずみ線図における応力低下挙動が表現される。

連続体損傷力学では損傷散逸ポテンシャルによる損傷値の発展を解いているが、以上のような変形挙動や損傷挙動は延性材料を用いた実験ではボイドの発生、成長、合体による材料損傷とそれに伴う巨視的応力積載能力の低下や局所くびれの発生として観測される。また断面中央部で損傷が最大となる事は単軸負荷下の延性破壊は周知(Bluhm and Morrissey, 1966)の様子断面中央部において高い応力三軸度のために初期ボイドの成長による材料損傷が顕著に起こり図 3.4.7 のように局所くびれ発生箇所の断面中央部において初期破壊が起きる事と対応している。

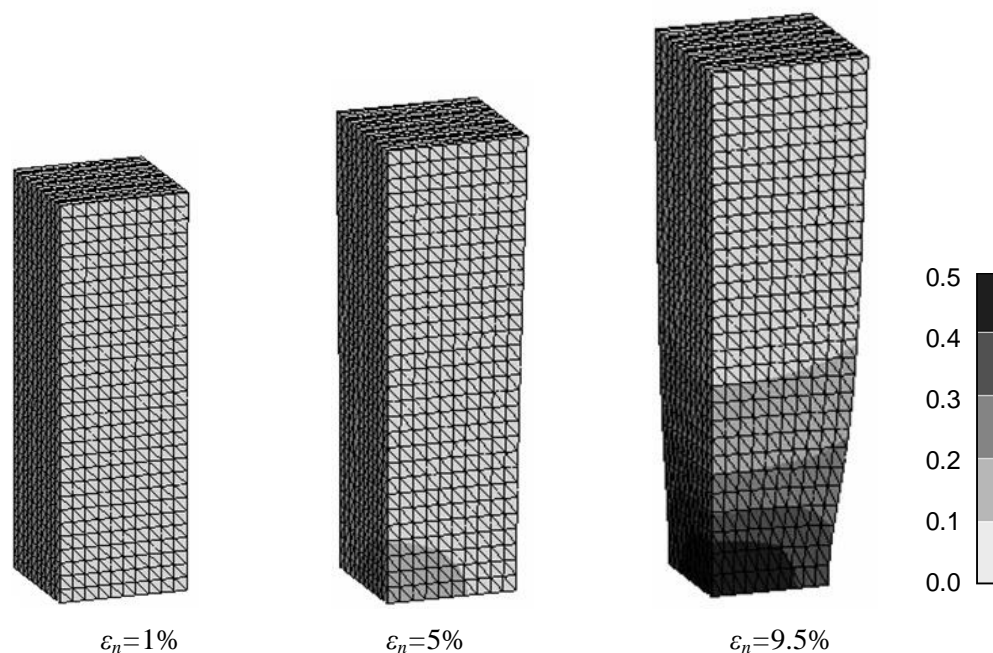


Fig. 3.4.5 Damage (damage model)

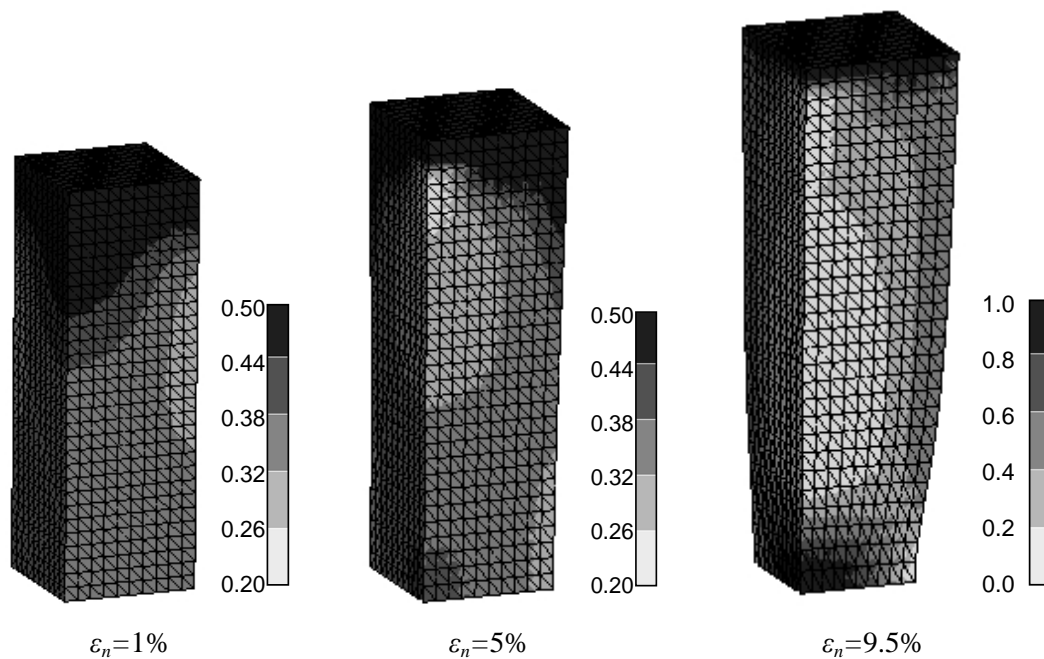
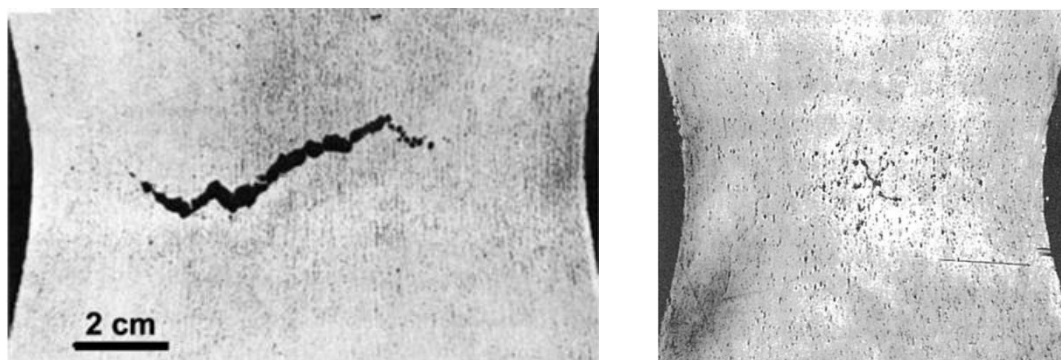


Fig. 3.4.6 Stress triaxiality (damage model)



(a) SAE8620

(b) Copper

Fig. 3.4.7 Crack initiation
(Bluhm and Morrissey, 1996)

次に計算の収束性について述べる. 本計算は 1 ステップ当たり公称ひずみ増分を 0.1% ずつ与えて計算終了までに 95 ステップ必要とした. 図 3.4.8 に各計算ステップにおいて非線形剛性方程式を Newton-Raphson 法で解く際に残差力が収束するまでに要した反復回数を示す. ただし残差力の最大値が $1.0 \times 10^{-4} \text{ N}$ 以下に達した時を収束状態と定義した.

非損傷材料では概ね 4 回程度の反復回数を必要としたが損傷モデルでは公称ひずみの増加に従って反復回数が増加し最大 6 回の反復回数となった. これは損傷モデルでは上述のように局所くびれ変形が生じるため 1 ステップあたりの局所変形量が大きく

なるためであると考えられる。いずれにせ陽解法のように数十回の反復を必要とせず、非常に少ない反復回数で収束解を得る事が出来ている。

また図 3.4.9 は最終ステップ($\epsilon_n = 0.095$)における反復回数に対する残差力の遷移を示したものであるが、損傷モデルでも非損傷モデルと同様に優れた 2 次収束性を有している事が確認できる。このように良好な収束性が得られる理由は本計算に完全陰的アルゴリズムを用いているためであり、以上から第 2 章で示した完全陰的アルゴリズムが妥当であると考えられる。

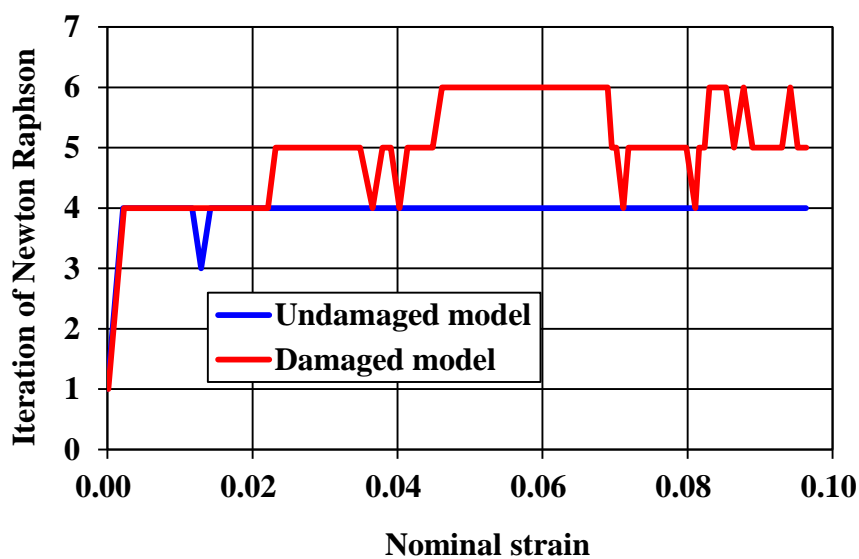


Fig. 3.4.8 Number of iteration

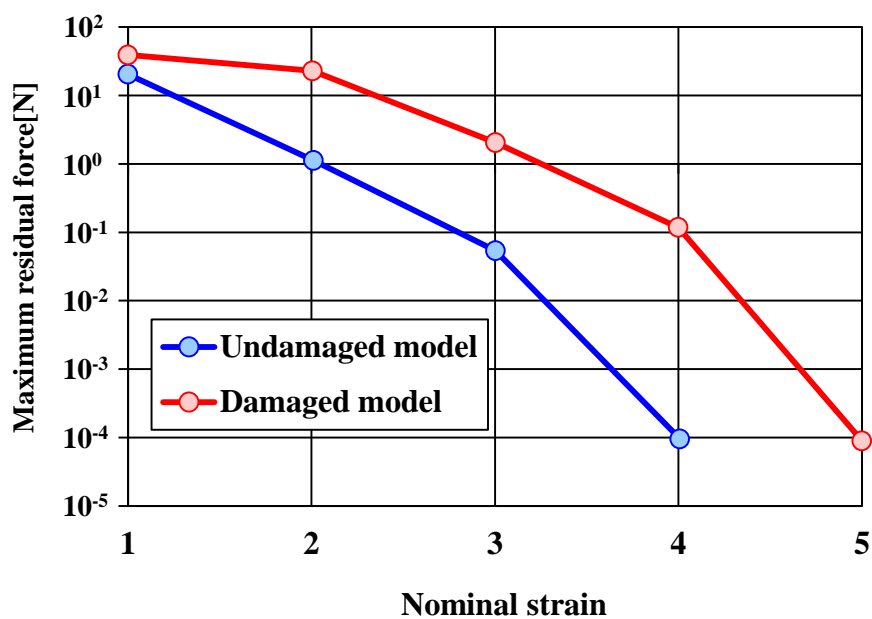


Fig. 3.4.9 Residual force

さらに繰り返し大負荷を受ける問題についての基礎検証のための計算も行った。計算時間を省くため図 3.4.10 のように要素数の少ないモデルを用い、上面に対して Z 方向の両振りの繰り返し強制変位を与えた。またその他の面については単軸負荷の対称条件を満たす様に拘束し損傷弾塑性モデルとして計算した。

比較用の実測データの選定として一般的な鋼材やアルミ材でも同様の傾向は見られるため差し支えないが、損傷に伴う変形挙動がより顕著に見られるため事前に腐食させた S500s 鋼のデータ(Apostolopoulos and Rodopoulos, 2010)を参考にした。ヤング率が一般的な鋼に対して低めとなっている理由は腐食によるものと考えられる。

またここで参考にした実材料の詳細な損傷定数が不明なため各材料定数を表 3.4.3 のように現実的な金属材料の範囲で便宜的な値(Lemaitre, 1992)を入力し定性的な変形挙動を表現できるかのみ検証した。

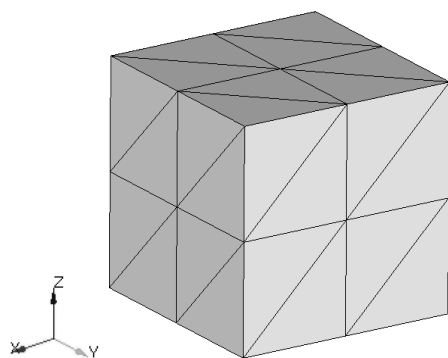


Fig. 3.4.10 Cyclic loading model

Table 3.4.3 Material constants

Young's Modulus	E[MPa]	65000.0
Poisson's Ratio	ν	0.34
Initial Yield Stress	σ_{y0} [MPa]	520.0
Isotropic Hardening Constant	A_1 [MPa]	10.0
	B_1	2.0
	A_2 [MPa]	20.0
	B_2	4.0
	A_3 [MPa]	10.0
Kinematic Hardening Constant	B_3	1.0
	a_1 [MPa]	19000.0
	b_1	4000.0
	a_2 [MPa]	19000.0
	b_2	5000.0
Damage Constant	a_3 [MPa]	16000.0
	b_3	200.0
	S	0.500
	r [MPa]	15.000
	Dc	0.500

図 3.4.11 と図 3.4.12 はこのモデルに公称ひずみ振幅 4%の両振負荷を 10 サイクル掛けた時の応力ひずみ線図を非損傷モデルと損傷モデルについて示す。横軸は強制変位量を元の長さで割った公称ひずみを示し、縦軸は引張面の荷重合計値を変形前の断面積で割った公称応力を示す。実測結果では図 3.3.3 のようにサイクル数の増加に伴う明瞭な加工軟化挙動が見られるが、非損傷モデルでは図 3.4.11 のようにヒステリシスループが塑性シェイクダウンを起こし実測のような加工軟化挙動が見られない。一方、損傷モデルでは図 3.4.12 のサイクル数の増加に伴う加工軟化挙動が確認できる。図 3.4.13 はサイクル数に伴う各ループの引張時のピーク応力を示したものである。この図からも損傷モデ

ルでは図 3.3.3 の実測と同様にサイクル数に伴う応力低下が見られ加工軟化挙動を定性的に表現できている事がわかる。

また図 3.4.14 にサイクル数に伴う損傷値の変化を示す。図のように損傷モデルではサイクル数の増加に伴い損傷値が増加してゆく傾向が見られる。すなわち損傷モデルにおいて加工軟化傾向が表現されるのは、この損傷値の増加に対して降伏関数の収縮による応力積載能力の低下が要因であると考えられる。

さらに実測結果では図 3.3.3 のようにサイクル数の増加に伴い弾性領域のヤング率が低下している様子が確認できる。図 3.4.15 は本計算で得られたサイクル数の増加に伴うヤング率の変化を示したものである。非損傷モデルでは弾塑性変形の履歴に関わらずヤング率は一定値となっているが、損傷モデルでは実測結果と同様にサイクル数の増加に対してヤング率が低下している。これは図 3.4.14 のようにサイクル数の増加に伴って大きくなる損傷値に対して巨視的弾性材料剛性の低下が表現されるためである。

以上のように本計算手法を用いる事で繰返し大負荷を掛けた時の応力、ひずみ挙動を定性的に良く表現できている事がわかる。

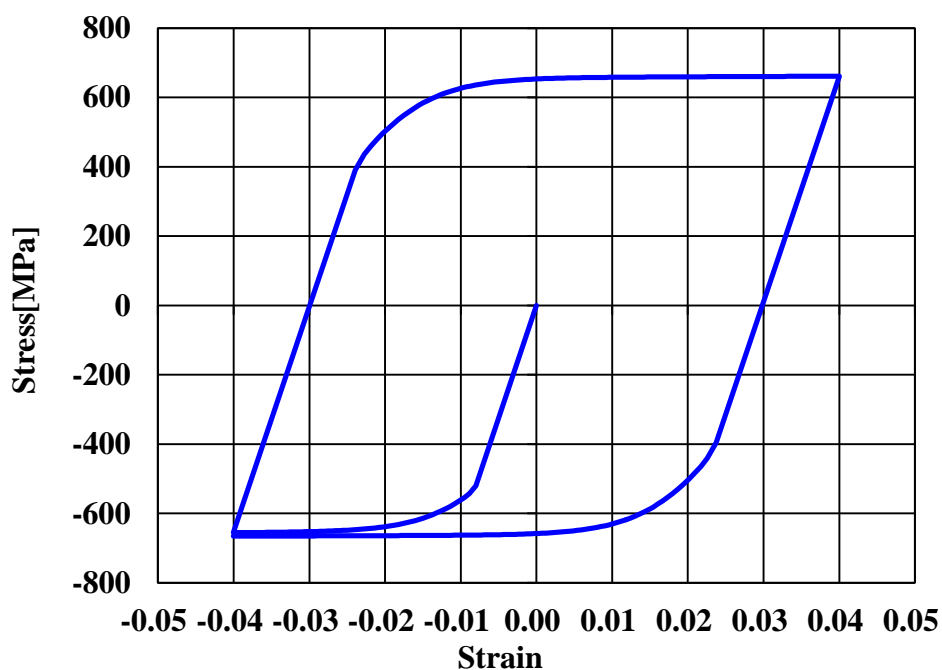
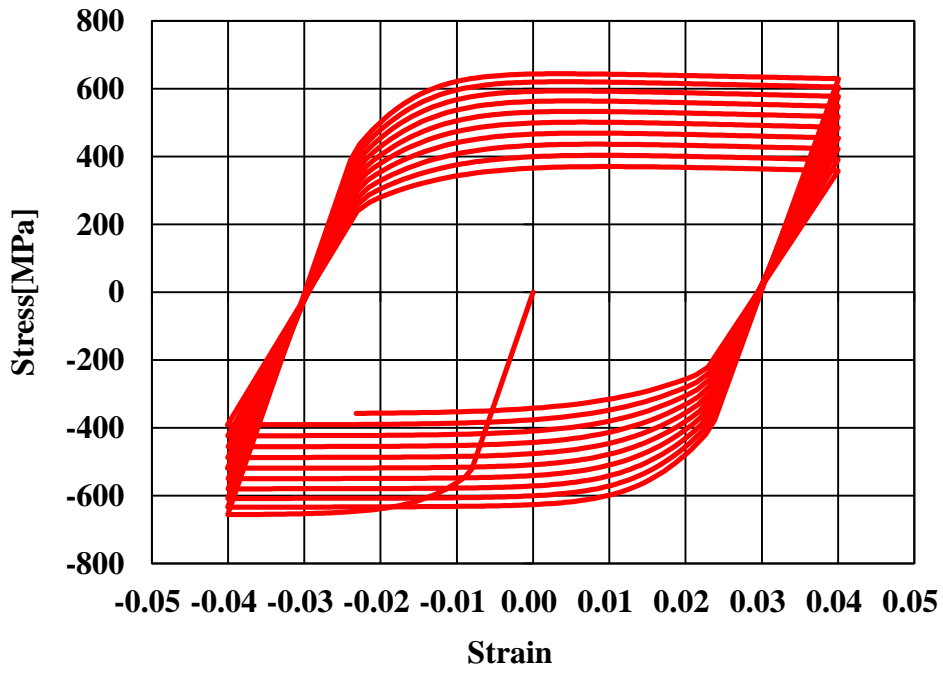


Fig. 3.4.11 Undamaged model



(b) Damaged model

Fig. 3.4.12 Stress-Strain curve(FEM)

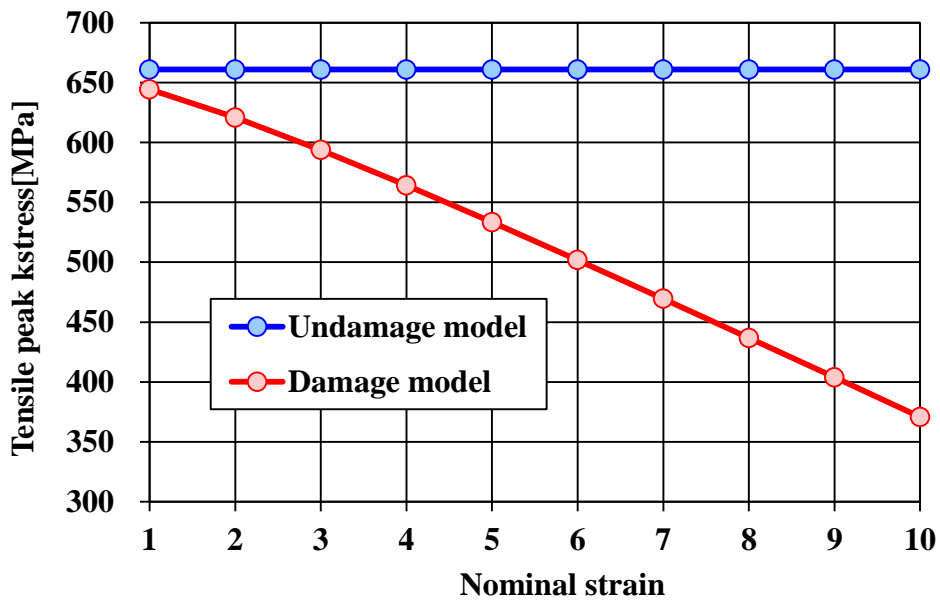


Fig. 3.4.13 Work-softening(FEM)

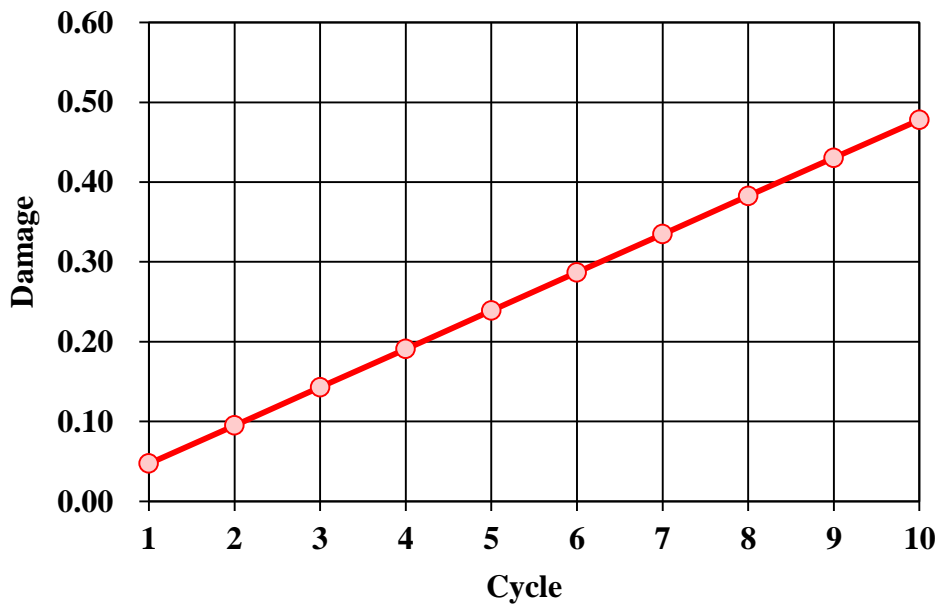
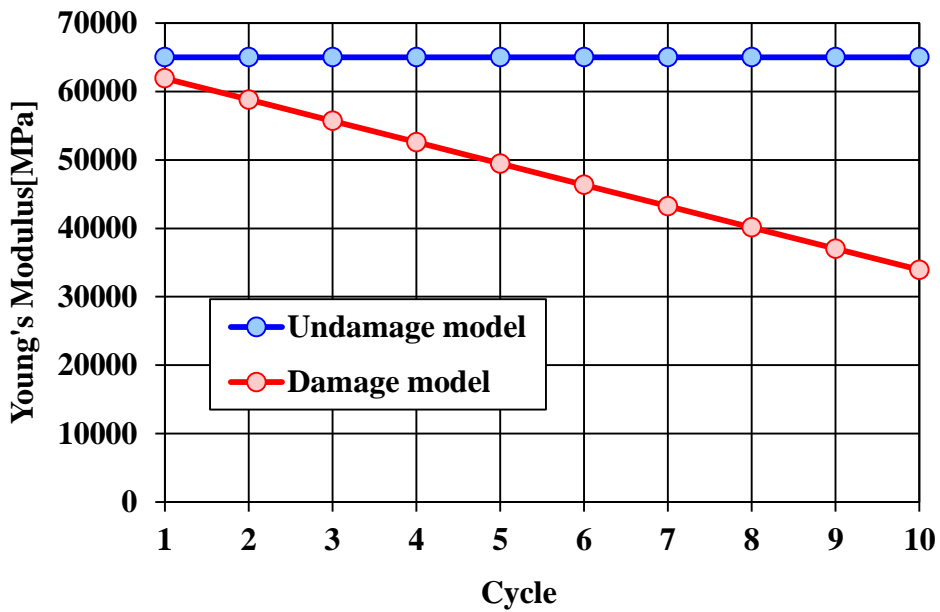


Fig. 3.4.14 Damage (FEM : damage model)



3.4.15 Deterioration of macroscopic elastic stiffness(FEM)

3.5 縮約積分法による陰解法積分への改良

3.5.1 縮約された Return-Mapping 方程式

本研究では前節にて提案した「流れ則積分法」についてさらに計算速度の向上を目指して本節で述べる「縮約積分法」へと改良した。本節では本研究で提案する「縮約積分法」について具体的に説明する。

前節で示した「流れ則積分法」は後退形 Euler 表記した流れ則そのものを Return-Mapping 方程式として考えて非線形連立方程式として解く手法である。確かにこの手法により残差力の 2 次収束性は得られるが非線形連立方程式を Newton 法で解くとき、反復計算毎に非対称係数行列の線形連立方程式を求めなければならない。さらに Consistent 接線剛性の作成に関して Return-Mapping 方程式の Jacobi 行列の逆行列の成分を計算しなければならない。

一方、単純な弾塑性モデルである非損傷等方硬化 Mises モデルなどを完全陰的に解く例を挙げると多くの場合、上述のような流れ則積分法は用いられずに Return-Mapping の計算では塑性乗数のみを未知数とする 1 変数のスカラ方程式で解くケースが多い (Schreyer, et al., 1979)。また Consistent 接線剛性の作成にあたって Return-Mapping で得られた物理量の単なる代入計算という陽的な表記となっている (Simo and Taylor, 1985)。この計算手法を本稿では便宜的に「縮約積分法」と呼ぶ。

両手法の特徴として流れ則積分法の長所は流れ則そのものが既に Return-Mapping 方程式になっているため材料モデルが少々複雑になっても比較的容易に完全陰解法の定式化を導出できる。一方、縮約積分法はその導出過程は煩雑になるが上述のように Return-Mapping の計算では未知数が 1 つのスカラ変数だけとなり、さらに Consistent 接線剛性の計算に逆行列を求める必要がないため流れ則積分法に比べて計算負荷が圧倒的に小さくなる利点がある。このような理由から既存の研究 (Lemaitre and Desmorat, 2005; Besson, 2004; 寺田, 2012) を見ると非損傷弾塑性モデルや等方硬化損傷弾塑性モデルなどの比較的単純なモデルでは縮約積分法が提案されているが、非線形複合硬化損傷弾塑性モデルなどモデルが複雑になるほど流れ則積分法を用いて定式化する場合が多いように見受けられる。また本研究で用いている損傷分割背応力モデルの完全陰解法に対する縮約積分法の例は見られない (Doghri, 1995; Hayakawa, et al., 2010; Sawyer, et al., 2001)。そこで本研究では分割背応力による複合硬化則と連続体損傷力学を強連成した完全陰解法について「縮約積分法」を提案した。

「縮約積分法」も陰解法であるため流れ則を後退形 Euler 法で積分する事においてその基礎式は「流れ則積分法」と相違ない。すなわち基礎となる式は式(3.4.23)で示した 5 本の Return-Mapping 方程式である。まずはこれらの各式を縮約し最終的に塑性乗数のみの単一スカラ未知数とする Return-Mapping 方程式へと縮約し計算負荷を低減する応

力積分法を提案する.

まず式(3.4.23)の第 1 式より式(3.5.1)が得られる. また式(3.4.23)の第 5 式に式(3.5.1), 式(3.4.21)を用いることで有効相対応力 $\boldsymbol{\eta}_{n+1}$ は式(3.5.2)となる.

$$\frac{\boldsymbol{\sigma}_{n+1}}{1-D_{n+1}} = \tilde{\mathbf{D}}^e : \boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^{e\,try} - 2G\Delta\gamma \mathbf{N}_\sigma \quad (3.5.1)$$

$$\boldsymbol{\eta}_{n+1} = \tilde{\mathbf{I}}_d : \boldsymbol{\sigma}_{n+1}^{try} - 2G\Delta\gamma \mathbf{N}_\sigma - \mathbf{E} - \sqrt{\frac{3}{2}} \bar{\mathbf{N}}_\sigma F \quad (3.5.2)$$

$$\boldsymbol{\sigma}_{n+1}^{try} \equiv \tilde{\mathbf{D}}^e : \boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^{etry} \quad (3.5.3)$$

ただし試行応力を式(3.5.3)として定義した. さらに降伏曲面に対する法線テンソルは式(3.4.23)の第 5 式, 式(3.4.6)より式(3.5.4)となり, これを式(3.5.2)に代入すると式(3.5.5)が得られる.

$$\left. \begin{aligned} \bar{\mathbf{N}}_\sigma &= \sqrt{\frac{3}{2}} \frac{\boldsymbol{\eta}_{n+1}}{q_{n+1}} \\ \mathbf{N}_\sigma &= \frac{3}{2} \frac{1}{1-D_{n+1}} \frac{\boldsymbol{\eta}_{n+1}}{q_{n+1}} \end{aligned} \right\} \quad (3.5.4)$$

$$\left\{ 1 + \left(\frac{3G\Delta\gamma}{1-D_{n+1}} + \frac{3}{2} F \right) \frac{1}{q_{n+1}} \right\} \boldsymbol{\eta}_{n+1} = \boldsymbol{\eta}_E \quad (3.5.5)$$

$$\boldsymbol{\eta}_E \equiv \tilde{\mathbf{I}}_d : \boldsymbol{\sigma}_{n+1}^{try} - \mathbf{E} \quad (3.5.6)$$

さらに式(3.5.5)の両辺に $\sqrt{\frac{3}{2}}$ をかけて両辺のノルムを取り式(3.5.7)を得る.

$$\left\{ 1 + \left(\frac{3G\Delta\gamma}{1-D_{n+1}} + \frac{3}{2} F \right) \frac{1}{q_{n+1}} \right\} \sqrt{\frac{3}{2}} \|\boldsymbol{\eta}_{n+1}\| = \sqrt{\frac{3}{2}} \|\boldsymbol{\eta}_E\| \quad (3.5.7)$$

式(3.4.23)第 5 式を式(3.5.8)とおくと, 式(3.5.7)は式(3.5.9)となる. 式(3.5.9)と損傷発展式である式(3.4.23)の第 4 式を連立させることで Return-Mapping 方程式は 式(3.5.10)となる.

$$\left. \begin{aligned} q_{n+1} &= \sqrt{\frac{3}{2}} \|\boldsymbol{\eta}_{n+1}\| = \sigma_{yn+1} \\ q_E &\equiv \sqrt{\frac{3}{2}} \|\boldsymbol{\eta}_E\| \end{aligned} \right\} \quad (3.5.8)$$

$$\sigma_{yn+1} + \frac{3G\Delta\gamma}{1-D_{n+1}} + \frac{3}{2} F - q_E = 0 \quad (3.5.9)$$

$$\left. \begin{aligned} \sigma_{y_{n+1}}(R_n + \Delta\gamma) + \frac{3G\Delta\gamma}{1-D_{n+1}} + \frac{3}{2}F(\Delta\gamma) - q_E(\Delta\gamma) &= 0 \\ D_{n+1} - D_n - \frac{\Delta\gamma}{1-D_{n+1}} \left(\frac{Y_{n+1}(\Delta\gamma, D_{n+1})}{r} \right)^S &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (3.5.10)$$

この段階で Return-Mapping 方程式を $\Delta\gamma$ と D_{n+1} の 2 個のスカラー未知数にまで縮約させることができる。

さらに式(3.5.10)について未知数を塑性乗数のみへと縮約してゆく。まず次のステップの損傷エネルギー解放率 Y_{n+1} について考える。式(3.3.27)より式(3.5.11)を得る。ただし式(3.5.11)の右辺第 1 項のノルムの中身の式は式(3.4.23)の第 5 式および式(3.4.21)を用いて式(3.5.12)と書ける。

$$\begin{aligned} Y_{n+1} &\equiv \frac{q_{n+1}^2}{2E(1-D_{n+1})^2} \left\{ \frac{2}{3}(1+\nu) + 3(1-2\nu) \left(\frac{p_{n+1}}{\sigma_{eq_{n+1}}} \right)^2 \right\} \\ &= \frac{1}{4G} \left\| \frac{\tilde{\mathbf{I}}_d : \boldsymbol{\sigma}_{n+1}}{1-D_{n+1}} \right\|^2 + \frac{K}{2} (\mathbf{I} : \boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^{etry})^2 \end{aligned} \quad (3.5.11)$$

$$\frac{\tilde{\mathbf{I}}_d : \boldsymbol{\sigma}_{n+1}}{1-D_{n+1}} = \left(1 + \frac{3}{2} \frac{F}{q_{n+1}} \right) \boldsymbol{\eta}_{n+1} + \mathbf{E} \quad (3.5.12)$$

また式(3.5.5)より式(3.5.13)が得られる。

$$\boldsymbol{\eta}_{n+1} = \frac{2(1-D_{n+1})q_{n+1}}{2(1-D_{n+1})q_{n+1} + 6G\Delta\gamma + 3(1-D_{n+1})F} \boldsymbol{\eta}_E \quad (3.5.13)$$

これを式(3.5.12)に代入し式(3.5.14)のように \mathbf{g} とおく。

$$\begin{aligned} \frac{\tilde{\mathbf{I}}_d : \boldsymbol{\sigma}_{n+1}}{1-D_{n+1}} &= \frac{(2\sigma_{y_{n+1}} + 3F)(1-D_{n+1})}{(2\sigma_{y_{n+1}} + 3F)(1-D_{n+1}) + 6G\Delta\gamma} \boldsymbol{\eta}_E + \mathbf{E} \\ &\equiv \mathbf{g}(\Delta\gamma, D_{n+1}) \end{aligned} \quad (3.5.14)$$

以上より次のステップの損傷エネルギー解放率 Y_{n+1} を式(3.5.15)のように書き直すことができる。

$$Y_{n+1}(\Delta\gamma, \mathbf{g}(\Delta\gamma, D_{n+1})) = \frac{1}{4G} \left\| \mathbf{g}(\Delta\gamma, D_{n+1}) \right\|^2 + \frac{K}{2} (\mathbf{I} : \boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^{etry})^2 \quad (3.5.15)$$

さらに式(3.5.10)の第 1 式より

$$\left(q_E(\Delta\gamma) - \sigma_{y_{n+1}}(R_n + \Delta\gamma) - \frac{3}{2}F(\Delta\gamma) \right) (1 - D_{n+1}) = 3G\Delta\gamma \quad (3.5.16)$$

となる．ここで式(3.5.17)のようにおくと，式(3.5.16)は式(3.5.18)と書ける．

$$\left. \begin{aligned} w_{n+1} &\equiv 1 - D_{n+1} \\ M(\Delta\gamma) &\equiv q_E(\Delta\gamma) - \sigma_{y_{n+1}}(R_n + \Delta\gamma) - \frac{3}{2}F(\Delta\gamma) \end{aligned} \right\} \quad (3.5.17)$$

$$w_{n+1}(\Delta\gamma) = \frac{3G\Delta\gamma}{M(\Delta\gamma)} \quad (3.5.18)$$

式(3.5.17)の第1式を式(3.5.14)に適用すると

$$\mathbf{g} = \frac{(2\sigma_{y_{n+1}} + 3F)w_{n+1}}{(2\sigma_{y_{n+1}} + 3F)w_{n+1} + 6G\Delta\gamma} \boldsymbol{\eta}_E + \mathbf{E} \quad (3.5.19)$$

と書ける．さらに式(3.5.19)に式(3.5.18)と式(3.5.16)を代入して整理して内部変数を含めて書くと

$$\mathbf{g}(\Delta\gamma) = \frac{2\sigma_{y_{n+1}}(\Delta\gamma) + 3F(\Delta\gamma)}{2\sigma_{y_{n+1}}(\Delta\gamma) + 3F(\Delta\gamma) + 2M(\Delta\gamma)} \left\{ \tilde{\mathbf{I}}_d : \boldsymbol{\sigma}_{n+1}^{try} - \mathbf{E}(\Delta\gamma) \right\} + \mathbf{E}(\Delta\gamma) \quad (3.5.20)$$

となり \mathbf{g} を $\Delta\gamma$ だけの内部変数で記述できる．よって式(3.5.15)より Y_{n+1} も $\Delta\gamma$ のみの1変数に縮約される．さらに式(3.5.10)の第2式に式(3.5.17)の第1式を適用すると式(3.5.21)が得られる．

$$w_{n+1} - (w_{n+1})^2 - D_n w_{n+1} - \Delta\gamma \left(\frac{Y_{n+1}}{r} \right)^S = 0 \quad (3.5.21)$$

式(3.5.21)に式(3.5.18)を代入し整理して内部変数も含めて書くと式(3.5.22)のように塑性乗数 $\Delta\gamma$ のみのスカラ1変数に縮約された Return-Mapping 方程式が得られる．

$$f(\Delta\gamma) \equiv 3GM(\Delta\gamma) - 9G^2\Delta\gamma - 3GD_n M(\Delta\gamma) - (M(\Delta\gamma))^2 \left(\frac{Y_{n+1}(\Delta\gamma)}{r} \right)^S = 0 \quad (3.5.22)$$

本研究では前節で示した縮約された Return-Mapping 方程式の求解に Newton 法を用いた．未知数 $\Delta\gamma$ に対して Newton 法における解の修正量を $d(\Delta\gamma)$ とおくと式(3.5.23)となる．ただし各微分項は式(3.5.24)，式(3.5.25)となる．

$$d(\Delta\gamma) = - \left(\frac{df}{d(\Delta\gamma)} \right)^{-1} f(\Delta\gamma) \quad (3.5.23)$$

$$\frac{df}{d(\Delta\gamma)} = \frac{\partial f}{\partial(\Delta\gamma)} + \frac{\partial f}{\partial M} \frac{dM}{d(\Delta\gamma)} + \frac{\partial f}{\partial Y_{n+1}} \frac{dY_{n+1}}{d(\Delta\gamma)} \quad (3.5.24)$$

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial(\Delta\gamma)} &= -9G^2 \\ \frac{\partial f}{\partial M} &= 3G - 3GD_n - 2M \left(\frac{Y_{n+1}}{r} \right)^S \\ \frac{\partial f}{\partial Y_{n+1}} &= -\frac{S}{r^S} M^2 (Y_{n+1})^{S-1} \\ \frac{\partial M}{\partial(\Delta\gamma)} &= -\frac{3}{2} \frac{\eta_E}{q_E} : \frac{d\mathbf{E}}{d(\Delta\gamma)} - H_{Iso}(R_n + \Delta\gamma) - \frac{3}{2} \frac{dF}{d(\Delta\gamma)} \\ \frac{dY_{n+1}}{d(\Delta\gamma)} &= \frac{\mathbf{g}}{2G} : \frac{d\mathbf{g}}{d(\Delta\gamma)} \end{aligned} \right\} \quad (3.5.25)$$

ただし等方硬化則の加工硬化係数を式(3.5.26)とおいた. 式(3.5.25)において合成関数の微分より式(3.5.27)となり各微分項は式(3.5.28)となる.

$$H_{Iso}(R) \equiv \frac{d\sigma_y(R)}{d(\Delta\gamma)} \quad (3.5.26)$$

$$\frac{d\mathbf{g}}{d(\Delta\gamma)} = \frac{\partial \mathbf{g}}{\partial \sigma_{y_{n+1}}} \frac{d\sigma_{y_{n+1}}}{d(\Delta\gamma)} + \frac{\partial \mathbf{g}}{\partial \mathbf{E}} : \frac{d\mathbf{E}}{d(\Delta\gamma)} + \frac{\partial \mathbf{g}}{\partial F} \frac{dF}{d(\Delta\gamma)} + \frac{\partial \mathbf{g}}{\partial M} \frac{dM}{d(\Delta\gamma)} \quad (3.5.27)$$

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{g}}{\partial \sigma_{y_{n+1}}} &= \frac{4M}{(2\sigma_{y_{n+1}} + 3F + 2M)^2} \boldsymbol{\eta}_E & \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial(\Delta\gamma)} &= -\sum_{k=1}^{N_{k,i,\gamma}} (\boldsymbol{\beta}_{kn} b_k e^{-b_k \Delta\gamma}) \\ \frac{\partial \mathbf{g}}{\partial \mathbf{E}} &= \frac{2M}{2\sigma_{y_{n+1}} + 3F + 2M} \tilde{\mathbf{I}} & \frac{\partial F}{\partial(\Delta\gamma)} &= \sum_{k=1}^{N_{k,i,\gamma}} (a_k e^{-b_k \Delta\gamma}) \\ \frac{\partial \mathbf{g}}{\partial F} &= \frac{6M}{2\sigma_{y_{n+1}} + 3F + 2M} \boldsymbol{\eta}_E \\ \frac{\partial \mathbf{g}}{\partial M} &= -\frac{2(2\sigma_{y_{n+1}} + 3F)}{(2\sigma_{y_{n+1}} + 3F + 2M)^2} \boldsymbol{\eta}_E \end{aligned} \right\} \quad (3.5.28)$$

以上より Return-Mapping 方程式を縮約した式(3.5.22)を Newton 法で解き塑性乗数を求めることが可能となる. 求めた塑性乗数をこれまでの各関係式に陽的に代入することでステップ $n+1$ における全ての未知数を求めることができる. このように多くの未知変数を含む非線形連立方程式の求解を必要とする流れ則積分法に比べて縮約積分法は計算負荷が小さくなる.

3.5.2 陽的記述による Consistent 接線剛性

さらに本研究では以上にのべた「縮約積分法」に対する Consistent 接線剛性を提案する. 式(3.5.5)より $\boldsymbol{\eta}_{n+1}$ と $\boldsymbol{\eta}_E$ は互いにスカラ倍されている関係に過ぎず両者の方向は一致するため式(3.5.29)と書ける. 式(3.5.29)および式(3.5.17)を用いて式(3.5.1)で示した構成側を式(3.4.30)のように変形する. これより $\boldsymbol{\sigma}_{n+1}$ は内部変数を用いて式(3.5.31)のように表記できる.

$$\bar{N}_\sigma \equiv \frac{\boldsymbol{\eta}_{n+1}}{\|\boldsymbol{\eta}_{n+1}\|} = \frac{\boldsymbol{\eta}_E}{\|\boldsymbol{\eta}_E\|} \quad (3.5.29)$$

$$\boldsymbol{\sigma}_{n+1} = \frac{3G\Delta\gamma}{\sqrt{\frac{3}{2}\|\boldsymbol{\eta}_E\| - \sigma_{yn+1} - \frac{3}{2}F}} \tilde{\boldsymbol{D}}^e : \boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^{etry} - \sqrt{6G\Delta\gamma} \frac{\boldsymbol{\eta}_E}{\|\boldsymbol{\eta}_E\|} \quad (3.5.30)$$

$$\boldsymbol{\sigma}_{n+1} = \boldsymbol{\sigma}_{n+1}(\boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^{etry}, \Delta\gamma(\boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^{etry}), \sigma_{yn+1}(\Delta\gamma(\boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^{etry})), F(\Delta\gamma(\boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^{etry})), \boldsymbol{\eta}_E(\boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^{etry}), \mathbf{E}(\Delta\gamma(\boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^{etry}))) \quad (3.5.31)$$

以上より Consistent 接線剛性 $\tilde{\boldsymbol{D}}^{ep}$ は $\boldsymbol{\sigma}_{n+1}$ の各内部変数を考慮し式(3.5.32), 式(3.5.33)のように表記できる.

$$\begin{aligned} \tilde{\boldsymbol{D}}^{ep} &= \frac{\partial \boldsymbol{\sigma}_{n+1}}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^{etry}} + \frac{\partial \boldsymbol{\sigma}_{n+1}}{\partial \boldsymbol{\eta}_E} : \frac{\partial \boldsymbol{\eta}_E}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^{etry}} + \\ &\left(\frac{\partial \boldsymbol{\sigma}_{n+1}}{\partial (\Delta\gamma)} + \frac{d\sigma_{yn+1}}{d(\Delta\gamma)} \frac{\partial \boldsymbol{\sigma}_{n+1}}{\partial \sigma_{yn+1}} + \frac{dF}{d(\Delta\gamma)} \frac{\partial \boldsymbol{\sigma}_{n+1}}{\partial F} + \frac{\partial \boldsymbol{\sigma}_{n+1}}{\partial \boldsymbol{\eta}_E} : \frac{\partial \boldsymbol{\eta}_E}{\partial \mathbf{E}} : \frac{d\mathbf{E}}{d(\Delta\gamma)} \right) \otimes \frac{d(\Delta\gamma)}{d\boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^{etry}} \end{aligned} \quad (3.5.32)$$

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \boldsymbol{\sigma}_{n+1}}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^{etry}} &= (1 - D_{n+1}) \tilde{\boldsymbol{D}}^e \\ \frac{\partial \boldsymbol{\sigma}_{n+1}}{\partial \boldsymbol{\eta}_E} &= \left(-\sqrt{\frac{3}{2}} \frac{3G\Delta\gamma}{M^2} \boldsymbol{\sigma}_{n+1}^{try} + \frac{3G\Delta\gamma}{q_E} \bar{N}_\sigma \right) \otimes \bar{N}_\sigma - \frac{3G\Delta\gamma}{q_E} \tilde{\boldsymbol{I}} \\ \frac{\partial \boldsymbol{\eta}_E}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^{etry}} &= 2G\tilde{\boldsymbol{I}}_d \\ \frac{\partial \boldsymbol{\eta}_E}{\partial \mathbf{E}} &= -\tilde{\boldsymbol{I}} \\ \frac{\partial \boldsymbol{\sigma}_{n+1}}{\partial (\Delta\gamma)} &= \frac{3G}{M} \boldsymbol{\sigma}_{n+1}^{try} - \sqrt{6G\bar{N}_\sigma} \\ \frac{\partial \boldsymbol{\sigma}_{n+1}}{\partial F} &= \frac{9G\Delta\gamma}{2M^2} \boldsymbol{\sigma}_{n+1}^{try} \\ \frac{\partial \boldsymbol{\sigma}_{n+1}}{\partial \sigma_{yn+1}} &= \frac{3G\Delta\gamma}{M^2} \boldsymbol{\sigma}_{n+1}^{try} \end{aligned} \right\} \quad (3.5.33)$$

また式(3.5.32)中の最後の微分は式(3.5.22)で示した縮約された **Return-Mapping** 方程式を試行弾性ひずみで微分し式(3.5.34)となる．式(3.5.34)右辺の分母の偏微分は試行弾性ひずみを固定して **Return-Mapping** 方程式を塑性乗数で微分したものである．ただし前節で述べた **Retrun-Mapping** 方程式の求解では試行弾性ひずみを既知量として計算するためこの微分値は式(3.5.24)で既に求まっている．よって式(3.5.34)右辺の分母の偏微分の値は **Return-Mapping** の計算で求めた式(3.5.24)の値をそのまま用いればよい．残った式(3.5.34)の右辺の分子の偏微分は合成関数の微分により式(3.5.35)，式(3.4.36)となる．

$$\frac{d(\Delta\gamma)}{d\boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^{etry}} = -\frac{\frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^{etry}}}{\frac{\partial f}{\partial(\Delta\gamma)}} \quad (3.5.34)$$

$$\frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^{etry}} = \frac{\partial f}{\partial M} \frac{\partial M}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^{etry}} + \frac{\partial f}{\partial Y_{n+1}} \left\{ \frac{\partial Y_{n+1}}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^{etry}} + \frac{\partial Y_{n+1}}{\partial \mathbf{g}} : \left(\frac{\partial \mathbf{g}}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^{etry}} + \frac{\partial \mathbf{g}}{\partial M} : \frac{\partial M}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^{etry}} \right) \right\} \quad (3.5.35)$$

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial M} &= 3G - 3GD_n - 2M \left(\frac{Y_{n+1}}{r} \right)^S \\ \frac{\partial M}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^{etry}} &= \sqrt{6G\bar{N}_\sigma} \\ \frac{\partial f}{\partial Y_{n+1}} &= -\frac{S}{r^S} M^2 (Y_{n+1})^{S-1} \\ \frac{\partial Y_{n+1}}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^{etry}} &= \mathbf{K}(\mathbf{I} : \boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^{etry}) \mathbf{I} \\ \frac{\partial Y_{n+1}}{\partial \mathbf{g}} &= \frac{\mathbf{g}}{2G} \\ \frac{\partial \mathbf{g}}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^{etry}} &= 2G \frac{2\sigma_{yn+1} + 3F}{2\sigma_{yn+1} + 3F + 2M} \tilde{\mathbf{I}}_d \\ \frac{\partial \mathbf{g}}{\partial M} &= -2 \frac{2\sigma_{yn+1} + 3F}{(2\sigma_{yn+1} + 3F + 2M)^2} \boldsymbol{\eta}_E \end{aligned} \right\} \quad (3.5.36)$$

以上が縮約積分法における後退形 Euler 積分に対する **Consistent** 接線剛性である．流れ則積分法では式(3.4.23)の **Jacobi** 行列の逆行列を計算する必要があったが，縮約積分法ではこのように陽的な代入計算だけで済むため比較的計算負荷が小さくなる．

3.5.3 流れ則積分法と縮約積分法の比較検証

本節ではこれまでに述べてきた流れ則積分法と縮約積分法が等価であることを示すとともに縮約積分法の計算負荷への利点について数値解析例を用いて述べる. 本節で示す縮約積分法による損傷弾塑性モデルを有限要素法に導入してその妥当性を検証する. 主に大規模静的有限要素法解析を得意とする商用ソフトウェア ADVENTURECluster のユーザ定義材料機能によりプログラムを作成した. 円孔引張り問題と繰り返し曲げ問題の有限要素モデルを用いて以下の2つの手法による計算結果を比較し, 本稿で示す縮約積分法の妥当性を検証する.

<手法(i) 流れ則積分法>

・応力積分:

式(3.4.23)の流れ則の後退形 Euler 積分式をそのまま非線形連立方程式として解く.

・Consistent 接線剛性:

Return-Mapping 方程式の Jacobi マトリックスの逆行列の計算により求める.

<手法(ii) 縮約積分法>

・応力積分:

式(3.5.22)の縮約された Return-Mapping 方程式を解く.

・Consistent 接線剛性:

式(3.5.32)の陽的表記を用いて計算する.

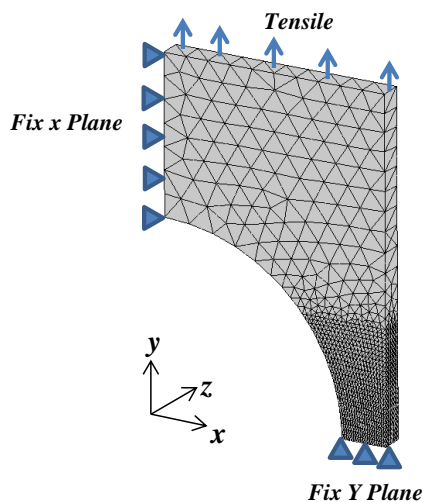


Fig. 3.5.1 Hole plate model

Table 3.5.1 Material constants

Young's modulus	E [MPa]	20000.00
Poisson's ratio	ν	0.34
Initial yield stress	$\sigma_{v,0}$	250.00
Isotropic hardening constants	A_1 [MPa]	350.00
	B_1	1.00
	A_2 [MPa]	160.00
	B_2	4.00
	A_3 [MPa]	260.00
	B_3	1.00
Kinematic hardening constants	a_1 [MPa]	19000.00
	b_1	4000.00
	a_2 [MPa]	19000.00
	b_2	5000.00
	a_3 [MPa]	16000.00
	b_3	200.00
Damage constants	S	1.50
	r [MPa]	0.50

図 3.5.1 に示すような四面体二次要素を用いた円孔引張モデルを用いた。形状寸法は 10 mm×15 mm×1 mm の板に半径 8 mm の穴を空けたもので円孔縁部の最小要素寸法は 0.1 mm である。図のように対称条件を満たすように変位拘束し裏面を板厚方向に変位拘束し上面を z 方向に 1 ステップ当たりの強制変位増分量を 1.0×10⁻² mm で引っ張った。材料定数はステンレス鋼(Lemaitre and Desmorat, 2005)のデータを参考に表 3.5.1 を用いた。Updated-Lagrange 形の有限変形モデルを用いた損傷弾塑性解析を行い、全積分点中の最大損傷値が 0.5 に達した時点で計算を終了した。

図 3.5.2 に最終ステップにおける損傷値の分布を示す。損傷値の高い領域が円孔縁に集中している様子が見られる。本稿で示した縮約積分法の妥当性を以下の方法で検証する。

<計算 1>

流れ則積分法を用いて強制変位量 0.15 mm まで負荷し、円孔縁に最も近い積分点の各物理量の計算結果を得る。

<計算 2>

計算 1 で得た各物理量の結果を用いて次のステップの全ひずみ増分に対する応力積分と Consistent 接線剛性を手法(i)と手法(ii)の各手法で計算しその結果を比較する。

まず計算 1 において円孔縁に最も近い積分点の各物理量の値として表 3.5.2 の値を得た。各物理量を見ると損傷が約 28% 発達した多軸応力状態であることがわかる。

計算 2 についてまずは応力積分の計算を行った。各手法の Return-Mapping 方程式を Newton 法による反復計算で解いている時の誤差を調べた。ただし反復計算の初期値として塑性乗数を 0 としその他の未知数は表 3.5.2 のものを用いた。また各手法に対して誤差(Error)を以下のように定義した。

・流れ則積分法の場合、式(3.4.23)で示される 5 本の Return-Mapping 方程式 f_i ($i=1\sim 5$) を用いて式(3.5.37)により誤差を定義する。

$$\text{Error} \equiv \sqrt{\sum_{i=1}^5 (f_i : f_i)} \quad (3.5.37)$$

・縮約積分法の場合、式(3.5.22)で示されるスカラー 1 変数の Return-Mapping 方程式 f の値を誤差として用いる。

図 3.5.3 は横軸に Newton 法の反復回数を取り、縦軸は初期値の誤差(Error Initial)に対する現在の反復で得られた誤差の比を示す。図 3.5.3 から両手法ともに発散することなく収束していることがわかる。ただし流れ則積分法では Newton 法によって修正解を求

めるたびに線形連立方程式を解く必要があるので 1 回あたりの反復計算で縮約積分法よりも時間がかかる。

Table 3.5.2 Computational results at at enforced displacement 0.15 mm

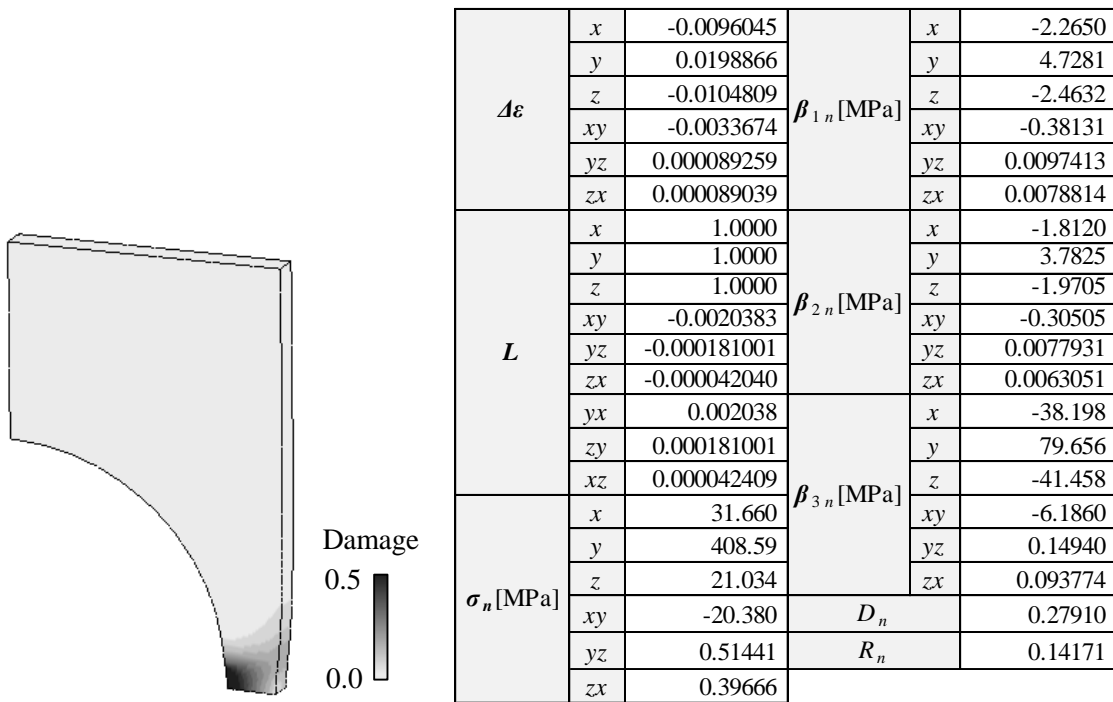


Fig. 3.5.2 Damage distribution

各手法の応力積分により得られた物理量とその差異を表 3.5.3 に示す. 流れ則積分法の誤差は式(3.5.37)により各流れ則そのもので定義しているためその収束解は全ての流れ則を満足する解となる. よってここでは流れ則積分法の結果を妥当な解として参照することにする. 表 3.5.3 より各手法で得られた結果の間に 10^{-12} % 程度のオーダーの差異しか見られず両者がよく一致していることがわかる. これは縮約積分法でも流れ則の後退形 Euler 積分式を満足する妥当な解が得られることを示す. さらにこの応力積分の結果を用いて各手法で計算した Consistent 接線剛性の全成分を表 3.5.4 とその差異を表 3.5.5 に示す. 損傷モデルでは非関連流れ則となるため Consistent 接線剛性は表 3.5.4 のように非対称行列になる. 表 3.5.5 から各手法での差異は 10^{-6} % オーダーでありほとんど一致している.

Table 3.5.3 Comparison of variables between method (i) and method (ii).

		Method (i)	Method (ii)	Difference $\times 10^{-12}$ [%]			Method (i)	Method (ii)	Difference $\times 10^{-12}$ [%]
σ_{n+1} [MPa]	x	27.174	27.174	3.8705	β_{1n+1} [MPa]	x	-0.0396	-0.0396	1.0785
	y	316.37	316.37	4.8871		y	0.0829	0.0829	6.8744
	z	18.6269	18.6269	0.8203		z	-0.0433	-0.0433	5.0310
	xy	-16.471	-16.471	4.3908		xy	-0.00698	-0.00698	4.7150
	yz	0.42587	0.42587	7.5435		yz	0.000181	0.000181	2.3312
	zx	0.41994	0.41994	6.5022		zx	0.0001793	0.0001793	3.2275
$\Delta\gamma$		0.0144413	0.0144413	4.1815	β_{2n+1} [MPa]	x	-0.0254	-0.0254	6.4897
D_{n+1}		0.31252	0.31252	6.7008		y	0.0531	0.0531	5.4062
R_{n+1}		0.15615	0.15615	7.2313		z	-0.0277	-0.0277	5.3203
						xy	-0.00447	-0.00447	1.4258
						yz	0.0001160	0.0001160	0.8194
					zx	0.0001147	0.0001147	4.9981	
					β_{3n+1} [MPa]	x	-2.275	-2.275	2.5672
						y	4.746	4.746	1.9871
						z	-2.472	-2.472	0.7701
						xy	-0.3841	-0.3841	7.7308
						yz	0.00781	0.00781	8.4620
					zx	0.00594	0.00594	8.1630	

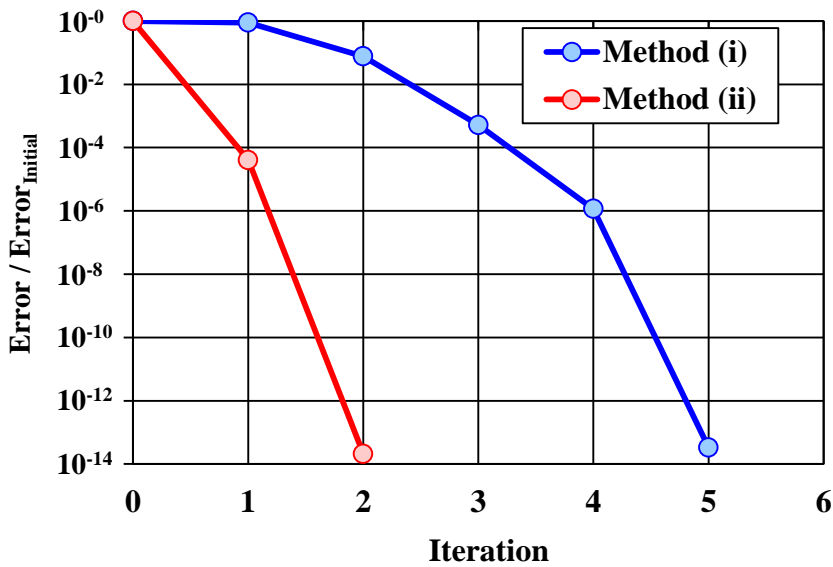


Fig. 3.5.3 Error of return-mapping with Newton scheme

Table 3.5.4 Component of consistent tangent modulus [MPa].

(a)Method (i)

	x	y	z	xy	yz	zx
x	150376	145805	141618	-231.77	6.014	5.949
y	141807	141492	142072	510.2	-13.234	-13.085
z	141737	146187	150242	-253.66	6.582	6.510
xy	-3.20	737.4	-25.11	4276.5	1.0949	1.0827
yz	-0.0146	-19.043	0.5483	1.0844	4318.6	-0.027818
zx	-0.0952	-18.758	0.4569	1.0636	-0.027592	4318.6

(b)Method (ii)

	x	y	z	xy	yz	zx
x	150376	145805	141618	-231.77	6.014	5.949
y	141807	141492	142072	510.2	-13.234	-13.085
z	141737	146187	150242	-253.66	6.582	6.510
xy	-3.20	737.4	-25.11	4276.5	1.0949	1.0827
yz	-0.0146	-19.043	0.5483	1.0844	4318.6	-0.027818
zx	-0.0952	-18.758	0.4569	1.0636	-0.027592	4318.6

Table 3.5.5 Difference of component of consistent tangent modulus [$\times 10^{-6} \%$].

	x	y	z	xy	yz	zx
x	1.04338	7.83842	6.57348	8.76922	2.62505	2.62701
y	4.30773	8.86571	5.17023	5.09016	6.59535	9.89568
z	8.56189	8.35553	0.46958	6.17350	2.00398	2.12916
xy	2.89432	4.31130	2.50049	5.87608	6.88475	4.98973
yz	4.54644	1.62412	9.57323	9.36353	7.96009	6.17162
zx	4.45180	4.97171	3.40636	5.47787	4.16820	0.87913

さらに繰り返し負荷問題として以下について取り扱った。図 3.5.4 に示すような四面体二次要素による片持ち曲げ問題を扱った。形状寸法は 10 mm×20 mm×100 mm である。図のように固定面上の全節点を x, y, z 方向に変位拘束し、曲げ負荷を与える面の中心線上の節点に y 方向の±20 mm の繰り返し曲げ変位を入力した。

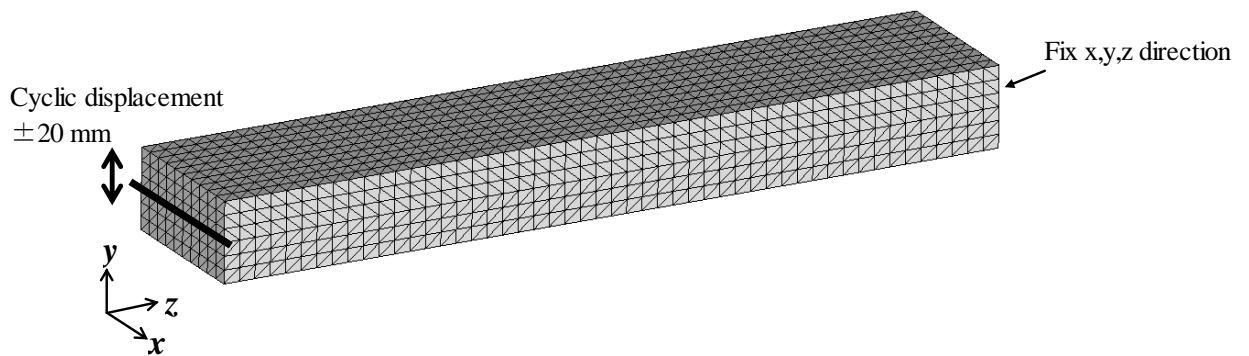


Fig. 3.5.4 Damage and convergence in cyclic loading are tested by this model

図 3.5.4 に示すような四面体二次要素による片持ち曲げ問題を扱った。形状寸法は 10 mm×20 mm×100 mm である。図のように固定面上の全節点を x, y, z 方向に変位拘束し、曲げ負荷を与える面の中心線上の節点に y 方向の ± 20 mm の繰り返し曲げ変位を入力した。曲げ変位を与えた順序は +20 mm, -20 mm, +20 mm, -20 mm, +20 mm, -20 mm であり各々の負荷状態を Process と呼ぶこととする。またこの負荷順序ごとに Process 0 から Process 5 まで便宜的に名前を付ける。材料定数は表 3.5.1 のものを用いた。強制変位増分として各 Process を 40 ステップに分割して計算を行い、全積分点中の損傷値の最大値が 1.0 に達した時点で計算を終了させた。この問題を手法(i)と手法(ii)のそれぞれの方法で計算し結果を比較する。

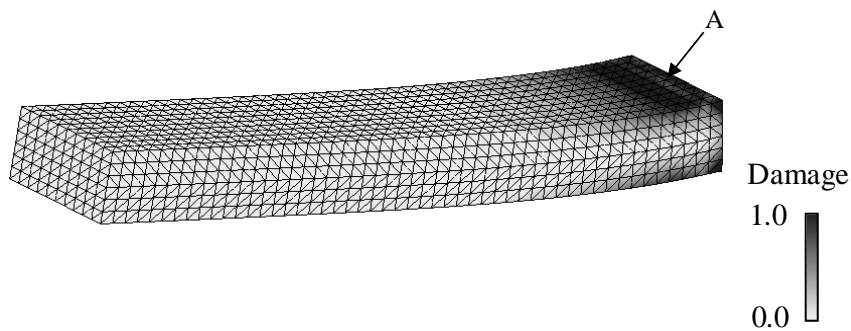


Fig. 3.5.5 Damage distribution at the final step in process 5

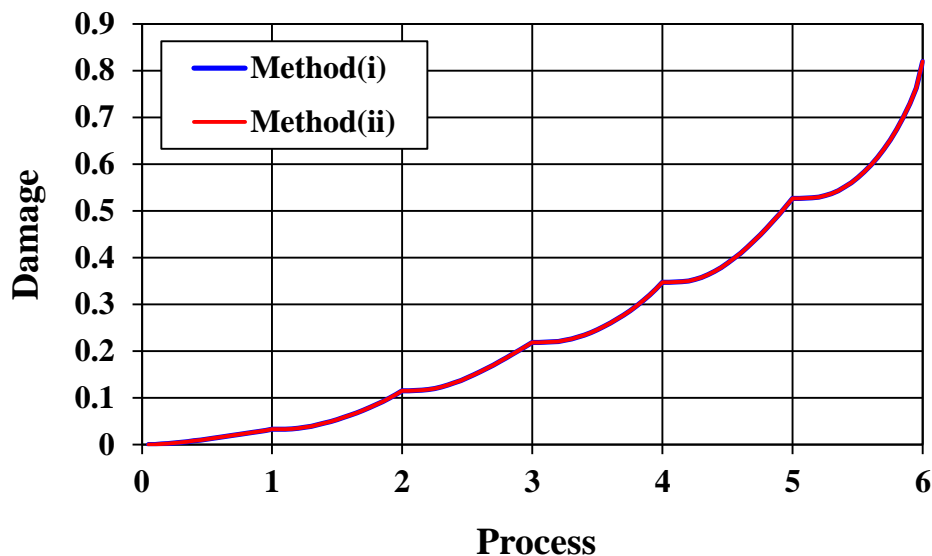


Fig. 3.5.6 Damage at the point of A in Fig. 6

図 3.5.5 に Process 5 の最終ステップにおける損傷値の分布を示す．固定端側で損傷値が高くなっている様子がみられる．図 3.5.6 は図 3.5.5 の A 部に示すように固定端表面の中央点における損傷値の変化を示す．負荷を繰り返すたびに損傷値が増加してゆく様子がわかる．各計算プロセスの初期では強制変位方向が反転し弾性除荷が起きる．そのためプロセスの切り替わり時点で損傷の増加が緩やかになる．

また図 3.5.7 は y 方向の荷重変位曲線を示したものであるが，手法(i)と手法(ii)による結果に差が見られない．さらに図 3.5.8 に各計算プロセスにおける残差力の収束性を示す．縦軸は各ステップで残差力が収束するまでに剛性方程式を Newton 法で解くために要した反復回数を示す．ここで最大残差力が 1.0×10^{-4} N に達した状態を収束状態とみなした．このグラフから残差力収束性にも各手法で差異が見られないことがわかる．

Simoら(Simo and Taylor, 1985)は非損傷等方硬化Misesモデルの弾塑性解析を行い，前進形Euler積分の陽的アルゴリズムでは残差力収束までに数十回オーダーの反復回数を要する事例を挙げている．それに対しここで挙げた計算事例は有限変形を考慮しさらに分割背応力や損傷モデルといった非関連の流れ則を考慮しており，より非線形性の強いモデルであるにも関わらず3~5回程度の比較的少ない反復回数で求解できている．これは材料モデルの流れ則を後退形Euler積分で定式化し，それに厳密に整合するConsistent接線剛性を用いた完全陰的アルゴリズムを用いているためである．

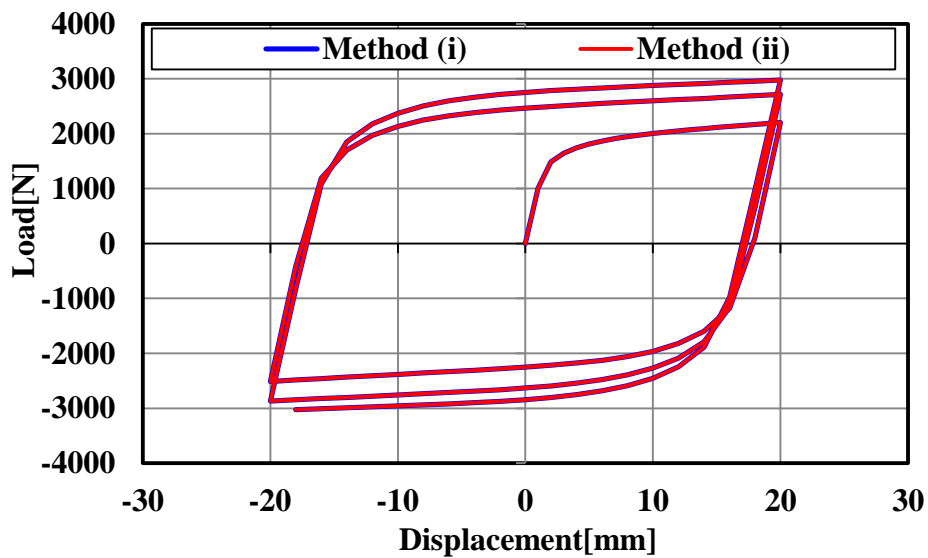


Fig. 3.5.7 Load-displacement curve.

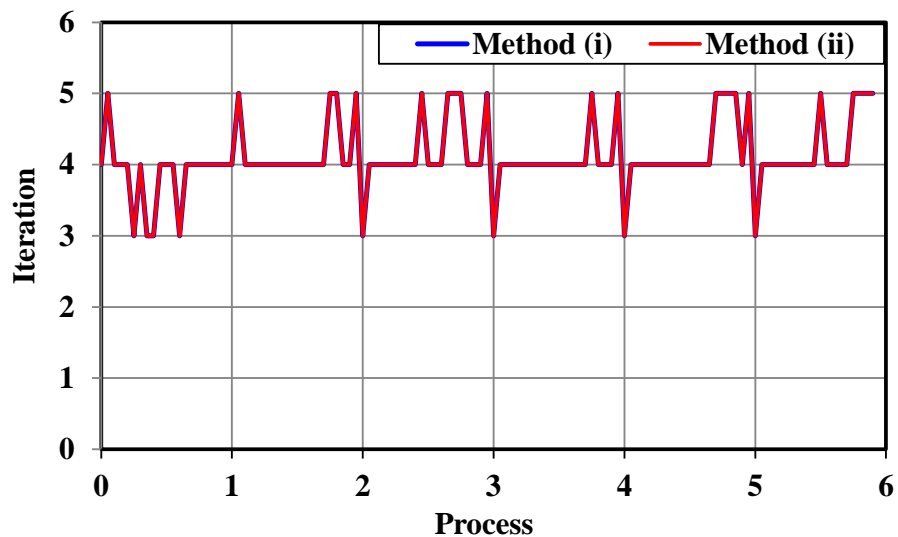


Fig. 3.5.8 Iteration to converge residual force

図 3.5.9 は式 3.5.22 で提案した手法(ii)の縮約積分法における Return-Mapping 関数を図示したものである。図 3.5.5 中の A 部の損傷段階(初期降伏段階 $D=0.000$, 損傷初期段階 $D=0.099$, 損傷発達段階 $D=0.819$)について調べた。本計算では塑性乗数 $\Delta\gamma$ の初期値を 0.0 のもとでこの Return-Mapping 方程式を Newton 法で解いている。各グラフを見るといずれの損傷発達段階でも特異点などを持つことなく Newton 法で解が発散、振動することなく安定に解が得られるグラフの形になっている。

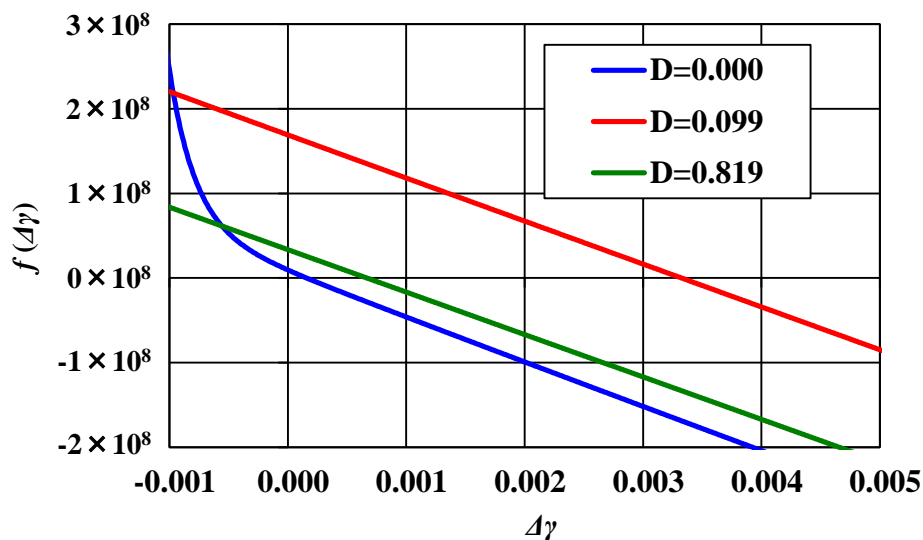


Fig. 3.5.9 Return mapping function $f(\Delta\gamma)$ at the point of A in Fig. 6.

この繰返し曲げ問題において手法(i)に対し手法(ii)を用いた場合の計算時間の優位差を調べた。Return-Mapping 方程式の求解と Consistent 接線剛性の作成のみの計算では 60%の計算時間削減が出来た。また剛性方程式の求解も含めた全計算プロセスの計算時間は 26 %削減された。積分計算は弾塑性状態にある全ての要素積分点について行われる。そのため塑性加工問題のような全体形状のうち弾塑性領域の占める割合が支配的になるほどさらに計算時間の改善効果が期待できると考えられる。さらに全計算時間は大規模な連立一次方程式である剛性方程式の解法などによっても左右される。前述したように本計算は商用の有限要素法のソフトウェアである ADVENTURECluster を用いてプログラムの実装を行っており、剛性方程式は CGCG (Coarse Grid based CG) 法(鈴木他, 2002)により解かれている。

3.5.4 微小変動解との比較による妥当性検証

さらにこれまでに示してきた流れ則積分法および縮約積分法の理論式や実装プログラムの妥当性を以下の方法を用いて示す。

各微分計算に対して値①と値②が一致している事を確認する。

値①

解析的に導出した微分式をプログラムに組み込んで計算した値

値②

微分項について数値的に微小変動を与えて、微分導出の途中式を一切介する事なく中央差分により直接的に微分を計算した値

検証対象 i) 流れ則積分法における Return-Mapping 方程式の Jacobi 行列

値①は既に式(3.4.24)から式(3.4.27)までに示した解析式をプログラムに実装して計算したものとなる。値②の計算についてご説明する。これは偏微分の本来の意味を考えて変数に微小変動を与えて計算する方法となる。例えば式(3.4.24)の 1 行 1 列の成分である $\partial f_1 / \partial \sigma_{n+1}$ (6 行 6 列) の x 成分については、次のように求める。

例： $\partial f_1 / \partial \sigma_{n+1}$ (6 行 6 列) の x 成分

該当する成分である σ_x のみ微小な変動を与え、その他の成分は Newton 法の k 回目の反復値 (添字 k) を用いる。つまり式(3.5.38)を用いて中央差分により微分値を求めることになる。

$$x \text{成分} \frac{\partial f_1}{\partial \sigma_{n+1}} \approx \frac{f_1(\sigma_{xk} + \Delta\sigma_x, \sigma_{yk}, \sigma_{zk}, \dots) - f_1(\sigma_{xk} - \Delta\sigma_x, \sigma_{yk}, \sigma_{zk}, \dots)}{2\Delta\sigma_x} \quad (3.5.38)$$

これにより陰解法の非常に煩雑な微分式導出の途中式を一切介する事なく簡便かつ直接的に微分値を求める事ができる。微小変動として十分小さな値を与えていれば値②を微分値の妥当な参照値と考える事ができる。本検証では $\Delta\sigma_x$ の値は十分小さな変動として $\pm 1.0 \times 10^{-10}$ を与える。他の成分についても同様の計算で $\pm 1.0 \times 10^{-10}$ の微小変動値を与えて計算した。値①が値②に対して大きく異なっていれば微分式の導出やそのプログラムの実装に誤りがあると考えられる。

原稿の図 3.5.1 の円孔板引張問題で 0.15mm まで強制変位で引張った状態を初期値としてさらに 0.01mm 引張る時の積分について検証する。表 3.5.6 は流れ則積分法の Return Mapping 方程式の Jacobian を値①で計算したものである。また表 3.5.7 は値②で計算した結果を示す。さらに両者の差異を表 3.5.8 に示す。式やプログラム実装に誤りが無い成分はその差異が $10^{-6} \%$ のオーダーで一致しており、互いに殆ど差が無い場合全成分が妥当に計算されていると考える。

Table 3.5.6 Jacobi matrix of integration scheme of flow rule calculated by analytical equation

	σ_x	σ_y	σ_z	σ_{xy}	σ_{yz}	σ_{zx}	R	β_x	β_y	β_z	β_{xy}	β_{yz}	β_{zx}	D	$\Delta\gamma$
f_1	1.05E-04	-8.07E-06	-9.45E-05	-1.25E-05	8.09E-07	1.02E-06	0.00E+00	-1.13E-04	-4.03E-05	2.15E-05	8.91E-06	-5.79E-07	-7.26E-07	-8.10E-03	-6.47E-01
	-8.07E-06	1.09E-05	-3.77E-08	2.67E-05	-1.73E-06	-2.17E-06	0.00E+00	-4.03E-05	-4.55E-05	-4.61E-05	-1.91E-05	1.24E-06	1.56E-06	1.91E-02	1.39E+00
	-9.45E-05	-3.77E-08	9.74E-05	-1.42E-05	9.24E-07	1.16E-06	0.00E+00	2.15E-05	-4.61E-05	-1.07E-04	1.02E-05	-6.61E-07	-8.29E-07	-8.88E-03	-7.39E-01
	-1.25E-05	2.67E-05	-1.42E-05	3.86E-04	3.83E-07	4.80E-07	0.00E+00	8.91E-06	-1.91E-05	1.02E-05	-2.60E-04	-2.74E-07	-3.43E-07	-3.02E-03	-3.06E-01
	8.09E-07	-1.73E-06	9.24E-07	3.83E-07	3.92E-04	-3.12E-08	0.00E+00	-5.79E-07	1.24E-06	-6.61E-07	-2.74E-07	-2.64E-04	2.23E-08	7.82E-05	1.99E-02
1.02E-06	-2.17E-06	1.16E-06	4.80E-07	-3.12E-08	3.92E-04	0.00E+00	-7.26E-07	1.56E-06	-8.29E-07	-3.43E-07	2.23E-08	-2.64E-04	7.20E-05	2.49E-02	
f_2	0.00E+00	0.00E+00	0.00E+00	0.00E+00	0.00E+00	0.00E+00	1.00E+00	0.00E+00	0.00E+00	0.00E+00	0.00E+00	0.00E+00	0.00E+00	0.00E+00	-1.00E+00
f_3	-6.10E-01	3.22E-02	5.78E-01	7.86E-02	-5.11E-03	-6.41E-03	0.00E+00	1.71E+00	2.55E-01	-1.36E-01	-5.62E-02	3.65E-03	4.58E-03	3.71E+00	-4.45E+01
	3.22E-02	-1.37E-02	-1.85E-02	-1.68E-01	1.09E-02	1.37E-02	0.00E+00	2.55E-01	1.29E+00	2.91E-01	1.20E-01	-7.83E-03	-9.82E-03	-2.50E-01	1.33E+01
	5.78E-01	-1.85E-02	-5.60E-01	8.98E-02	-5.83E-03	-7.32E-03	0.00E+00	-1.36E-01	2.91E-01	1.68E+00	-6.42E-02	4.17E-03	5.24E-03	-5.58E-03	3.12E+01
	7.86E-02	-1.68E-01	8.98E-02	-2.29E+00	-2.42E-03	-3.03E-03	0.00E+00	-5.62E-02	1.20E-01	-6.42E-02	3.64E+00	1.73E-03	2.17E-03	2.77E+01	1.86E+02
	-5.11E-03	1.09E-02	-5.83E-03	-2.42E-03	-2.33E+00	1.97E-04	0.00E+00	3.65E-03	-7.83E-03	4.17E-03	1.73E-03	3.67E+00	-1.41E-04	2.25E+00	-3.20E+01
-6.41E-03	1.37E-02	-7.32E-03	-3.03E-03	1.97E-04	-2.33E+00	0.00E+00	4.58E-03	-9.82E-03	5.24E-03	2.17E-03	-1.41E-04	3.67E+00	3.80E+00	-4.70E+01	
f_4	1.15E-05	-7.21E-05	1.46E-05	1.09E-05	-5.12E-07	-5.99E-07	0.00E+00	0.00E+00	0.00E+00	0.00E+00	0.00E+00	0.00E+00	0.00E+00	9.68E-01	-6.95E-01
f_5	-6.47E-01	1.39E+00	-7.39E-01	-3.06E-01	1.99E-02	2.49E-02	-6.55E+02	4.63E-01	-9.91E-01	5.29E-01	2.19E-01	-1.42E-02	-1.78E-02	1.37E+05	0.00E+00

Table 3.5.7 Jacobi matrix of integration scheme of flow rule calculated by central difference

	σ_x	σ_y	σ_z	σ_{xy}	σ_{yz}	σ_{zx}	R	β_x	β_y	β_z	β_{xy}	β_{yz}	β_{zx}	D	$\Delta\gamma$
f_1	1.05E-04	-8.07E-06	-9.45E-05	-1.25E-05	8.09E-07	1.02E-06	0.00E+00	-1.13E-04	-4.03E-05	2.15E-05	8.91E-06	-5.79E-07	-7.26E-07	-8.10E-03	-6.47E-01
	-8.07E-06	1.09E-05	-3.77E-08	2.67E-05	-1.73E-06	-2.17E-06	0.00E+00	-4.03E-05	-4.55E-05	-4.61E-05	-1.91E-05	1.24E-06	1.56E-06	1.91E-02	1.39E+00
	-9.45E-05	-3.77E-08	9.74E-05	-1.42E-05	9.24E-07	1.16E-06	0.00E+00	2.15E-05	-4.61E-05	-1.07E-04	1.02E-05	-6.61E-07	-8.29E-07	-8.88E-03	-7.39E-01
	-1.25E-05	2.67E-05	-1.42E-05	3.86E-04	3.83E-07	4.80E-07	0.00E+00	8.91E-06	-1.91E-05	1.02E-05	-2.60E-04	-2.74E-07	-3.43E-07	-3.02E-03	-3.06E-01
	8.09E-07	-1.73E-06	9.24E-07	3.83E-07	3.92E-04	-3.12E-08	0.00E+00	-5.79E-07	1.24E-06	-6.61E-07	-2.74E-07	-2.64E-04	2.23E-08	7.82E-05	1.99E-02
1.02E-06	-2.17E-06	1.16E-06	4.80E-07	-3.12E-08	3.92E-04	0.00E+00	-7.26E-07	1.56E-06	-8.29E-07	-3.43E-07	2.23E-08	-2.64E-04	7.20E-05	2.49E-02	
f_2	0.00E+00	0.00E+00	0.00E+00	0.00E+00	0.00E+00	0.00E+00	1.00E+00	0.00E+00	0.00E+00	0.00E+00	0.00E+00	0.00E+00	0.00E+00	0.00E+00	-1.00E+00
f_3	-6.10E-01	3.22E-02	5.78E-01	7.86E-02	-5.11E-03	-6.41E-03	0.00E+00	1.71E+00	2.55E-01	-1.36E-01	-5.62E-02	3.65E-03	4.58E-03	3.71E+00	-4.45E+01
	3.22E-02	-1.37E-02	-1.85E-02	-1.68E-01	1.09E-02	1.37E-02	0.00E+00	2.55E-01	1.29E+00	2.91E-01	1.20E-01	-7.83E-03	-9.82E-03	-2.50E-01	1.33E+01
	5.78E-01	-1.85E-02	-5.60E-01	8.98E-02	-5.83E-03	-7.32E-03	0.00E+00	-1.36E-01	2.91E-01	1.68E+00	-6.42E-02	4.17E-03	5.24E-03	-5.58E-03	3.12E+01
	7.86E-02	-1.68E-01	8.98E-02	-2.29E+00	-2.42E-03	-3.03E-03	0.00E+00	-5.62E-02	1.20E-01	-6.42E-02	3.64E+00	1.73E-03	2.17E-03	2.77E+01	1.86E+02
	-5.11E-03	1.09E-02	-5.83E-03	-2.42E-03	-2.33E+00	1.97E-04	0.00E+00	3.65E-03	-7.83E-03	4.17E-03	1.73E-03	3.67E+00	-1.41E-04	2.25E+00	-3.20E+01
-6.41E-03	1.37E-02	-7.32E-03	-3.03E-03	1.97E-04	-2.33E+00	0.00E+00	4.58E-03	-9.82E-03	5.24E-03	2.17E-03	-1.41E-04	3.67E+00	3.80E+00	-4.70E+01	
f_4	1.15E-05	-7.21E-05	1.46E-05	1.09E-05	-5.12E-07	-5.99E-07	0.00E+00	0.00E+00	0.00E+00	0.00E+00	0.00E+00	0.00E+00	0.00E+00	9.68E-01	-6.95E-01
f_5	-6.47E-01	1.39E+00	-7.39E-01	-3.06E-01	1.99E-02	2.49E-02	-6.55E+02	4.63E-01	-9.91E-01	5.29E-01	2.19E-01	-1.42E-02	-1.78E-02	1.37E+05	0.00E+00

Table 3.5.8 Difference between Table 3.5.6 and Table 3.5.7 [%]

	σ_x	σ_y	σ_z	σ_{xy}	σ_{yz}	σ_{zx}	R	β_x	β_y	β_z	β_{xy}	β_{yz}	β_{zx}	D	$\Delta\gamma$
f_1	1.45E-06	8.03E-06	7.54E-06	3.64E-06	9.49E-06	1.18E-06	0.00E+00	9.27E-06	1.16E-06	6.34E-06	4.69E-06	8.50E-06	5.81E-06	7.64E-06	7.99E-06
	8.15E-06	3.36E-07	7.96E-07	8.29E-06	1.97E-06	7.07E-06	0.00E+00	1.65E-06	1.56E-06	7.33E-06	6.08E-07	3.40E-06	4.52E-06	6.04E-06	3.27E-06
	4.51E-06	5.09E-06	4.00E-06	2.87E-08	6.55E-06	4.55E-06	0.00E+00	6.17E-06	7.52E-06	8.48E-06	9.26E-06	3.85E-06	5.98E-06	9.30E-06	7.11E-06
	4.49E-06	7.50E-06	5.01E-06	9.24E-06	8.27E-06	2.38E-07	0.00E+00	9.39E-06	7.21E-06	3.51E-06	6.54E-06	4.65E-06	8.29E-08	1.83E-06	9.44E-06
	2.66E-06	8.37E-07	3.23E-06	5.76E-06	2.16E-07	9.44E-06	0.00E+00	7.43E-06	3.53E-06	3.90E-06	4.23E-06	4.22E-06	4.84E-06	7.19E-06	6.58E-06
1.45E-06	2.57E-06	6.53E-06	1.40E-06	2.87E-06	4.19E-06	0.00E+00	2.71E-06	4.86E-06	8.99E-06	8.04E-06	5.00E-06	7.75E-06	6.68E-06	5.47E-06	
f_2	0.00E+00	0.00E+00	0.00E+00	0.00E+00	0.00E+00	0.00E+00	0.00E+00	0.00E+00	0.00E+00	0.00E+00	0.00E+00	0.00E+00	0.00E+00	0.00E+00	0.00E+00
f_3	2.92E-06	1.06E-06	8.68E-06	7.33E-06	9.18E-06	3.36E-06	0.00E+00	8.53E-06	4.79E-06	3.84E-06	4.69E-06	5.78E-06	3.70E-06	9.73E-06	3.41E-06
	4.41E-06	5.33E-06	1.44E-06	4.45E-06	4.65E-07	3.39E-06	0.00E+00	5.00E-06	1.98E-06	2.86E-06	3.31E-06	7.04E-06	3.90E-06	1.18E-06	7.87E-06
	1.22E-06	1.97E-06	5.03E-06	7.19E-06	7.15E-06	6.91E-06	0.00E+00	9.70E-06	9.29E-06	6.57E-06	9.00E-06	9.25E-06	8.34E-06	6.92E-06	6.50E-07
	7.28E-06	2.62E-06	6.23E-06	9.00E-06	8.28E-06	8.70E-06	0.00E+00	3.64E-06	1.27E-06	8.83E-06	7.47E-06	3.39E-06	2.01E-06	7.47E-06	6.57E-06
	5.71E-06	1.94E-07	5.01E-06	7.76E-06	2.71E-06	2.59E-06	0.00E+00	7.58E-06	6.31E-06	8.21E-06	1.10E-06	1.28E-07	3.22E-06	4.64E-07	4.56E-06
8.14E-06	4.13E-06	5.57E-06	2.44E-06	6.16E-06	5.98E-06	0.00E+00	3.94E-06	7.66E-06	3.79E-06	8.96E-06	4.77E-06	6.48E-06	7.12E-06	9.45E-06	
f_4	4.65E-06	4.09E-07	9.21E-06	4.31E-06	1.71E-06	2.35E-06	0.00E+00	0.00E+00	0.00E+00	0.00E+00	0.00E+00	0.00E+00	0.00E+00	9.72E-06	9.02E-07
f_5	9.49E-06	7.54E-06	4.31E-06	7.71E-06	4.59E-06	8.84E-06	4.72E-09	3.77E-06	6.13E-06	8.54E-06	7.01E-06	7.49E-06	2.98E-06	2.40E-06	6.52E-06

検証対象 ii) 縮約積分法の Return-Mapping 方程式を Newton 法で解く際の接線係数式(3.5.22)で示した Return-Mapping 方程式 f の接線係数を解析式と微小変動値で比較する。ただし $\Delta\gamma$ の微小変動値として $\pm 1.0 \times 10^{-10}$ を与えた。

この解析式による接線値の計算 (値①) -3.4551736992.4948
 微小変動による接線値の計算 (値②) -3.4551734924.3164
 値②と値①の差異 $5.9857439 \times 10^{-6} \%$

この結果から値②と値①の差異はほとんど無く、縮約積分法の式導出およびプログラム実装に間違いはないと判断できる

検証対象 iii) Consistent 接線剛性

Consistent 接線剛性は流れ則積分法では式(3.4.33)に示すように Jacobi 行列の逆行列 C_{ij} の一部(C_{11} 成分) を用いて計算する。式(3.4.32)の係数行列は式(3.4.24)の Jacobi 行列と同様となる。一方、縮約積分法では式(3.5.32)、式(3.5.33)に示す式で求めている。

これらの解析式やプログラム実装の妥当性を調べるに当たって、Consistent 接線剛性の本来の意味である式(R6)を考える。先程と同様に試行弾性ひずみ ϵ_{n+1}^{try} の微小変動を与える事で式(3.5.32)、式(3.5.33)の導出のための途中式を一切介することなく直接的に Consistent 接線剛性の値を求める事ができる。この微小変動による計算には入力した試行弾性ひずみに対してそれぞれ応力積分を実施し、得られた応力値の変動値を試行弾性ひずみの変動値で割る事で求められる。ここでは微小変動値として各試行弾性ひずみの成分に $\pm 1.0 \times 10^{-10}$ を与え中央差分で計算する。

$$\tilde{D}^{ep} \equiv \frac{d\sigma_{n+1}}{d\epsilon_{n+1}^{try}} \quad (3.5.39)$$

確かにこの微小変動による方法で Consistent 接線剛性を非常に容易に求める事が可能ではあるが、中央差分を用いる場合は Consistent 接線剛性の各列に対して 2 度の応力積分を行う必要がある。よって全成分を求めるには合計 12 回もの応力積分が必要となり多くの計算時間が掛かるのであまり実用的とはいえない。よってこの方法はこの度の計算妥当性を示すためだけに適用する。

表 3.5.9 に流れ則積分法の結果 (値①)、表 3.5.10 に縮約積分法による結果 (値①)、表 3.5.11 に微小差分による結果 (値②) を示す。また微小差分値との差を表 3.5.12、表 3.5.13 に示す。この検証結果により中央差分値との差は $10^{-6} \%$ オーダーとなり殆ど差が無いため、妥当な計算が行われているものと判断できる。以上の検証から本研究の理論式およびプログラム実装が妥当であると考えられる。

Table 3.5.9 Components of consistent tangent modulus by integration scheme of flow rule
calculated by analytical equation

	x	y	z	xy	yz	zx
x	150376	145805	141618	-231.77	6.014	5.949
y	141807	141492	142072	510.2	-13.234	-13.085
z	141737	146187	150242	-253.66	6.582	6.510
xy	-3.20	737.4	-25.11	4276.5	1.0949	1.0827
yz	-0.0146	-19.043	0.5483	1.0844	4318.6	-0.027818
zx	-0.0952	-18.758	0.4569	1.0636	-0.027592	4318.6

Table 3.5.10 Components of consistent tangent modulus by shorten integral scheme

	x	y	z	xy	yz	zx
x	150376	145805	141618	-231.77	6.014	5.949
y	141807	141492	142072	510.2	-13.234	-13.085
z	141737	146187	150242	-253.66	6.582	6.510
xy	-3.20	737.4	-25.11	4276.5	1.0949	1.0827
yz	-0.0146	-19.043	0.5483	1.0844	4318.6	-0.027818
zx	-0.0952	-18.758	0.4569	1.0636	-0.027592	4318.6

Table 3.5.11 Components of consistent tangent modulus by central difference

	x	y	z	xy	yz	zx
x	150376	145805	141618	-231.77	6.014	5.949
y	141807	141492	142072	510.2	-13.234	-13.085
z	141737	146187	150242	-253.66	6.582	6.510
xy	-3.20	737.4	-25.11	4276.5	1.0949	1.0827
yz	-0.0146	-19.043	0.5483	1.0844	4318.6	-0.027818
zx	-0.0952	-18.758	0.4569	1.0636	-0.027592	4318.6

Table 3.5.12 Difference between Table 3.5.9 and Table 3.5.11 $\times 10^{-6}$ [%]

	x	y	z	xy	yz	zx
x	2.73	3.78	8.58	6.90	5.98	1.93
y	3.86	6.04	6.09	4.89	1.15	9.12
z	5.39	5.55	2.00	2.03	5.87	2.45
xy	6.70	5.70	3.80	7.11	6.85	0.22
yz	7.70	7.25	4.69	7.16	4.62	5.21
zx	9.78	8.29	8.68	5.54	8.92	6.04

Table 3.5.13 Difference between Table 3.5.10 and Table 3.5.11 $\times 10^{-6}$ [%]

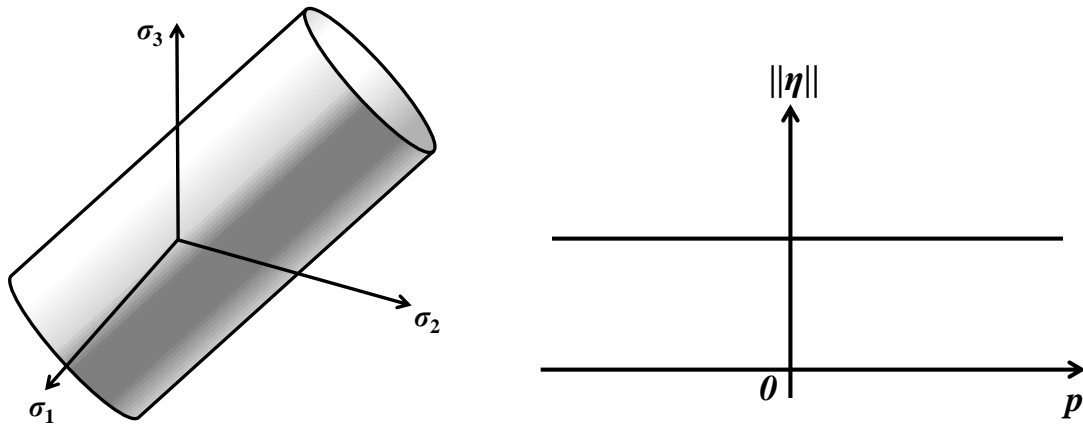
	<i>x</i>	<i>y</i>	<i>z</i>	<i>xy</i>	<i>yz</i>	<i>zx</i>
<i>x</i>	2.72	3.70	8.51	6.81	5.95	1.91
<i>y</i>	3.82	5.95	6.03	4.84	1.09	9.02
<i>z</i>	5.30	5.46	2.00	1.97	5.85	2.42
<i>xy</i>	6.67	5.65	3.77	7.05	6.79	0.17
<i>yz</i>	7.65	7.24	4.59	7.07	4.54	5.15
<i>zx</i>	9.73	8.24	8.64	5.49	8.87	6.03

3.6 静水圧依存性を考慮したモデルへの拡張

これまで述べてきたように損傷弾塑性モデルは損傷による応力の拡大や応力三軸度が損傷発展へ与える影響を考慮できる。しかし式(3.4.2)の第5式に示したように降伏曲面の形状は基本的には Mises の降伏曲面に基づいている。図 3.6.1 (a)に主応力空間における降伏曲面の形状を示す。また図 3.6.1(b)に静水圧 p と相対相当応力のノルム $\|\eta\|$ を軸とする座標における Mises の降伏曲面を示す。この図のように Mises の降伏曲面は無限円筒形状となり静水圧の大きさがどれだけ増加しても降伏することはないモデルとなっている。損傷増分は相当塑性ひずみ増分によって決まるため無限円筒のモデルでは静水圧がどれだけ増えても損傷が進展しないことを意味している。さらに損傷値が 1.0 の状態となって支持断面積がゼロなっても無限大の静水圧を支持できるモデルとなっており不自然な点がある。しかし多くの金属材料では損傷値が 0.2~0.6 程度に達したところで破断することが実験的に知られている。よって破断直前まで十分な支持断面が存在していると考えられるため静水圧が支持できる状態であると考えられる。また無限円筒の仮定では静水圧による塑性変形は進行しないものの損傷発展への静水圧の依存性については損傷が応力三軸度関数によって記述できる点でモデル化されている。よって降伏曲面を無限円筒でモデル化しても決して実用性が皆無なモデルとは言い切れない。

しかしながら、静水圧依存性を考慮した降伏曲面でなければ実現象を適切に表現できない問題もある。たとえば多孔質材である焼結材の場合には変形初期段階から材料内部に多くの空孔が存在し巨視的には静水圧で負荷していても空孔周辺における応力集中や空孔同士の相互作用により微視的には複雑な応力状態となりせん断応力成分も持つ。その結果として巨視的には静水圧負荷下でも降伏し弾塑性変形が進行する。また純銅のように損傷値が 1.0 に近くなるまで破断せずに弾塑性変形し続ける材料についても破断までに多くの空孔を含む複合材料として考えられるため同様である。

このような材料において降伏曲面の無限円筒近似は無理があり、その解決手段として本研究では弾塑性変形および損傷発展に静水圧依存性を考慮することが有効であると考えた。



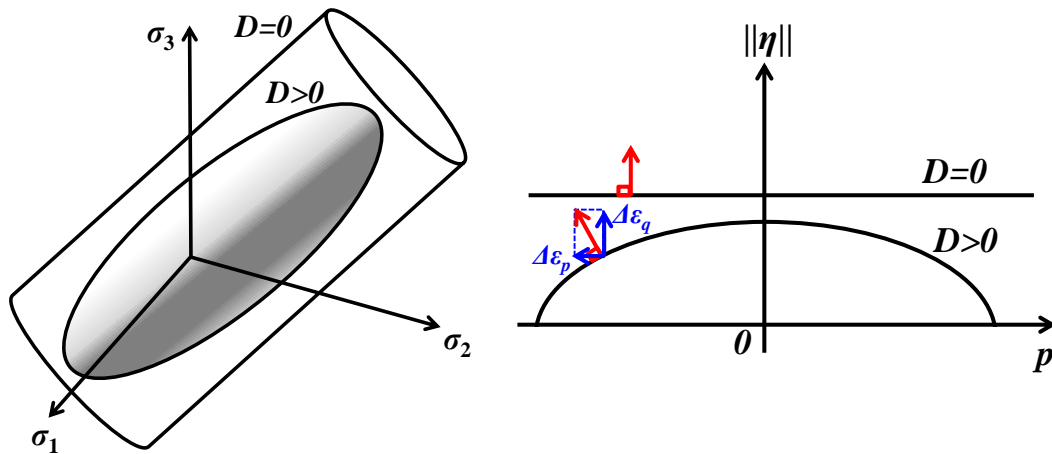
(a) Coordinate of principal stress (b) Coordinate of relative equivalent stress vs. pressure

Fig. 3.6.1 Mises yield function

静水圧依存性を表現するための主流な弾塑性モデルとして **Gurson** の降伏関数がある。**Gurson** は球状材料の中に単一の球状ボイドが存在する材料に対する巨視的な降伏関数を導出した。式(3.6.1)は **Gurson** によって提案された多孔質材の降伏関数である。

$$\frac{1}{2} \|\tilde{\mathbf{I}}_d : \boldsymbol{\sigma}\|^2 - \frac{1}{3} \left\{ 1 + q_3 D^2 - 2Dq_1 \cosh\left(\frac{3q_2 p}{2\sigma_y}\right) \right\} \sigma_y^2 = 0 \quad (3.6.1)$$

ここで q_1, q_2, q_3 は損傷による応力積載能力の低下の度合いや静水圧依存性の程度を示す材料定数である。cosh の項が静水圧依存性の項である。また非損傷状態において $D=0$ とおくと **Mises** の降伏関数と一致する。この **Gurson** の降伏関数を図示したものが図 3.6.2 である。 $D=0$ において無限円筒である降伏曲面が $D>0$ では降伏曲面が静水圧に依存性を持ちラグビーボール状の形状となる。図 3.6.2 (b)は静水圧と相対相当応力を軸とする座標で概念図を示したものである。この図からも静水圧依存性が見て取れる。さらに同図において赤矢印は降伏曲面の法線方向を示している。塑性ひずみ増分が垂直則に従うひずみ増分則によれば **Mises** の降伏曲面($D=0$)では塑性ひずみ増分には静水圧成分が存在しない。これは完全な均質材料において滑り変形によってのみ塑性変形が生じるという考えと整合しており、静水圧成分がゼロであることから塑性ひずみによる体積変化も生じないことを示している。一方、同図の静水圧依存($D>0$)の降伏関数では静水圧負荷下のもので図中の赤矢印と青矢印で示すように降伏曲面に対する法線方向が静水圧成分 $\Delta\epsilon_p$ と偏差成分 $\Delta\epsilon_q$ に分解できる。すなわち静水圧によって塑性ひずみによる体積変化を表現することができる。これは材料内部によるボイドなどの成長による巨視的に観測される塑性体積変化がモデル化されていることを示している。



(a) Coordinate of principal stress (b) Coordinate of relative equivalent stress vs. pressure

Fig. 3.6.2 Gurson yield function

ただし Gurson 材モデルでは損傷進展に伴うヤング率の低下挙動や繰り返し大負荷に伴う損傷を上手く表現することができない. 本研究で目指す極低サイクル疲労破壊現象ではそれらの現象も同時に生じるため別の手段を用いて静水圧依存性を考慮する. モデルの詳細や Return-Mapping および Consistent 接線剛性の詳細については次節以降にて説明する.

3.6.1 静水圧依存性と分割背応力を考慮した複合硬化モデル

静水圧依存性を表現するための損傷弾塑性モデルとして Chaboche らによって提案された静水圧依存性モデルがある. しかしこれまで述べてきたような分割背応力モデルとの連成モデル, その応力積分および Consistent 接線剛性について明示された研究は無い. 本研究では多孔質材となる焼結材や $D \approx 1.0$ まで破断せずに変形するような高延性材の極低サイクル疲労破壊の表現にも適用可能なモデルとして静水圧依存の降伏関数と複合硬化モデルを連成した損傷弾塑性モデルを提案する.

まず塑性 F^p をポテンシャルとして以下を新しく定義する.

$$F^p \equiv \frac{\rho_0}{\rho} \frac{\sigma_{eq}^*}{1-D} - \sigma_y \quad (3.6.2)$$

ただし右辺第 1 項の ρ_0/ρ は体積変化を示した質量保存則により体積減少率 D_v の発展則は以下となる.

$$\left. \begin{aligned} \frac{\rho_0}{\rho} &= \frac{\rho_0}{1 - \Delta\rho} = \frac{1}{1 - \frac{\Delta\rho_0}{\rho_0}} = \frac{1}{1 - D_V} \\ \Delta D_V &= (1 - D_V) \Delta\varepsilon_p \end{aligned} \right\} \quad (3.6.3)$$

また

$$\sigma_{eq}^* \equiv \sqrt{\frac{3}{2} \|\tilde{\mathbf{I}}_d : \boldsymbol{\sigma}\| + \alpha D^* (tr \boldsymbol{\sigma})^2} \quad (3.6.5)$$

とする. α は静水圧依存性の程度を示す材料定数である. 式(3.6.5)を式(3.6.2)に代入すると降伏関数として以下を得る.

$$\frac{\sigma_{eq}^*}{(1 - D_V)(1 - D)} - \sigma_y = 0 \quad (3.6.6)$$

次に π 平面内の応力成分 \mathbf{S}^* を考え, その大きさを次のように求める.

$$\begin{aligned} \sqrt{\frac{3}{2}} \mathbf{S}^* : \sqrt{\frac{3}{2}} \mathbf{S}^* &= \frac{(\sigma_{eq}^*)^2}{(1 - D_V)^2 (1 - D)^2} \\ &= \frac{\sigma_{eq}^2 + \alpha D^* (tr \boldsymbol{\sigma})^2}{(1 - D_V)^2 (1 - D)^2} \\ &= \left\| \frac{\sqrt{\frac{3}{2}} (\tilde{\mathbf{I}}_d : \boldsymbol{\sigma}) + \sqrt{\frac{\alpha D^*}{3}} (tr \boldsymbol{\sigma}) \mathbf{I}}{(1 - D_V)(1 - D)} \right\|^2 \end{aligned} \quad (3.6.7)$$

この左辺と右辺を比較すると

$$\mathbf{S}^* = \frac{(\tilde{\mathbf{I}}_d : \boldsymbol{\sigma}) + \frac{\sqrt{2\alpha D^*}}{3} (tr \boldsymbol{\sigma}) \mathbf{I}}{(1 - D_V)(1 - D)} \quad (3.6.8)$$

を得る. これによって π 平面内の応力成分が分かった. 移動硬化については古典的 Mises 材と同様に降伏曲面が π 平面内で移動すると仮定する. すなわち移動硬化による背応力を次式のように考慮し相対偏差応力 \mathbf{S} を次式で考える.

$$\mathbf{S} = \frac{(\tilde{\mathbf{I}}_d : \boldsymbol{\sigma}) + \frac{\sqrt{2\alpha D^*}}{3} (tr \boldsymbol{\sigma}) \mathbf{I}}{(1 - D_V)(1 - D)} - \boldsymbol{\beta} \quad (3.6.9)$$

これにより本研究で提案する静水圧依存性を考慮した損傷弾塑性の降伏関数は以下となる。

$$\sqrt{\frac{3}{2}} \left\| \frac{(\tilde{\mathbf{I}}_d : \boldsymbol{\sigma}) + \frac{\sqrt{2\alpha D^*}}{3} (\text{tr } \boldsymbol{\sigma}) \mathbf{I}}{(1-D_v)(1-D)} - \boldsymbol{\beta} \right\| - \sigma_y = 0 \quad (3.6.10)$$

ここで

$$\boldsymbol{\eta} \equiv \frac{(\tilde{\mathbf{I}}_d : \boldsymbol{\sigma})}{(1-D_v)(1-D)} - \boldsymbol{\beta} \quad (3.6.11)$$

とおくと降伏関数は次式のようにおける。

$$\sqrt{\frac{3}{2}} \left\| \boldsymbol{\eta} + \frac{\sqrt{2\alpha D^*}}{3} \frac{(\text{tr } \boldsymbol{\sigma}) \mathbf{I}}{(1-D_v)(1-D)} \right\| = \sigma_y \quad (3.6.12)$$

まず式(3.6.12)の両辺を二乗する。

$$\frac{3}{2} \|\boldsymbol{\eta}\|^2 + \frac{\alpha D^* (\text{tr } \boldsymbol{\sigma})^2}{(1-D_v)^2 (1-D)^2} = \sigma_y^2 \quad (3.6.13)$$

ここで

$$\left. \begin{aligned} p &\equiv -\frac{1}{3} \text{tr } \boldsymbol{\sigma} \\ q &\equiv \sqrt{\frac{3}{2}} \|\boldsymbol{\eta}\| \end{aligned} \right\} \quad (3.6.14)$$

とおくと降伏関数は

$$q^2 + \frac{9\alpha D^*}{(1-D_v)^2 (1-D)^2} p^2 = \sigma_y^2 \quad (3.6.15)$$

となる。これにより最終的に降伏関数 F^p を次のように書き直す事ができる。

$$\left. \begin{aligned} F^p &= \sqrt{q^2 + t^2 p^2} - \sigma_y = 0 \\ t &\equiv \frac{9\alpha D^*}{(1-D_v)^2 (1-D)^2} \end{aligned} \right\} \quad (3.6.16)$$

この降伏関数は $t=0$ の時に無限円筒である Mises の降伏曲面に一致する。それはすなわ

ち非損傷状態であることを意味する。損傷状態($t \neq 0$)では降伏曲面は無限円筒ではなくなる。図 3.6.3 は降伏応力 $\sigma_y = 100 \text{ MPa}$ として本節で提案した降伏曲面を静水圧 p と偏差応力 q を軸に描いたものである。図のように t が大きくなるほど無限円筒から遠い楕円上の降伏曲面となることが分かる。このことは損傷が発達するほど母材中の空孔によって微視的に複雑な応力分布となり巨視的には静水圧負荷であっても微視的にみれば応力に滑り成分が存在し降伏しやすくなることを意味する。

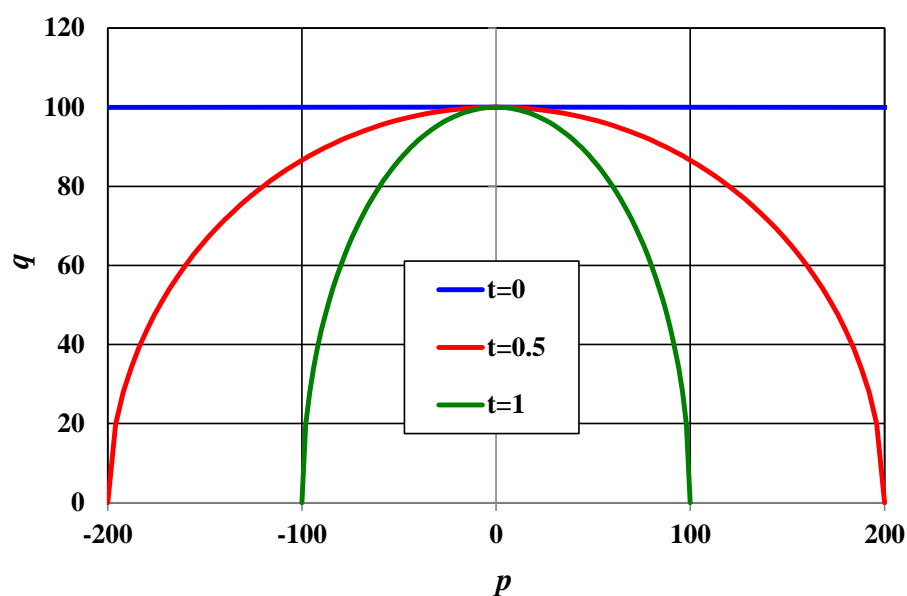


Fig. 3.6.3 yield function by the change of t

3.6.2 Return-Mapping 方程式の提案と収束性に関する課題

既述のように静水圧に非依存な降伏関数は主応力空間において降伏関数が無限円筒となる。そのため Return-Mapping を行う際にもとめる塑性ひずみはその滑り成分である相当塑性ひずみ 1 つとなる。しかし静水圧依存性を持つ降伏曲面では図 3.6.2 に示したように滑り成分と静水圧成分の 2 つの塑性ひずみを求める必要がある。さらに本モデルは背応力や材料損傷も考慮しておりこれらを全て考慮したモデルは既存の研究では見られない。このような複雑なモデルに対して Return-Mapping 方程式を優れた収束性で解くには工夫が必要となる。本節ではまず Return-Mapping 方程式を塑性ひずみの滑り成分と静水圧成分のスカラ 2 変数にまで縮約し、解の特性や収束性について検証する。

まずは次式のように流れ則を静水圧項と偏差項に分離することから考える。ただしここでは損傷発展のみ前進形 Euler 表記で定式化し損傷値 D はステップ n の値を用い、他の物理量が更新されたのち損傷発展も更新する。すなわち損傷と応力を弱連成させて解

くものとする．後にこの積分法と整合した Consistent 接線剛性も導出する．

$$\begin{aligned} d\boldsymbol{\varepsilon}^p &= d\boldsymbol{\gamma} \frac{\partial F^p}{\partial \boldsymbol{\sigma}} \\ &= d\boldsymbol{\gamma} \left(\frac{\partial F^p}{\partial p} \frac{\partial p}{\partial \boldsymbol{\sigma}} + \frac{\partial F^p}{\partial q} \frac{\partial q}{\partial \boldsymbol{\sigma}} \right) \end{aligned} \quad (3.6.17)$$

ここで各微分は

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial F^p}{\partial p} &= \frac{\partial}{\partial p} \left(\sqrt{q^2 + t^2 p^2} - \sigma_y \right) = \frac{t^2 p}{\sqrt{q^2 + t^2 p^2}} \\ \frac{\partial F^p}{\partial q} &= \frac{\partial}{\partial q} \left(\sqrt{q^2 + t^2 p^2} - \sigma_y \right) = \frac{q}{\sqrt{q^2 + t^2 p^2}} \\ \frac{\partial p}{\partial \boldsymbol{\sigma}} &= \frac{\partial}{\partial \boldsymbol{\sigma}} \left(-\frac{1}{3} \text{tr} \boldsymbol{\sigma} \right) = -\frac{1}{3} \mathbf{I} \\ \frac{\partial q}{\partial \boldsymbol{\sigma}} &= \frac{\partial}{\partial \boldsymbol{\sigma}} \left(\sqrt{\frac{3}{2}} \left\| \frac{\tilde{\mathbf{I}}_d : \boldsymbol{\sigma}}{(1-D_v)(1-D)} - \boldsymbol{\beta} \right\| \right) \\ &= \sqrt{\frac{3}{2}} \frac{1}{(1-D_v)(1-D)} \frac{\boldsymbol{\eta}}{\|\boldsymbol{\eta}\|} \\ &\equiv \mathbf{N}_\sigma \end{aligned} \right\} \quad (3.6.18)$$

これを流れ則に代入すると次式を得る．

$$d\boldsymbol{\varepsilon}^p = \left(-\frac{t^2 p}{3\sqrt{q^2 + t^2 p^2}} d\boldsymbol{\gamma} \right) \mathbf{I} + \left(\frac{q}{\sqrt{q^2 + t^2 p^2}} d\boldsymbol{\gamma} \right) \mathbf{N}_\sigma \quad (3.6.19)$$

\mathbf{I} は静水圧方向を示し， \mathbf{N}_σ は π 平面上の成分となるため，その係数は各方向の塑性ひずみの大きさを示す．よって塑性ひずみの大きさを静水圧項 $d\varepsilon_p$ と偏差項 $d\varepsilon_q$ に分離すると

$$\left. \begin{aligned} d\varepsilon_p &\equiv -\frac{t^2 p}{3\sqrt{q^2 + t^2 p^2}} d\boldsymbol{\gamma} \\ d\varepsilon_q &\equiv \frac{q}{\sqrt{q^2 + t^2 p^2}} d\boldsymbol{\gamma} \\ d\boldsymbol{\gamma} &= \sqrt{\frac{9}{t^2} (d\varepsilon_p)^2 + (d\varepsilon_q)^2} \end{aligned} \right\} \quad (3.6.20)$$

とおくことができる．この第1式に $3q$ を掛け第2式に $t^2 p$ をかけて各々を足し合わせると

$$3qd\varepsilon_p + t^2 pd\varepsilon_q = 0 \quad (3.6.21)$$

が得られる．これが Return-Mapping 方程式のうちの1つの方程式となる．

さらに応力成分についても静水圧成分と偏差成分に分離すると

$$\boldsymbol{\sigma} = -\left(-\frac{1}{3}tr\boldsymbol{\sigma}\right)\mathbf{I} + \tilde{\mathbf{I}}_d : \boldsymbol{\sigma} \quad (3.6.22)$$

となり, これより

$$\begin{aligned} \frac{\boldsymbol{\sigma}}{(1-D_v)(1-D)} &= -\frac{p}{(1-D_v)(1-D)}\mathbf{I} + \left\{ \frac{\tilde{\mathbf{I}}_d : \boldsymbol{\sigma}}{(1-D_v)(1-D)} - \boldsymbol{\beta} \right\} + \boldsymbol{\beta} \\ &= -\frac{p}{(1-D_v)(1-D)}\mathbf{I} + \boldsymbol{\eta} + \boldsymbol{\beta} \end{aligned} \quad (3.6.23)$$

となる. この式と式(3.6.18)と組み合わせると

$$\boldsymbol{\sigma} = -p\mathbf{I} + (1-D_v)(1-D) \left(\sqrt{\frac{2}{3}}q\bar{N}_\sigma + \boldsymbol{\beta} \right) \quad (3.6.24)$$

となる. 次に構成則を用いてステップ $n+1$ における応力を試行応力により表記してゆく. まず構成則より

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\sigma}_{n+1} &= (1-D_v)(1-D)\tilde{\mathbf{D}}^e : \boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^e \\ \therefore \frac{\boldsymbol{\sigma}_{n+1}}{(1-D_v)(1-D)} &= \tilde{\mathbf{D}}^e : (\boldsymbol{\varepsilon}_n^e + \Delta\boldsymbol{\varepsilon}^e) \\ &= \tilde{\mathbf{D}}^e : (\boldsymbol{\varepsilon}_n^e + \Delta\boldsymbol{\varepsilon} - \Delta\boldsymbol{\varepsilon}^p) \\ &= \boldsymbol{\sigma}^{try} - \tilde{\mathbf{D}}^e : \Delta\boldsymbol{\varepsilon}^p \\ &= \boldsymbol{\sigma}^{try} - \tilde{\mathbf{D}}^e : (\Delta\boldsymbol{\varepsilon}_p\mathbf{I} + \Delta\boldsymbol{\varepsilon}_q\mathbf{N}_\sigma) \\ &= \boldsymbol{\sigma}^{try} - 3K\Delta\boldsymbol{\varepsilon}_p\mathbf{I} - 2G\Delta\boldsymbol{\varepsilon}_q\mathbf{N}_\sigma \end{aligned} \quad (3.6.25)$$

となる. 次に静水圧成分を求めるためにこの両辺に 2 階の等方テンソル \mathbf{I} を掛けると

$$\begin{aligned} \frac{\boldsymbol{\sigma}_{n+1} : \mathbf{I}}{(1-D_v)(1-D)} &= \boldsymbol{\sigma}^{try} : \mathbf{I} - 3K\Delta\boldsymbol{\varepsilon}_p\mathbf{I} : \mathbf{I} - 2G\Delta\boldsymbol{\varepsilon}_q\mathbf{N}_\sigma : \mathbf{I} \\ &= \boldsymbol{\sigma}^{try} : \mathbf{I} - 9K\Delta\boldsymbol{\varepsilon}_p \end{aligned} \quad (3.6.26)$$

が得られる. これより

$$p_{n+1} = (1-D_v)(1-D)(p^{try} + 3K\Delta\boldsymbol{\varepsilon}_p) \quad (3.6.27)$$

と静水圧についてステップ $n+1$ の値と試行応力値の関係が得られる. さらに偏差項について同様の関係を求めるために式(3.6.25)に偏差射影テンソル $\tilde{\mathbf{I}}_d$ を掛けて背応力を差し引くと

$$\begin{aligned}
\frac{\tilde{\mathbf{I}}_d : \boldsymbol{\sigma}_{n+1}}{(1-D_V)(1-D)} - \boldsymbol{\beta}_{n+1} &= \tilde{\mathbf{I}}_d : \boldsymbol{\sigma}^{try} - 3K\Delta\varepsilon_p \tilde{\mathbf{I}}_d : \mathbf{I} - 2G\Delta\varepsilon_q \tilde{\mathbf{I}}_d : \mathbf{N}_\sigma - \boldsymbol{\beta}_{n+1} \\
\therefore \boldsymbol{\eta}_{n+1} - \boldsymbol{\beta}_{n+1} &= \tilde{\mathbf{I}}_d : \boldsymbol{\sigma}^{try} - 2G\Delta\varepsilon_q \mathbf{N}_\sigma - \left(\mathbf{E} + \sqrt{\frac{3}{2}} F \bar{\mathbf{N}}_\sigma \right) \\
&= \left(\tilde{\mathbf{I}}_d : \boldsymbol{\sigma}^{try} - \mathbf{E} \right) - 2G\Delta\varepsilon_q \sqrt{\frac{3}{2}} \frac{\bar{\mathbf{N}}_\sigma}{(1-D_V)(1-D)} - \sqrt{\frac{3}{2}} F \bar{\mathbf{N}}_\sigma
\end{aligned} \tag{3.6.28}$$

となる。ただし本研究では背応力は分割背応力によるモデルを用いる。背応力の表記は式(3.4.20)を引用した。式(3.6.28)をさらに整理すると

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{\eta}_{n+1} &= \boldsymbol{\eta}_E - \left\{ \frac{\sqrt{6}G\Delta\varepsilon_q}{(1-D_V)(1-D)} + \sqrt{\frac{3}{2}} F \right\} \bar{\mathbf{N}}_\sigma \\
\boldsymbol{\eta}_E &\equiv \tilde{\mathbf{I}}_d : \boldsymbol{\sigma}^{try} - \mathbf{E}
\end{aligned} \tag{3.6.29}$$

となる。次に $\boldsymbol{\eta}_{n+1}$ と $\boldsymbol{\eta}_E$ が同じ方向を向くテンソルであることを示してゆく。式(3.6.29)より

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{\eta}_{n+1} &= \boldsymbol{\eta}_E - \left\{ \frac{\sqrt{6}G\Delta\varepsilon_q}{(1-D_V)(1-D)} + \sqrt{\frac{3}{2}} F \right\} \sqrt{\frac{3}{2}} \frac{\boldsymbol{\eta}_{n+1}}{q_{n+1}} \\
&= \boldsymbol{\eta}_E - \left\{ \frac{3G\Delta\varepsilon_q}{(1-D_V)(1-D)} + \frac{3}{2} F \right\} \frac{\boldsymbol{\eta}_{n+1}}{q_{n+1}}
\end{aligned} \tag{3.6.30}$$

となる。 $\boldsymbol{\eta}_{n+1}$ と $\boldsymbol{\eta}_E$ の項をまとめると

$$\left[1 + \left\{ \frac{3G\Delta\varepsilon_q}{(1-D_V)(1-D)} + \frac{3}{2} F \right\} \frac{1}{q_{n+1}} \right] \boldsymbol{\eta}_{n+1} = \boldsymbol{\eta}_E \tag{3.6.31}$$

が得られる。これは左辺と右辺が単にスカラ倍されているにすぎないので $\boldsymbol{\eta}_{n+1}$ と $\boldsymbol{\eta}_E$ は同じ方向を向くテンソルであることが証明された。よってその単位テンソルは等しいため

$$\bar{N}_\sigma \equiv \frac{\boldsymbol{\eta}_{n+1}}{\|\boldsymbol{\eta}_{n+1}\|} = \frac{\boldsymbol{\eta}_E}{\|\boldsymbol{\eta}_E\|} \tag{3.6.31}$$

と書ける。これを式(3.6.29)に代入して両辺を二乗して $3/2$ をかけると

$$\begin{aligned}
\frac{3}{2} \boldsymbol{\eta}_{n+1} : \boldsymbol{\eta}_{n+1} &= \frac{3}{2} \left[1 - \left\{ \frac{\sqrt{6}G\Delta\varepsilon_q}{(1-D_V)(1-D)} + \sqrt{\frac{3}{2}} F \right\} \frac{1}{\|\boldsymbol{\eta}_E\|} \right]^2 (\boldsymbol{\eta}_E : \boldsymbol{\eta}_E) \\
&= \left\{ \sqrt{\frac{3}{2}} \|\boldsymbol{\eta}_E\| - \frac{3G\Delta\varepsilon_q}{(1-D_V)(1-D)} - \frac{3}{2} F \right\}^2
\end{aligned} \tag{3.6.32}$$

両辺の平方根を取ると

$$\begin{aligned}\sqrt{\frac{3}{2}}\|\boldsymbol{n}_{n+1}\| &= \sqrt{\frac{3}{2}}\|\boldsymbol{n}_E\| - \frac{3G\Delta\varepsilon_q}{(1-D_v)(1-D)} - \frac{3}{2}F \\ \therefore q_{n+1} &= q_E - \frac{3G\Delta\varepsilon_q}{(1-D_v)(1-D)} - \frac{3}{2}F\end{aligned}\quad (3.6.33)$$

以上より解くべき **Return-Mapping** 方程式は $\Delta\varepsilon_p$ と $\Delta\varepsilon_q$ の 2 個のスカラ未知変数とする以下の 2 本の非線形連立方程式 f_1, f_2 として記述できる。

$$\left. \begin{aligned}f_1(\Delta\varepsilon_p, \Delta\varepsilon_q) &= 3q_{n+1}(\Delta\varepsilon_q)\Delta\varepsilon_p + t^2 p_{n+1}(\Delta\varepsilon_p)\Delta\varepsilon_q = 0 \\ f_2(\Delta\varepsilon_p, \Delta\varepsilon_q) &= \sqrt{q_{n+1}^2(\Delta\varepsilon_q) + t^2 p_{n+1}^2(\Delta\varepsilon_p)} - \sigma_y(\Delta\varepsilon_p, \Delta\varepsilon_q) = 0\end{aligned}\right\} \quad (3.6.44)$$

この非線形連立方程式を **Newton-Raphson** 法で解くことを考えてみる。反復ごとの解の修正量をそれぞれ $d(\Delta\varepsilon_p)$, $d(\Delta\varepsilon_q)$ とおくと修正量を得る線形方程式として次式を得る。

$$\left[\begin{array}{cc} \frac{\partial f_1}{\partial(\Delta\varepsilon_p)} & \frac{\partial f_1}{\partial(\Delta\varepsilon_q)} \\ \frac{\partial f_2}{\partial(\Delta\varepsilon_p)} & \frac{\partial f_2}{\partial(\Delta\varepsilon_q)} \end{array} \right] \left\{ \begin{array}{c} d(\Delta\varepsilon_p) \\ d(\Delta\varepsilon_q) \end{array} \right\} = - \left\{ \begin{array}{c} f_1 \\ f_2 \end{array} \right\} \quad (3.6.45)$$

係数行列の微分について計算すると以下となる。

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial f_1}{\partial(\Delta\varepsilon_p)} &= 3q_{n+1} + 3(1-D_v)(1-D)Kt^2\Delta\varepsilon_q \\ \frac{\partial f_1}{\partial(\Delta\varepsilon_q)} &= 3\Delta\varepsilon_p \frac{\partial q_{n+1}}{\partial(\Delta\varepsilon_q)} + t^2 p_{n+1} \\ \frac{\partial f_2}{\partial(\Delta\varepsilon_p)} &= \frac{3(1-D_v)(1-D)Kt^2}{\sqrt{q_{n+1}^2 + t^2 p_{n+1}^2}} p_{n+1} - H_{Iso}(R_n + \Delta\gamma) \frac{\partial(\Delta\gamma)}{\partial(\Delta\varepsilon_p)} \\ \frac{\partial f_2}{\partial(\Delta\varepsilon_q)} &= \frac{q_{n+1}}{\sqrt{q_{n+1}^2 + t^2 p_{n+1}^2}} \frac{\partial q_{n+1}}{\partial(\Delta\varepsilon_q)} - H_{Iso}(R_n + \Delta\gamma) \frac{\partial(\Delta\gamma)}{\partial(\Delta\varepsilon_q)} \end{aligned}\right\} \quad (3.6.46)$$

ただし右辺中の各微分項は次式となる。

$$\left. \begin{aligned}
\frac{\partial q_{n+1}}{\partial(\Delta\varepsilon_q)} &= -\sqrt{\frac{3}{2}}\bar{N}_\sigma \cdot \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial(\Delta\varepsilon_q)} - \frac{3G}{(1-D_V)(1-D)} - \frac{3}{2} \frac{\partial F}{\partial(\Delta\varepsilon_q)} \\
\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial(\Delta\varepsilon_q)} &= -\sum_{k=1}^{N_{kin}} (b_k \boldsymbol{\beta}_{kn} e^{-b_k \Delta\varepsilon_q}) \\
\frac{\partial F}{\partial(\Delta\varepsilon_q)} &= \sum_{k=1}^{N_{kin}} (a_k e^{-b_k \Delta\varepsilon_q}) \\
\frac{\partial(\Delta\gamma)}{\partial(\Delta\varepsilon_p)} &= \frac{9\Delta\varepsilon_p}{t^2 \Delta\gamma} \\
\frac{\partial(\Delta\gamma)}{\partial(\Delta\varepsilon_q)} &= \frac{\Delta\varepsilon_q}{\Delta\gamma} \\
\Delta\gamma &= \sqrt{\frac{9}{t^2} (\Delta\varepsilon_p)^2 + (\Delta\varepsilon_q)^2}
\end{aligned} \right\} \quad (3.6.47)$$

このように **Return-Mapping** 方程式をスカラ 2 変数にまで縮約した。本研究ではさらにこれをスカラ 1 変数にまで縮約する。その手順は式(3.6.44)の第 1 式を $\Delta\varepsilon_p$ について解き第 2 式に代入し変数を 1 つ除去するだけで良く、非常に簡便に縮約が可能となる。この手順に従って縮約する。まず式(3.6.27)を式(3.6.44)の第 1 式に代入すると

$$\left. \begin{aligned}
f_1 &= 3q_{n+1}(\Delta\varepsilon_q)\Delta\varepsilon_p + t^2 D_{cross} (p^{try} + 3K\Delta\varepsilon_p)\Delta\varepsilon_q = 0 \\
D_{cross} &\equiv (1-D_V)(1-D)
\end{aligned} \right\} \quad (3.6.48)$$

となる。これを変形することで

$$\Delta\varepsilon_p = -\frac{D_{cross} t^2 p^{try} \Delta\varepsilon_q}{3(q_{n+1}(\Delta\varepsilon_q) + D_{cross} K t^2 \Delta\varepsilon_q)} \quad (3.6.49)$$

右辺は $\Delta\varepsilon_q$ のみを変数として記述される。これによって静水圧も $\Delta\varepsilon_q$ のみの変数で書き直す。式(3.6.27)より

$$\begin{aligned}
p_{n+1} &= D_{cross} \left(p^{try} - \frac{D_{cross} K t^2 p^{try} \Delta\varepsilon_q}{q_{n+1} + D_{cross} K t^2 \Delta\varepsilon_q} \right) \\
&= \frac{D_{cross} p^{try} q_{n+1}(\Delta\varepsilon_q)}{q_{n+1}(\Delta\varepsilon_q) + D_{cross} K t^2 \Delta\varepsilon_q}
\end{aligned} \quad (3.6.50)$$

を得る。これにより $\Delta\varepsilon_p$ と p_{n+1} を $\Delta\varepsilon_q$ で記述できたため式(3.6.44)の第 2 式は $\Delta\varepsilon_q$ のみを変数とした方程式として以下が得られる。

$$f(\Delta\varepsilon_q) \equiv \sqrt{q_{n+1}^2(\Delta\varepsilon_q) + t^2 p_{n+1}^2(\Delta\varepsilon_q)} - \sigma_y(\Delta\gamma(\Delta\varepsilon_p(\Delta\varepsilon_q), \Delta\varepsilon_q)) = 0 \quad (3.6.51)$$

これは変数が $\Delta\varepsilon_q$ のみのスカラ 1 変数の **Return-Mapping** 方程式である。この **Return-Mapping** 方程式の収束性が多軸負荷状態の度合によってどのように変化するのは

か調べた。計算条件は応力などの初期物理量は損傷以外を全てゼロとした。損傷値は $D=0.1$, $D_v=0.0$ とした。また降伏曲面の静水圧依存性を示す定数 α は 0.25 とした。この時 $t^2=0.2777$ となる。この初期条件をもとに表 3.6.1 で示す 3 種類の多軸負荷状態について Return-Mapping 方程式を Newton 法で解く際の収束性について検証する。多軸負荷状態の入力は全ひずみ増分で与え表 3.6.1 はその入力値の成分である。まず Case 1 は多軸度がゼロの純粋せん断変形状態である。Case 2 は符号は同じであるが 1 成分のみ値を 20% 大きくした中程度の三軸状態である。また Case 3 は全ての垂直ひずみが等しく純粋な静水圧状態であり最も多軸度が大きい条件である。

図 3.6.3 はこの Return-Mapping 方程式を Newton 法で解いた時の計算反復ごとの相対誤差の値を示したものである。ただし相対誤差は 1 回目の反復の誤差 f_0 に対する現在の反復の誤差の比の絶対値で示す。解の初期値を $\Delta \varepsilon_q = 1.0 \times 10^{-10}$ のもとで解いた。Case 1 では解が収束しているが Case 2 および Case 3 で解が振動、発散し求解できていないことが分かる。このように収束性が悪化してしまう理由について考察する。

Table 3.6.1 Input data to verify convergence of Return-Mapping equation

	x	y	z	xy	yz	zx
Case 1	0.00000	0.00000	0.00000	0.00250	0.00250	0.00250
Case 2	0.00300	0.00250	0.00250	0.00000	0.00000	0.00000
Case 3	0.00250	0.00250	0.00250	0.00000	0.00000	0.00000

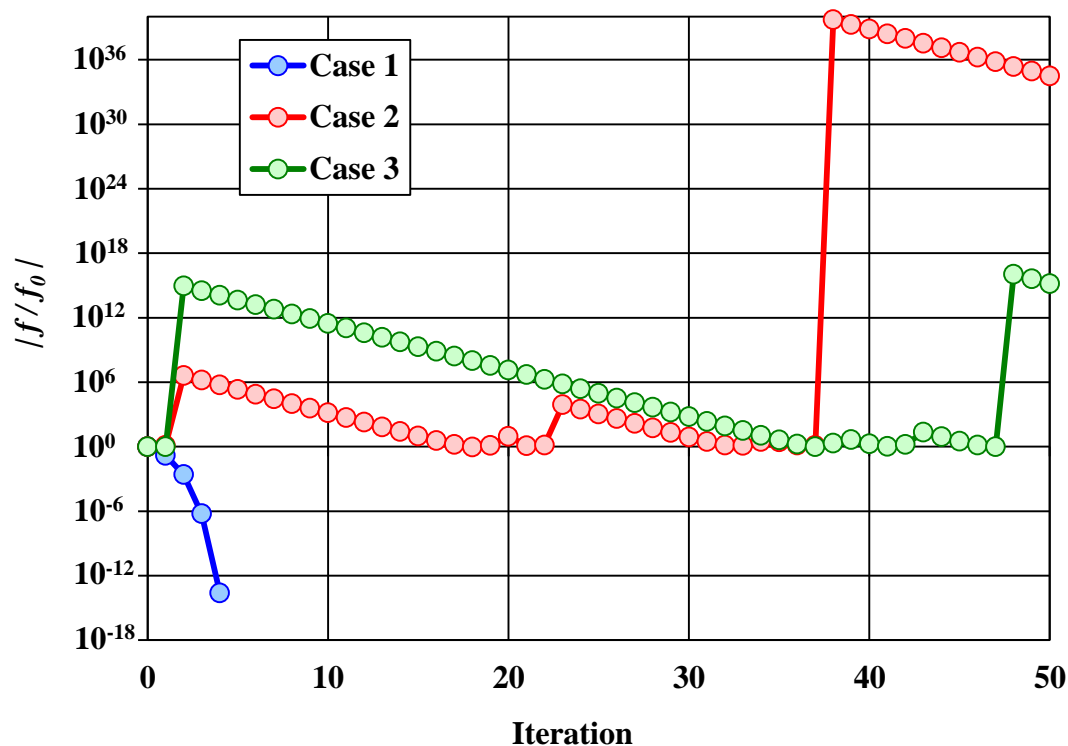


Fig. 3.6.3 Number of iteration to solve Return-Mapping equation by Newton scheme

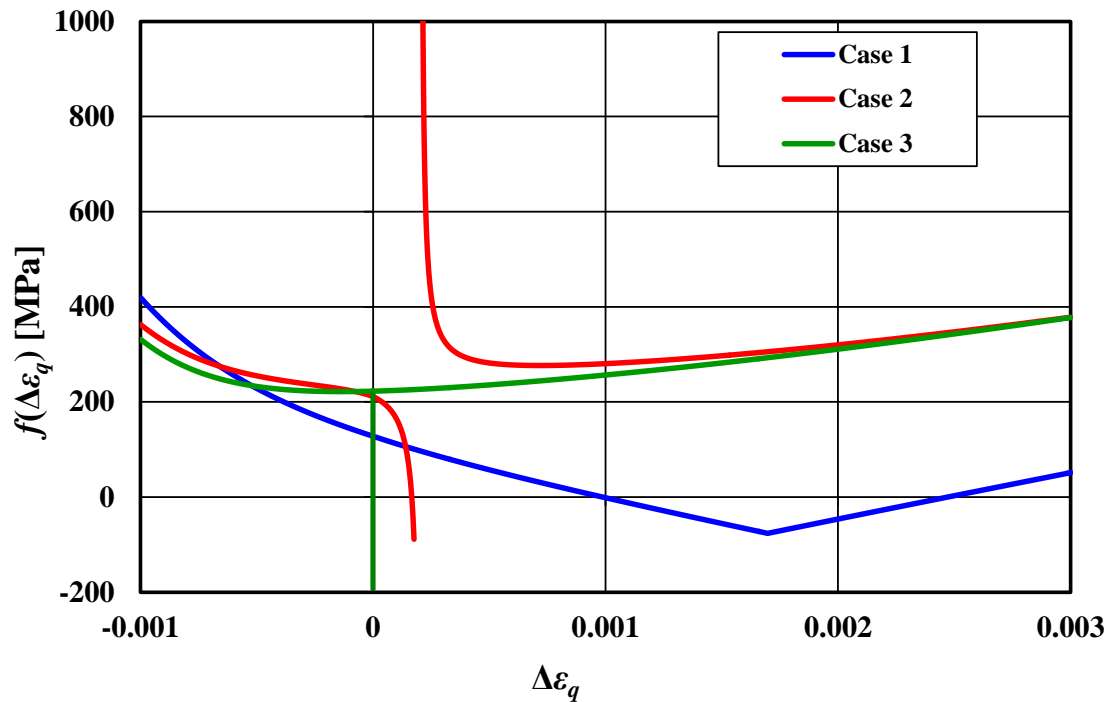


Fig. 3.6.4 Return-Mapping function by change of triaxiality

図 3.6.4 は式(3.6.51)の Return-Mapping 方程式の関数 f を描画したものである。Case 1 の純粋せん断変形のもとでは横軸との交点である解に至るまでは単調減少しておりこの関数を Newton 法で解く際に特に問題はない。しかし Case 2 へと多軸度が大きくなると解は存在するものの関数が特異性を持ってしまう。このような関数を Newton 法で解くと解が振動もしくは発散してしまい解に非常に近い値を Newton 法の初期値に設定する必要がある。さらに Case 3 の純粋静水圧のもとでは滑り成分が存在しないため塑性ひずみの滑り成分は存在せず理論的には $\Delta\varepsilon_q=0$ が解となるはずである。しかし図を見ると $\Delta\varepsilon_q=0$ で特異となり発散してしまうため数値的にうまく解を求めることができない。

このように Return-Mapping 方程式を 1 変数にまで縮約する事で Return-Mapping 方程式の関数を容易に描画でき解の収束性について考察することが可能となる。次節ではこの収束性の課題を解決する方法について考える。

3.6.3 Return-Mapping 方程式の収束性の改良

前節の検討から Return-Mapping 方程式が特異性を持つことが数値的に解を得ることを困難にさせる要因であることは分かった。そこでまず式(3.6.51)に式(3.6.50)を代入する。

$$\sqrt{q_{n+1}^2 + t^2 \left(\frac{D_{cross} p^{try} q_{n+1}(\Delta \varepsilon_q)}{q_{n+1}(\Delta \varepsilon_q) + D_{cross} K t^2 \Delta \varepsilon_q} \right)^2} - \sigma_y = 0 \quad (3.6.52)$$

この第2項の分母が特性を持ってしまう要因である。たとえば Case 3 の純粋静水圧の時は $\Delta \varepsilon_q = 0$ の時に式(3.6.33)により $q_{n+1} = 0$ もゼロとなるためこの分母がゼロとなり発散してしまう。そこで両辺にこの分母を掛けて特異性を消去する。さらに平方根を除去するために式(3.6.52)の二乗すると式(3.6.53)のように新たな Return-Mapping 方程式と定義する。

$$f(\Delta \varepsilon_q) \equiv (q_{n+1}(\Delta \varepsilon_q) + D_{cross} K t^2 \Delta \varepsilon_q)^2 (q_{n+1}^2 - \sigma_y^2) + t^2 (D_{cross} p^{try} q_{n+1}(\Delta \varepsilon_q))^2 = 0 \quad (3.6.53)$$

これが静水圧依存性を考慮した損傷弾塑性モデルの収束性を改良した Return-Mapping 方程式である。この方程式を解き $\Delta \varepsilon_q$ を求めた後に体積項 $\Delta \varepsilon_q$ を求める必要があるが、式(3.6.49)を用いると純粋静水圧下のもとで問題が生じる。すなわち式(3.6.49)の分母が全てゼロになり発散してしまう。その問題を避けるために体積項 $\Delta \varepsilon_q$ を求めるには式(3.6.20)から得られる

$$\Delta \varepsilon_p = - \frac{t^2 p_{n+1}}{3 \sqrt{q_{n+1}^2 + t^2 p_{n+1}^2}} \Delta \gamma \quad (3.6.54)$$

を用いる。

図 3.6.5 は先ほどと同様に表 3.6.1 の条件下で式(3.6.53)の Return-Mapping 方程式を Newton 法で解いたものである。この図と図 3.6.3 を比較すれば明らかなように同じ負荷条件であっても改良した Return-Mapping 方程式の方では解が振動、発散することなく優れた収束性を示している。

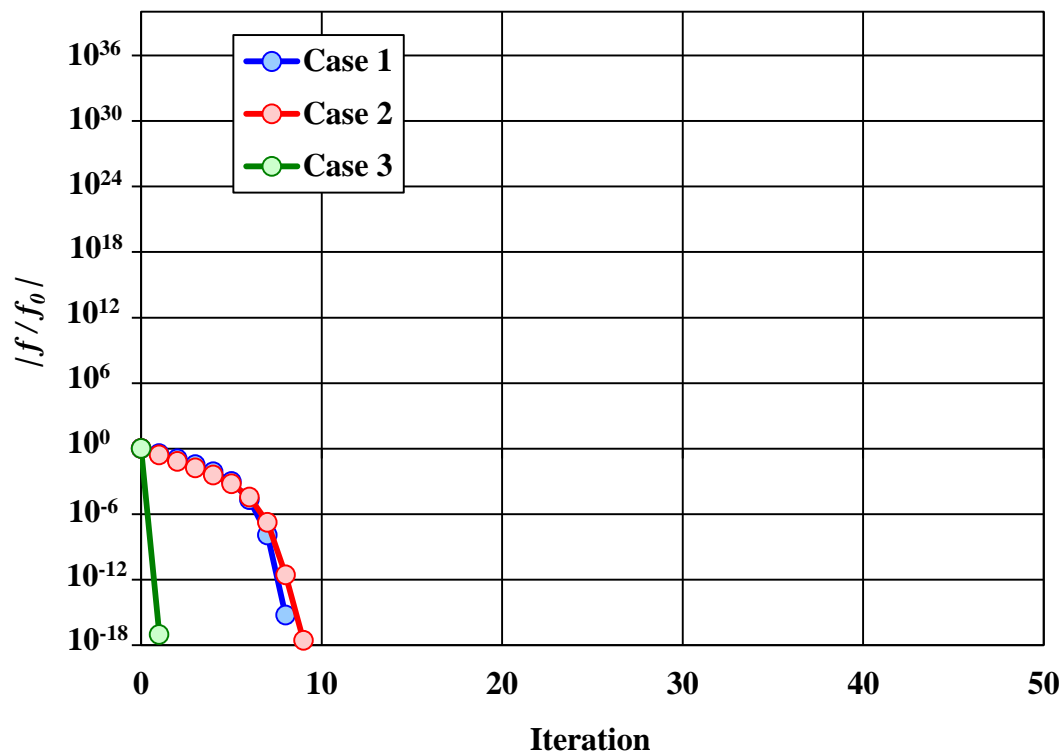


Fig. 3.6.5 Number of iteration to solve Return-Mapping equation by Newton scheme

さらに図 3.6.6 は式(3.6.53)の関数を描画したものである。図のように特異性はなく図 3.6.4 に対して単純な凸関数になっている。そのためこの方程式を Newton 法で解く際に解の振動や発散が生じずに非常に良い収束性が得られる。以上に示してきたように Return-Mapping 方程式はその出発点は流れ則を差分表記したものであるが、方程式の縮退や特異性の除去などによる式変形の工夫によって数値的な求解性能を改善することが可能である。

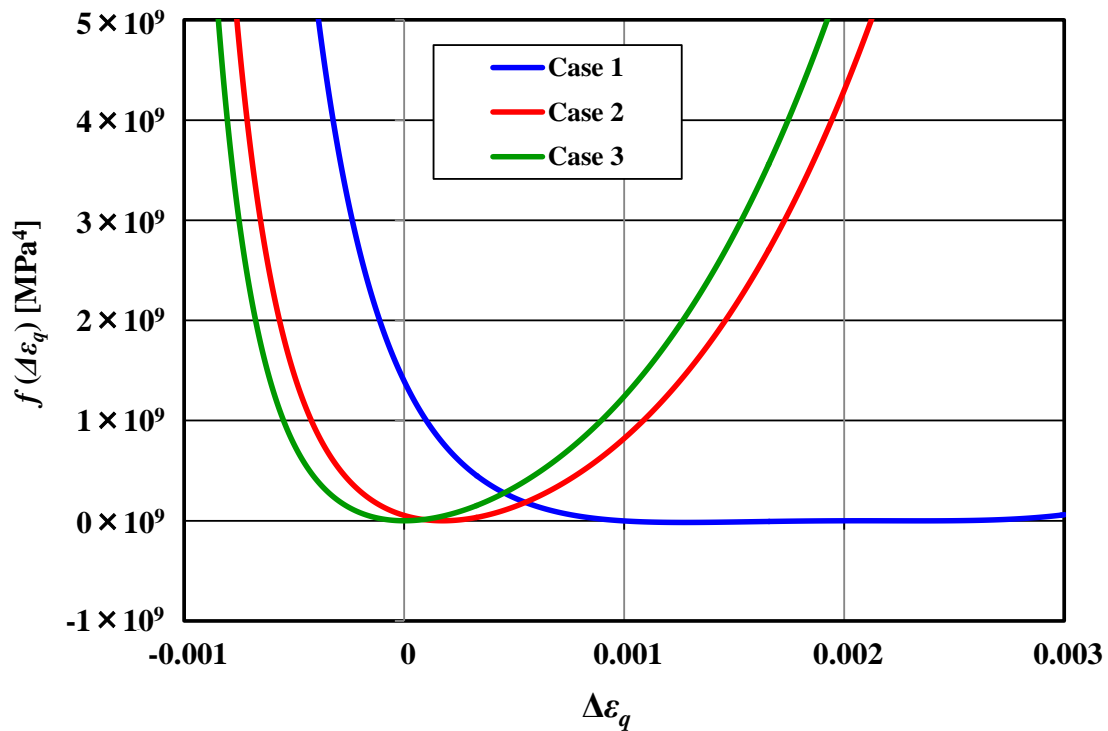


Fig. 3.6.6 Return-Mapping function by change of triaxiality

また表 3.6.2 は表 3.6.1 の 3 条件で解いたときの塑性ひずみについて滑り成分 $\Delta\varepsilon_q$ と静水圧成分(体積成分) $\Delta\varepsilon_p$ および相当応力 q と静水圧の負値 $-p$ の収束解である。

Table 3.6.2 Solution by change of triaxiality

	q	$-p$	$\Delta\varepsilon_q$	$\Delta\varepsilon_p$
Case 1	74.585976	0.000000	0.000986	0.000000
Case 2	1.459223	171.6505	0.000166	0.001812
Case 3	-0.000016	567.9010	0.000000	0.000328

この表から純粋せん断応力(Case 1)では静水圧や塑性ひずみの体積成分は発生せずに滑り成分のみ生じていることが分かる。逆に純粋静水圧下(Case 3)では滑り成分に関する応力とひずみが生じていないことが分かる。一方、それらの複合である Case 2 では体積成分と滑り成分の両者が生じている。このことは塑性ひずみは飽くまで降伏曲面に対する法線則に従うものとして扱っていることから理解できる。すなわち図 3.6.7 のように降伏曲面において各応力状態該当する場所の法線方向を静水圧方向と滑り方向に分解しても理解することができる。

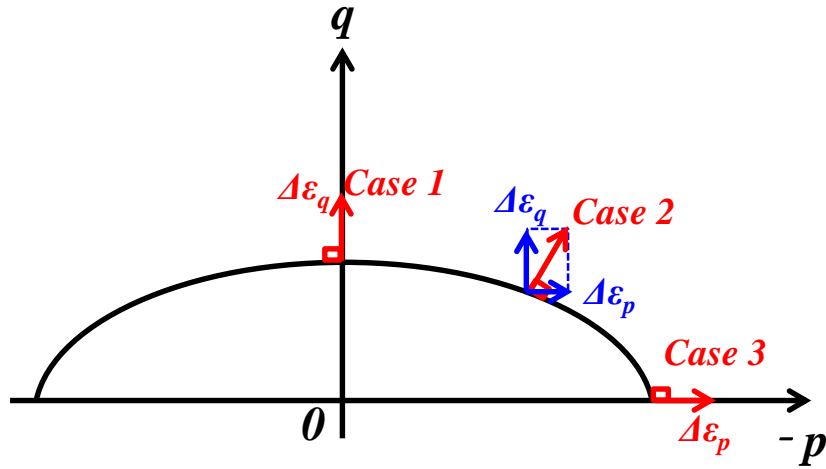


Fig. 3.6.7 Direction of plastic strain by change of triaxiality

最後に改良した Return-Mapping 方程式(3.6.53)を Newton 法で解く際の接線係数について記載する. 反復ごとの解の修正量を $d(\Delta\varepsilon_q)$ とおくと

$$d(\Delta\varepsilon_q) = -\frac{f}{\frac{df}{d(\Delta\varepsilon_q)}} \quad (3.6.55)$$

分母の微分について計算すると

$$\begin{aligned} \frac{df}{d(\Delta\varepsilon_q)} &\equiv \frac{d}{d(\Delta\varepsilon_q)} \left\{ \left(q_{n+1}(\Delta\varepsilon_q) + D_{cross} K t^2 \Delta\varepsilon_q \right)^2 (q_{n+1}^2 - \sigma_y^2) + t^2 \left(D_{cross} p^{try} q_{n+1}(\Delta\varepsilon_q) \right)^2 \right\} \\ &= 2 \left(q_{n+1} + D_{cross} K t^2 \Delta\varepsilon_q \right) \left(dq_{n+1} + D_{cross} K t^2 \right) (q_{n+1}^2 - \sigma_y^2) + \\ &\quad \left(q_{n+1} + D_{cross} K t^2 \Delta\varepsilon_q \right)^2 \left(2q_{n+1} \frac{dq_{n+1}}{d(\Delta\varepsilon_q)} - 2\sigma_y \frac{d\sigma_y}{d(\Delta\varepsilon_q)} \right) + 2D_{cross}^2 t^2 (p^{try})^2 q_{n+1} \frac{dq_{n+1}}{d(\Delta\varepsilon_q)} \end{aligned} \quad (3.6.56)$$

ここで

$$\left. \begin{aligned}
\frac{dq_{n+1}}{d(\Delta\varepsilon_q)} &= -\sqrt{\frac{3}{2}}\bar{N}_\sigma \cdot \frac{dE}{d(\Delta\varepsilon_q)} - \frac{3G}{D_{cross}} - \frac{3}{2} \frac{dF}{d(\Delta\varepsilon_q)} \\
\frac{d\sigma_y}{d(\Delta\varepsilon_q)} &= H_{iso}(R_n + \Delta\gamma) \frac{d(\Delta\gamma)}{d(\Delta\varepsilon_q)} \\
\frac{d(\Delta\gamma)}{d(\Delta\varepsilon_q)} &= \frac{9}{t^2} \frac{\Delta\varepsilon_q}{\Delta\gamma} \frac{d(\Delta\varepsilon_p)}{d(\Delta\varepsilon_q)} + \frac{\Delta\varepsilon_q}{\Delta\gamma} \\
\frac{d(\Delta\varepsilon_p)}{d(\Delta\varepsilon_q)} &= -\frac{D_{cross}t^2 p^{try}}{3} \left\{ \frac{1}{q_{n+1} + D_{cross}Kt^2\Delta\varepsilon_q} - \frac{\Delta\varepsilon_q}{(q_{n+1} + D_{cross}Kt^2\Delta\varepsilon_q)^2} \left(\frac{dq_{n+1}}{d(\Delta\varepsilon_q)} + D_{cross}Kt^2 \right) \right\}
\end{aligned} \right\} \quad (3.6.57)$$

以上によって Newton 法による反復計算が可能となり改良した Return-Mapping 方程式を解くことができる。

3.6.4 陽的表記による Consistent 接線剛性

本研究では静水圧依存の損傷弾塑性モデルについて全節で提案した応力積分に加えてそれと厳密に整合した Consistent 接線剛性の開発も行った。具体的な手順について本節で述べる。

まず式(3.6.58)のように降伏曲面に対する法線テンソル N_σ を試行弾性ひずみと塑性ひずみの滑り成分 $\Delta\varepsilon_q$ で記述する。

$$N_\sigma \equiv \sqrt{\frac{3}{2}} \frac{1}{D_{cross}} \bar{N}_\sigma \quad (3.6.58)$$

式(3.6.31)を代入すると

$$\begin{aligned}
N_\sigma &\equiv \sqrt{\frac{3}{2}} \frac{1}{D_{cross}} \frac{\boldsymbol{\eta}_E}{\|\boldsymbol{\eta}_E\|} \\
&= \sqrt{\frac{3}{2}} \frac{1}{D_{cross}} \frac{2\tilde{\mathbf{G}}_d : \boldsymbol{\varepsilon}^{etry} - \mathbf{E}(\Delta\varepsilon_q)}{\|2\tilde{\mathbf{G}}_d : \boldsymbol{\varepsilon}^{etry} - \mathbf{E}(\Delta\varepsilon_q)\|}
\end{aligned} \quad (3.6.59)$$

次にステップ $n+1$ における応力 $\boldsymbol{\sigma}_{n+1}$ を $\boldsymbol{\varepsilon}^{etry}$ の関数として表記する。構成則は式(3.6.25)に式(3.5.59)を代入し

$$\boldsymbol{\sigma}_{n+1} = D_{cross} \tilde{\mathbf{D}}^e : \boldsymbol{\varepsilon}^{etry} - 3D_{cross} K \Delta\varepsilon_p \mathbf{I} - \sqrt{6}G \Delta\varepsilon_q \frac{\boldsymbol{\eta}_E}{\|\boldsymbol{\eta}_E\|} \quad (3.6.60)$$

前節で示したように式(3.6.60)の右辺の変数 $\Delta\varepsilon_p$, $\Delta\varepsilon_q$, p , q , η_E は全て試行応力で記述できる．また試行応力は試行弾性ひずみで記述できるため式(3.6.60)の右辺は全て試行弾性ひずみの変数として記述できる．すなわち内部変数を用いて表記すると

$$\sigma_{n+1} = \sigma_{n+1}(\boldsymbol{\varepsilon}^{etry}, \eta_E(\boldsymbol{\varepsilon}^{etry}), \Delta\varepsilon_p(\boldsymbol{\varepsilon}^{etry}), \Delta\varepsilon_q(\boldsymbol{\varepsilon}^{etry})) \quad (3.6.61)$$

となる．Consistent 接線剛性 $\tilde{\mathbf{D}}^{ep}$ は応力と試行弾性ひずみの微分値として記述されるため

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{D}}^{ep} &= \frac{d\sigma_{n+1}}{d\boldsymbol{\varepsilon}^{etry}} \\ &= \frac{\partial\sigma_{n+1}}{\partial\boldsymbol{\varepsilon}^{etry}} + \frac{\partial\sigma_{n+1}}{\partial\eta_E} : \frac{d\eta_E}{d\boldsymbol{\varepsilon}^{etry}} + \frac{\partial\sigma_{n+1}}{\partial(\Delta\varepsilon_p)} \otimes \frac{d(\Delta\varepsilon_p)}{d\boldsymbol{\varepsilon}^{etry}} + \frac{\partial\sigma_{n+1}}{\partial(\Delta\varepsilon_q)} \otimes \frac{d(\Delta\varepsilon_q)}{d\boldsymbol{\varepsilon}^{etry}} \end{aligned} \quad (3.6.62)$$

右辺の各微分を計算すると以下が得られる．

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial\sigma_{n+1}}{\partial\boldsymbol{\varepsilon}^{etry}} &= D_{cross} \tilde{\mathbf{D}}^e \\ \frac{\partial\sigma_{n+1}}{\partial\eta_E} &= \frac{3G\Delta\varepsilon_q}{q_E} (\bar{\mathbf{N}}_\sigma \otimes \bar{\mathbf{N}}_\sigma - \tilde{\mathbf{I}}) \\ \frac{d\eta_E}{d\boldsymbol{\varepsilon}^{etry}} &= 2G\tilde{\mathbf{I}}_d - \frac{dE}{d(\Delta\varepsilon_q)} \otimes \frac{d(\Delta\varepsilon_q)}{d\boldsymbol{\varepsilon}^{etry}} \\ \frac{\partial\sigma_{n+1}}{\partial(\Delta\varepsilon_p)} &= -3D_{cross} KI \\ \frac{\partial\sigma_{n+1}}{\partial(\Delta\varepsilon_q)} &= -\sqrt{6G}\bar{\mathbf{N}}_\sigma \\ \frac{d(\Delta\varepsilon_p)}{d\boldsymbol{\varepsilon}^{etry}} &= -\frac{D_{cross} t^2 \Delta\varepsilon_q}{3A} \frac{dp^{try}}{d\boldsymbol{\varepsilon}^{etry}} + \frac{D_{cross} t^2 p^{try} \Delta\varepsilon_q}{3A^2} \frac{dq_{n+1}}{d\boldsymbol{\varepsilon}^{etry}} - \frac{D_{cross} t^2 p^{try} q_{n+1}}{3A^2} \frac{d(\Delta\varepsilon_q)}{d\boldsymbol{\varepsilon}^{etry}} \\ \frac{dq_{n+1}}{d\boldsymbol{\varepsilon}^{etry}} &= \frac{dq_E}{d\boldsymbol{\varepsilon}^{etry}} - \frac{3G}{D_{cross}} \frac{d(\Delta\varepsilon_q)}{d\boldsymbol{\varepsilon}^{etry}} - \frac{3}{2} \frac{dF}{d(\Delta\varepsilon_q)} \frac{d(\Delta\varepsilon_q)}{d\boldsymbol{\varepsilon}^{etry}} \\ \frac{dq_E}{d\boldsymbol{\varepsilon}^{etry}} &= \sqrt{6G}\bar{\mathbf{N}}_\sigma - \sqrt{\frac{3}{2}} \left(\bar{\mathbf{N}}_\sigma : \frac{d\mathbf{E}}{d(\Delta\varepsilon_q)} \right) \frac{d(\Delta\varepsilon_q)}{d\boldsymbol{\varepsilon}^{etry}} \\ A &\equiv q_{n+1} + D_{cross} K t^2 \Delta\varepsilon_q \end{aligned} \right\} \quad (3.6.63)$$

を得る．ここで各微分内に含まれる $\frac{d(\Delta\varepsilon_q)}{d\boldsymbol{\varepsilon}^{etry}}$ を求めるには工夫が必要となる．この微分は全節で導出した縮約された Return-Mapping 方程式を微分する事によって求められる．すなわち Return-Mapping 方程式(3.6.53)は内部変数を用いて表記すると

$$f = f(\Delta\varepsilon_q(\boldsymbol{\varepsilon}^{etry}), q_{n+1}(\Delta\varepsilon_q(\boldsymbol{\varepsilon}^{etry})), \sigma_y(\Delta\gamma(\Delta\varepsilon_p(\boldsymbol{\varepsilon}^{etry}), \Delta\varepsilon_q(\boldsymbol{\varepsilon}^{etry}), p^{try}(\boldsymbol{\varepsilon}^{etry})))) = 0 \quad (3.6.64)$$

と書けるため

$$f = f(\Delta\varepsilon_q(\boldsymbol{\varepsilon}^{etry}), \boldsymbol{\varepsilon}^{etry}) = 0 \quad (3.6.65)$$

と試行弾性ひずみの陰関数で表記することができる。これを $\boldsymbol{\varepsilon}^{etry}$ で微分すると

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial(\Delta\varepsilon_q)} \frac{d(\Delta\varepsilon_q)}{d\boldsymbol{\varepsilon}^{etry}} + \frac{\partial f}{\partial\boldsymbol{\varepsilon}^{etry}} &= \mathbf{0} \\ \therefore \frac{d(\Delta\varepsilon_q)}{d\boldsymbol{\varepsilon}^{etry}} &= - \frac{\frac{\partial f}{\partial\boldsymbol{\varepsilon}^{etry}}}{\frac{\partial f}{\partial(\Delta\varepsilon_q)}} \end{aligned} \quad (3.6.66)$$

となり右辺の微分がわかれば $\frac{d(\Delta\varepsilon_q)}{d\boldsymbol{\varepsilon}^{etry}}$ を知る事ができる。ここで式(3.6.66)の右辺の分母の微分は $\Delta\varepsilon_p$ による偏微分である。これは試行弾性ひずみを固定した時の $\Delta\varepsilon_p$ による Return-Mapping 方程式 f の微分である。すなわちこの微分値は式(3.6.53)を Newton 法で解く時の最終反復における接線値をそのまま用いれば良い。一方、式(3.6.66)の右辺の分子の微分は合成関数の微分により

$$\frac{\partial f}{\partial\boldsymbol{\varepsilon}^{etry}} = \frac{\partial f}{\partial q_{n+1}} \frac{\partial q_{n+1}}{\partial\boldsymbol{\varepsilon}^{etry}} + \frac{\partial f}{\partial\sigma_y} \frac{\partial\sigma_y}{\partial\boldsymbol{\varepsilon}^{etry}} + \frac{\partial f}{\partial p^{try}} \frac{\partial p^{try}}{\partial\boldsymbol{\varepsilon}^{etry}} \quad (3.6.67)$$

ただし各微分について計算すると最終的に以下が得られる。

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial q_{n+1}} &= -2At^2 p_{n+1}^2 + 2A^2 q_{n+1} + 2t^2 D_{cross}^2 (p^{try})^2 q_{n+1} \\ \frac{\partial q_{n+1}}{\partial\boldsymbol{\varepsilon}^{etry}} &= \sqrt{6G\bar{N}_\sigma} \\ \frac{\partial f}{\partial\sigma_y} &= -2A^2\sigma_y \\ \frac{\partial\sigma_y}{\partial\boldsymbol{\varepsilon}^{etry}} &= - \frac{H_{iso} p_{n+1} D_{cross} t^2 \Delta\varepsilon_q}{\sigma_y A^2} (AKI + \sqrt{6G} p^{try} \bar{N}_\sigma) \\ \frac{\partial f}{\partial p^{try}} &= 2t^2 D_{cross}^2 q_{n+1}^2 p^{try} \\ \frac{\partial p^{try}}{\partial\boldsymbol{\varepsilon}^{etry}} &= -KI \end{aligned} \right\} \quad (3.6.68)$$

以上によって静水圧依存型の分割背応力に基づく損傷弾塑性について改良型 Return-Mapping 方程式による応力積分および Consistent 接線剛性の計算が可能となる。

3.7 Unilateral 効果の考慮

材料に高い負荷が掛かるとボイドやマイクロクラックといった損傷が発生しさらに損傷が成長することでマクロなき裂が発生しき裂の進展によって破断に至る. このとき引張応力負荷下では顕著に損傷が発達するが圧縮応力下では比較的ほとんど損傷が発達しないことが実験的に知られている. 図 3.7.1 は鉄パイプの曲げ加工で発生したき裂の写真である(2015年5月12日 <http://www.rolledalloys.com/technical-resources/forming.dot>). 図 3.7.1(a)はき裂発生箇所を示し, 図 3.7.1(b)は曲げ加工時に生じる曲げ応力の分布を模式的に示したもので中立軸を境とする引張応力と圧縮応力を示したものである.

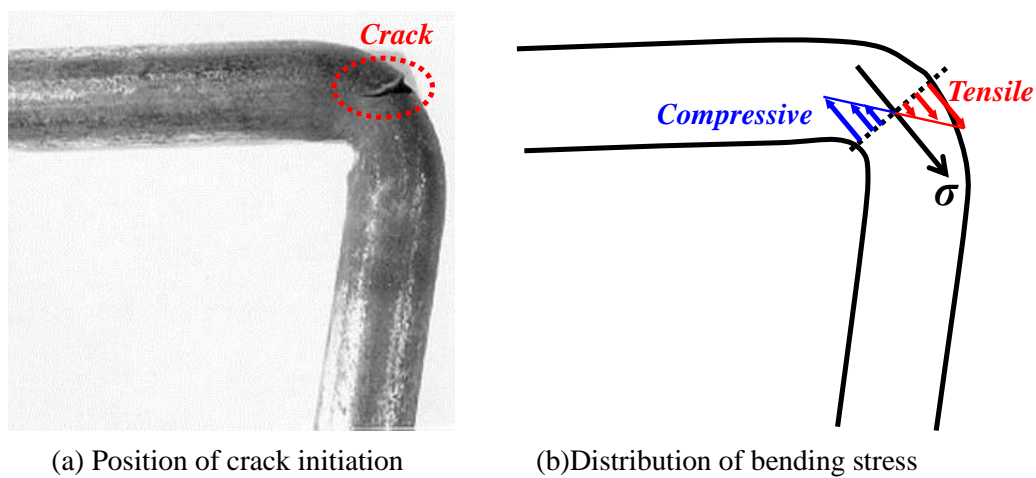


Fig. 3.7.1 Crack initiation of pipe in bending forming

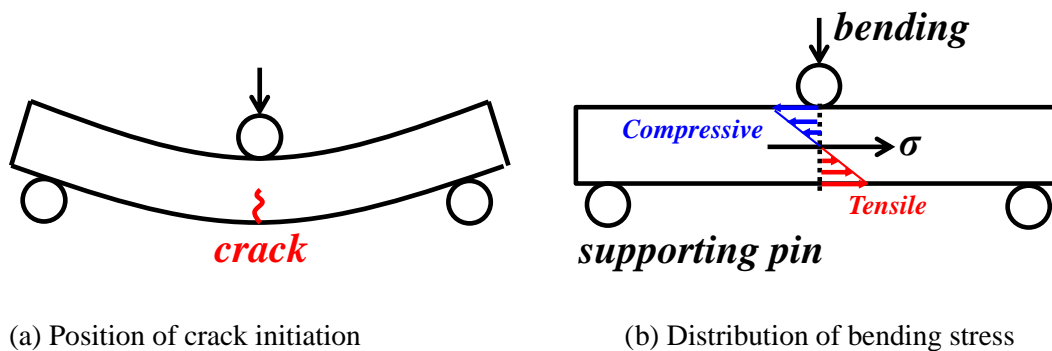


Fig. 3.7.2 crack initiation of simple 3 points bending

このようにき裂や損傷は引張応力下で生じやすい性質がある. また金属に限らず木材や樹脂材といった身近な材料でも図 3.7.2 のような単純 3 点曲げにより破壊させることを考えてみる. この時に図のように引張応力が生じる側から壊れる事実について誰しも日常生活を通して経験的に知っている. このように引張と圧縮で損傷の発達度合いが異

なることを **Unilateral** 効果と呼ぶ(Ladeveze and Lemaitre, 1984). 図 3.7.2 において部材が正方形断面や円形断面の場合, 発生応力の絶対値や相当塑性ひずみの分布は引張側と圧縮側で同じ値となる. そこで **Unilateral** 効果をどのように解釈しモデル化すべきかが課題となる.

Unilateral 効果の定式化については既存の研究(Ladeveze and Lemaitre, 1984)があり, これを本研究で用いている分割背応力に基づく損傷弾塑性モデルへ組み込む. 本節では **Unilateral** 効果の考慮の仕方について記述する. まず自由エネルギー関数 ψ^E

$$\rho\psi^E = \frac{1}{2} \tilde{\mathbf{D}}^e : \boldsymbol{\varepsilon}^e : \boldsymbol{\varepsilon}^e (1-D) \quad (3.7.1)$$

弾性材料の場合, この式は弾性係数の具体的な式(3.7.2)を代入することで式(3.7.3)を得ることができる.

$$\tilde{\mathbf{D}}^e \equiv \frac{E}{1-\nu} \tilde{\mathbf{I}} + \frac{E\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)} \mathbf{I} \otimes \mathbf{I} \quad (3.7.2)$$

$$\rho\psi^E = \frac{1}{2} (1-D) \left\{ \frac{E}{1-\nu} \boldsymbol{\varepsilon}^e : \boldsymbol{\varepsilon}^e + \frac{E\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)} (\text{tr } \boldsymbol{\varepsilon}^e)^2 \right\} \quad (3.7.3)$$

さらに弾性構成則によって上式をひずみから応力に書き換えると熱力学ポテンシャル Γ^E は以下となる.

$$\rho\Gamma^E = -\frac{1}{2E(1-D)} \left\{ (1+\nu) \boldsymbol{\sigma} : \boldsymbol{\sigma} - \nu (\text{tr } \boldsymbol{\sigma})^2 \right\} \quad (3.7.4)$$

ここで次式により定義される Macauley 括弧 $\langle \cdot \rangle$ と Heaviside 関数 H を導入する.

$$\langle x \rangle = H(x)x = \begin{cases} x & (x \geq 0) \\ 0 & (x < 0) \end{cases} \quad (3.7.5)$$

$$H(x) = \begin{cases} 1 & (x \geq 0) \\ 0 & (x < 0) \end{cases} \quad (3.7.6)$$

この時, 主応力の成分行列は Macauley 括弧を用いて以下のように書ける.

$$\begin{aligned} [\boldsymbol{\sigma}] &= \begin{bmatrix} \sigma_1 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_2 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_3 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \langle \sigma_1 \rangle & 0 & 0 \\ 0 & \langle \sigma_2 \rangle & 0 \\ 0 & 0 & \langle \sigma_3 \rangle \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \langle -\sigma_1 \rangle & 0 & 0 \\ 0 & \langle -\sigma_2 \rangle & 0 \\ 0 & 0 & \langle -\sigma_3 \rangle \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (3.7.7)$$

同様にして応力の成分 σ_{ij} も正值と負値の成分に分けて

$$\sigma_{ij} = \langle \sigma_{ij} \rangle - \langle -\sigma_{ij} \rangle \quad (3.7.8)$$

と表すことができる. この時, 各々のテンソル計算は以下のように書き直す事ができる.

$$\left. \begin{aligned} \boldsymbol{\sigma} : \boldsymbol{\sigma} &= \sigma_{ij} \sigma_{ij} = \langle \sigma_{ij} \rangle \langle \sigma_{ij} \rangle + \langle -\sigma_{ij} \rangle \langle -\sigma_{ij} \rangle \\ \text{tr } \boldsymbol{\sigma} &= \sigma_{kk} = \langle \sigma_{kk} \rangle - \langle -\sigma_{kk} \rangle \\ \langle \sigma_{kk} \rangle \langle -\sigma_{kk} \rangle &= \langle \sigma_{kk} \rangle \langle -\sigma_{ll} \rangle = 0 \\ (\text{tr } \boldsymbol{\sigma})^2 &= \sigma_{kk} \sigma_{ll} = \langle \sigma_{kk} \rangle^2 + \langle -\sigma_{kk} \rangle^2 \end{aligned} \right\} \quad (3.7.9)$$

これを熱力学ポテンシャルの式(3.7.4)に代入すれば

$$\rho \Gamma^E = -\frac{1}{2E(1-D)} \left\{ (1+\nu) \langle \sigma_{ij} \rangle \langle \sigma_{ij} \rangle - \nu \langle \sigma_{kk} \rangle^2 + (1+\nu) \langle -\sigma_{ij} \rangle \langle -\sigma_{ij} \rangle - \nu \langle -\sigma_{kk} \rangle^2 \right\} \quad (3.7.10)$$

が得られ引張項と圧縮項に分離する事ができる. よってこの式を弾性構成則に代入すれば損傷弾性材料の構成則が次式として得られる.

$$\begin{aligned} \varepsilon_{ij}^e &= -\rho \frac{\partial \Gamma^E}{\partial \sigma_{ij}} \\ &= \left\{ \frac{1+\nu}{E(1-D)} \langle \sigma_{ij} \rangle - \frac{\nu}{E(1-D)} \langle \sigma_{kk} \rangle \delta_{ij} \right\} - \left\{ \frac{1+\nu}{E(1-D)} \langle -\sigma_{ij} \rangle - \frac{\nu}{E(1-D)} \langle -\sigma_{kk} \rangle \delta_{ij} \right\} \\ &= \frac{1+\nu}{E(1-D)} \sigma_{ij} - \frac{\nu}{E(1-D)} \sigma_{kk} \delta_{ij} \end{aligned} \quad (3.7.11)$$

ただしここでは次の微分演算を用いた.

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \sigma_{ij}} \langle \sigma_{ij} \rangle &= \frac{\partial}{\partial \sigma_{ij}} (H(\sigma_{kl}) \sigma_{kl}) = H(\sigma_{kl}) \delta_{ik} \delta_{jl} \\ \frac{\partial}{\partial \sigma_{ij}} \langle -\sigma_{ij} \rangle &= \frac{\partial}{\partial \sigma_{ij}} (-H(-\sigma_{kl}) \sigma_{kl}) = -H(-\sigma_{kl}) \delta_{ik} \delta_{jl} \\ \frac{\partial}{\partial \sigma_{ij}} \langle \sigma_{kk} \rangle &= \frac{\partial}{\partial \sigma_{ij}} (H(\sigma_{kk}) \sigma_{kk}) = H(\sigma_{kk}) \delta_{ij} \\ \frac{\partial}{\partial \sigma_{ij}} \langle \sigma_{kl} \rangle \langle \sigma_{kl} \rangle &= \frac{\partial H(\sigma_{kl}) H(\sigma_{kl}) \sigma_{kl} \sigma_{kl}}{\partial \sigma_{ij}} = 2H(\sigma_{ij}) \sigma_{ij} \\ \frac{\partial}{\partial \sigma_{ij}} \langle \sigma_{kk} \rangle^2 &= \frac{\partial H(\sigma_{kk}) H(\sigma_{ll}) \sigma_{kk} \sigma_{ll}}{\partial \sigma_{ij}} = 2H(\sigma_{kk}) \sigma_{kk} \delta_{ij} \end{aligned} \right\} \quad (3.7.12)$$

冒頭にも述べたように損傷に対する圧縮応力の力学的効果は引張応力の効果よりも小さい. この **Unilateral** 効果のメカニズムについて図 3.7.3 のように考える. まず図 3.7.3(a)は初期の引張負荷によって初期き裂が開いた状態から圧縮負荷を与えき裂を閉じる状態を考えた模式図である. 延性が小さい材料では初期のき裂開口でも弾塑性変形があまり生じずき裂開口量も比較的小さいと考えることができる. そのため圧縮負荷を掛けた時にき裂がすぐに閉じてしまいき裂面の大部分が接触している状態と考える. この時, 圧縮下ではき裂を含まず応力集中が生じにくいと仮定する事ができる. そのため

圧縮環境下では損傷が発達しづらい。一方、延性材料では初期の引張負荷で大きな弾塑性変形が生じき裂が大きく開く。そのため圧縮時でもき裂は比較的開いたままでき裂前縁において応力集中が発生し、圧縮環境下でも材料が損傷を受ける。このように材料の延性によって **Unilateral** 効果の程度が異なると想定する。一方、図 3.7.3(b)は介在物を含む材料に負荷を掛けることを想定したものである。介在物（赤色）と母材（青色）との間は界面によって接着している状態と考える。この時、引張負荷を与えると界面を引きはがす作用が働き母材と介在物が剥離を生じ実質的に空孔が生じこれが材料損傷となる。一方、圧縮負荷を与えた場合には界面を引きはがす作用は比較的小さく空孔が生じにくいと想定できる。このように空孔の発生の視点からも引張と圧縮による差は生じるものと考えられる。

以上のようにメカニズムを想定した **Unilateral** 効果の度合いは材料の延性の違いや介在物の界面接着の度合いといった材料の特性によって左右される。すなわち **Unilateral** 効果の導入には材料定数を導入する必要があると考えられる。

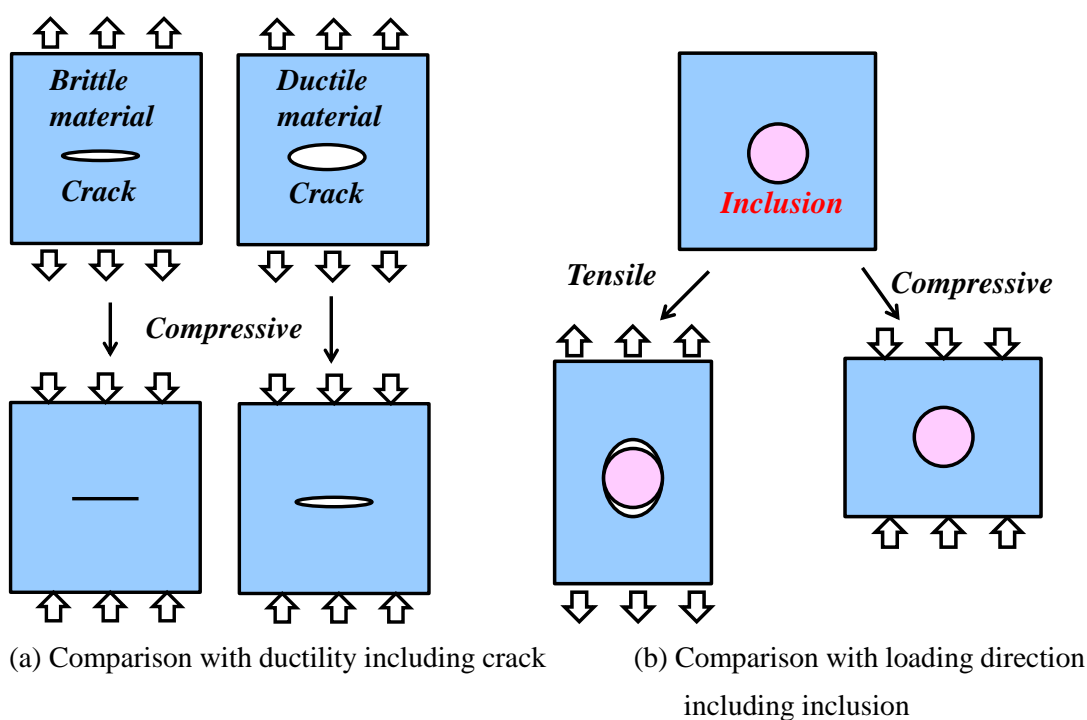


Fig.3.7.3 Assumed mechanism of unilateral effect

そこで **Unilateral** 効果を表現するための新しい材料定数として h ($0 \leq h \leq 1$) を導入する。これによって熱力学ポテンシャルは式(3.7.10)から次のように書き直すことができる。

$$\rho\Gamma^E = -\frac{1}{2E(1-D)} \left\{ (1+\nu) \langle \sigma_{ij} \rangle \langle \sigma_{ij} \rangle - \nu \langle \sigma_{kk} \rangle^2 \right\} - \frac{1}{2E(1-hD)} \left\{ (1+\nu) \langle -\sigma_{ij} \rangle \langle -\sigma_{ij} \rangle - \nu \langle -\sigma_{kk} \rangle^2 \right\} \quad (3.7.13)$$

この式において右辺第1項が引張項, 第2項が圧縮項で圧縮の寄与を示すために損傷値に h を掛けている. さらに損傷エネルギー解放率 Y を計算すると

$$\begin{aligned} Y &= -\rho \frac{\partial \Gamma^E}{\partial D} \\ &= \frac{1}{2E(1-D)^2} \left\{ (1+\nu) \langle \sigma_{ij} \rangle \langle \sigma_{ij} \rangle - \nu \langle \sigma_{kk} \rangle^2 \right\} + \frac{h}{2E(1-hD)^2} \left\{ (1+\nu) \langle -\sigma_{ij} \rangle \langle -\sigma_{ij} \rangle - \nu \langle -\sigma_{kk} \rangle^2 \right\} \end{aligned} \quad (3.7.14)$$

となり引張と圧縮の項に分離することができる. $h=0$ の時は圧縮による損傷寄与が全くないとするモデルで $h=1$ の時は圧縮でも引張と等価な損傷が生じるとするモデルであり Unilateral 効果を考慮していないモデルと同じである. 本研究ではこの Unilateral モデルを分割背応力に基づく損傷弾塑性モデルに組み込んだ. ただし Unilateral 効果を考慮する場合は流れ則において損傷値 D についてステップ n のものを用いる. 他の物理量が計算されたのち, 損傷値 D を損傷発展則に基づき更新する弱連成解析とした.

図 3.7.4 および図 3.7.5 は非損傷弾塑性材料に3点曲げ負荷を与えた時の軸方向応力と相当塑性ひずみの分布を示したものである. 全体寸法は $10 \text{ mm} \times 5 \text{ mm} \times 100 \text{ mm}$ で四面体二次要素を用い 10 mm の強制曲げ変位を与えた. この時, 曲げ応力は上下面でほぼ正負対称の分布となり, 相当塑性ひずみは上下面で対称となる. さらに同じ形状の形状モデルで損傷モデルを導入し Unilateral 効果の考慮有無による影響を調べたものを図 3.7.6 に示す. 同図(a)に Unilateral 効果を考慮していない損傷値分布($h=1.0$)を示し同図(b)に考慮した時の分布($h=0.0$)を示す. Unilateral 効果を考慮してなければ相当塑性ひずみ増分は上下面でほぼ対称となるため損傷が引張側で発達しやすい傾向を表現できない. すなわち Unilateral 効果を考慮していないモデルでは上下面で対称な損傷値分布となりどちらからもき裂が発生してしまう. 一方, Unilateral 効果を考慮したモデルでは圧縮面では明らかに損傷値が小さく引張面で損傷が成長する様子が良く表現できている.

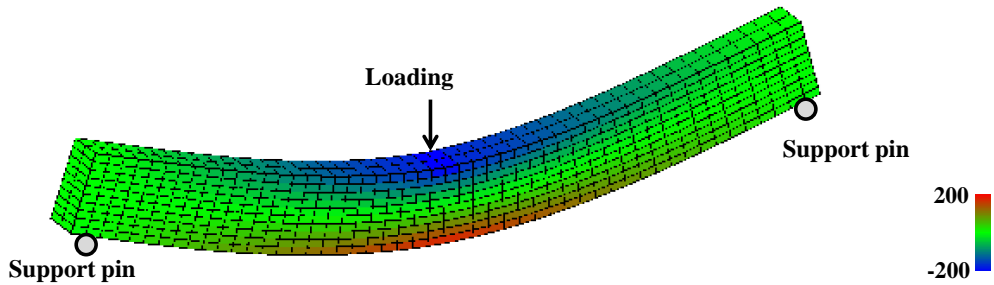


Fig. 3.7.4 Distribution of axial stress(Undamaged model) [MPa]

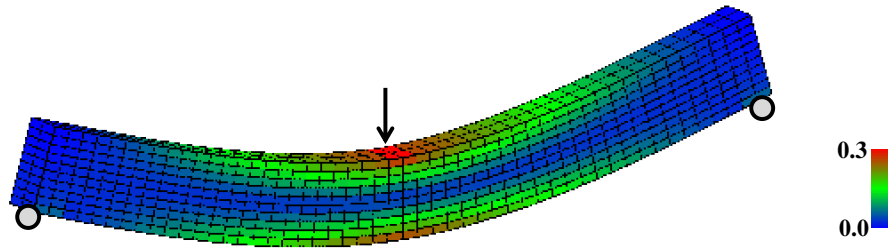
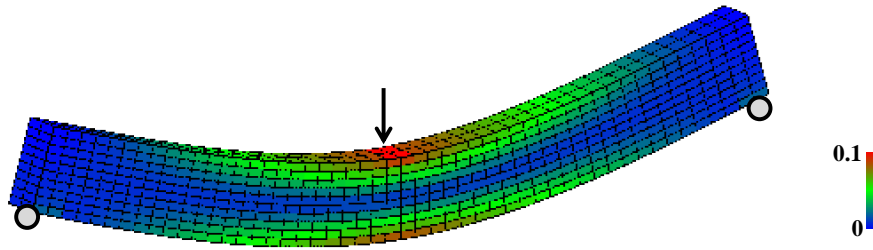
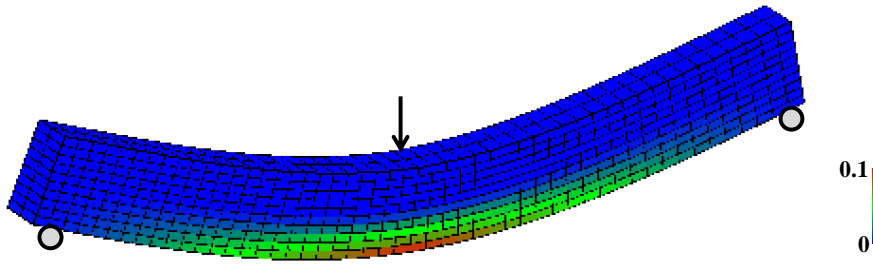


Fig. 3.7.5 Distribution of equivalent plastic strain(Undamaged model)



(a) Unconsidering unilateral effect($h=1.0$)



(b) Considering unilateral effect($h=0.0$)

Fig. 3.7.6 Distribution of damage

3.8 本章のまとめ

極低サイクル疲労破壊の表現に必要なモデルとして分割背応力モデルに基づく複合化則と連続体損傷力学に基づく損傷モデルを連成したモデルを提案した。このモデルを有限要素法へ導入するにあたり、残差力の優れた収束性、計算の安定性および計算時間削減を実現するために完全陰的な積分手法として流れ則積分法を開発した。そして流れ則積分法よりも計算負荷の少ない縮約積分法へと改良した。このモデルを用いて各種の基礎例題を有限要素法で解き、その計算妥当性を示した。

さらに多孔質材である焼結材や純銅のように極めて高い延性を持つ材料にも拡張するために静水圧依存性を考慮した損傷弾塑性モデルを提案し、陰解法に基づいた収束性の良い積分手法を考案した。また引張負荷下と圧縮負荷下での損傷発達の度合いの違いを表現するための **Unilateral** 効果もモデルに組み込んだ。これらのモデルの陰解法として縮約した **Return-Mapping** 方程式と **Consistent** 接線剛性を開発した。

以上により極低サイクル疲労破壊の表現のための大きな因子として考えられるモデルを組み込んだ損傷弾塑性モデルを作ることができた。このモデルによって1回負荷による破壊から極低サイクル疲労破壊に渡る破壊まで実態を良く表現することのできるものと期待する。その計算の具体例と実験との比較については第5章で詳しく述べる。

第4章 材料定数の同定方法の提案

これまで述べてきた損傷弾塑性モデルにおいてモデルの精密化に伴っていくつかの材料定数が出現した。本章ではこれらの材料定数の決め方について説明する。材料定数には弾性特性のヤング率, ポアソン比および弾塑性特性の初期降伏応力, 等方硬化係数, 移動硬化係数また損傷定数がある。このうちヤング率, ポアソン比, 初期降伏応力は単軸引張試験から得られる応力ひずみ曲線を見れば一義的に容易に求まる。その他の弾塑性特性および損傷特性に関する材料定数の同定が比較的難しい。なぜなら弾塑性特性によって加工硬化中の応力値が変わりその応力によって損傷発達も変化し破断時期にも影響を与えるためである。また逆に損傷特性によって応力積載能力が変化するため応力ひずみ曲線が変化する。よって互いに影響を及ぼし合う弾塑性特性と損傷特性の両者の材料定数を同定するにはそれらを微調整しながら実験結果に上手く合わせ込むという試行錯誤が生じる。本研究ではその解決手段として遺伝的アルゴリズムを用いてこの試行錯誤の回数を極力小さくし, また単軸負荷条件に特化した損傷弾塑性モデルの計算手法を作り1回の試行に要する計算時間を大幅に削減した。本章では分割背応力による複合硬化と Unilateral 効果を考慮した損傷弾塑性の材料定数の同定を例に説明する。

4.1 直接的に同定できる材料定数の求め方

直接的に同定できる材料定数としてヤング率 E , ポアソン比 ν , 破断の損傷値 D_c が挙げられる。この測定のために用いた試験片形状を図 4.1.1 に示す。材質はアルミダイカスト合金 ADC12-F 材を用いた。

この試験片に単軸引張荷重を掛けた時の応力ひずみ曲線を図 4.1.2 に示す。この図のように逐次的に応力を増やしながらその半分の応力まで弾性除荷する。これによって各々の応力まで弾塑性変形し損傷を受けた時点でのヤング率が分かる。非損傷状態のヤング率は初期降伏応力までの応力ひずみ曲線の勾配により求める。また試験片に3軸ロゼットゲージ(0° , 45° , 90°)を張り弾性域における軸方向ひずみと周方向ひずみの比をポアソン比として用いる。また初期降伏応力には一般的に用いられる 0.2%耐力を用いない。なぜなら弾塑性の材料定数の合わせ込みは応力ひずみ線図を実験と計算値でフィッティングさせて求めるためである。0.2%耐力を用いると 0.2%の差異を初期段階から含んでいる事となりフィッティング精度が低下してしまう。そこで初期データからデータ点数を徐々に増やして線形近似式を行いその相関係数を算出し, 相関係数が 95% 未満になった時の応力の値を用いる。

破断時の損傷値の測定については式(3.3.9)で示したようにヤング率の変化により測定できる。図 4.1.3 は各々の変形状態におけるヤング率の値を示したものである。非損

傷状態の初期値は 79 GPa であるが、破断直前の状態では 68.5 GPa の値となる。この時、破断時の損傷値 D_c を以下の式によって計算する。

$$D_c = 79 - \frac{68.5}{79} \approx 0.133 \quad (4.1.1)$$

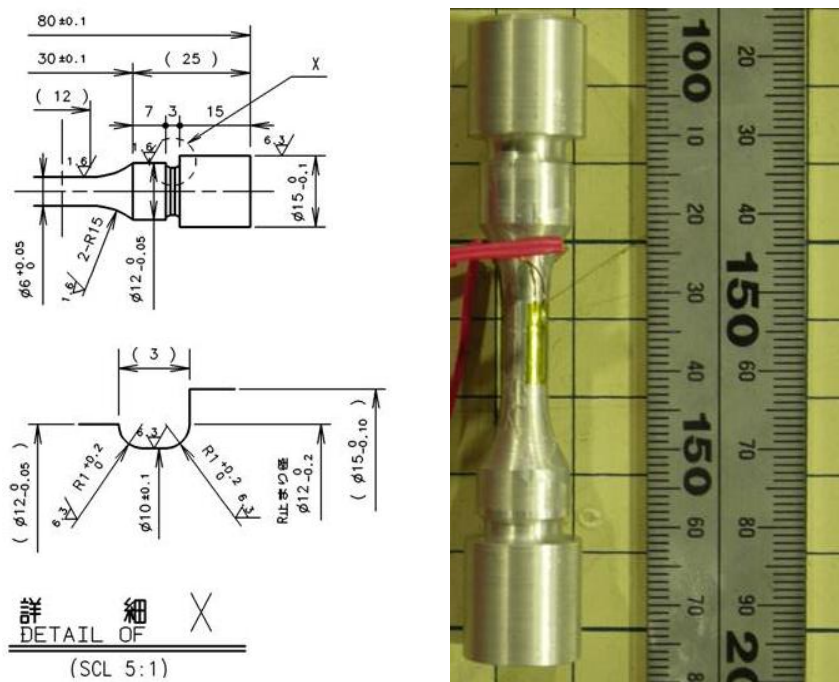


Fig. 4.1.1 Measurement of test piece

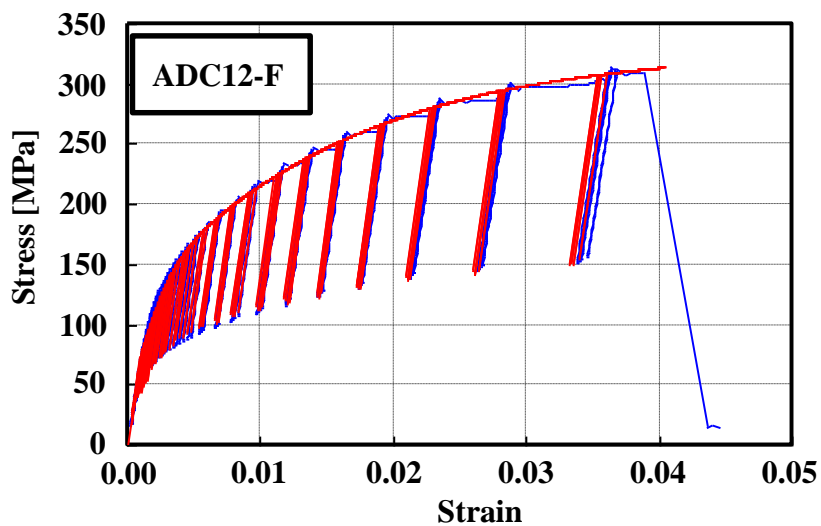


Fig. 4.1.2 Stress strain curve with unloading

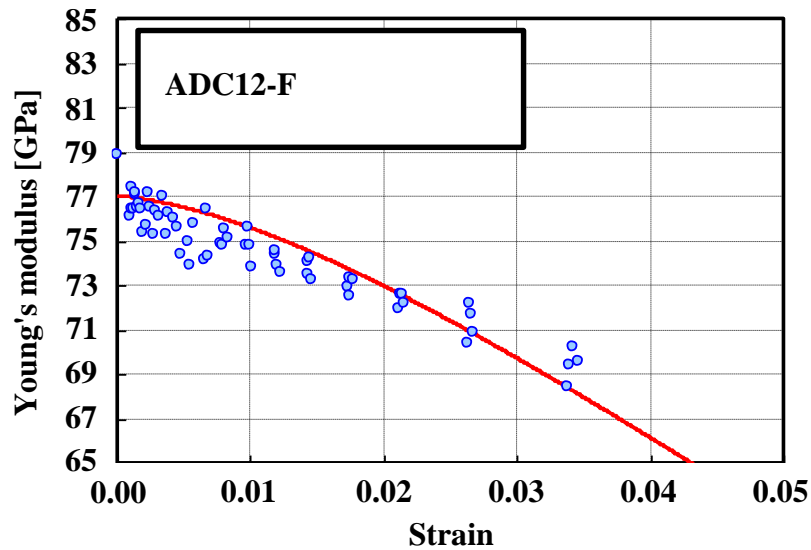
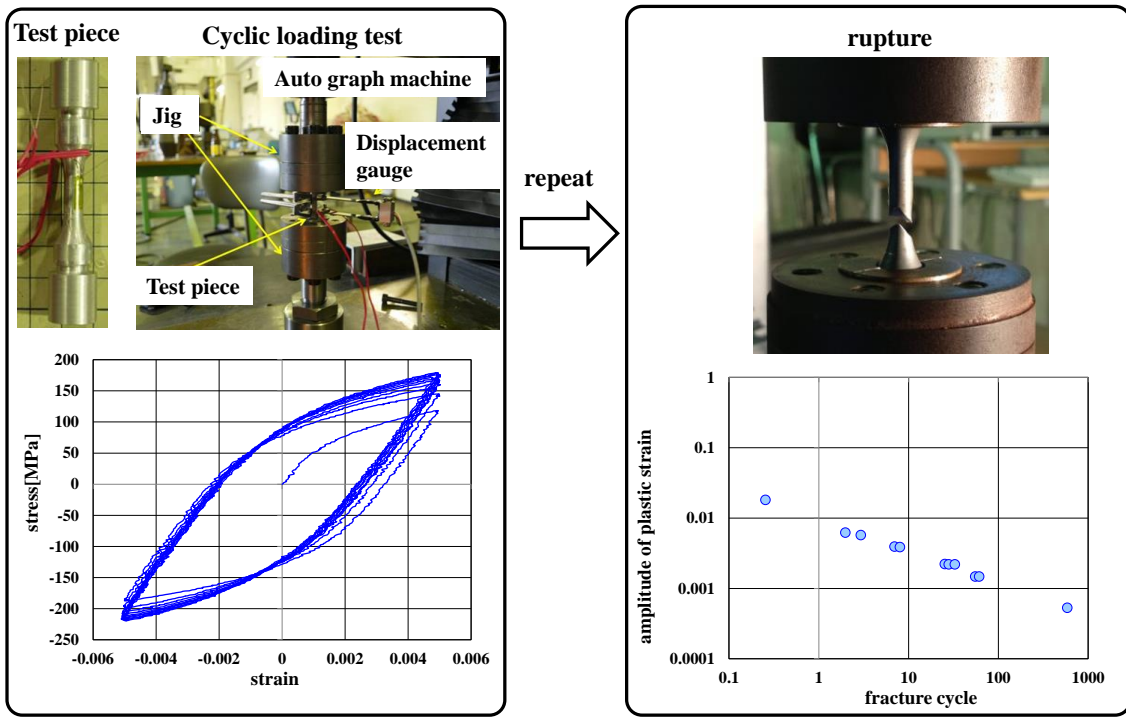


Fig. 4.1.3 Change of Young's modulus by damage

4.2 その他の材料定数の求め方

複合硬化の弾塑性特性と損傷特性の両者を測定するために単軸負荷条件下での応力ひずみ曲線と破断寿命特性を測定する. 図 4.1.2(a)は試験片を単軸負荷試験機に取り付けている状態を示したものである. またひずみ振幅一定のもと繰り返し負荷試験を実施して得られた応力ひずみ曲線も同図に示す. この図はひずみ振幅が 0.5%のものである. この繰り返し負荷について試験片ごとにひずみ振幅を変えて応力ひずみ曲線を測定する. また負荷を繰り返すと図 4.1.2(b)のようにあるサイクル数で破断を起こす. この時, その試験片のひずみ振幅に応じた破断までのサイクル数をグラフ上にプロットすると疲労寿命特性として S-N 線図が得られる. すなわち 1 本の試験片に対して 1 種類のひずみ振幅で破断させると S-N 線図上に 1 点のデータをプロットすることができる.

材料定数は応力ひずみ曲線だけではなく S-N 線図も同時に実験結果と一致するように決定する. 図 4.1.5 は試験片形状を有限要素法の要素でモデル化し, これに対し適当な材料定数を用いて応力ひずみ線図と S-N 線図を計算したものである. S-N 線図の計算では実験と同じようにこの有限要素モデルに対して損傷値が増大して破断するまで繰り返し負荷を与え続ける. この材料定数では応力ひずみ線図と S-N 線図ともに実験データから大きく外れているためまだ適切な材料定数ではない. この計算値と実験値の差が最小になるように材料定数を少しずつ変えながら再計算してゆく. ただし闇雲に材料定数を変えても試行回数が膨大になるため, 試行回数を削減するために本研究では遺伝的アルゴリズムを用いて材料定数の更新を行った.



(a) Stress strain curve

(b) Fracture cycle (S-N curve)

Fig. 4.1.4 Experiment to gain stress strain curve and fracture cycle

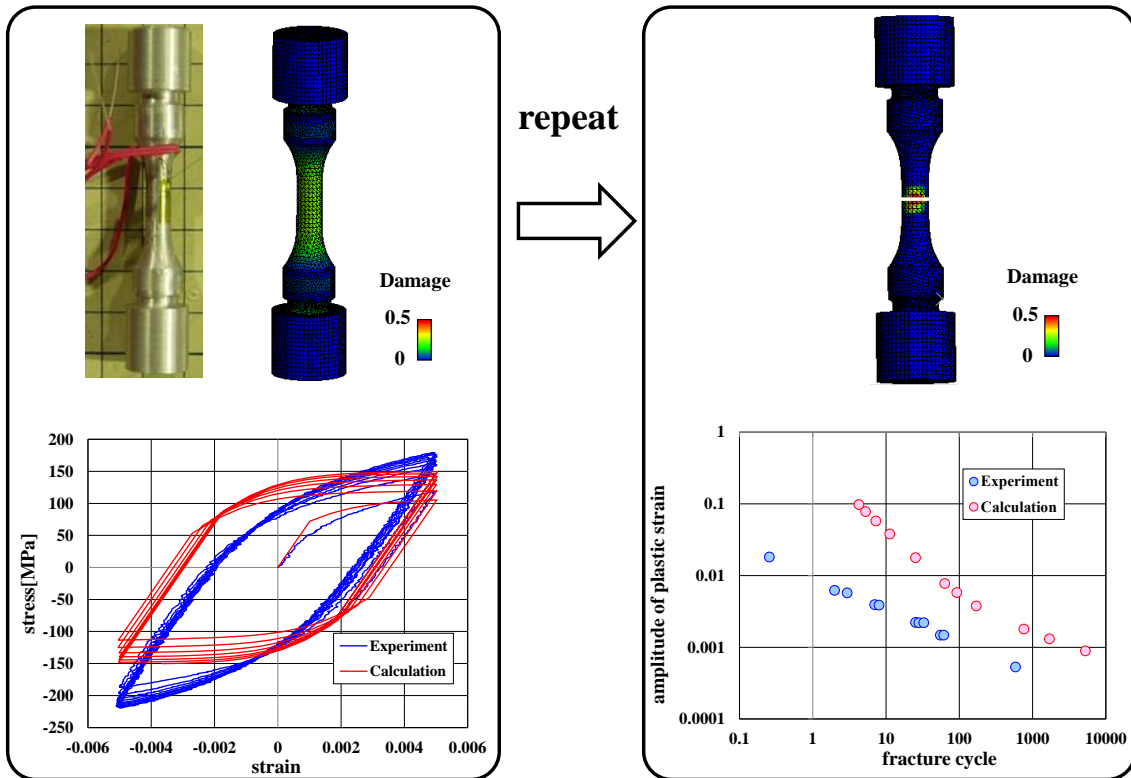


Fig. 4.1.5 Calculated stress strain curve and S-N curve

図 4.1.6 は遺伝的アルゴリズムを用いて材料定数を同定するフローチャートを描いたものである。設計変数は材料定数であり、目的関数は応力ひずみ線図と S-N 線図のそれぞれの実験と計算値との差を最小化することとしている。このフローチャートを商用の多目的ロバスト設計最適化ソフトである modeFRONTIER((株)ESTECO S.p.A)を用いて導入した。modeFRONTIER ではチャートの各処理に対して自作プログラムを組み込むことができる。

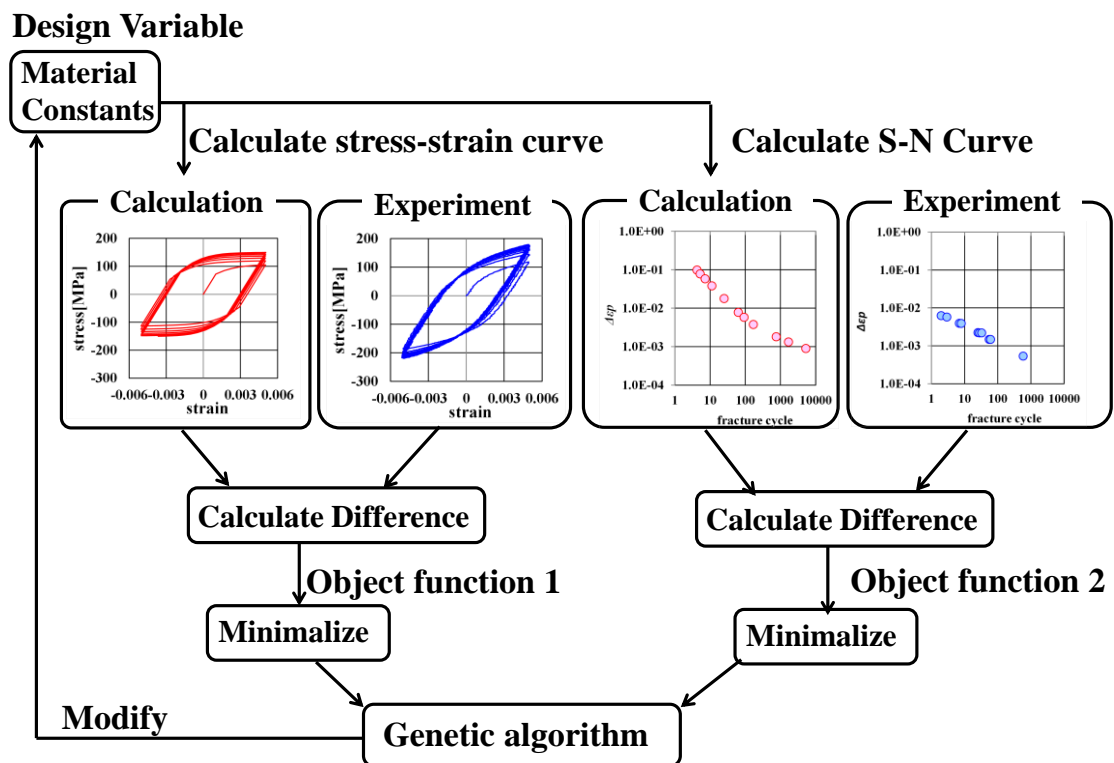


Fig. 4.1.6 Flow chart to determine material constants

4.3 単軸負荷状態における高速な簡易積分法

このフローチャートに従って計算を進めるにあたって計算時間の課題がある。すなわち入力された材料定数を用いた応力ひずみ曲線および S-N 線図の計算について有限要素法により計算すると多くの時間が掛かってしまう。本研究ではこの材料試験が単軸負荷で行われることに着目し空間の離散化を行わずに計算する事で計算時間の短縮を実現した。すなわち空間の離散化を行うことなく構成則および流れ則に単軸負荷の条件を導入し各々の発展則を積分してゆく手法である。本節ではこの手法について具体的に述べる。

まず単軸負荷下での応力状態を式(4.3.1)のようにおく.

$$\boldsymbol{\sigma} = \begin{bmatrix} \sigma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (4.3.1)$$

この応力状態から静水圧 p , 相当応力 q , 応力三軸度関数 R_v は次式となる.

$$\left. \begin{aligned} p &\equiv -\frac{\text{tr}\boldsymbol{\sigma}}{3} = -\frac{\sigma}{3} \\ q &= \sigma \\ R_v &\equiv \frac{2}{3}(1+\nu) + 3(1-2\nu)\left(\frac{p}{q}\right)^2 \\ &= \frac{2}{3}(1+\nu) + 3(1-2\nu)\left(-\frac{\sigma}{3\sigma}\right)^2 \\ &= 1 \end{aligned} \right\} \quad (4.3.2)$$

これによって損傷エネルギー解放率 Y は

$$\begin{aligned} Y &\equiv \frac{q^2}{2E(1-D)^2} R_v \\ &= \frac{\sigma}{2E(1-D)^2} \end{aligned} \quad (4.3.3)$$

となる. また単軸負荷状態では背応力と偏差応力が同じ方向を向くため以下が成立する.

$$\boldsymbol{\beta} = \alpha \tilde{\mathbf{I}}_d : \boldsymbol{\sigma} \quad (4.3.4)$$

ただし α は定数である. よって相対有効応力 $\boldsymbol{\eta}$ は

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\eta} &\equiv \frac{\tilde{\mathbf{I}}_d : \boldsymbol{\sigma}}{1-D} - \boldsymbol{\beta} \\ &= \frac{\tilde{\mathbf{I}}_d : \boldsymbol{\sigma}}{1-D} - \alpha \tilde{\mathbf{I}}_d : \boldsymbol{\sigma} \\ &= \left(\frac{1-\alpha}{1-D}\right) \tilde{\mathbf{I}}_d : \boldsymbol{\sigma} \\ &= \tilde{\mathbf{C}} \tilde{\mathbf{I}}_d : \boldsymbol{\sigma} \end{aligned} \quad (4.3.5)$$

これより降伏曲面の法線テンソルは

$$\begin{aligned}
\bar{N}_\sigma &= \frac{\boldsymbol{\eta}}{\|\boldsymbol{\eta}\|} \\
&= \frac{\tilde{\mathbf{C}}_d : \boldsymbol{\sigma}}{\|\tilde{\mathbf{C}}_d : \boldsymbol{\sigma}\|} \\
&= \text{sign}(C) \frac{\tilde{\mathbf{I}}_d : \boldsymbol{\sigma}}{\|\tilde{\mathbf{I}}_d : \boldsymbol{\sigma}\|}
\end{aligned} \tag{4.3.6}$$

となる。ただし

$$\text{sign}(C) = \begin{cases} +1 (\sigma \geq 0) \\ -1 (\sigma < 0) \end{cases} \tag{4.3.7}$$

である。また単軸負荷での偏差応力は

$$\begin{aligned}
\tilde{\mathbf{I}}_d : \boldsymbol{\sigma} &= \boldsymbol{\sigma} + p\mathbf{I} \\
&= \begin{bmatrix} \sigma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} - \frac{\sigma}{3} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\
&= \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 2\sigma & 0 & 0 \\ 0 & -\sigma & 0 \\ 0 & 0 & -\sigma \end{bmatrix}
\end{aligned} \tag{4.3.8}$$

となるためそのノルムは

$$\begin{aligned}
\|\tilde{\mathbf{I}}_d : \boldsymbol{\sigma}\| &= \sqrt{\left(\frac{2}{3}\sigma\right)^2 + \left(-\frac{1}{3}\sigma\right)^2 + \left(-\frac{1}{3}\sigma\right)^2} \\
&= \sqrt{\frac{2}{3}}\sigma
\end{aligned} \tag{4.3.9}$$

これを式(4.3.6)に代入すると

$$\begin{aligned}
\bar{N}_\sigma &= \text{sign}(C) \frac{1}{\sqrt{\frac{2}{3}}\sigma} \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 2\sigma & 0 & 0 \\ 0 & -\sigma & 0 \\ 0 & 0 & -\sigma \end{bmatrix} \\
&= \text{sign}(C) \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}
\end{aligned} \tag{4.3.10}$$

よって

$$\begin{aligned}
N_\sigma &\equiv \sqrt{\frac{3}{2} \frac{\bar{N}_\sigma}{1-D}} \\
&= \sqrt{\frac{3}{2} \frac{1}{1-D}} \text{sign}(C) \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \\
&= \frac{\text{sign}(C)}{1-D} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}
\end{aligned} \tag{4.3.11}$$

よって塑性ひずみはひずみ増分理論より

$$\Delta \varepsilon^p = \Delta \gamma N_\sigma \tag{4.3.12}$$

で求められ計算ステップごとに足し合わせてゆけばよい。さらに次のステップにおける応力は降伏条件から求める。まず降伏条件より

$$\sqrt{\frac{3}{2} \left\| \frac{\tilde{\mathbf{I}}_d : \boldsymbol{\sigma}}{1-D} - \boldsymbol{\beta} \right\|} = \sigma_y \tag{4.3.13}$$

となる。これに単軸負荷の条件および背応力が偏差成分しか持たないことを考慮すると

$$\begin{aligned}
&\sqrt{\frac{3}{2} \left\| \frac{1}{1-D} \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 2\sigma & 0 & 0 \\ 0 & -\sigma & 0 \\ 0 & 0 & -\sigma \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \beta & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2}\beta & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{2}\beta \end{bmatrix} \right\|} = \sigma_y \\
&\therefore \sqrt{\frac{3}{2} \sqrt{\left(\frac{2}{3} \frac{\sigma}{1-D} - \beta \right)^2 + \left(-\frac{1}{3} \frac{\sigma}{1-D} + \frac{1}{2}\beta \right)^2 + \left(-\frac{1}{3} \frac{\sigma}{1-D} + \frac{1}{2}\beta \right)^2}} = \sigma_y \\
&\therefore \frac{\sigma}{1-D} - \frac{3}{2}\beta = \sigma_y \\
&\therefore \sigma = (1-D) \left(\sigma_y + \frac{3}{2}\beta \right)
\end{aligned} \tag{4.3.14}$$

と記述できる。以上により次のステップの各物理量を求める事ができる。計算手法をまとめると図 4.1.7 となり、逐次的に陽的に物理量を積分してゆく。この手法は流れ則を積分しているにすぎないため有限要素法で最も計算時間の掛かる剛性方程式を解く必要がない。よって 1 ステップあたりの増分量 ($\Delta \gamma$) を十分小さくとれば FEM による単軸負荷の結果と等価な解が高速に得られる。

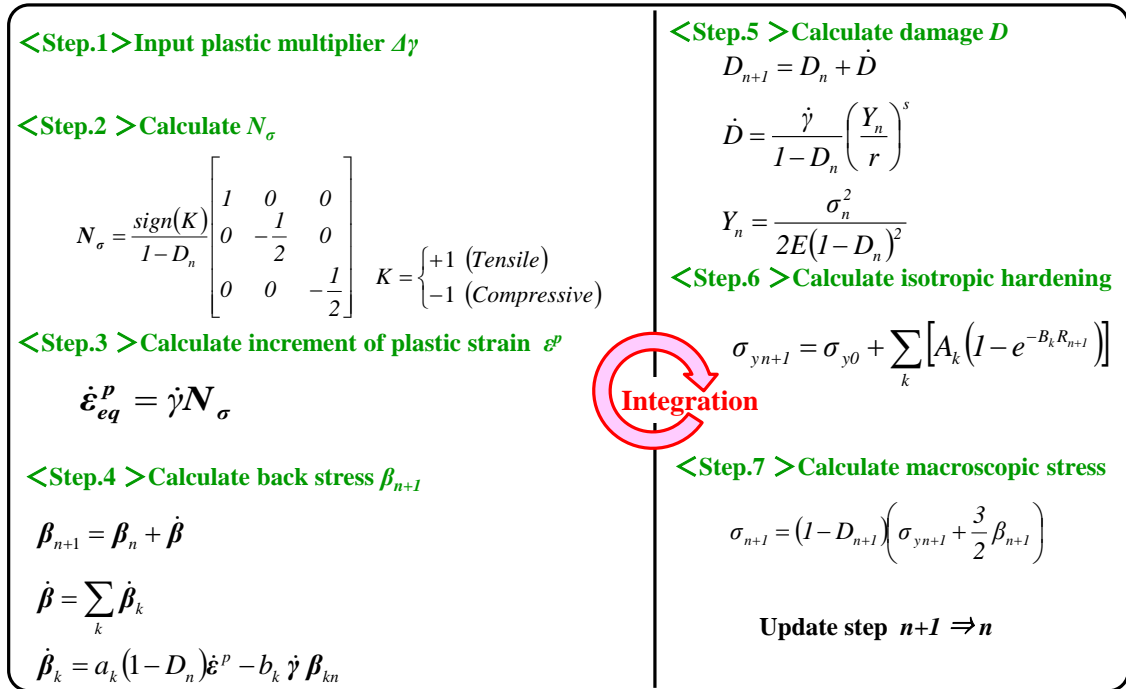


Fig. 4.1.7 Flow to calculate uniaxial stress and strain

この手法で FEM による計算結果と等価な解が得られることを確認した。FEM のために用いた要素は図 4.18 に示すとおりである。これに全ひずみ振幅 1% の引張圧縮負荷を 10 サイクル掛けた。図 4.1.9 は応力ひずみ曲線で青線が FEM による計算結果，赤線が図 4.1.7 で示した単軸負荷の積分手法である。両者が良く一致していることが分かる。また図 4.1.10 の横軸は図 4.1.9 の応力ひずみ線図の各ステップのひずみ増分値の絶対値を累積して和を取った累積ひずみである。この図からも両者が良く一致しており本節で述べた簡便な積分手法でも FEM と等価な解が得られることが分かった。計算時間は FEM では約 2 分かかった。一方，本節の積分手法では約 3 秒で解くことができた。よって計算時間にすると約 60 倍も速く計算できた。図 4.1.6 のフローチャートに従って材料定数を同定するには数百回ものループを繰り返す事になる。よってここで示した計算時間の高速化は全ループを計算するための必要な計算時間を大幅に削減することができる。

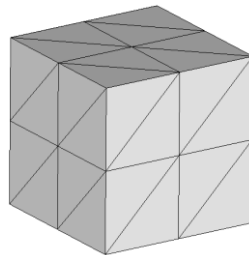


Fig. 4.1.8 FEM model on uniaxial condition

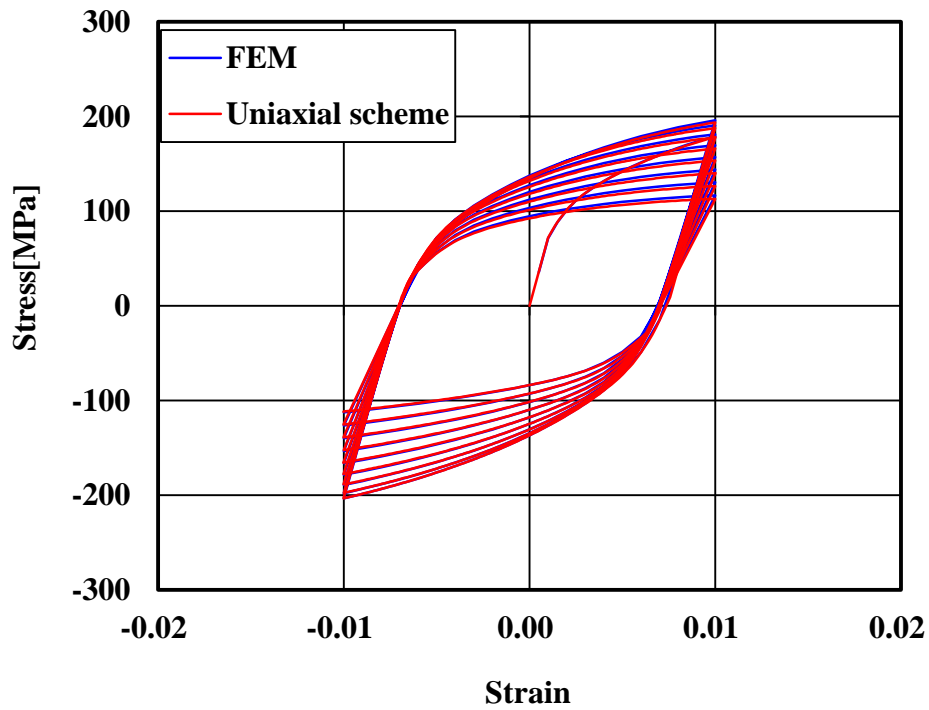


Fig. 4.1.9 Comparison of stress strain curve

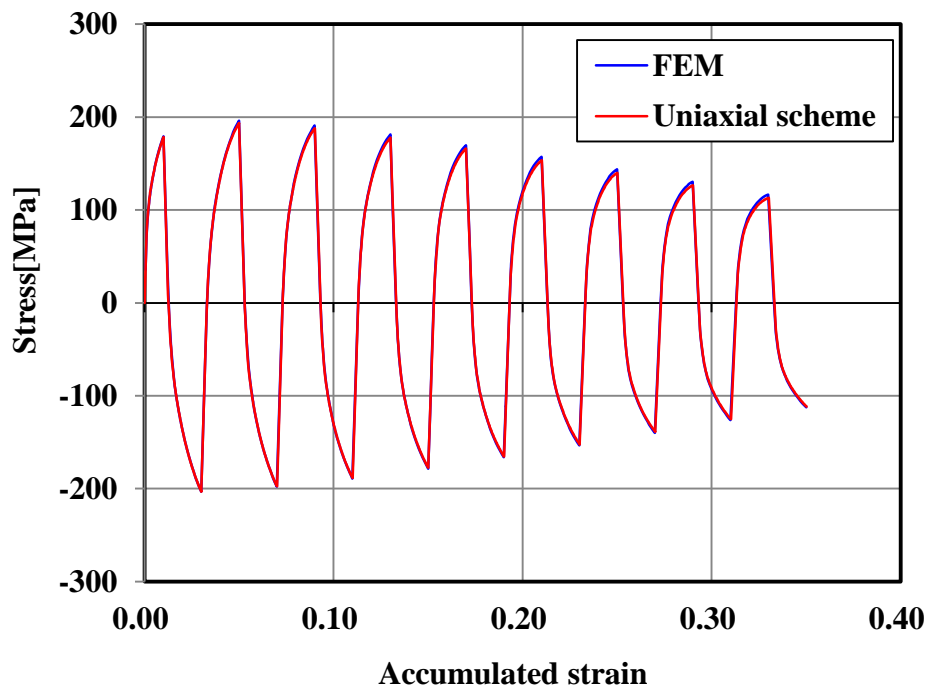


Fig. 4.1.10 Comparison of stress to accumulated strain curve

4.4 材料定数の探索範囲の決め方

遺伝的アルゴリズムでは、設計変数である材料定数は複数の候補値の中から最適なものを探す。たとえば等方硬化の材料定数である A_1 について 0 から 1000 までの範囲を 200 区切りで探索するならその候補値は 0, 200, 400, 600, 800, 1000 の 6 個となりこの中から最適な値を求める。よって候補値が実材料の特性からあまりにも非現実的にかげ離れた値であるときはどの値を用いても実験結果に上手くフィットする定数が見つからない。また値の範囲を 0 から無限大までとりその間を無限小に分割すればすべての値を候補値として網羅することはできるが、探索候補の個数が膨大となりどれだけ計算ループを繰り返してもなかなか最適解にたどり着くことができない。

以上の問題を避けるために各材料定数がおおよそどの程度の値の範囲に存在するか見積もっておく必要がある。本節ではその手法について述べる。まず損傷に関する定数であるが、多くの金属材料について測定されたデータベースがあるため(Lemaitre, 1992)それらの金属材料の値の下限値から上限値の範囲で設定する。一方、弾塑性特性である等方硬化係数と移動硬化係数について述べる。ここでは大まかな材料定数の範囲が分かれば良いので簡略化のために非損傷モデルを仮定して損傷弾塑性材料の材料定数の値の範囲を求める。

まずは等方硬化係数について説明する。等方硬化とは降伏曲面の大きさを示す相対相当応力の大きさであるが加工硬化に伴って単調増加する傾向がある。すなわち加工硬化に伴って降伏曲面が次第に大きくなってゆく。図 4.4.1 は初期降伏応力を経て 1 サイクル目の最大引張応力に達した応力状態(点 C)を示している。この状態から除荷(点 D)を経て反対側の降伏応力(点 E)に至る経過を考える。この時、主応力空間では点 C' から点 E' に至る過程となる。これは降伏曲面の内部を移動する弾性過程であるため降伏曲面は膨張しない。よって点 C における相当塑性ひずみ ϵ_C に対応する降伏応力 σ_{CE} は

$$\sigma_{CE} = \frac{|\sigma_C - \sigma_E|}{2} \quad (4.4.1)$$

となる。このデータを図 4.4.3 の相当塑性ひずみと降伏応力のグラフ上にプロットする。ただし初期降伏応力は相当塑性ひずみがゼロの状態なので初期降伏応力もグラフ上にプロットしている。

次に 1 サイクル目の最大圧縮状態を図 4.4.2 のように考える。図 4.4.2 において最大圧縮状態(点 F)から除荷し反対側の降伏応力(点 G)に達する過程を考えると点 CE 間と同じく降伏曲面内部へ向かう変形であるため降伏曲面の大きさは変わらない。よって点 F における相当塑性ひずみ ϵ_F に対応する降伏応力 σ_{FG} は

$$\sigma_{FG} = \frac{|\sigma_G - \sigma_F|}{2} \quad (4.4.2)$$

となる。このデータも図 4.4.3 にプロットする。以上のデータ処理を各負荷サイクルについて同様に行うことで図 4.4.3 のように等方硬化則の特性として相当塑性ひずみと降伏曲面の大きさの関係をj得る事ができる。このデータには移動硬化は含まれず純粋に等方硬化成分のみを抜き出したデータである。よって等方硬化則モデルの近似式jの材料定数を調整してこのデータに概ねフィットする値を探せばよい。このフィッティング作業は損傷や移動硬化を同時に考える必要がないため Excel などを用いた手作業でも非常に容易に行うことができる。本研究で用いている等方硬化則は指数関数則を複数重ね合わせたものなので各々の A_k , B_k の定数を調整して概ねフィットできる定数を探す。図 4.1.4 で示した応力ひずみ線図はアルミダイカスト材 ADC12-F のものであるが、負荷サイクルを繰り返すとループが最終的に 1 つの形に収束する塑性シェイクダウンに至る。これは多くの金属材料で見られる傾向であり、このことから等方硬化則で表記される降伏応力は単調増加した後、ある一定値に収束することを意味する。すなわち降伏曲面の大きさも負荷サイクルを重ねるごとに一定値に収束してゆくことを意味する。

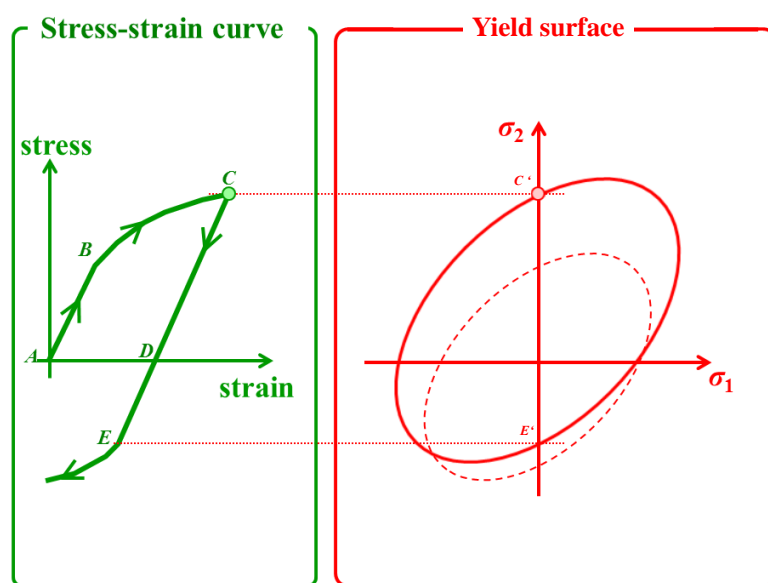


Fig. 4.4.1 Reverse loading direction from tensile stress

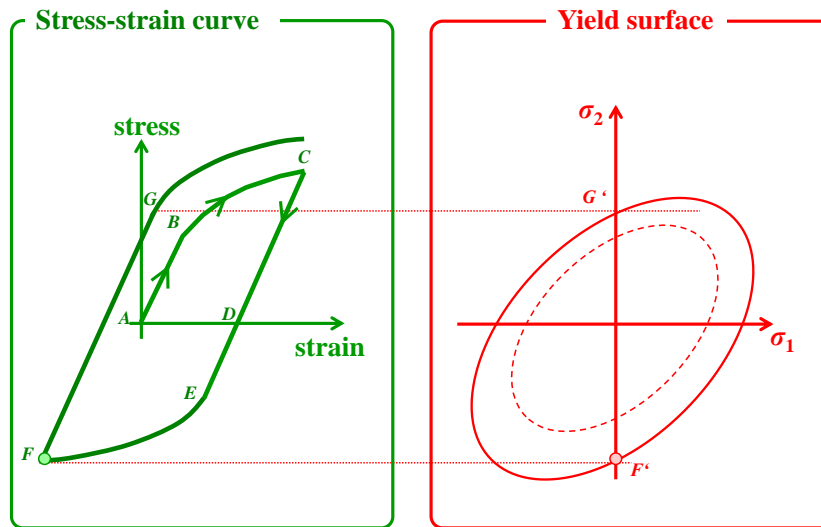


Fig. 4.4.2 Reverse loading direction from compressive stress

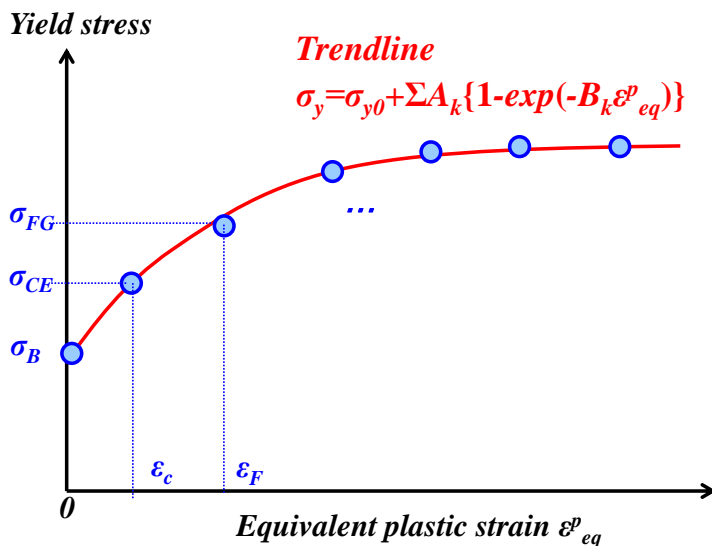


Fig. 4.4.3 Property of Isotropic hardening assumed undamaged model

次に移動硬化則の材料定数の範囲の決め方について説明する。等方硬化の特性を求めるとき、上述のように応力ひずみ線図において移動硬化成分を上手く除去したデータを抜き出した。同様の考え方で移動硬化の場合は等方硬化の成分を取り除いたデータを抽出する。これには上で述べたように繰り返し負荷における応力ひずみ線図のループ（ヒステリシスループ）は負荷回数を繰り返すと一定のループ形状に収束する性質を利用する。すなわちループが収束した塑性シェイクダウンの状態では降伏曲面の大きさが変化せずこれ以上等方硬化が進行しない状態となる。すなわちこのループにおける加工硬化は移動硬化による影響のみで生じていると考えられる。図 4.4.4 は最終ループに至るまで

の応力ひずみ線図と対応する降伏曲面を示したものである。緑の破線はまだループが収束していない状態を示し、緑の実線は収束したループを示す。今応力状態が点 H の緑点にあるとする。この時点に対応した降伏曲面が赤破線である。ここから負荷をかけ点 I まで加工硬化させることを考える。この時、降伏曲面は赤破線から赤実線まで移動硬化により移動する。ただしループ形状は収束しているので等方硬化は進行せず降伏曲面の大きさは変わらない。よって点 H から点 I までは移動硬化の寄与しかないためこの区間のデータを用いる。移動硬化の発展則は式(3.2.2)で示したように塑性ひずみと背応力で記述されるため収束ループのデータをこれらの量に変換する。

図 4.4.5 はその手法を示したものである。まずもともとの応力ひずみ線図の横軸は全ひずみであるため、弾性ひずみを除去し塑性ひずみに変換する。背応力の表記は式(3.2.2)のように増分形式で記述されるため、どこかに塑性ひずみのゼロ点を設ける必要がある。そこで点 H を塑性ひずみがゼロと定義した。次に縦軸を応力から背応力に変換する。図 4.4.4 において点 H の状態の降伏曲面は赤破線であり、この時点で降伏曲面の中心は背応力により原点から移動している。この背応力 β_0 は点 H、点 F の応力をそれぞれ σ_H 、 σ_F とおくと

$$\beta_0 = \frac{\sigma_H + \sigma_F}{2} \quad (4.4.3)$$

と表記できる。点 H から点 I までの加工硬化はそのまま背応力の増加量と等しいので図 4.4.5 の右図のように初期値を β_0 としてその後は H' から I' までの曲線をそのまま用いれば良い。これにより背応力と塑性ひずみの関係が分かる。あとは背応力の発展則の定数を調整してこのグラフにフィットさせれば良い。このフィッティング処理は等方硬化や損傷が関与しておらず背応力の寄与のみなので Excel などによる手作業でも非常に実施できる。

以上によって非損傷モデルを仮定した等方硬化と移動硬化の材料定数の決定が可能となる。しかし本研究は損傷モデルであるため、損傷による応力積載能力低下によって有効応力の値は測定した応力ひずみ線図と同じものにはならない。しかし非損傷材料を仮定してもある程度現実的なオーダーの材料定数が求められると考えられる。よって、図 4.1.6 によるフローで材料定数を決める際の材料定数の範囲は本節の手法で決めた材料定数を中央値としてそこからある範囲と分割数を用いて候補値を決める。本研究では中央値を基準に 1/10 倍から 10 倍程度の範囲を 100 分割してこれを最適化候補とした。

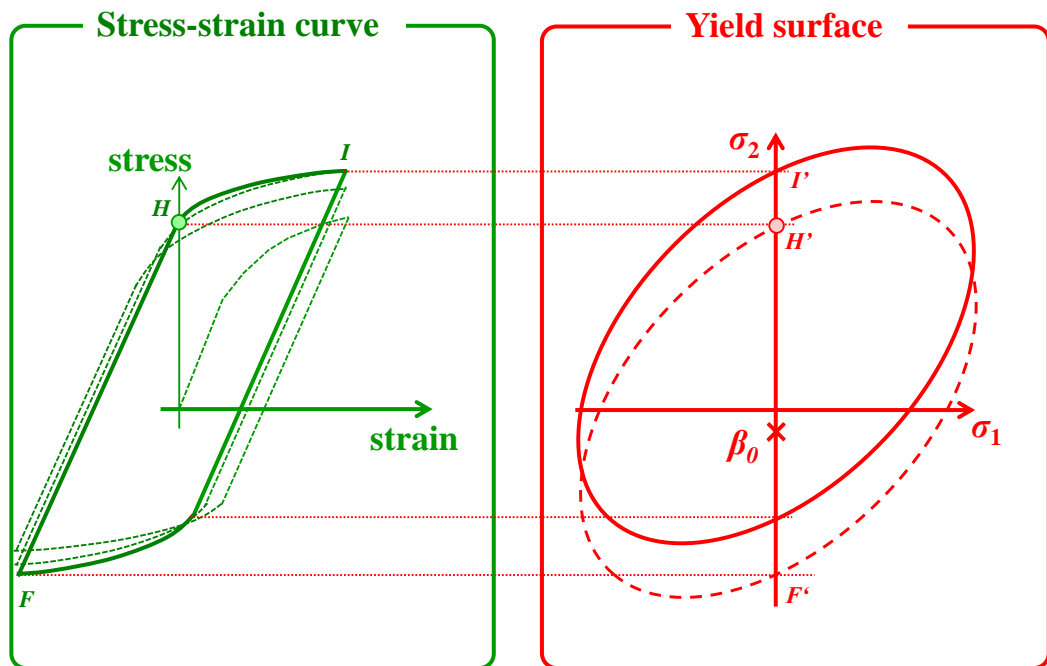


Fig. 4.4.4 Stable stress strain curve

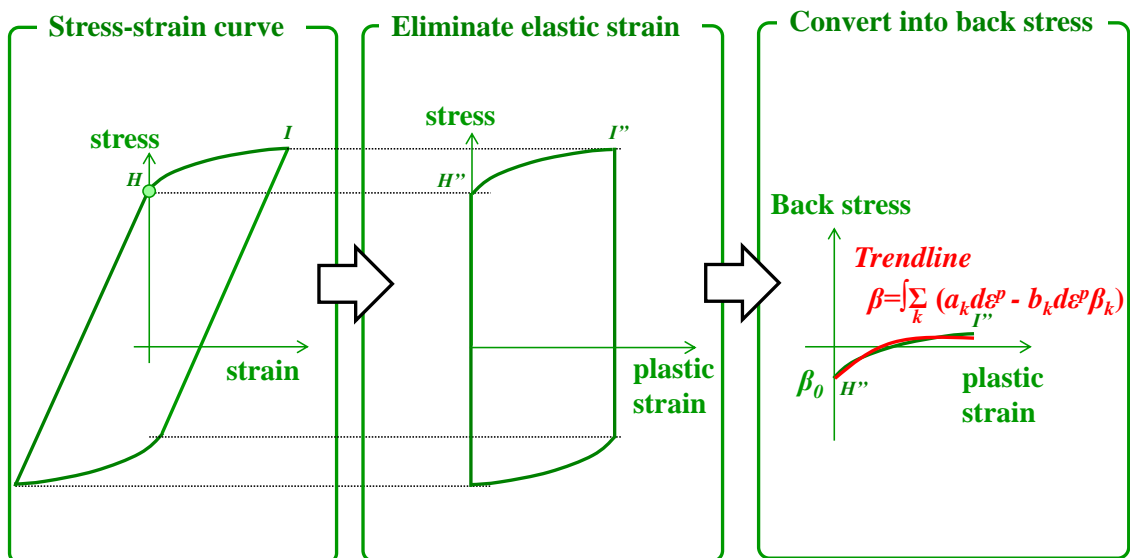


Fig. 4.4.5 The way to convert stress-strain curve into back stress-plastic strain curve

4.5 材料定数の同定結果

アルミダイカスト合金 ADC12-F について繰り返し負荷の応力ひずみ曲線と S-N 線図の両者が一致する材料定数を求める。測定した応力ひずみ曲線は図 4.5.1 に示す通りである。まず前節の手法に従い材料定数の中央値を求める。等方硬化の中央値を得るために図 4.5.1 の各ループから降伏応力と相当塑性ひずみのデータを抜き出したものを図 4.5.2 に示す。青点は実測データを示し、赤線は近似曲線による計算値である。また図 4.5.3 は移動硬化の中央値を求めるために収束したループ形状から背応力と相当塑性ひずみのデータを抜き出したものと近似曲線による計算値である。表 4.5.1 は最終的に決定した材料定数の中央値である。この中央値を基準に 1/10 倍から 10 倍の範囲を 100 分割してその中から最適解を求める。

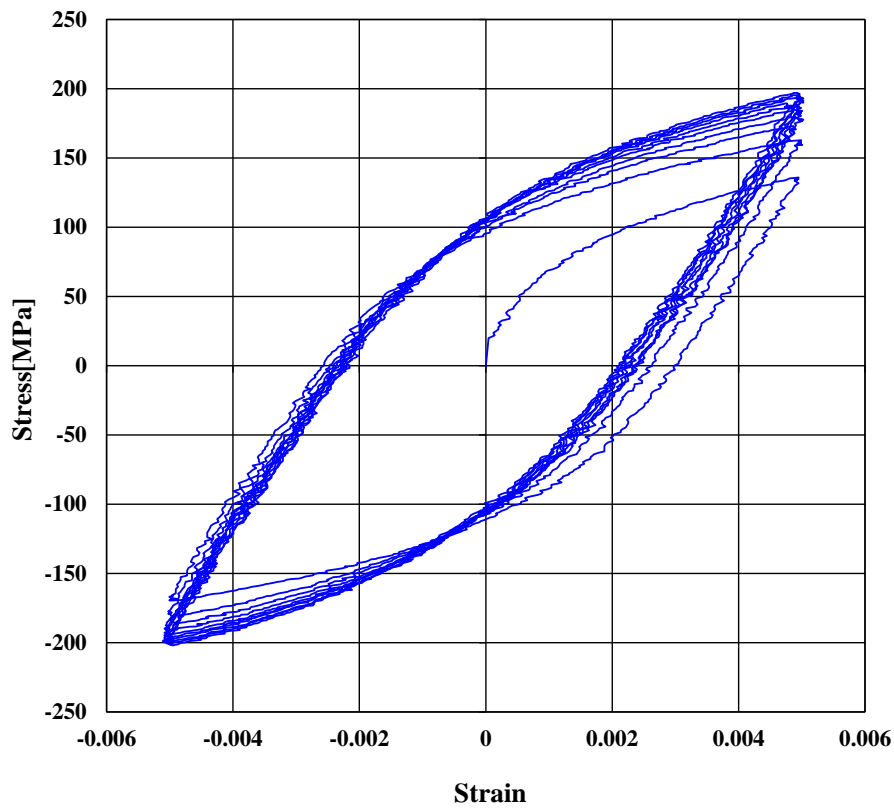


Fig. 4.5.1 Stress strain curve(ADC12-F)

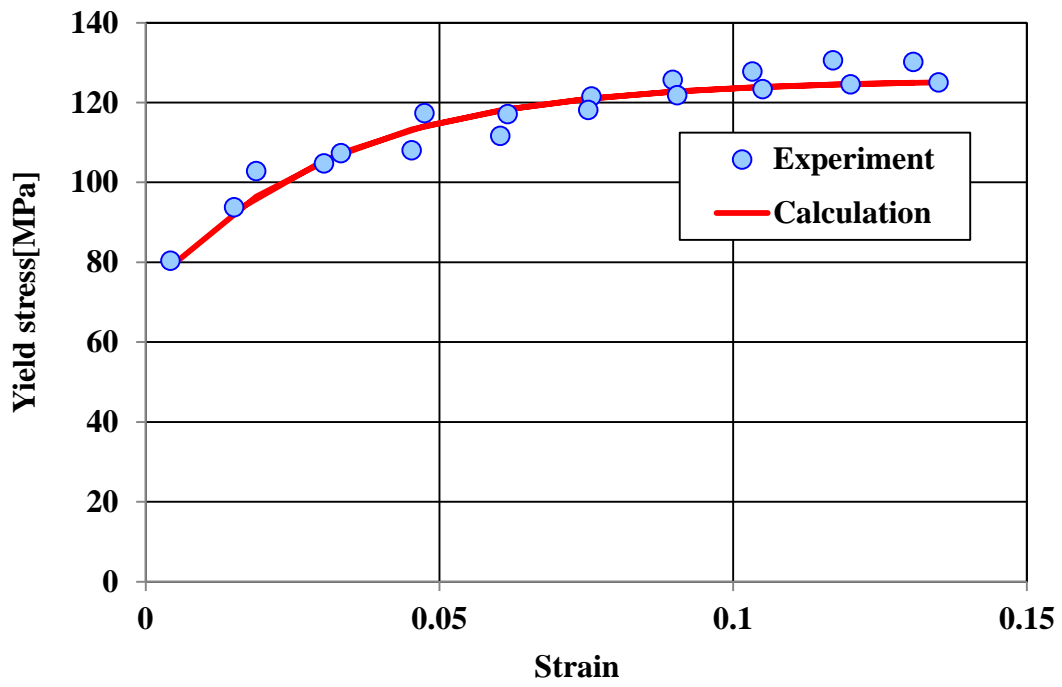


Fig. 4.5.2 Yield stress of isotropic hardening

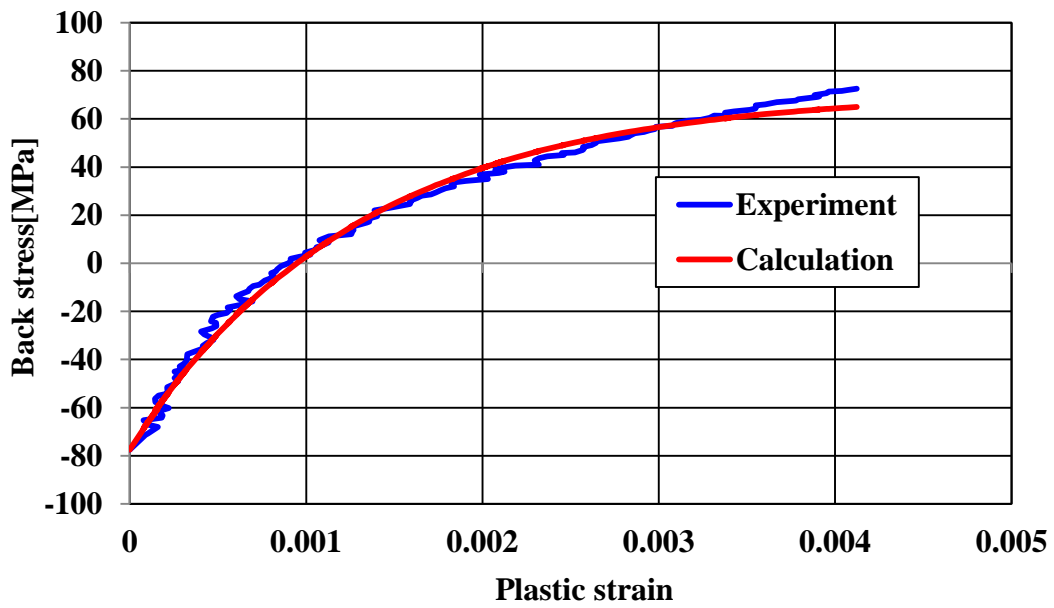


Fig. 4.5.3 Back stress to plastic strain

Table 4.5.1 Median value of material constants

(a) Isotropic hardening		(b) Kinematic hardening		(c) Damage	
A_1 [MPa]	17.913486	a_1 [MPa]	21802.044	r [MPa]	0.05
B_1	32.200685	b_1	984.7716	S	1.00
A_2 [MPa]	17.913486	a_2 [MPa]	26911.275		
B_2	32.200685	b_2	761.71817		
A_3 [MPa]	17.913486	a_3 [MPa]	10254.272		
B_3	32.200685	b_3	423.15953		
σ_{y0} [Mpa]	72				

ただし応力ひずみ線図の差異は各ループそれぞれについて実験値と計算値との差を取り実験値と計算値の差分の面積を求め、その値をループ数で平均化して求めた。また S-N 線図の差異は実験結果を対数近似し、この対数近似式と計算値の疲労寿命の差を求めデータ数で平均化して求めた。図 4.5.4 の横軸は図 4.1.6 の最適化フローの反復回数であり、縦軸は上述した応力ひずみ曲線の実験と計算値の差異である。一方、図 4.5.5 は縦軸を S-N 線図の差異としたものである。このグラフを見ると最適化フローを繰り返すごとに差異が次第に小さくなっている様子が見られる。しかし反復の初期でも差が小さなデータが見られるが、これは応力ひずみ曲線か S-N 線図のどちらかの差異が小さく他方の差異が大きなケースである。このことを示すために応力ひずみ曲線の差異と S-N 線図の差異を足し合わせた差異を図 4.5.6 に示す。この図の縦軸が小さい値であれば応力ひずみ曲線と S-N 線図の両者とも差異が小さいことを意味する。図 4.5.6 を見ると反復回数が増えるほど値が次第に小さくなる傾向があり、本章で示した最適化フローで材料定数の最適化がうまく計算されていると言える。本計算で得た材料定数の最適値を表 4.5.2 に示す。

図 4.5.6 の最も差異が小さな材料定数を実際に応力ひずみ曲線を計算したものが図 4.5.6 である。青線は実験値、赤線は計算値で最適化前の材料定数の中央値を用いて計算したものである。また緑線は最適解の材料定数を用いて計算したものである。このグラフからも最適化により実測の応力ひずみ曲線に近づいていることが分かる。応力ひずみ線図のループが後半になるに従ってグラフ同士が重なってしまうため、横軸に各データ点間のひずみ増分の絶対値を足し合わせた累積ひずみを取ったものが図 4.5.7 である。この図からも最適化した材料定数の方が実測値に近いことが分かる。

さらに図 4.5.8 は応力ひずみ曲線を計算した時と同じ値の最適解を用いて S-N 線図を計算したものである。この図からも最適化前に比べて最適解は非常によく実測値に一致しているようすが分かる。この収束解を得るまでに約 450 回の最適化反復計算を行った

が応力ひずみ線図を計算する箇所を 4.3 節で述べた簡易積分法を用いることでデスクトップ PC の 3.2GHz の 1CPU を用いて約 40 分程度の計算で求解できた。

Table 4.5.2 Optimum value of material constants

(a) Isotropic hardening		(b) Kinematic hardening		(c) Damage	
A_1 [MPa]	4.5	a_1 [MPa]	28767.677	r [MPa]	0.21
B_1	128	b_1	2286.6667	S	6.06
A_2 [MPa]	16.686869	a_2 [MPa]	35959.596		
B_2	14.060606	b_2	1830.9091		
A_3 [MPa]	34.646465	a_3 [MPa]	9696.9697		
B_3	119.51515	b_3	183.13131		
σ_{y0} [Mpa]	72				

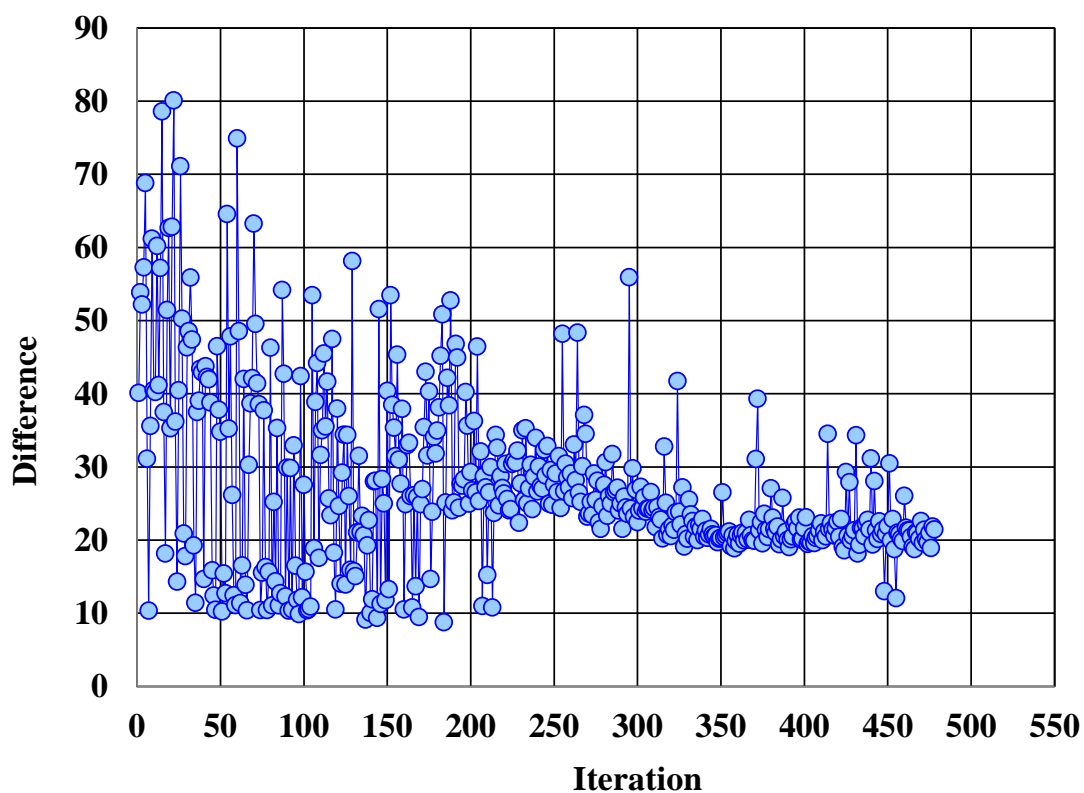


Fig. 4.5.4 Difference of stress strain curve between experiment and calculation

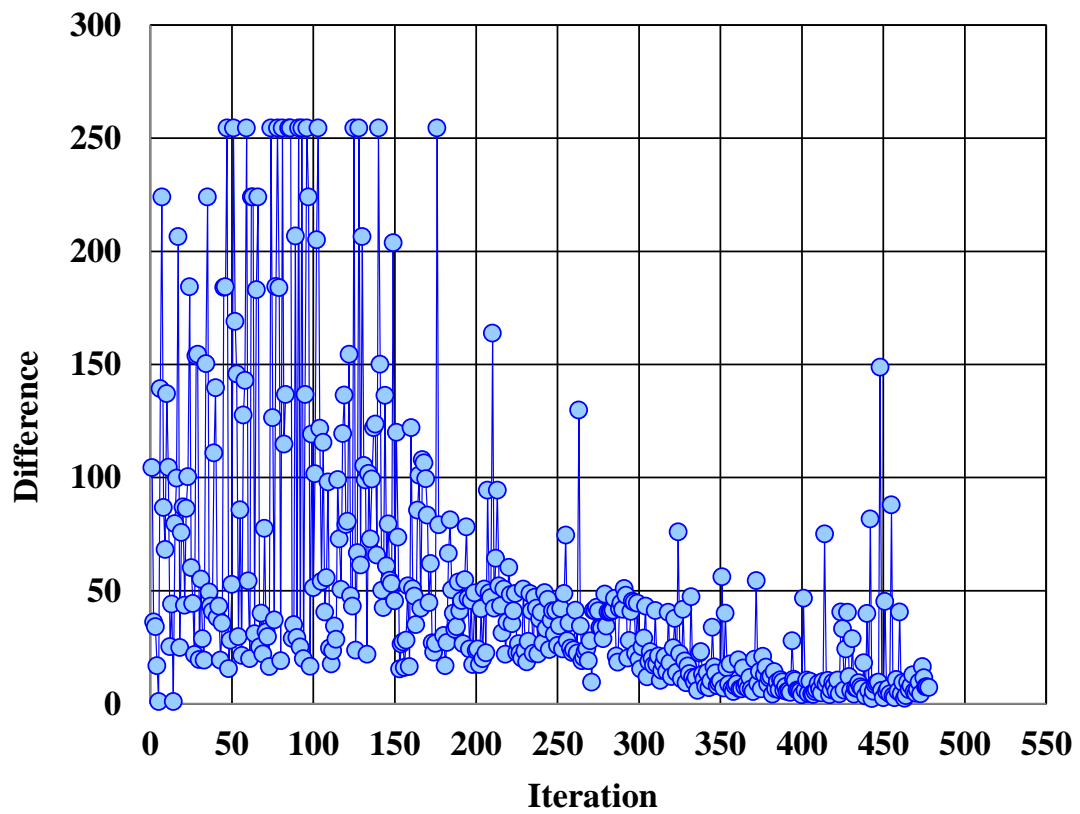


Fig. 4.5.5 Difference of SN curve between experiment and calculation

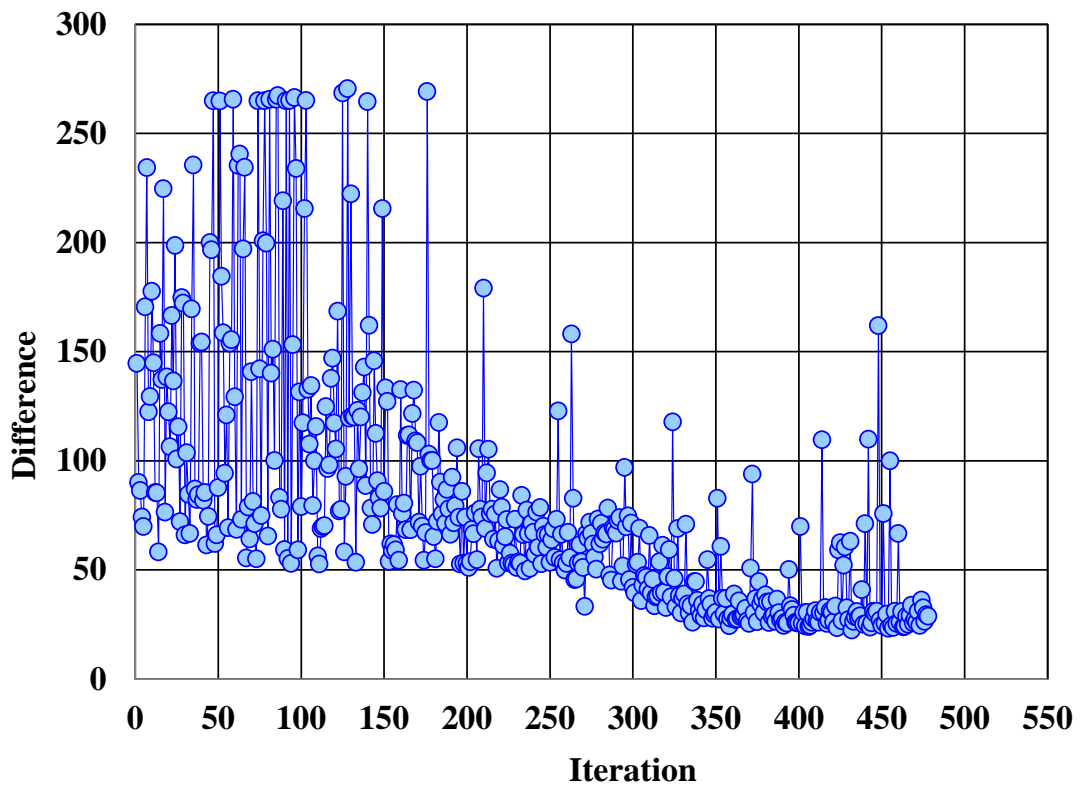


Fig. 4.5.6 Sum of differences of stress strain curve and SN curve

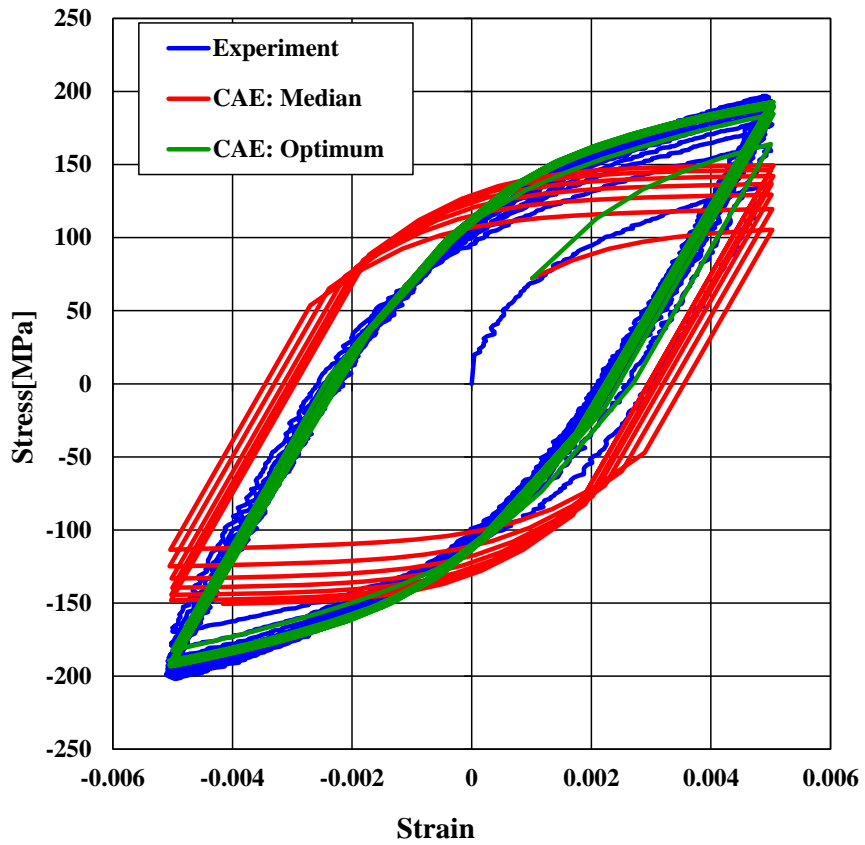
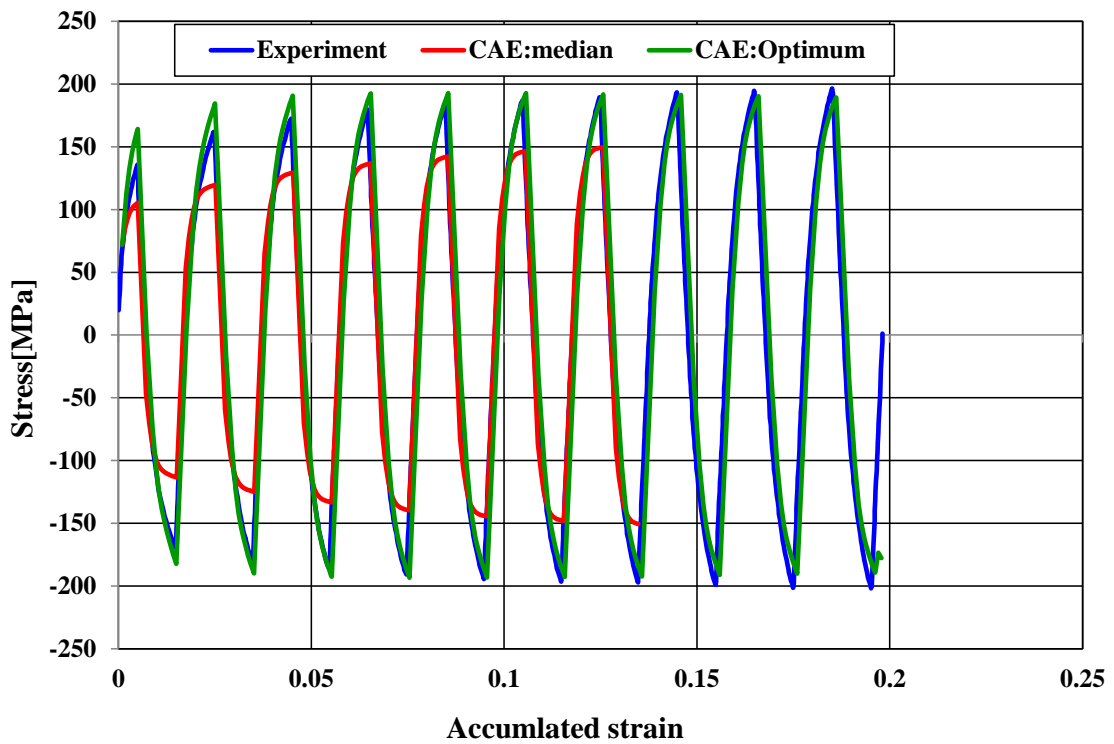


Fig. 4.5.6 Comparison of stress strain curve



Fi.g 4.5.7 Comparison of stress-accumulated strain curve

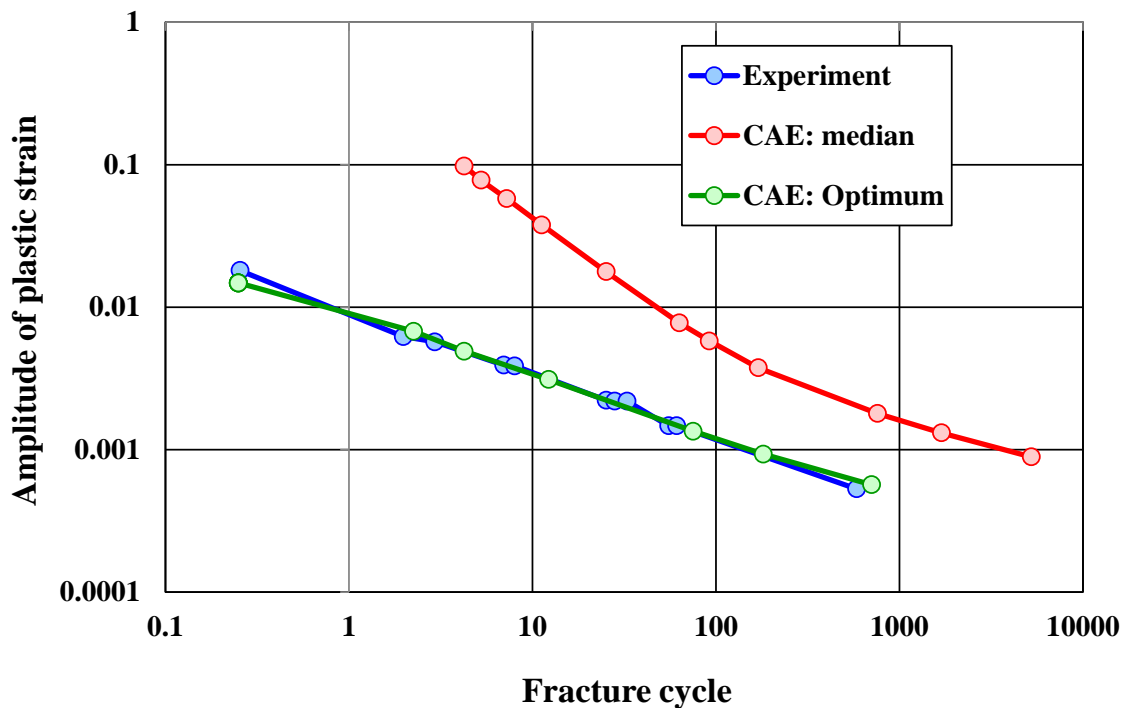


Fig. 4.5.8 Comparison of SN curve

4.6 本章のまとめ

分割背応力モデルを用いた損傷弾塑性モデルは多くの材料定数が含まれる。この材料定数について実験結果と一致するように人の手で微調整しながら試行錯誤で計算すると膨大な手間と時間が掛かる。そこで本研究では遺伝的アルゴリズムに基づく最適化計算で材料定数の同定プロセスを自動化した。その際に材料定数の候補値を決めるための手法を示した。また最適化に当たり最も時間のかかる応力ひずみ計算について単軸負荷条件のもと流れ則を簡略化し有限要素法の解と等価な値が得られる簡易積分法を考案した。これによりアルミダイカスト合金 ADC12-F を例に最適化計算したところ約 450 回の反復計算で最適解が得られ、わずか 40 分の計算時間しかかからなかった。これを有限要素法で実施するとおおよそ 20 時間かかる。

また最適解として得られた材料定数を用いて応力ひずみ曲線や S-N 線図を計算したところ実測値と良く一致することが確認された。以上の方法により、極低サイクル疲労破壊を計算する際に応力ひずみといった変形と材料損傷の両者を良く表現できる材料定数を容易に求められるようになった。

第5章 工学的問題の数値解析

これまで示してきた損傷弾塑性モデルを用いて工学的問題を計算しモデルの妥当性や実用性を検証する。対象とする問題はき裂進展問題，塑性加工問題，極低サイクル疲労問題とし各節に分けて述べる。

5.1 Mode I 貫通き裂

本節では初期き裂を含む部材についてき裂進展問題を取り扱う。その理由は過去の研究を見てもき裂進展問題について破壊力学的な視点から見た損傷力学の妥当性について十分な検証が行われていないためである。例えばき裂進展時における J 積分による破壊靱性値や J 積分の有効性を崩す要因となっているシャリップ破壊領域などの 1 回の負荷のき裂進展問題でさえ連続体損傷力学による詳細な検証が見られない。そのため本節ではその基礎検証として繰り返し負荷ではなく 1 回の負荷によるき裂進展挙動を実験と詳細に比較して破壊を表現するモデルとしての基礎的な妥当性を調べる。

本研究で用いた材料は原子炉圧力容器用鋼 A533B である。A533B 鋼は延性が高く延性破壊の特徴が顕著に現れる為この材料を用いた。図 5.1.1 に本研究で用いた Mode I 試験用の 3 点曲げ試験片を示す。

Table 5.1.1 Basic mechanical property

Young's modulus	E [GPa]	206
Initial yield stress	σ_{y0} [MPa]	600
Tensile stress	σ_S [MPa]	720
Flow stress	σ_{FS} [MPa]	660
Fracture toughness	J_{in} [KN/m]	180

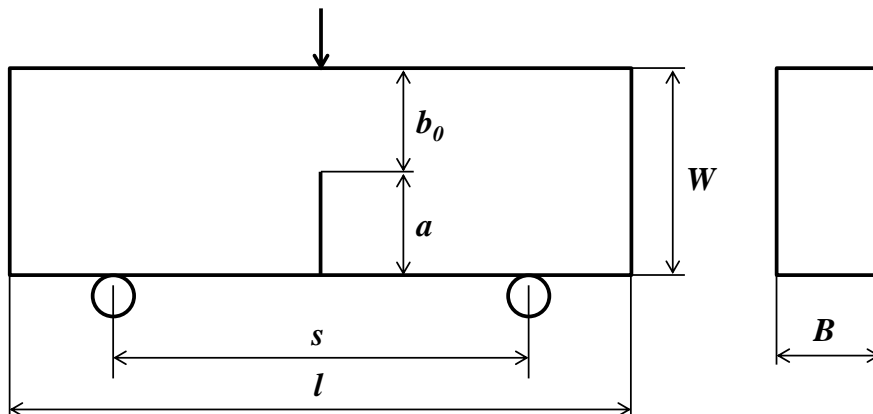


Fig. 5.1.1 3 points bending specimen

ここで B は板厚, W は幅, a はき裂長さ, S はスパン, b_0 はリガメント幅である.
破壊靱性基準を満たす板厚に関しては日本機械学会 (JSME) により規格された以下の式がある.

$$B \geq 25 \frac{J_{in}}{\sigma_{fs}} \quad (5.1.1)$$

ここで σ_{fs} は流動応力と呼ばれる降伏応力と引張強さの平均値である. また J_{in} は最終的に求められる靱性値であり, 式(5.1.1)の条件を満足する場合の J_{in} を弾塑性破壊靱性値 J_{IC} とする. そのため, あらかじめ J_{IC} の値を文献値などから見積もって試験片の形状を決める必要がある. また板厚 B に関しては次式を満たすようにする.

$$B \leq \frac{W}{2} \quad (5.1.2)$$

さらに予き裂長さ a_0 は以下のように定められている.

$$0.5W \leq a_0 \leq 0.75W \quad (5.1.3)$$

スパン S と幅 W に関しては以下のように定められている.

$$\frac{S}{W} = 4 \quad (5.1.4)$$

疲労予き裂を導入する際の最大負荷荷重 P_f は JSME によって以下の式で規格されている.

$$P_f \leq 0.4P_L \quad (5.1.5)$$

ここで P_L は限界荷重で 3 点曲げ試験片の場合は次のようになる.

$$P_L = \frac{4}{3} \frac{Bb_0\sigma_{fs}}{S} \quad (5.1.6)$$

また, 疲労荷重は正弦曲線として与え, 応力比 0.1, 振動数 20 Hz とし MTS 社製 10 t 試験機を用いて予き裂の導入および延性破壊試験を行った. また試験片寸法は $S=64$ mm, $L=70$ mm, $W=16$ mm, $a_0=8.8$ mm とした. この時, 破壊靱性試験基準を満たす板厚は式(5.1.1)より

$$B \geq 25 \frac{180}{660} = 6.82 \text{ mm} \quad (5.1.7)$$

となる. ただし, 流動応力は初期降伏応力と引張強さの平均値とした. このことから破壊靱性試験基準を満たす板厚 8mm 試験片と基準を満たさない板厚 4mm および板厚

2mm の試験片を製作し、3点曲げ破壊試験を行った。この時、疲労予き裂導入時の荷重を計算すると

$$P_L = \frac{4}{3} \times \frac{B \times 7.2^2 \times 660}{64} = \begin{cases} 5702.4 N & (\text{Thickness } 8mm) \\ 2851.2 N & (\text{Thickness } 4mm) \\ 1425.6 N & (\text{Thickness } 2mm) \end{cases} \quad (5.1.8)$$

$$P_f \leq 0.4 \times P_L = \begin{cases} 2281.0 N & (\text{Thickness } 8mm) \\ 1140.5 N & (\text{Thickness } 4mm) \\ 570.3 N & (\text{Thickness } 2mm) \end{cases} \quad (5.1.9)$$

また初期き裂のための切欠きの導入には7.5mmまで幅0.2mmの放電加工を行い、その後疲労荷重を負荷し1.3mmの疲労予き裂を導入し $a_0=8.8mm$ の初期き裂とした。図5.1.1に試験片取り付け状態を示す。また図5.1.2に延性破壊試験の結果得られた荷重点における荷重変位曲線を示す。



Fig. 5.1.1 Fracture test by 3 points bending

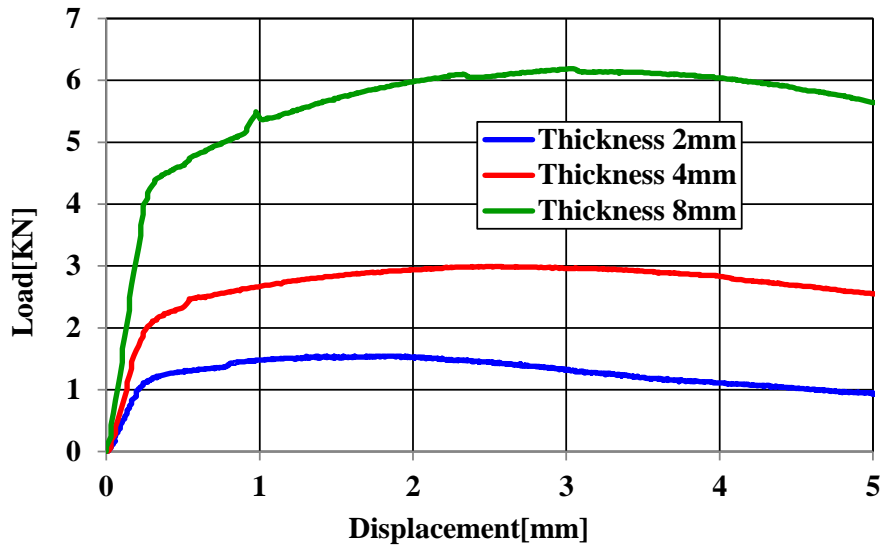
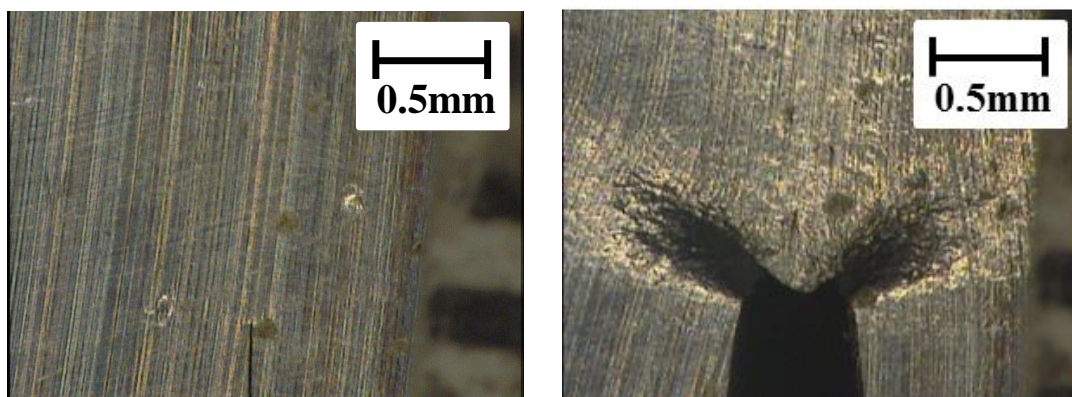


Fig.5.1.2 Load-Displacement Curve

図 5.1.2 から全ての板厚の試験片で大きな変形を伴っていることが確認できる。また、板厚が低下するほど荷重の低下が見られる。また、図 5.1.3 は板厚 8 mm 試験片の破壊試験中のき裂先端を CCD カメラにより撮影したものである。図 5.1.3(a)はき裂進展前の状態を示し図中央にある黒線が疲労予き裂面である。また図 5.1.4(b)は CCD カメラで見える材料表面におけるき裂進展後の状態を示す。このように材料表面ではき裂が予き裂面に対して斜めに進展する傾向が見られる。この斜め破壊領域のことをシャリップ破壊領域と呼ぶ。また図 5.1.4 に板厚 8 mm 試験片を最終破断させた状態を示す。板厚 8 mm 試験片の破断写真を示す。



(a) Crack front before crack propagation

(b) Crack front after crack propagation

Fig. 5.1.3 Direction of crack propagation on free surface(thickness=8mm)

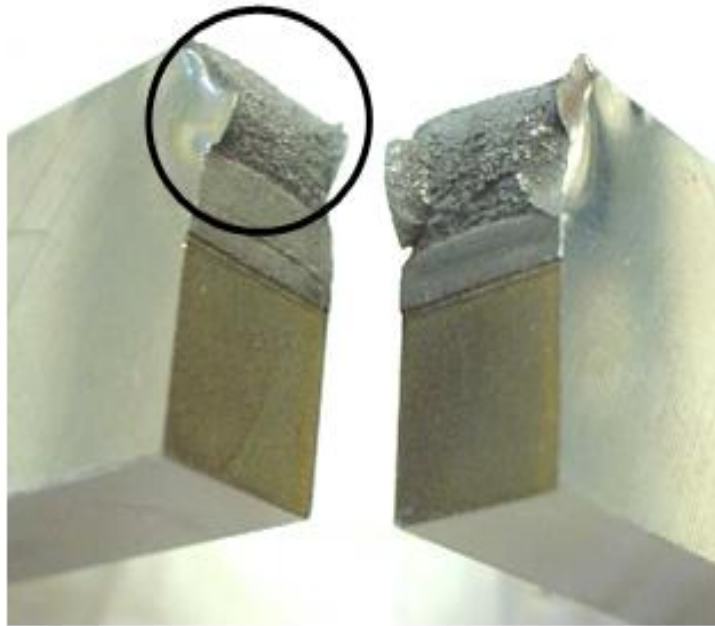


Fig.5.1.4 Ruptured Specimen

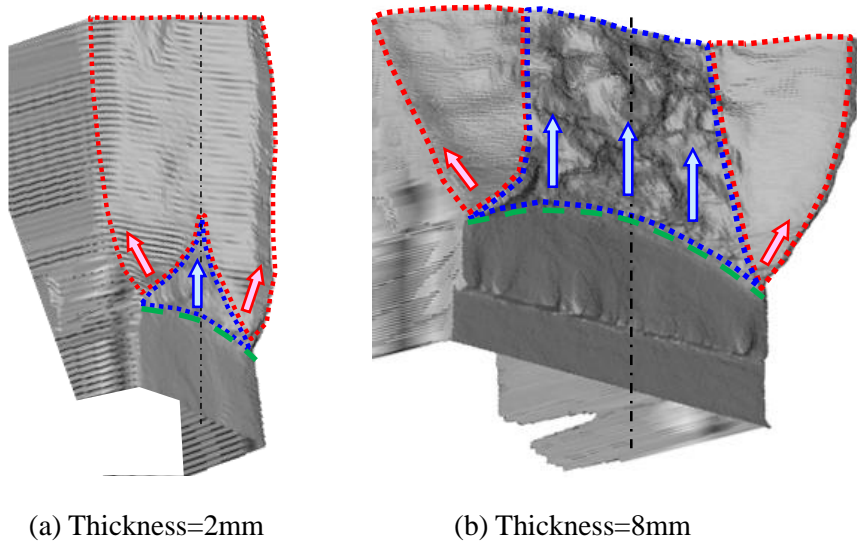


Fig. 5.1.5 Dimple fracture zone(blue area) and shear-lip fracture zone(red area)

図 5.1.5 は破断面を非接触レーザー型 3 次元形状測定機により測定したものである。図中の緑破線は疲労予き裂先端を示す。また赤い領域は図 5.1.3(b)で見られた自由表面で斜めにき裂進展したシャリップ破壊領域を示し、青い領域は板厚内部で疲労予き裂面と並行に進展したディンプル破壊領域である。このように板厚は違っても板厚表面でシャリップ破壊領域が見られ、板厚内部ではディンプル破壊領域が見られる傾向は共にみられる。また板厚が薄いほど破面においてシャリップ破壊領域(赤領域)が支配的になる

傾向もみられる。破壊力学において破壊靱性基準以下の板厚ではJ積分の有効性が失われる。これを拘束効果と呼ぶ(岡村, 1976)。拘束効果を引き起こす要因の一つは平面応力下における延性破壊, すなわちシャリップ破壊領域の大きさが広く関与している。拘束効果を引き起こす原因は従来の破壊力学で仮定されている平面ひずみ条件が満たされない時である。また過去の実験結果(菊池, 石原, 2004)から板厚が薄くなるとJ積分による破壊靱性値がその有効性を失う事はすなわち, 板厚の減少とともに平面応力領域が支配的になりシャリップ破壊領域が支配的になることによるものと考えられる。板厚の減少と共にシャリップ破壊領域が支配的になっていた事は板厚効果とシャリップ破壊領域の大きさが関係を持っている事を意味している。

そこで本研究では板厚の変化に伴ってシャリップ破壊領域の割合がどのように変化しているのかを調べる。図 5.1.6 は予き裂先端から 0.8mm だけ離れた位置における断面図を示したものである。横軸の y は板厚方向の距離を示し, B は試験片の板厚を示す。すなわち, 横軸が ± 1 で板厚表面を示し, 0 で板厚中央面を示す。また, シャリップは傾斜破壊領域であることから平坦破壊領域とシャリップ破壊領域の境界として板厚表面から板厚内部に高さデータを順に調べ, 高さの勾配が最初に 0 になった点とした。図中の丸印は各試験片のディンプル破壊開始領域を示す。すなわち, ディンプル破壊領域の板厚方向に対する幅は各試験片の丸印から丸印までの距離として定義する。これによるとシャリップ破壊領域が板厚方向に占める割合は板厚 2mm 試験片で約 85%, 板厚 8mm 試験片で約 35% であった。このことから板厚が薄くなるほどシャリップ破壊領域が支配的になることが分かる。このことは板厚が薄くなるほど J 積分による破壊力学パラメータが有効でなくなるという工学的に非常に重要な事実を示している。また近年, 軽量化やコスト削減に伴い機械部品の薄肉化が進んでいるためシャリップ破壊領域を避けて通ることはできない。そのためシャリップ破壊領域のシミュレーションの工学的需要は高いと考えられる。

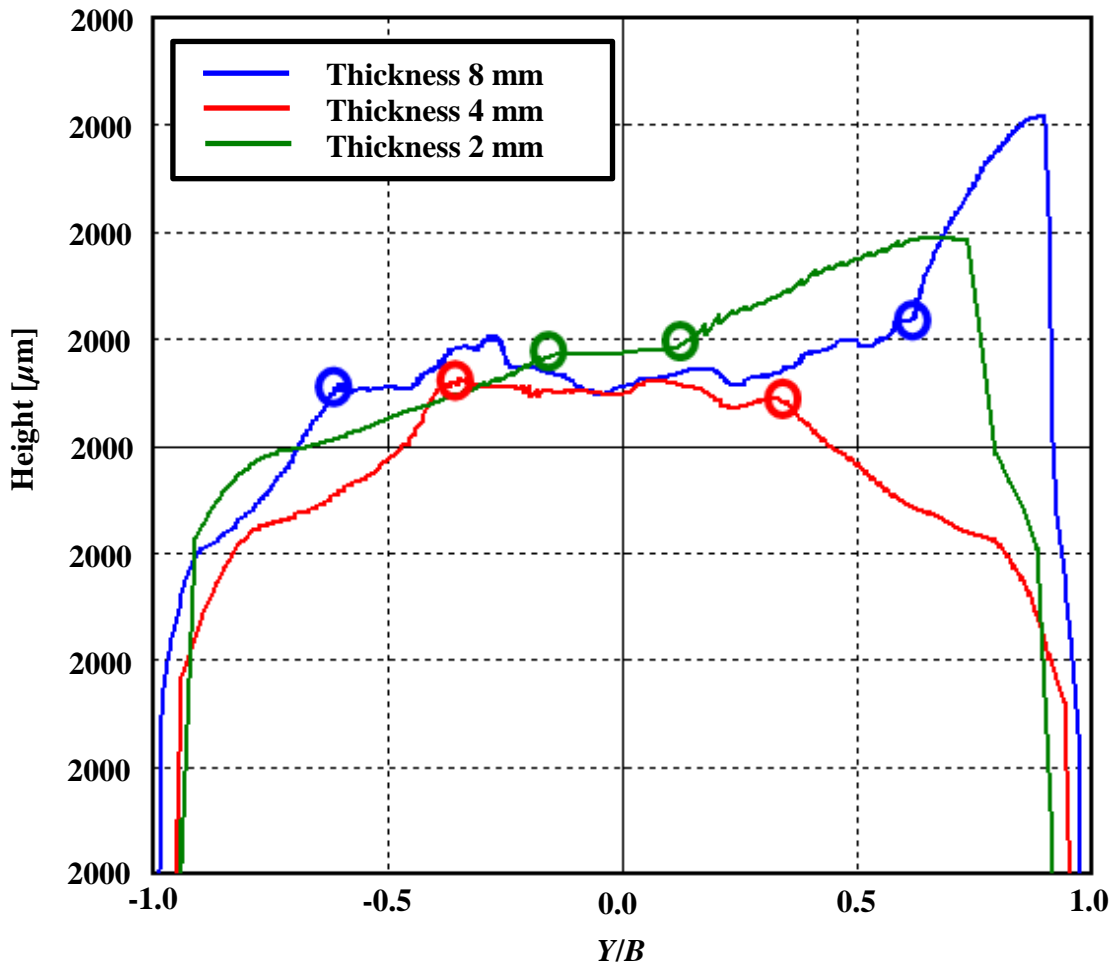
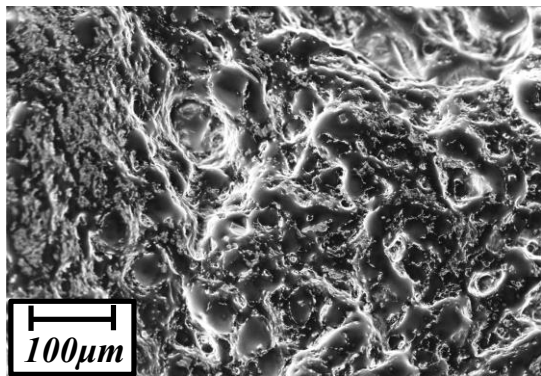
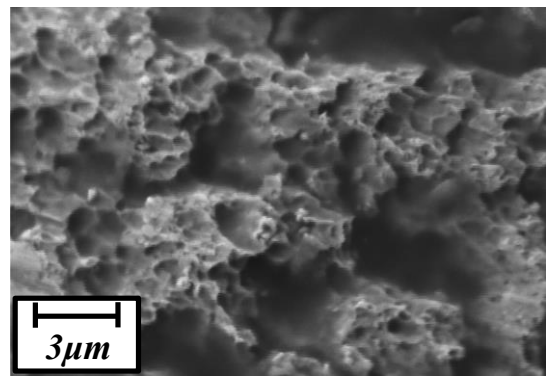


Fig. 5.1.6 Section shape along pre-fatigue crack front 0.8 mm

巨視的なき裂進展方向だけで見るとこの2つの破壊領域は大きく違っている。しかし微視的な破壊機構にどのような違いがあるのかについて詳細に観察する必要がある。そこでディンプル破壊領域とシャリップ破壊領域の微視的な破壊機構を調べるために走査型電子顕微鏡(SEM)を用いて破面を観察した。図 5.1.7 から図 5.1.9 にかけて試験片板厚 2 mm, 4mm, 8mm の破面の様子を示す。各図の左側にディンプル破壊領域は $Y/B=0.0$ における破面、右側にシャリップ破壊領域の $Y/B=0.9$ における破面を示す。この破面からどの板厚の試験片でもディンプル破壊領域は数十 μm 程度の比較的大きなボイドで破面形成されていることがわかる。そしてシャリップ破壊領域では数 μm と小さなボイドで破面が形成されていることがわかる。このことから破壊力学の有効性を失うシャリップ破壊領域でもその基礎的な破壊機構はボイドの形成であることがわかる。これはシャリップ破壊領域もボイドの発達を数理モデルとして表現できていればシミュレーションができる可能性を示唆している。

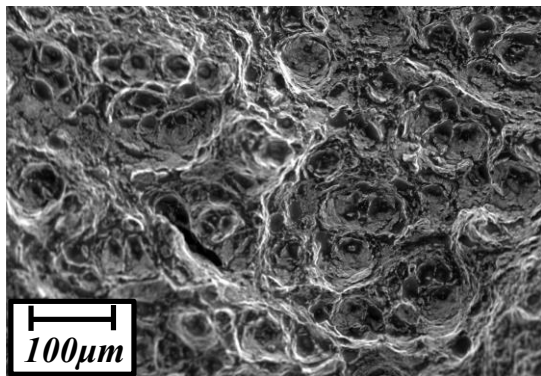


(a) Dimple fracture surface

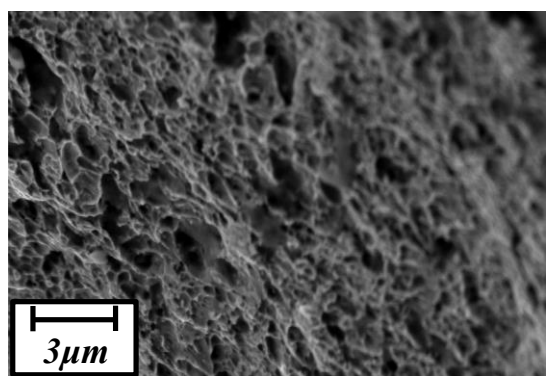


(b) Shear-lip fracture surface

Fig. 5.1.7 Thickness 2 mm

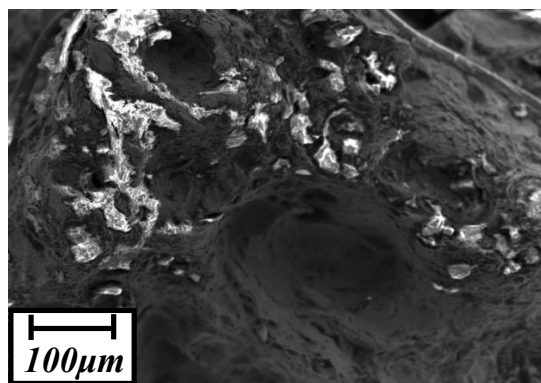


(a) Dimple fracture surface

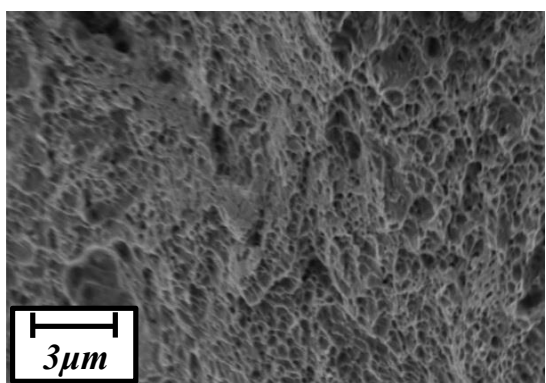


(b) Shear-lip fracture surface

Fig. 5.1.8 Thickness 4 mm



(a) Dimple fracture surface



(b) Shear-lip fracture surface

Fig. 5.1.9 Thickness 8 mm

以上のように Mode I 貫通き裂試験においても材料内部では予き裂面内にき裂進展するデンプル破壊領域と材料表面では予き裂から斜め方向にき裂進展するシャリップ破壊領域が明瞭に観察された。またその両者の破壊領域の形成機構はそのサイズは異なる

もののボイドの発達が密接に関与していることが分かった。このような傾向は Mode I 貫通き裂という破壊力学では比較的単純な問題でも明瞭に見られた。よってシミュレーションの結果にもこのような 2 つの破壊領域が表現されていなければ数理モデルとしての妥当性に欠けていると考えられる。筆者は過去に Gurson モデルを用いたき裂進展シミュレーションによりシャリップ破壊領域も表現できることを示した(菊池, 山王丸, 2007)。しかし連続体損傷力学によってディンプル破壊領域とシャリップ領域のシミュレーションが可能か否かを示した既存の研究には解析例は見られない。そこで本論文の第 3 章, 第 4 章で示した損傷弾塑性モデルを用いてここで実験した Mode I 貫通き裂進展のシミュレーションを行う。

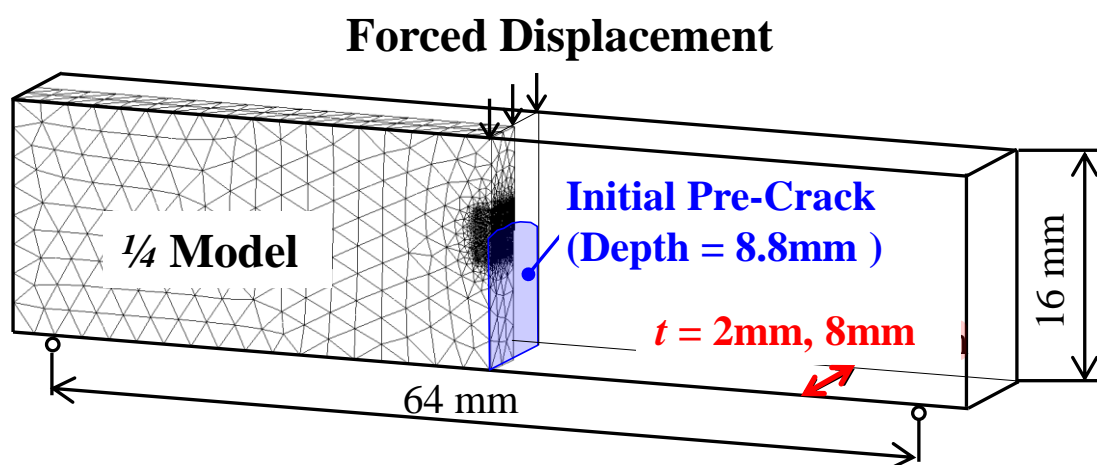


Fig. 5.1.10 FEM model of mode I through crack(1/4 model)

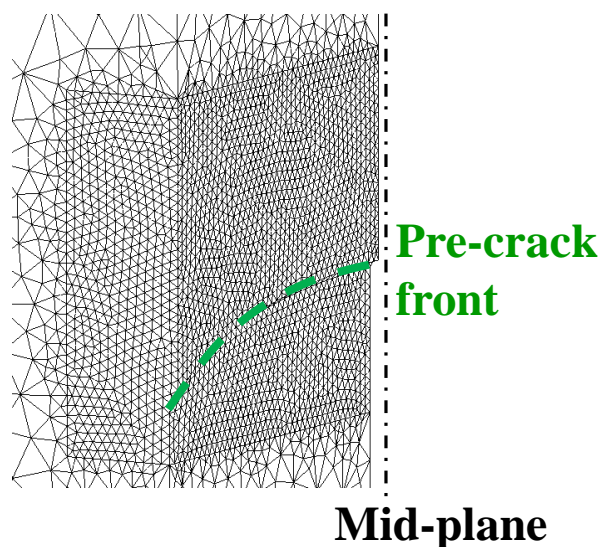


Fig. 5.1.11 Crack front model. The shape of pre-crack is introduced.

Table 5.1.2 Material constants of A533B steel

Young's modulus	E [GPa]	206.00
Poisson's ratio	ν	0.30
Initial yield stress	σ_{y0}	600.00
Isotropic hardening constants	A_1 [MPa]	10000.00
	B_1	0.10
Kinematic hardening constants	a_1 [MPa]	750.00
	b_1	0.25
	a_2 [MPa]	2700.00
	b_2	0.10
Damage constants	S	1.00
	r [MPa]	0.90
	h	0.00
	D_c	0.50

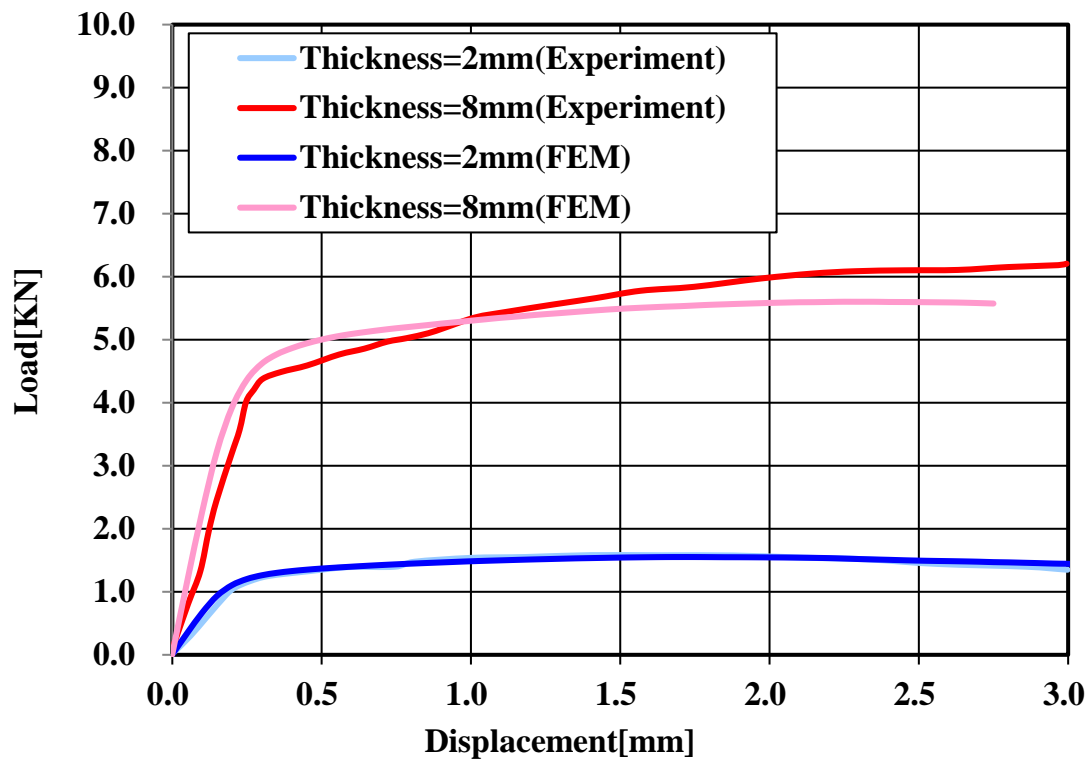


Fig. 5.1.12 Load-displacement curve

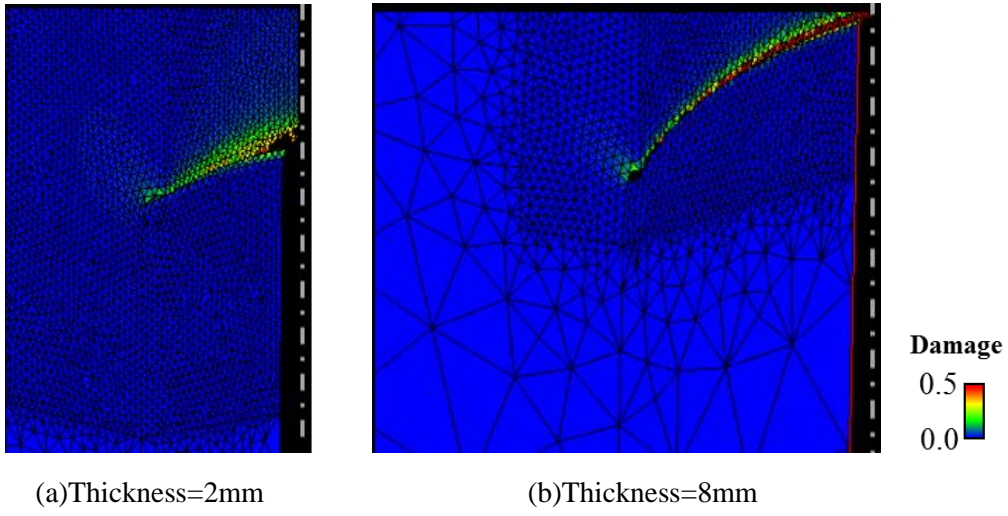


Fig. 5.1.13 Maximum crack length = 0.05mm

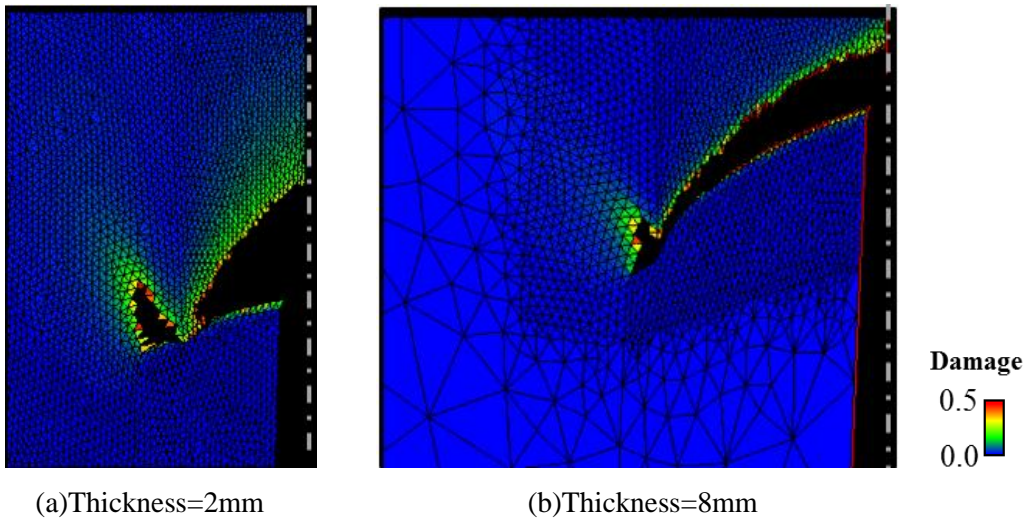


Fig. 5.1.14 Maximum crack length = 1.0mm

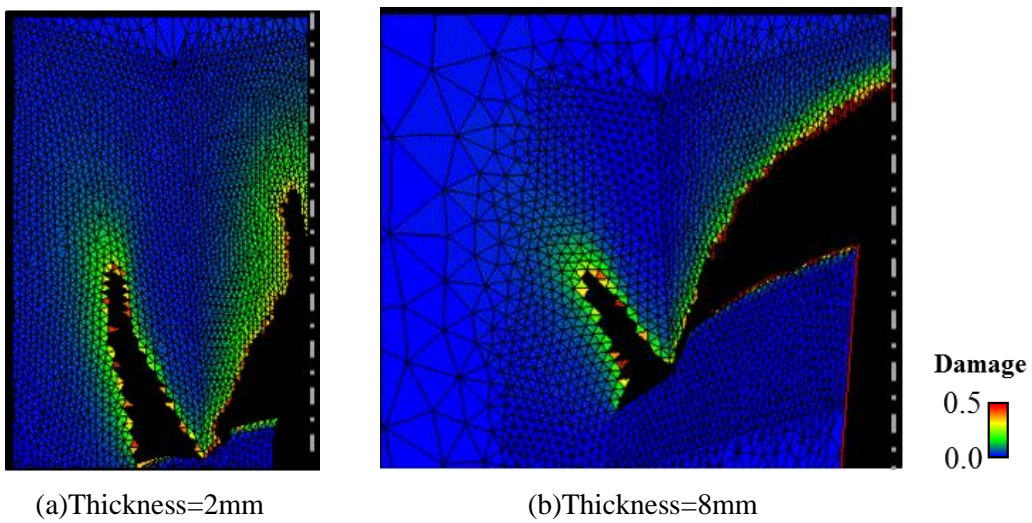


Fig. 5.1.15 Maximum crack length = 2.5mm

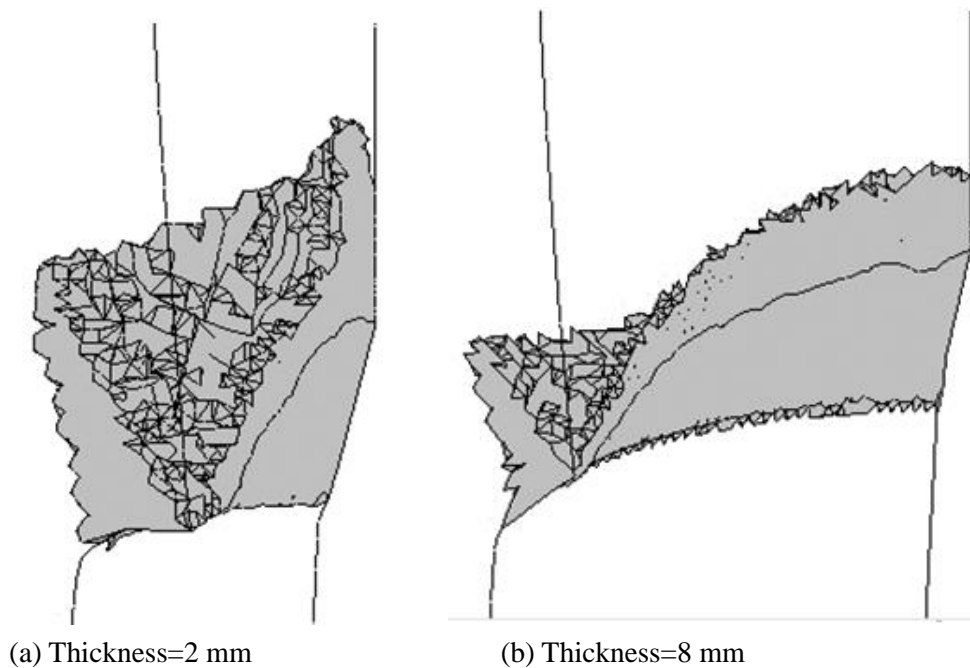


Fig. 5.1.16 Fractured Element

図 5.1.10 のように四面体二次要素を用いて有限要素法の形状モデル化を行った。対称性を考慮し全体形状の 1/4 領域をモデル化し対称面には対称条件の変位拘束を導入した。図中の青い領域は疲労予き裂面を示している。板厚は薄肉材の 2mm と厚肉材の 8mm の 2 種類について形状モデルを作成した。さらに図 5.1.11 はき裂先端部を拡大したものであるが、実験の図 5.1.5 のように疲労予き裂面先端が曲率を持つため、この曲率形状を緑破線のように導入した。また黒鎖線は板厚中央の対称面である。さらに材料定数は表 5.1.2.のものを用いた。この条件で延性破壊シミュレーションを行った。

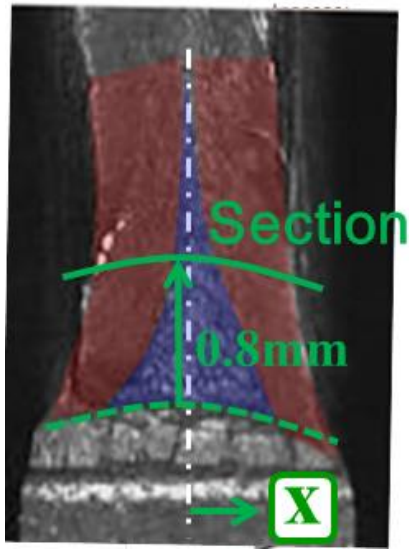
図 5.1.12 に荷重変位曲線を実験と有限要素法(FEM)による計算結果を示す。板厚 2mm モデルに比べて板厚 8mm モデルの方が大きな荷重を支えられる傾向や荷重の値も概ね一致している。定量的なずれに関しては実現象では実験の治具も含めた接触状態であることに対して、計算では図 5.1.10 に示したような変位拘束と集中荷重によるモデルの簡易化などによる差異が含まれると考える。荷重変位曲線で大きな傾向は一致しているため以後のき裂進展挙動の定性的な考察には差支えないものと判断する。

図 5.1.13 から図 5.1.15 までの図は各き裂進展状態における損傷値の分布を描いたものである。要素が黒くなっている箇所は損傷値が破断時の損傷破壊値 D_c に達したため破壊判定とみなされた領域である。破壊判定は要素の積分点毎に定義している。また破壊判定のついた積分点はその剛性や応力積載能力の 99%を失うものとして剛性を持たず近似的にき裂開口部の破断部として扱っている。示し、き裂が進展した状態を示す。図 5.1.13 はき裂進展長さが 0.05 mm の状態、図 5.1.14 はき裂長さが 1.0 mm の状態、図 5.1.15

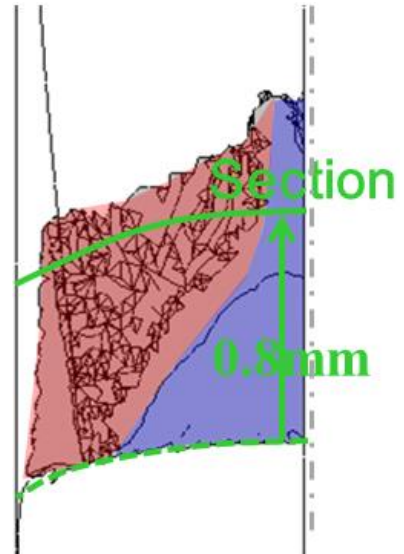
はき裂長さが 2.5 mm の状態を示す。また灰色鎖線は板厚中央面を示す。この図よりまず先行的に板厚内部において疲労予き裂面内に向かってき裂進展し、続いて板厚表面において疲労予き裂面に対し斜め方向にき裂が進展している様子が分かる。このようなき裂進展方向の挙動は実験結果のディンプル破壊領域とシャリップ破壊領域と定性的に一致している。また初期に板厚内部のディンプル破壊領域が先行することについては過去に筆者が Fracture Surface Topography Analysis (FRASTA) 法を用いて実測結果を確認しておりその結果と一致する (菊池, 山王丸, 2007)。

図 5.1.16 は非破壊要素を非表示にし、破壊要素 (灰色) と全体形状のエッジライン (黒線) のみを描画した状態を示す。すなわちこれは灰色領域はき裂進展後の破面形状を示す。この図からも板厚内部では平坦破壊領域が見られ、板厚表面から板厚内部の平坦破壊領域の材料内部に渡って傾斜破壊領域が存在していることが分かる。また板厚 8 mm モデルに比べて板厚 2 mm モデルの方が破面の大部分が傾斜破壊領域で形成されている様子が見られる。

また図 5.1.17 は実測で得た破面を真正面から撮影したものと図 5.1.16 の破壊要素を真正面から描いたものを示す。青い領域は平坦破壊領域を示し、赤い領域は傾斜破壊領域 (シャリップ破壊領域) を示す。この図よりき裂が進展するに従って次第に板厚方向のシャリップ破壊領域の割合が増えてゆく傾向が定性的に一致していることが分かる。さらに疲労予き裂面 (緑破線) から 0.8 mm 離れたところで紙面法線方向に破面の断面形状を調べた。図 5.1.19 はこの断面形状を板厚 2mm, 板厚 8 mm について示したものである。実線は実測値、丸点は有限要素法 (FEM) による計算値を示す。青い領域は平坦破壊領域、赤い領域はシャリップ破壊領域を示す。板厚 2mm モデルでは実測、計算値ともに板厚方向のシャリップ領域の占める割合は 80~90% の間であった。また板厚 8mm モデルでは 30~40% であり、両者が定量的にも良く一致していた。またシャリップ領域の傾斜角度もこの図から良く一致していることがわかる。筆者は過去に Gurson モデルを用いて同様の検証を行いシャリップ破壊領域がよく表現できることを示した。き裂進展問題におけるシャリップ破壊領域の取り扱いが連続体損傷力学で可能かどうかについては既存の研究では明らかにされていなかったが、本研究による実験結果との詳細な比較により連続体損傷力学でもシャリップ破壊領域を良く表現することができるものと考えられる。冒頭に述べたようにシャリップ破壊は平面応力環境下で起きるせん断破壊領域であり古典的な破壊力学パラメータによる取扱いが困難な領域である。また薄板材の平面応力近似が成立するため破壊力学の適用が難しい。よって本節で示した結果は破壊力学で取り扱う事が困難である薄板材の破壊であっても連続体損傷力学で取り扱いが可能であることを示すものである。

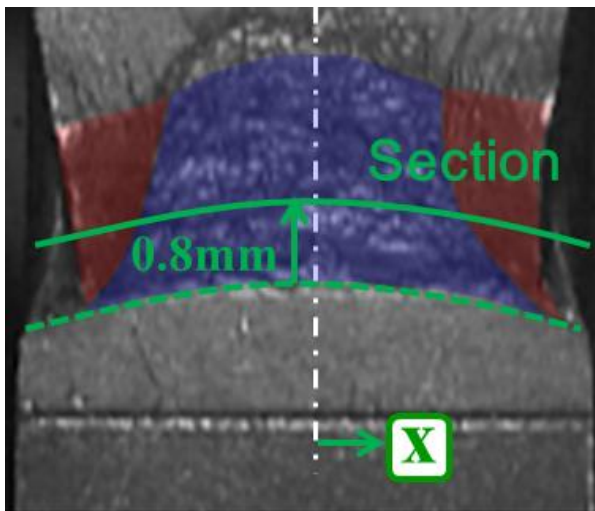


(a) Experiment

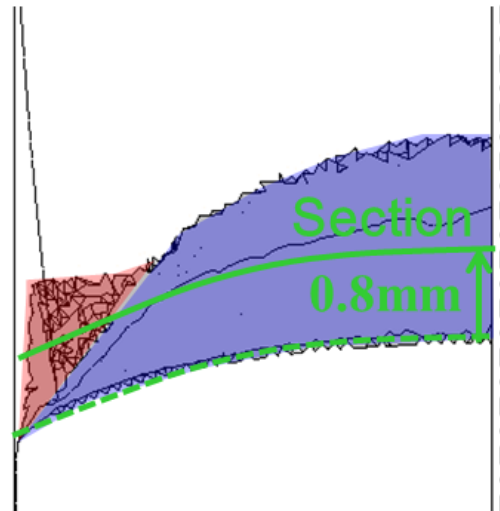


(b) Calculation

Fig. 5.1.17 Front view of fracture surface(Thickness=2mm)

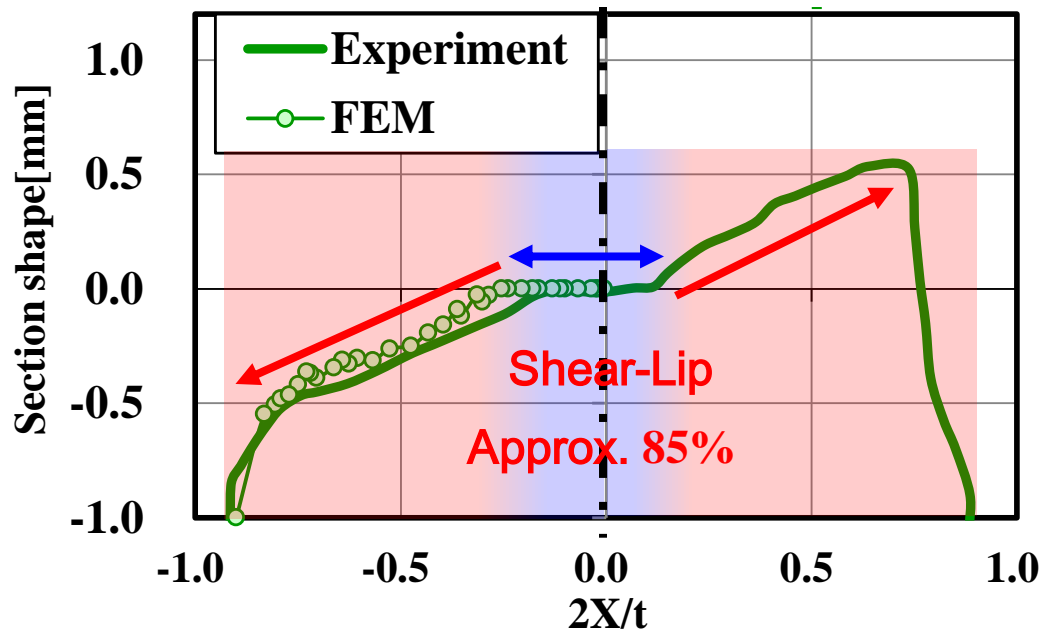


(a) Experiment

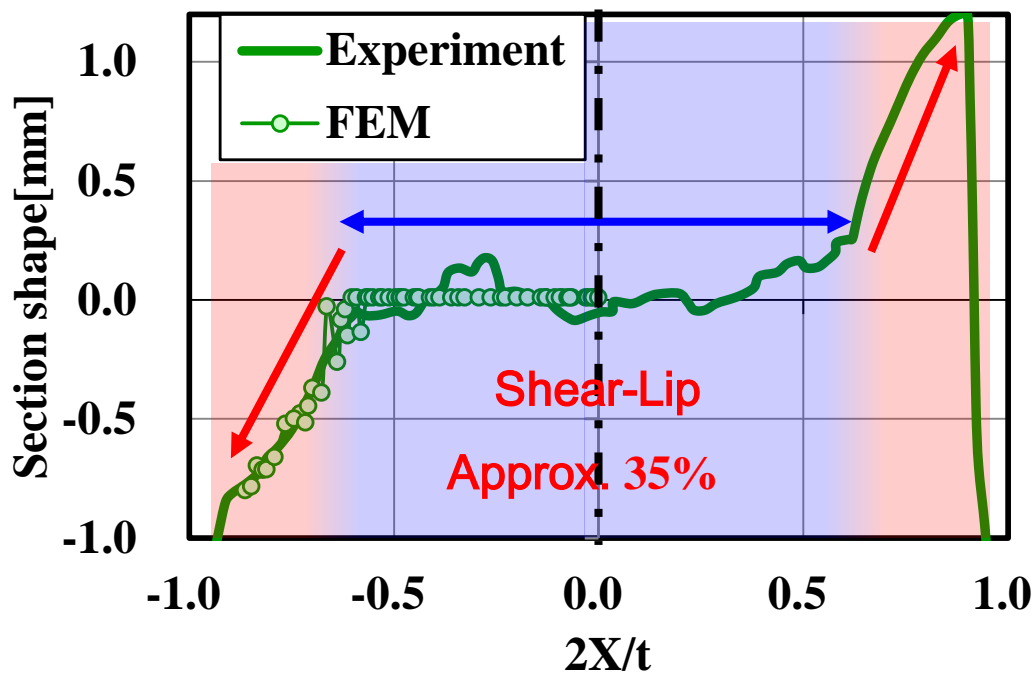


(b) Calculation

Fig. 5.1.18 Front view of fracture surface(Thickness=8mm)



(a) Thickness=2 mm



(b) Thickness= 8mm

Fig. 5.1.19 Comparison of section shape away from 0.8 mm of pre-crack

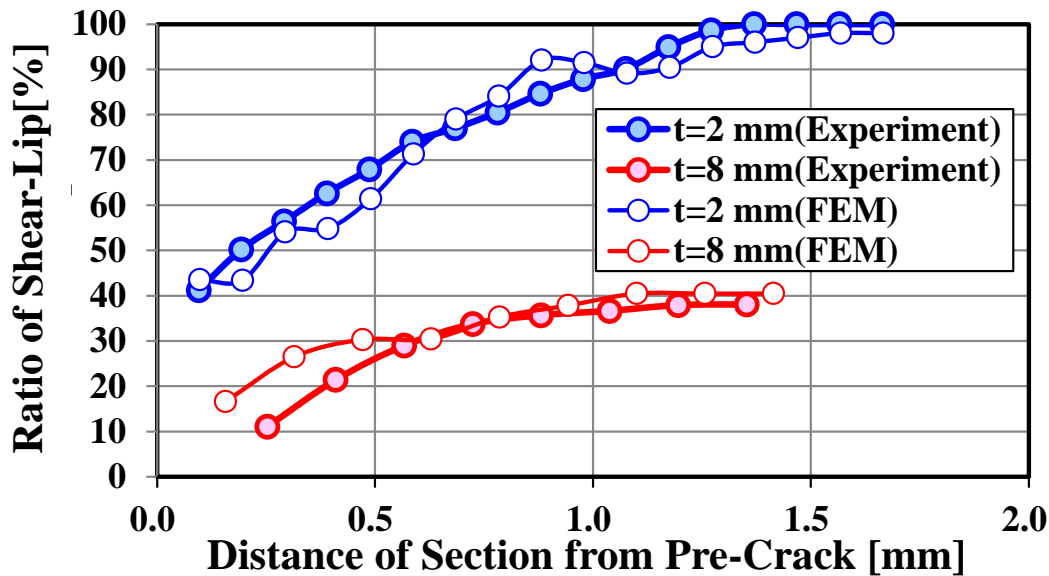
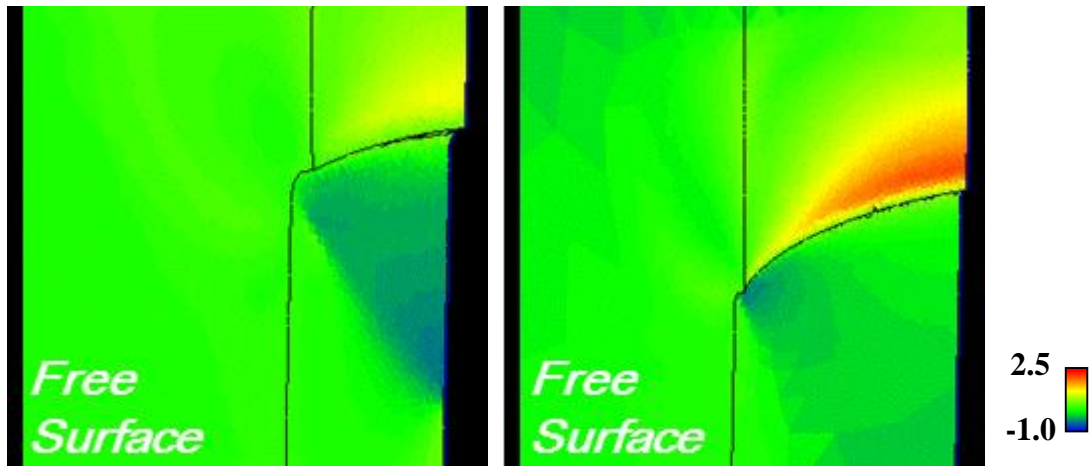


Fig. 5.1.20 Ratio of shear-lip fracture zone in thickness direction

図 5.1.19 と同様の断面形状におけるシャリップ領域が板厚方向に占める割合を断面①を変えて調べた。図 5.1.20 の横軸は断面の疲労予き裂面からの距離を示し、縦軸はその断面におけるシャリップ領域の板厚方向に占める割合を示したものである。この図からき裂が進展するに従ってシャリップ破壊領域が増大してゆく傾向や板厚 8 mm に対して板厚 2 mm の方がシャリップ領域が大きくその最終的にその大部分がシャリップ領域で覆われる傾向など実験と FEM 計算値が非常に良く一致している。このことから連続体損傷力学がシャリップも含む延性破壊を良く表現できていると考える。

このような破面が形成される力学的な理由について考察する。図 5.1.21 から図 5.1.23 までの図は各き裂進展状態における応力三軸度の分布を示したものである。板厚表面 (Free surface) では板厚内部に比べて低い応力三軸度になっている。これは板厚表面では平面応力状態のため面法線方向の垂直応力が必ずゼロになり静水圧が低下するためである。板厚内部の応力三軸度を見てみると板厚 2 mm モデルより板厚 8 mm モデルの方が高い値の分布を示している。これは板厚 2 mm では自由表面との距離が小さいためモデル全体で平面応力近似が成立するためである。

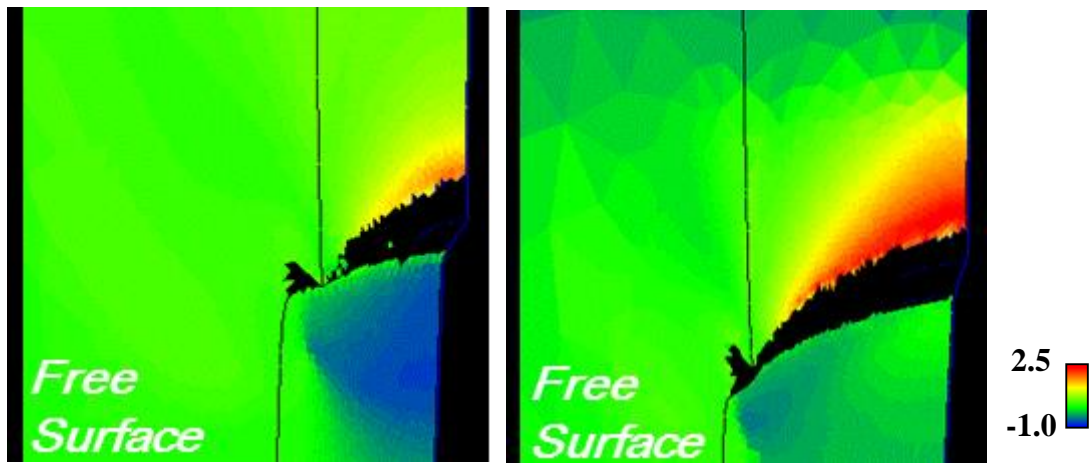
損傷値の増分は式(3.3.24)で示したように損傷エネルギー解放率が高いほど大きい。また損傷エネルギー解放率は式(3.3.39)、式(3.3.40)で示したように応力三軸度が高いほど大きくなる。すなわち応力三軸度の高い領域では損傷が大きく発達することを示す。これは応力三軸度が高い箇所ではボイドを三軸方向に引っ張る作用によりボイドが成長しやすいことをモデル化しているとも解釈することができる。よって板厚内部では応力三軸度の高い方向である疲労予き裂面内方向に向かってき裂が進展し始める。き裂進展後も同じ方向で応力三軸度が高いため結果的に平坦破壊領域が形成される。



(a) Thickness=2 mm

(b) Thickness= 8mm

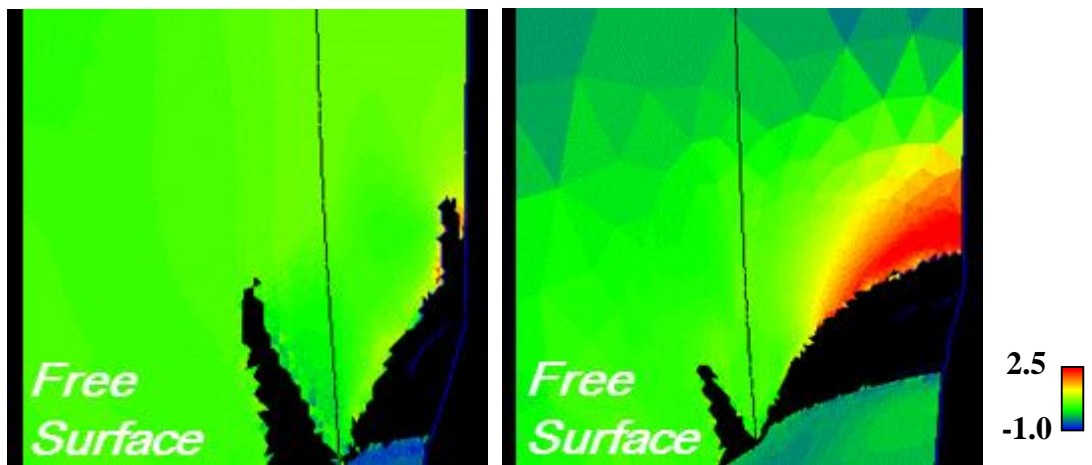
Fig. 5.1.21 Stress triaxiality at crack length= 0.05mm



(a) Thickness=2 mm

(b) Thickness= 8mm

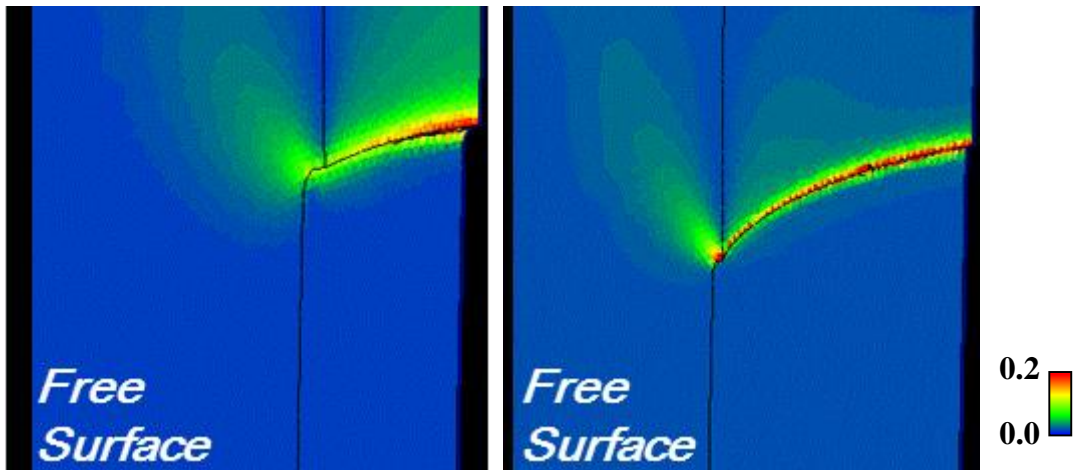
Fig. 5.1.22 Stress triaxiality at crack length= 1.0mm



(a) Thickness=2 mm

(b) Thickness= 8mm

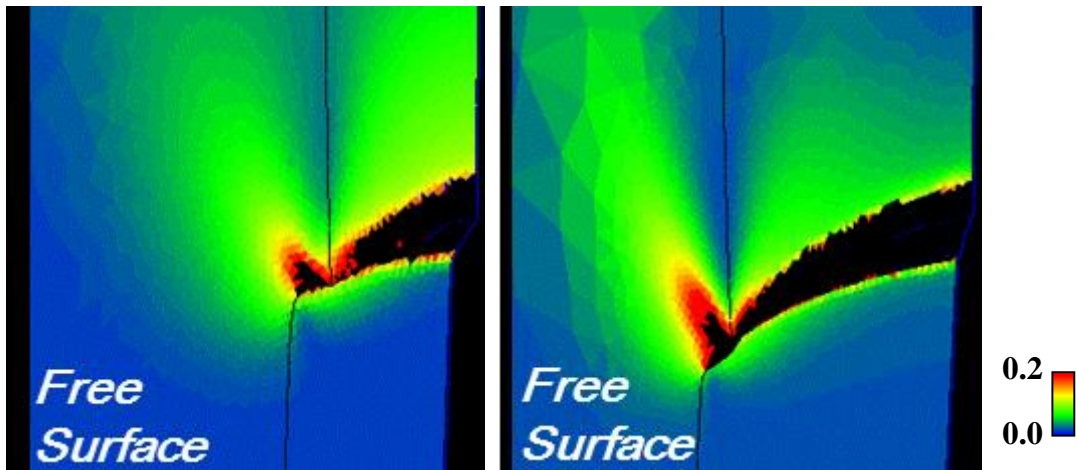
Fig. 5.1.23 Stress triaxiality at crack length= 2.5mm



(a) Thickness=2 mm

(b) Thickness= 8mm

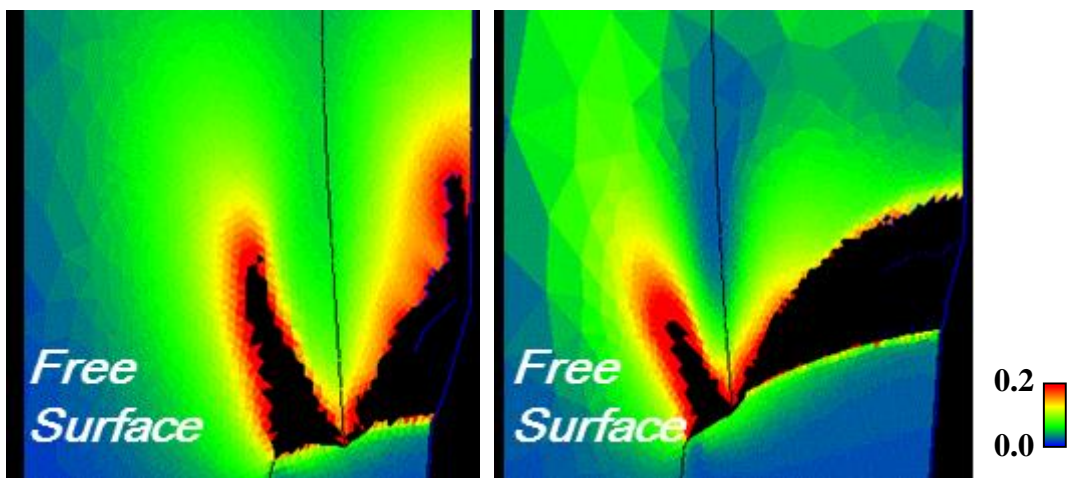
Fig. 5.1.24 Equivalent plastic strain at crack length= 0.05mm



(a) Thickness=2 mm

(b) Thickness= 8mm

Fig. 5.1.25 Equivalent plastic strain at crack length= 1.0mm



(a) Thickness=2 mm

(b) Thickness= 8mm

Fig. 5.1.26 Equivalent plastic strain at crack length= 2.5mm

一方、図 5.1.24 から図 5.1.26 までの図は各き裂進展段階における相当塑性ひずみの分布を示したものである。板厚表面では応力三軸度は小さいが相当塑性ひずみは板厚表面で大きな値を示していることが分かる。一方板厚内部では表面に比べて小さな相当塑性ひずみの値になっている。これは板厚表面では二軸応力状態になることにより他の応力成分のとの差が大きくなるため応力の滑り成分が大きくなりやすいためである。損傷発展式(3.3.24)を見ると損傷の発達速度は相当塑性ひずみ増分に比例している。よって相当塑性ひずみの大きな方向に向かってき裂が進展するため、板厚表面では疲労予き裂面に対して斜めにき裂が進展する。

以上のように板厚内部と板厚表面のき裂進展について損傷発展式の視点から応力三軸度と相当塑性ひずみの値で考察を行った。損傷発展にはこの両者の複合作用が絡むため両者の分布を見ておくことが重要である。産業的には弾塑性状態の延性破壊や極低サイクル疲労破壊を Coffin-Manson 則といった相当塑性ひずみによる評価で行ってしまう例も多々あるようである。5.2 節で述べるように相当塑性ひずみのみの評価で延性破壊を評価し定性的な破壊起点すら予測しきれない例も多々ある。しかしこれは飽くまで非常に簡便な評価指標であることを認識しておかなければならない。図 5.1.26 でも板厚中央面のように低い相当塑性ひずみの環境下でも応力三軸度が高ければボイドが発達しき裂が進展することと同様である。

式(5.1.17)に示した破壊靱性試験基準を満たす板厚 8 mm モデルについて損傷力学モデルにより計算した破壊靱性値と実験結果を比較する。ただし J 積分の算出方法は実験と同じ方法で簡便式(日本機械学会, 1981)を用いる。すなわち荷重(P)-変位(u)曲線から

$$J = \frac{1-\nu^2}{E} K^2 + \frac{2}{bB} \int_0^u pdu \quad (5.1.10)$$

により計算する。K は応力拡大係数、b はリガメント幅、B は試験片の板厚である。これにより各き裂進展段階における J 積分を計算すると抵抗曲線を描くことができる。原点からの直線近似領域を鈍化直線と呼ぶ。そして鈍化直線以降の抵抗曲線に分け、各々の領域を直線近似した時、その交点が破壊靱性値となる。このように解析で多数のデータ点が得られた時、鈍化直線に用いるデータ点数について明瞭な定義はされていない。そのためここでは直線近似の相関係数が 0.9 を下回る境界で鈍化直線を定義した。この時の鈍化直線に用いてデータ点数は 14 点だったがその周辺のデータ点数である 13 点、15 点でも鈍化直線を計算し破壊靱性値を求めた。その結果、有限要素法による破壊靱性値は 163KN/m~187KN/m であった。実験値による破壊靱性値が 180KN/m(中村, 他, 1983)であったため、近い値が得られているものと判断する。過去の研究から Gurson モデルで破壊靱性値を表現できることは知られているが(菊池, 石原, 2004)、以上に示した結果により連続体損傷力学による破壊モデルは古典的破壊力学で取り扱い可能なき裂進展問題においても有効であることが分かった。

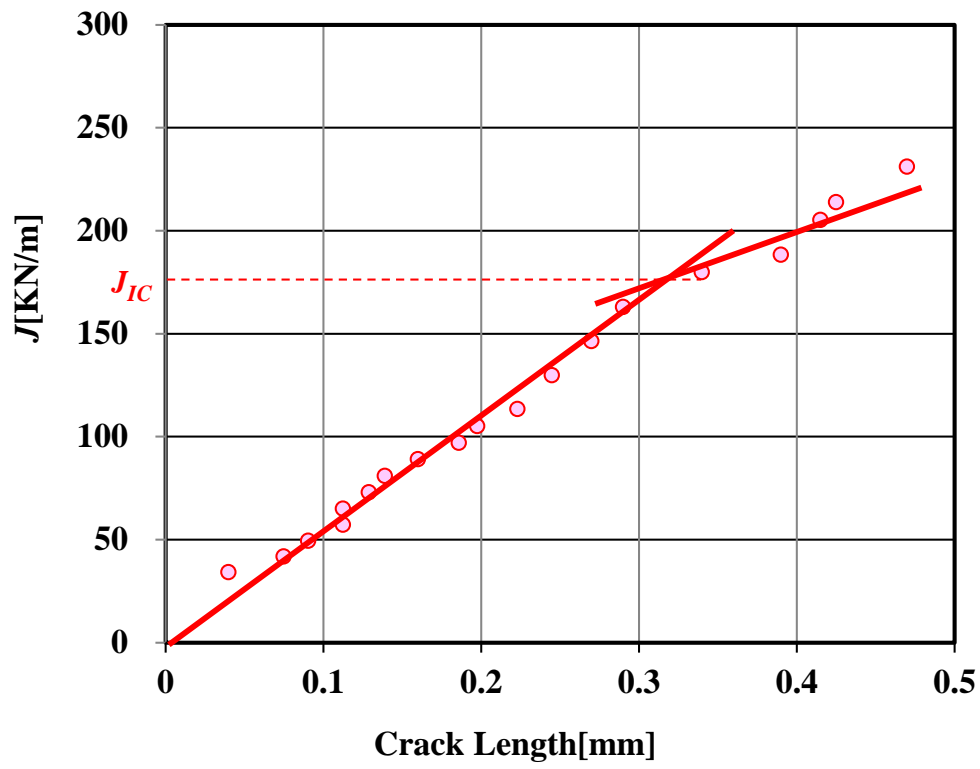


Fig. 5.1.27 R curve (FEM)

5.2 混合モード貫通き裂

本研究ではさらにき裂の開口モード(ModeI)と面内せん断モード(ModeII)が混合した混合モード問題を取り扱った. 試験片寸法は図 5.2.1 に示す通りで 5.1 節と同様に A533B 鋼を用いた. 試験片の板厚は 8mm である. き裂は $\phi 0.2$ mm のワイヤカッタで 11 mm までの切欠きを加工し, その後に高サイクル疲労負荷を掛けて材料表面からみて +1 mm の疲労予き裂を導入した. この寸法で VCCM(Chow and Atluri, 1995; Rybichi and Kanninen, 1997))により各モードの応力拡大係数の比(混合モード比)を計算すると $K_{II}/K_I=0.196$ である. また図 5.2.1 の R 部は図 5.2.2 のように支持ピンを引っ掛け変形中の滑りによる支持点間距離の変動を抑えるものである.

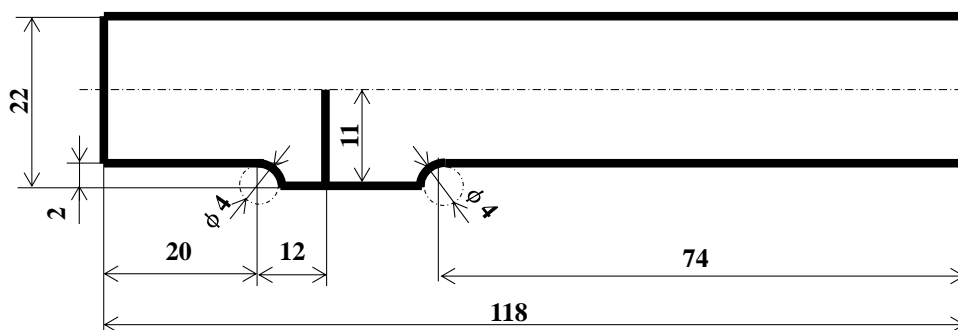


Fig. 5.2.1 Measurements of Specimen

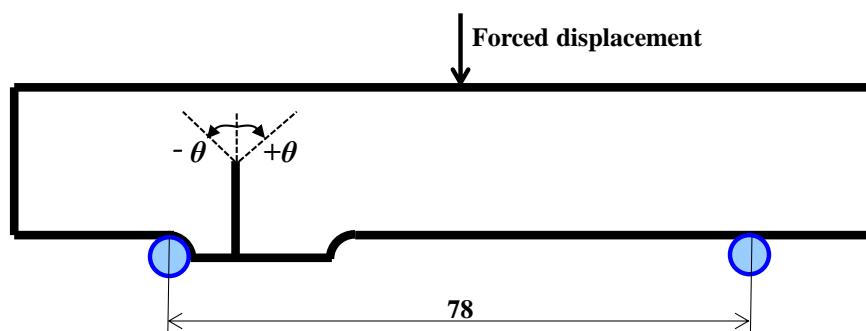


Fig. 5.2.2 Position of supporting pin and definition of angle of crack growth direction

図 5.2.3 は図 5.2.2 の紙面手前方向から見たき裂進展の状態を示すものである. また図 5.2.3(a)は自由表面におけるき裂進展を示す. 前節で述べた Mode I 貫通き裂の時と同様に斜め方向に進展するシャリップ領域が見られるが, この混合モード試験片では左側に伸びたき裂の方が右側のき裂よりも優先的にき裂進展が生じた. また図 5.2.3(b)は破断後の状態を示し, 写真に見えている赤矢印の方向に向かうき裂進展領域は板厚内部のものである. このき裂進展方向を定量化するためにき裂進展角度 θ の正負を図 5.2.2 のように定義する. そしてき裂進展角度の値の測定のためにまず図 5.2.4 のように非接触レー

ザー型 3 次元形状測定機を用いて破面形状を測定する。そして破線のようにき裂進展方向に沿った断面図を測定する。図 5.2.5 は板厚中央における破断面の断面図である。図の左側には試験片加工時のワイヤカットした領域であり、その後に疲労予き裂面が存在する。その後に延性破壊試験で形成されたディンプル破壊領域が存在する。板厚中央面ではディンプル破壊領域のき裂進展角度を測定する必要があるが、ディンプル破壊領域はその形成機構であるボイドが破面上に現われるため非常に凹凸の激しい破面となるためき裂進展角度の定義に次の方法を用いた。疲労予き裂面より後の破面について直線近似を行う。次にその直線の角度によりき裂進展角度を定義する。この方法によるき裂進展角度の測定を板厚表面のシャリップ破壊領域と板厚内部のディンプル破壊領域についてそれぞれ行った。以上の方法により実験により得られた破面からき裂進展角度を測定すると板厚中央では $+24^\circ$ となり、板厚表面では $+52^\circ$ および -22° となった。

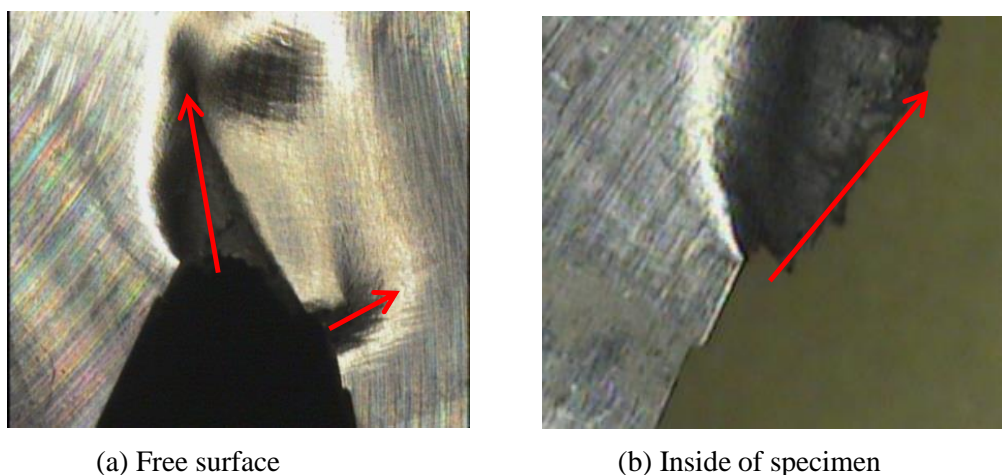


Fig. 5.2.3 Crack growth direction

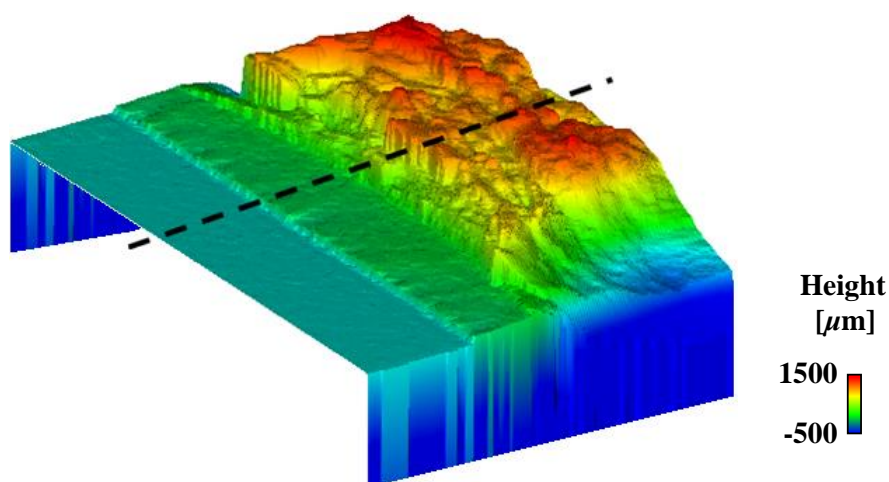


Fig. 5.2.4 Measured fracture surface

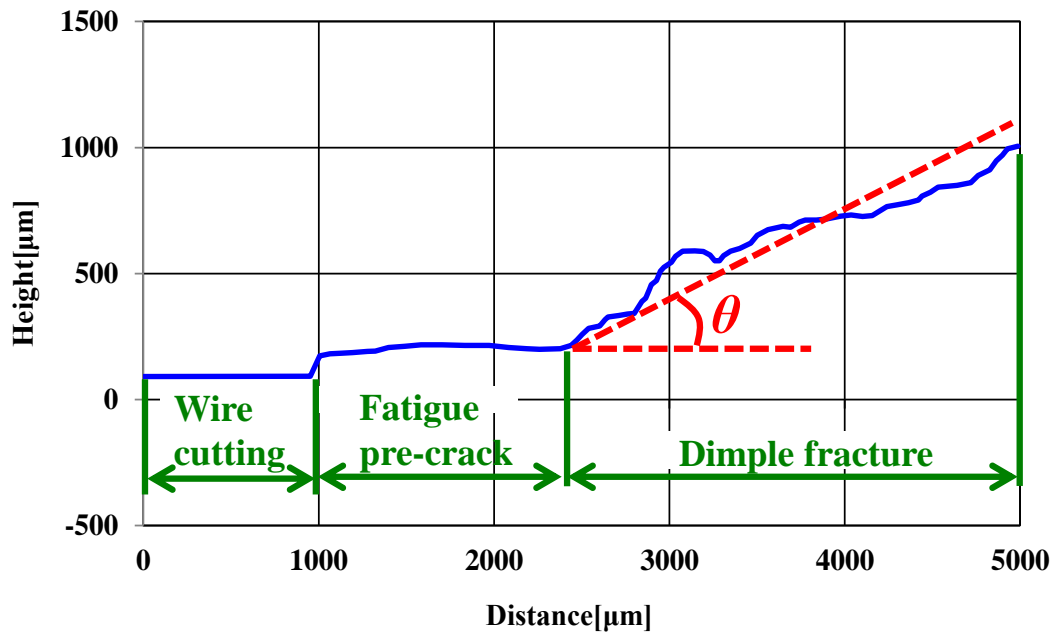


Fig. 5.2.5 The way to calculate angle of crack direction

この混合モードき裂進展問題を有限要素法(FEM)で計算する。筆者が Gurson モデルを用いて計算した既存の研究(菊池, 山王丸, 2008)について図 5.2.6 に示す。この図は平面ひずみ条件下の 2 次元モデルで計算したもので図 5.2.2 の紙面手前から見たき裂進展の状態を示す。平面ひずみ条件であるため、3 次元モデルの板厚中央面の状態と考えることができる。左右の図でボイドの発生モデルが異なっている。商用ソフトなど広く使われる相当塑性ひずみ支配型(P.S.C.N)のボイド発生モデルのみを用いたものが左図である。一方、このモデルに加えて引張の静水圧下でもボイドが発生すると考える応力支配型(S.C.N)も同時に考慮したものが右図である。また応力三軸度の分布も描画している。この図を見ると P.S.C.N モデルだけの左図ではき裂が負値の角度に向かって進展しており実験結果と定性的に大きく異なっている。一方、S.C.N を加えたモデルではき裂が正值の角度に向かって進展しており実験結果との定性的一致が見られる。これは以下のように説明できる。ボイドの発生が母材金属と介在物との剥離で起きることを考えると、引張負荷下のもとではその界面を引っ張る作用が働き剥離が起りやすくなることを想定している。すなわち引張静水圧発生下のもとでボイドが発生しやすくなる S.C.N モデルを導入することでより実現現象に近づくことを示している。そのため S.C.N モデルを加えると応力三軸度の高い方向に向かってき裂が進展する結果となる。

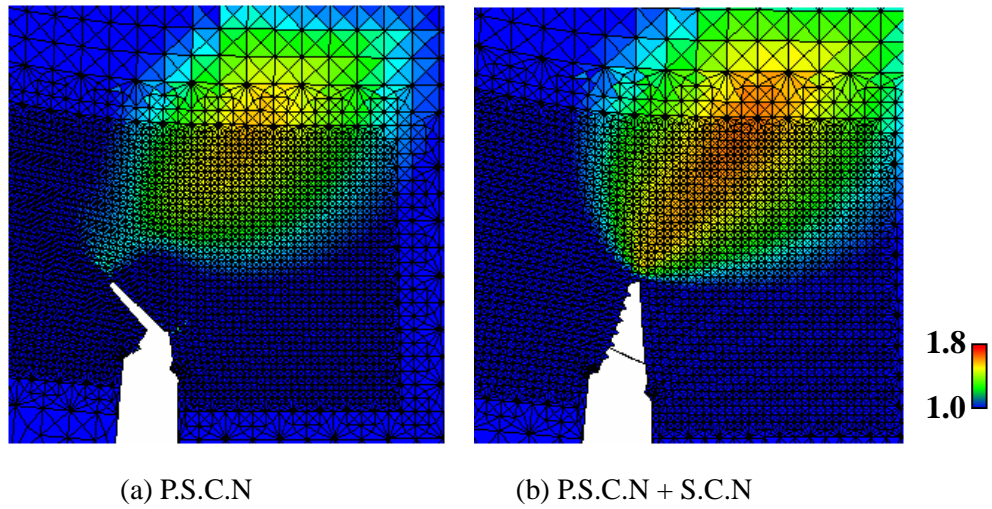


Fig. 5.2.6 Crack growth direction by Gurson model with distribution of stress triaxiality

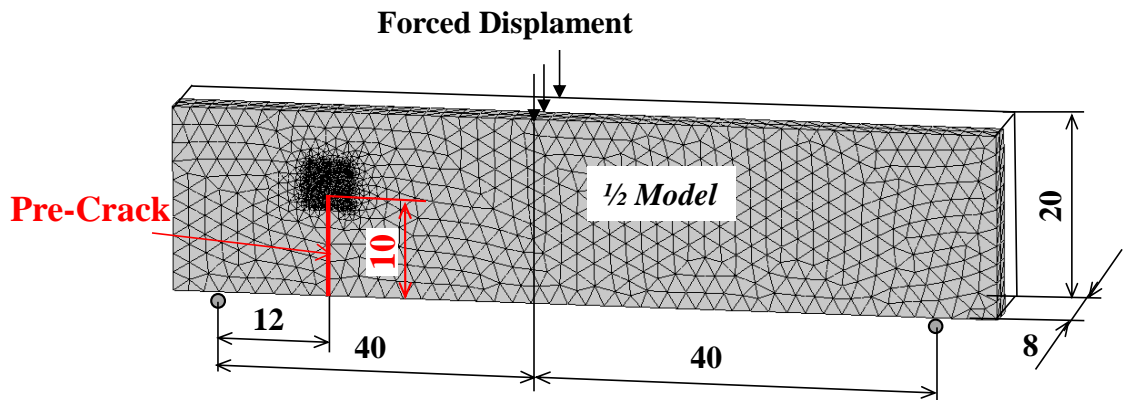


Fig. 5.2.7 Measurements of FE model

では連続体損傷力学に基づく損傷モデルではどのような挙動を示すのか調べた。図 5.2.7 に示すような 3 次元モデルを作成した。ただし板厚方向の対称性を考慮して全体形状の 1/2 モデルを作成した。支持ピンは変位拘束で模擬したため支持点が滑ることはないので実試験片の R 部は省略した。図 5.2.8 から図 5.2.10 までの図は図 5.2.7 の紙面手前から見た時のき裂先端進展状態を応力三軸度の分布と共に示したものである。左図は板厚表面の状態を示し、右図は板厚中央面の状態を示す。前節の Mode I 貫通き裂問題の時と同様に板厚表面は平面応力状態になるため比較的低い応力三軸度になっている。一方、板厚中央面では $+\theta$ 側に応力三軸度の高い領域が見られその方向にき裂が進展している様子が見られる。

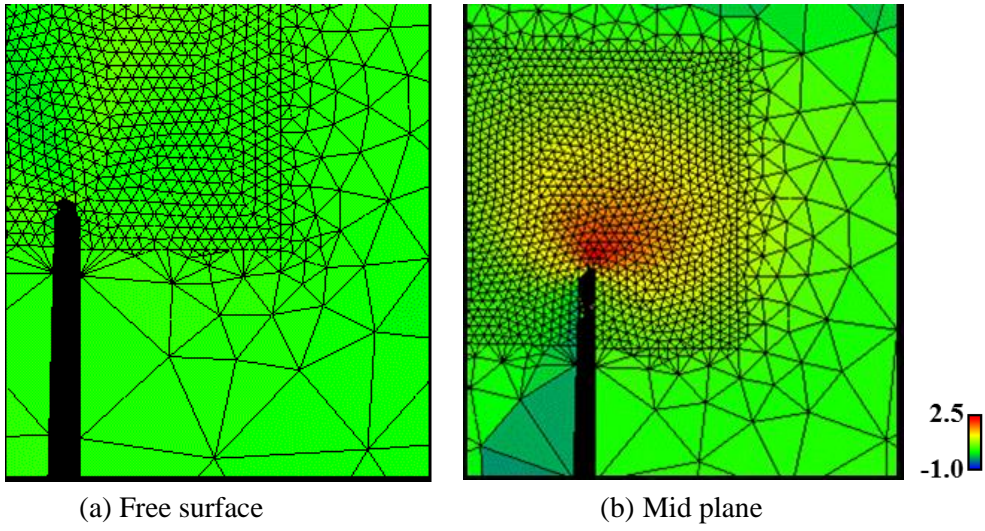


Fig. 5.2.8 Stress triaxiality(Crack length=0.2 mm)

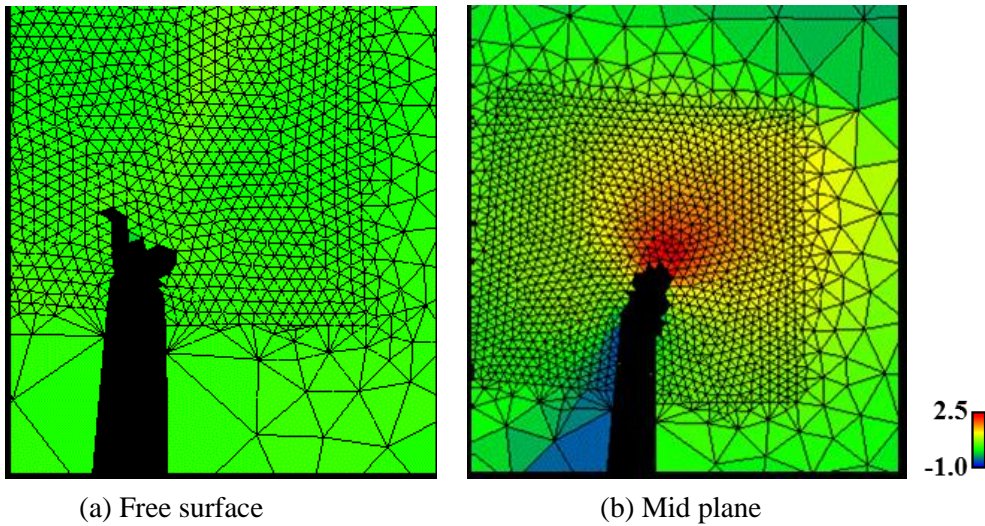


Fig. 5.2.9 Stress triaxiality(Crack length=1.0 mm)

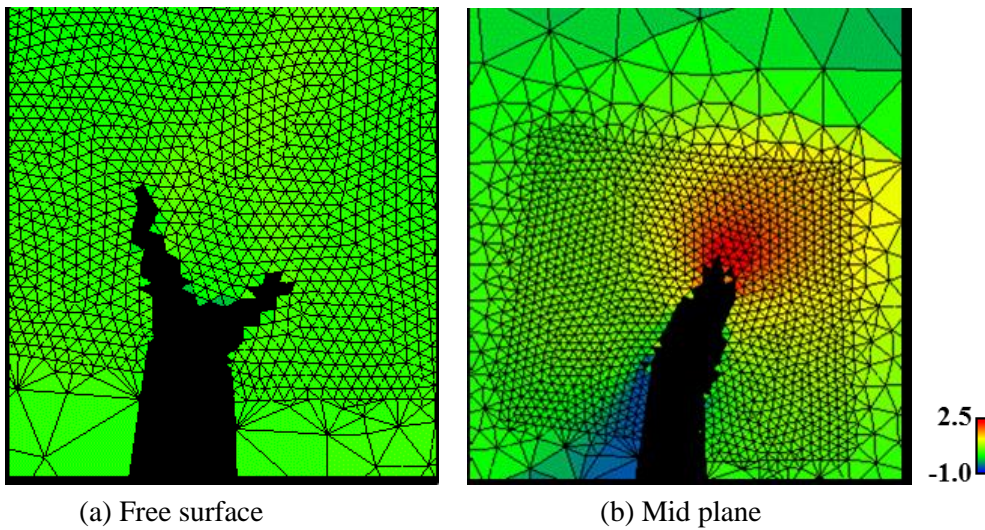
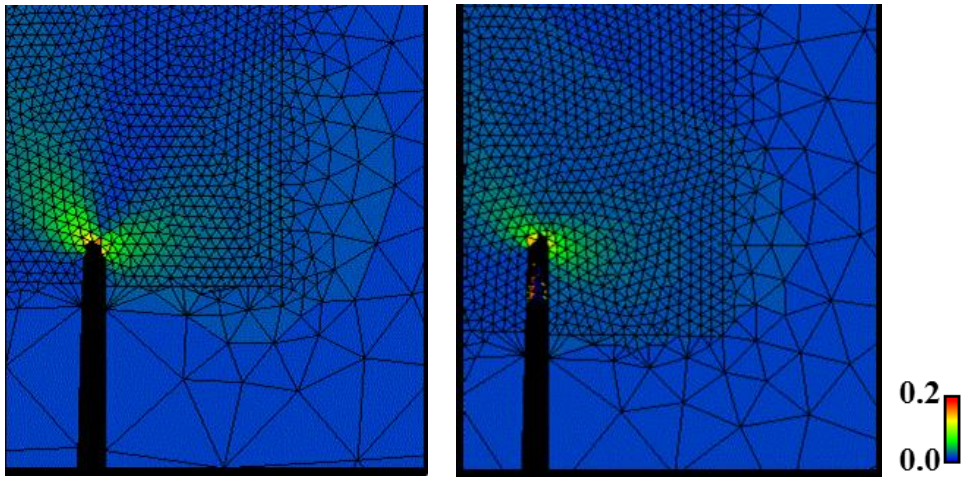


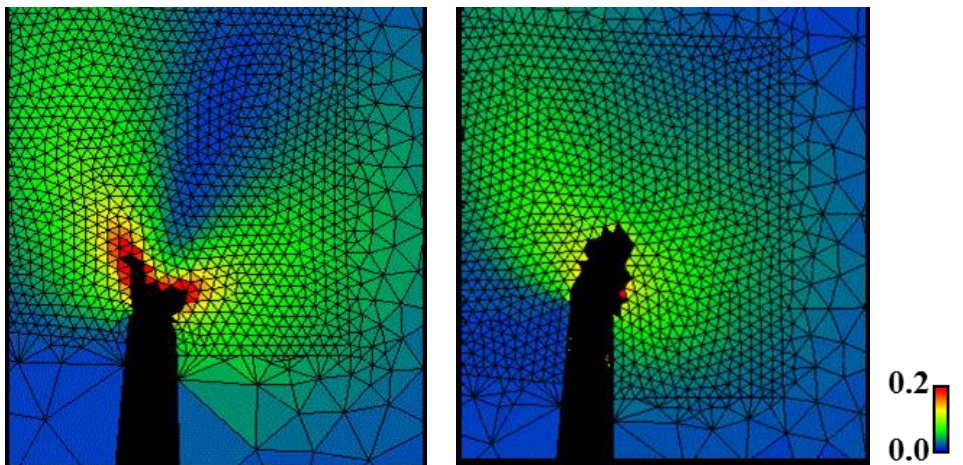
Fig. 5.2.10 Stress triaxiality(Crack length=2.0 mm)



(a) Free surface

(b) Mid plane

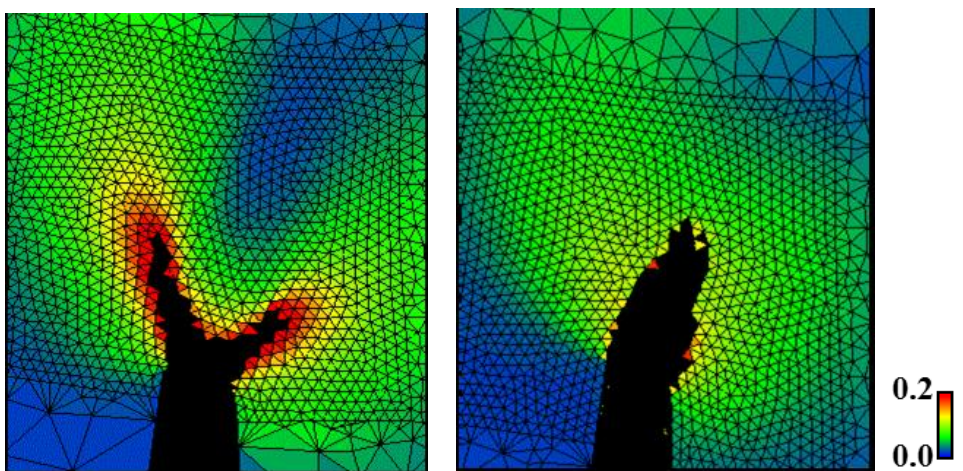
Fig. 5.2.11 Equivalent plastic strain(Crack length=0.2 mm)



(a) Free surface

(b) Mid plane

Fig. 5.2.12 Equivalent plastic strain(Crack length=1.0 mm)



(a) Free surface

(b) Mid plane

Fig. 5.2.13 Equivalent plastic strain(Crack length=2.0 mm)

これは損傷発展則が式(3.3.24)と損傷エネルギー解放率を用いて記述され損傷エネルギー解放率は式(3.3.39), 式(3.3.40)のように応力三軸度関数で記述される. すなわち応力三軸度の高い箇所ほど損傷が発達しやすい傾向を示す. このため連続体損傷力学モデルは前述した Gurson モデルの応力支配型のポイド発生モデルが考慮されていることに近いモデルとなっている. よって板厚中央面で $+\theta$ 方向のき裂進展が見られが実験結果に定性的に一致する.

図 5.2.11 から図 5.2.13 までの図はき裂進展に伴う相当塑性ひずみの分布をしめしたものである. 左図は自由表面における図で, 右図は板厚中央面における図を示す. 板厚中央面ではき裂先端でも相当塑性ひずみが特に大きくなくてもき裂が進展する. これは前述したように板厚中央面では応力三軸度が高くなりそれによる損傷発展が顕著に表れるためである. このことから相当塑性ひずみのみで延性破壊を評価することは簡易評価であってもその信頼性が低いと考えられる. 一方, 板厚表面では平面応力状態となり面法線方向の応力成分が必ずゼロになるためその他の応力成分との差が大きくなる. その結果, 応力の滑り成分が増大し相当塑性ひずみが高い値になる. 損傷発展則は式(3.3.24)のように相当塑性ひずみ増分に比例しているため, 相当塑性ひずみの高い領域に向かってき裂が進展する. また板厚表面では実験のよういき裂が2方向へ分岐するシャリップ破壊が見られた. このき裂進展角度を計算し実験結果と比較したものが図 5.2.14 である. 自由表面ではき裂が $-\theta$ 側と $+\theta$ 側に分かれるため図中にそれぞれ分けて示した. これを見ると板厚中央面および自由表面において若干の定量的な差は見られるものき裂進展角度が $-\theta$ 側, $+\theta$ 側のどちらを向いているかなどの定性的な傾向は良く一致している.

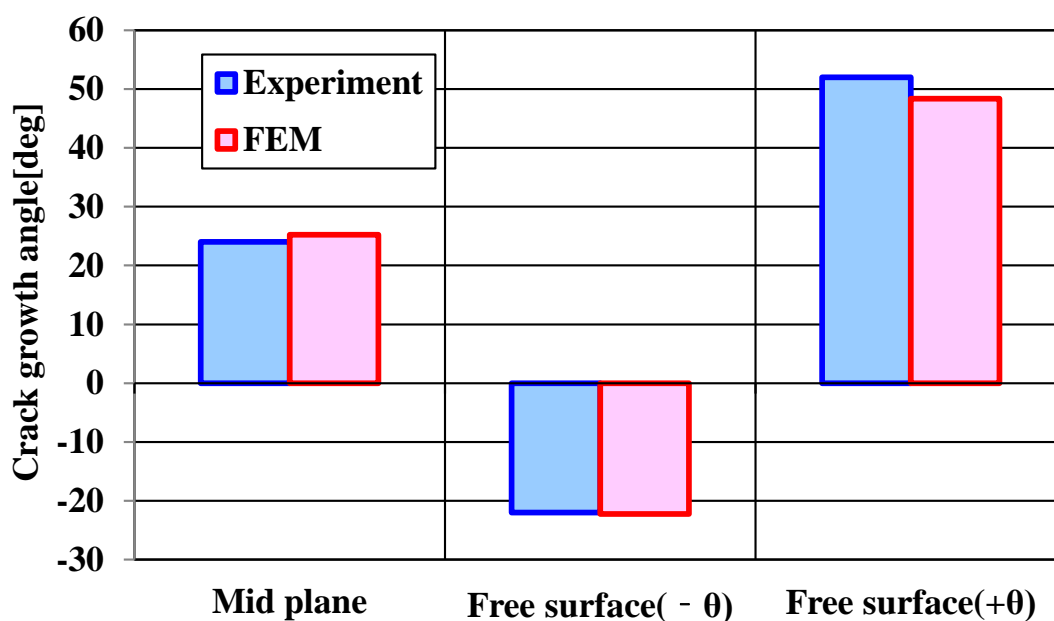


Fig. 5.2.14 Crack growth angle

前節から Mode I 貫通き裂でシャリッパ破壊を含む問題と本節で混合モード問題を扱いき裂進展問題の基礎的な振る舞いについて実験と解析から比較してきた。その結果、連続体損傷力学に基づくモデルがこれらのき裂進展挙動を十分に表現することが可能であることが分かった。基礎的なき裂進展問題に対する連続体損傷力学による検証をここまで調べた事例が過去になかったため本研究で詳細に調べた。実構造物に存在するき裂は板厚効果を含む拘束効果の違いや様々な混合モード負荷下にあることが一般的であるが、それは前節から示してきたき裂負荷環境の組み合わせとして考えることができる。そのため本研究の基礎検証によりモデルの妥当性を示したことは連続体損傷力学を実構造物への適用可能性を大きく広げ、解析の信頼性を高めるものである。これまでの例では Mode I と Mode II との混合モード問題を扱ってきた。今後の課題として面外せん断負荷の Mode III についての詳細な検証が挙げられる。

本節の最後にこれまで扱ってきた以下の3つのモデル

- Mode I の板厚 2mm モデル：シャリッパ破壊領域が支配的である問題
- Mode I の板厚 8mm モデル：ディンプル破壊領域が支配的である問題
- 混合モード問題

について 68 ステップ進展させるまでに要した残差力の収束性について述べる。図 5.2.15 の横軸は荷重増分ステップを示し、各荷重増分ステップでは静的な力学的釣り合い状態が解となる。そのために非線形の剛性方程式を Newton 法で解き、残差力を収束要した反復回数を縦軸に示す。また最終ステップ時点でのき裂進展状態も同図に示し、どのモデルでもき裂が大きく進展した状態である。また全節点うち残差力の最大値が 1.0×10^{-4} N に達した状態を収束状態と定義した。

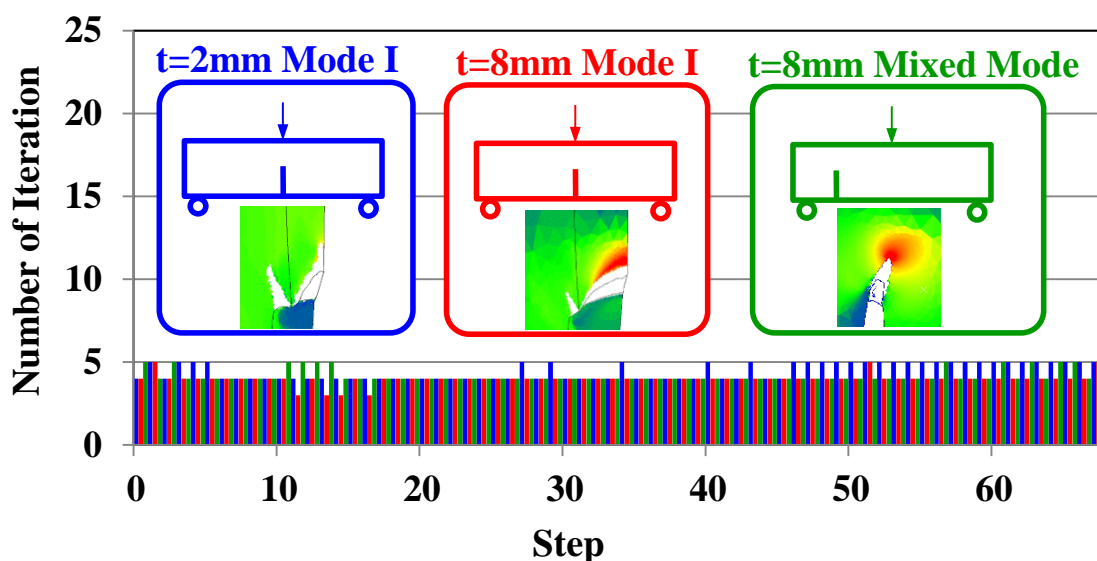


Fig. 5.2.15 Number of iteration to converge residual force error

図 5.2.15 を見るとどの計算ステップでも 3~5 回の反復で釣合い状態が得られている。Simo ら(Simo and Taylor, 1985)は検証によると弾塑性構成則を前進形 Euler 積分と後退形 Euler 積分で解き残差力の収束性を比較した。その結果、前進形 Euler 積分では釣合い状態を得るために数十回もの反復を要し後退 Euler 形積分では数回のみ反復で収束解を得られることを示した。図 5.2.15 で示す問題においてわずか 3~5 回で収束解が得られる理由は第 3 章で述べたように本研究で提案する損傷弾塑性モデルを後退形 Euler 積分による陰解法で解いているためである。さらに図 5.2.16 は最終ステップにおける残差力の遷移を示したものである。反復回数に対して振動、発散することなく安定して収束している。

第 3 章で示した損傷弾塑性のモデル化で本研究が飽くまで陰解法にこだわった最大の理由はここで示したように優れた残差力収束性を持たせるためである。なぜなら非線形剛性方程式を解くための反復計算は反復ごとに線形化した全体剛性方程式である大規模な連立一次方程式を解く必要があり FEM の計算で最も計算時間を要する箇所となるためである。すなわちここでの反復回数の削減が計算時間を大幅に削減することができるため本研究では陰解法の定式化にこだわった。

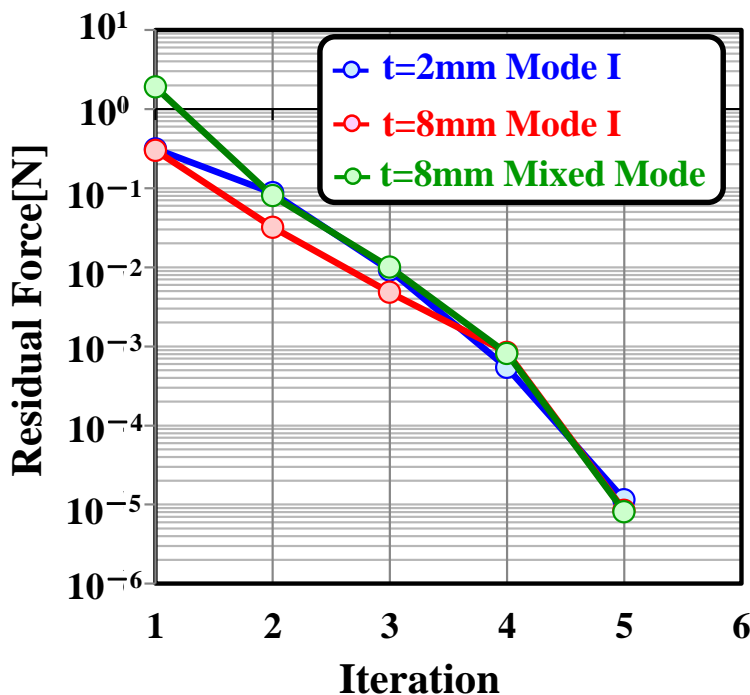


Fig. 5.2.16 Transition of residual force in final step by Newton scheme

さらに図 5.2.15 で 68 ステップまでを示した理由は次のステップにて計算が収束しなかったためである。この理由として本研究では破壊判定を積分点毎に定義し、損傷値が破壊時の値 D_c に達した時点でその積分点の剛性と応力積載能力を極端に低下させて表現している。応力の支持能力はないため力学的には要素を除去した状態と殆ど等価な状態となる。しかし要素そのものは除去していないため、き裂開口が大きくなると破壊要素が激しく変形し要素行列の **Jacobian** が負値になってしまうことで剛性方程式の収束性が悪化し解が得られない場合がある。この破壊要素の取り扱いについては今後の課題とするが、想定している解決策として要素内の全ての積分点で破壊判定が付いた要素の要素剛性を全体剛性行列へ組み込まずに、さらに浮遊節点の変位を拘束することで安定に計算できるのでプログラムの大幅な改造を要さずに解決できるのではないかと考えている。

5.3 段違い貫通き裂

これまでには単一き裂のき裂進展挙動について述べてきた。本節では複数のき裂が存在する時のそれらの相互作用について検証する。材質は SM400A 鋼である。この材質を用いた単軸引張試験の応力ひずみ曲線は既存の研究により測定されたものを用いる (Bezensek and Miyazaki, 2008; Miyazaki, et al., 2009)。図 5.4.1 は局所くびれが起きるまでの真応力-真ひずみ曲線の実測値と計算値であり図 5.4.2 は公称応力-公称ひずみ曲線を示す。青点は実験値を示し、赤点は実験結果にフィットするように材料定数を同定した計算結果である。用いた材料定数を表 5.4.1 に示す。この材料定数を用いて 1 回負荷のき裂進展挙動について実験と計算との比較を行う。

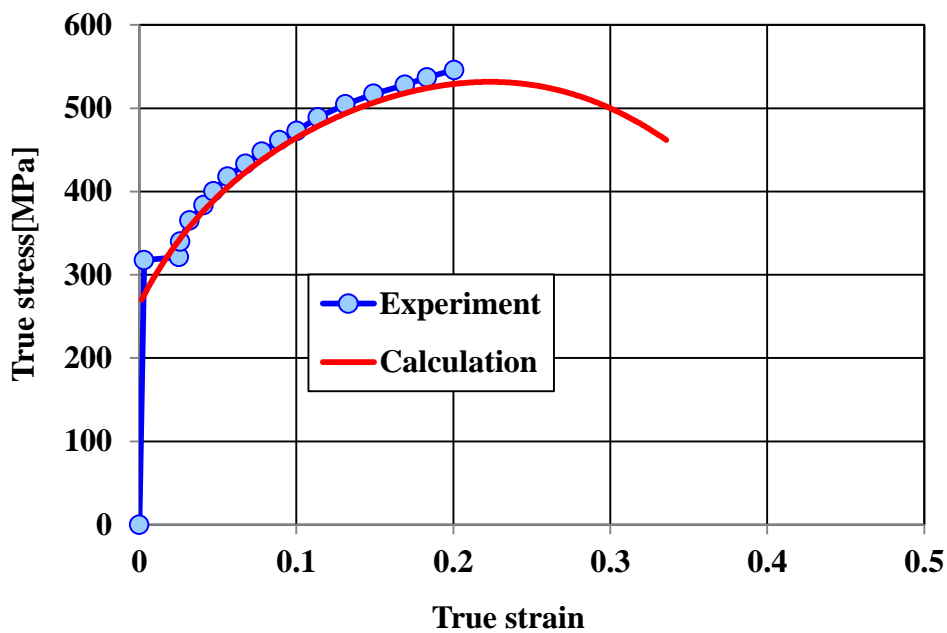


Fig. 5.4.1 True stress-true strain curve
(Bezensek and Miyazaki, 2008)

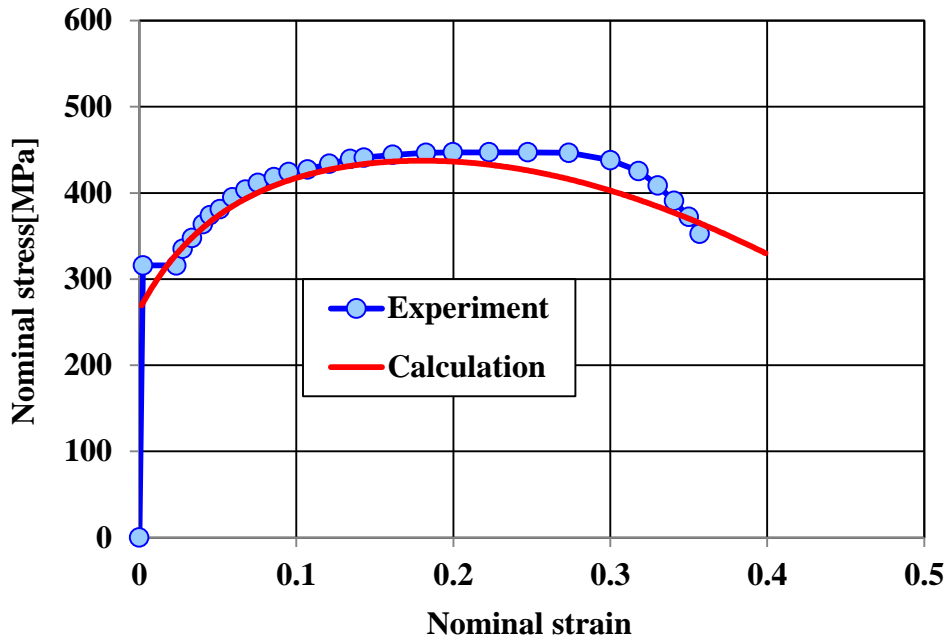


Fig. 5.4.2 Nominal stress-nominal strain curve
(Bezensek and Miyazaki, 2008)

Table 5.4.1 Material constants

Young's modulus	E [GPa]	200.00
Poisson's ratio	ν	0.30
Initial yield stress	σ_{y0}	270.00
Isotropic hardening constants	A_1 [MPa]	200.00
	B_1	1.00
	A_2 [MPa]	250.00
	B_2	5.00
Kinematic hardening constants	a_1 [MPa]	800.00
	b_1	25.00
	a_2 [MPa]	666.66
	b_2	25.00
Damage constants	S	6.00
	r [MPa]	0.80
	h	0.00
	D_c	0.24

図 5.4.4 は宮寄らによって実施された SM400A 鋼を用いた複数き裂材の試験片形状である。青線はき裂を示す。Type A は左右対称に 3 つのき裂が配置されている。また Type B は反対称に 2 つのき裂が配置されている。ただしき裂は貫通き裂である。この試験片を用いて Type A には 5 mm の強制変位で引張り、Type B には 27 mm の強制変位を与えて引張った。その結果として得られたき裂周辺部の変形が図 5.5.5 である。Type A ではそれぞれのき裂が大きく開いているもののき裂同士が合体する事はなかった。一方、Type B では 2 つのき裂の内側き裂が進展し結果として同士が合体した。また外側にもき裂進展が見られた。

このき裂進展挙動を損傷力学で計算し、上に述べた定性的振る舞いを表現できるか検証した。作成した有限要素モデルについてき裂周辺のメッシュ分割を図 5.5.6 に示す。き裂進展の相互作用を調べるために Type A では初期き裂の間は均一に 0.1 mm の細かな要素寸法で分割した。一方、Type B については実験ではき裂同士の内側と外側にき裂が進展するため、2 つのき裂を含む 1 つの大きな領域について 0.1 mm の細かな要素寸法で分割した。またどちらのモデルも四面体 2 次要素を用いている。このモデルを用いて連続体損傷力学による損傷弾塑性解析を行いき裂進展の様子を調べた。

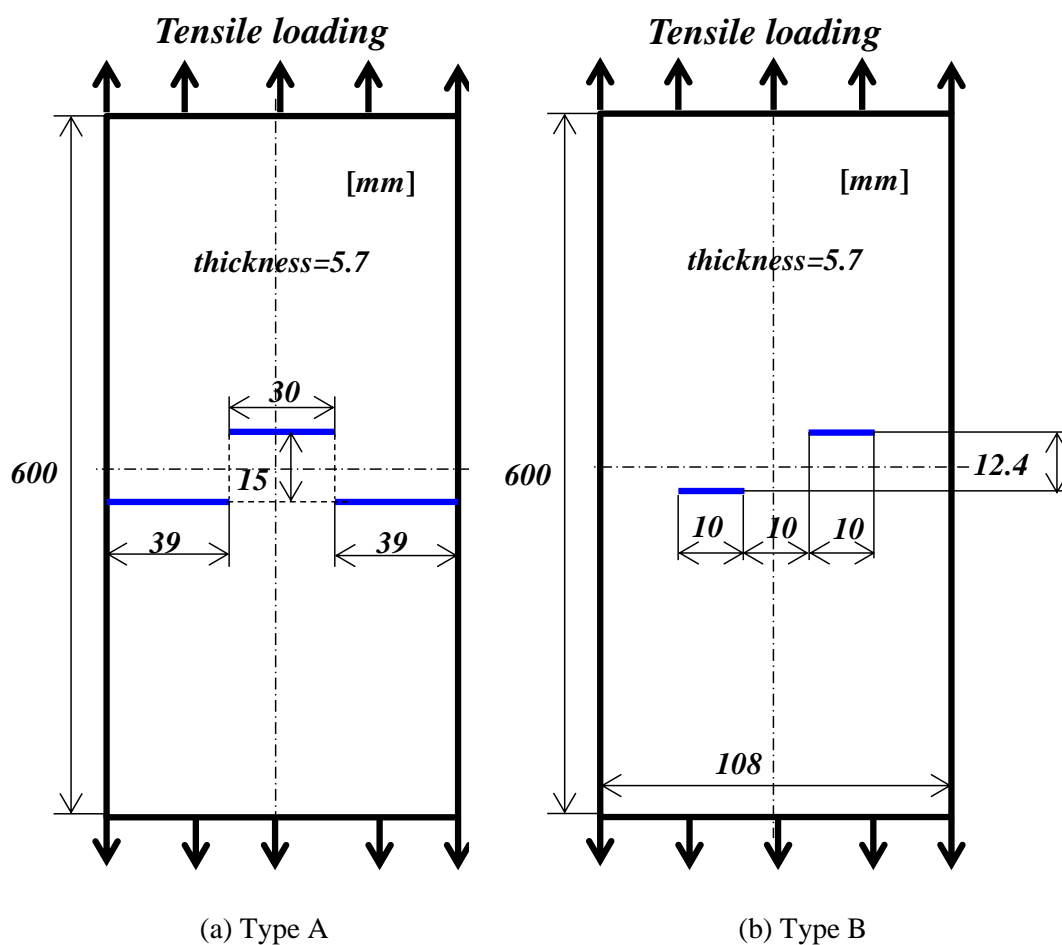
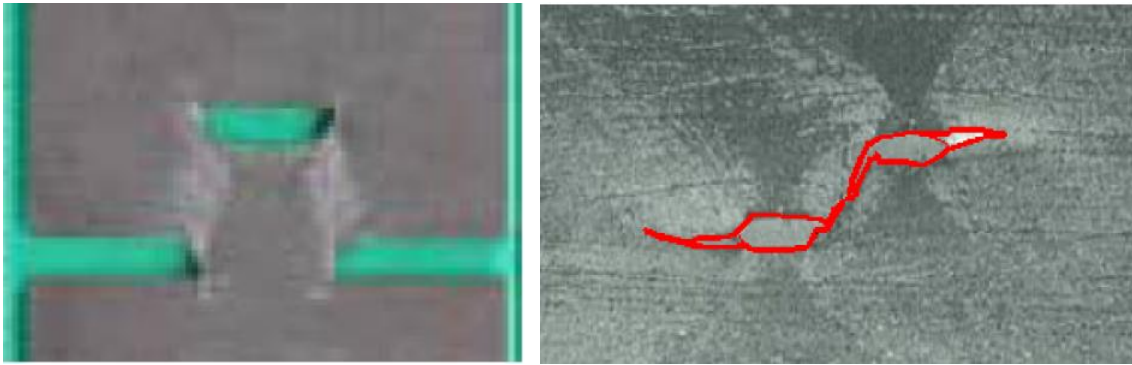


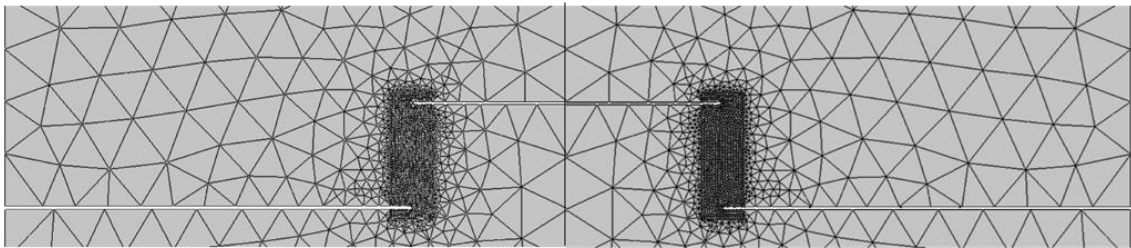
Fig. 5.4.4 Measurements of specimen



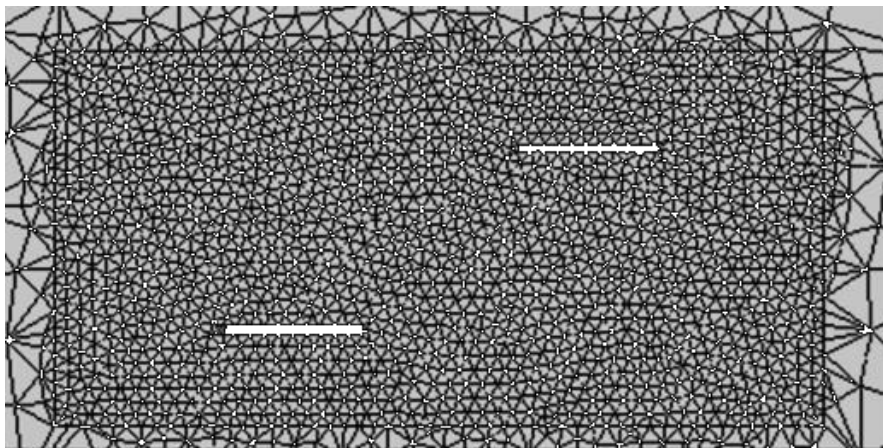
(a) Type A(Not coalesce)

(b) Type B(Coalesce)

Fig. 5.5.5 Interaction among cracks
(Miyazaki, et al., 2009)



(a) Mesh model of type A



(b) Mesh model of type B

Fig. 5.5.6 Mesh model around cracks

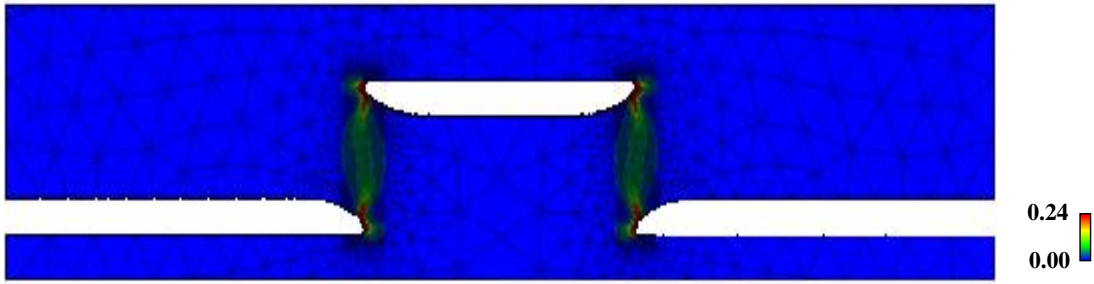


Fig. 5.5.7 Damage distribution of type A model

図 5.5.7 は Type A モデルの解析を行い最終ステップにおける損傷値の分布を示したものである。き裂面が大きく開口し、き裂先端にて損傷値の高い領域が見られるもののき裂進展やき裂同士が合体している様子は見られない。実測結果の図 5.5.5 でもき裂進展は見られなかった点においてこの計算結果は定性的に一致していると言える。

一方、図 5.5.8 から図 5.5.11 までの図は Type B モデルの解析結果を各引張段階において損傷値の分布と共に示したものである。図 5.5.8 は変形初期段階であるが、き裂間の内側と外側で損傷値が高くなっているようすが見られる。さらに引張り図 5.5.9 はき裂進展初期段階である。き裂間の内側と外側でき裂が進展し始めた様子が分かる。また損傷値の分布を見るとき裂間の内側で変形が局所化し 1 本の帯状に損傷値の高い領域が見られる。さらに引張り、き裂が進展した状態が図 5.5.10 である。この図を見ると図 5.5.9 のときいき裂間の内側の損傷値が高かった帯領域において 2 つのき裂が合体した。この時にもともと独立していた小さなき裂が合体により 1 つの大きなき裂となる。さらに引張ると図 5.5.11 となり外側のき裂が進展してゆく傾向となる。最終的な全体のき裂形状は実験により得られた図 5.5.5 と良く一致している。このように連続体損傷力学を用いてき裂が合体する相互作用も表現できることが分かった。

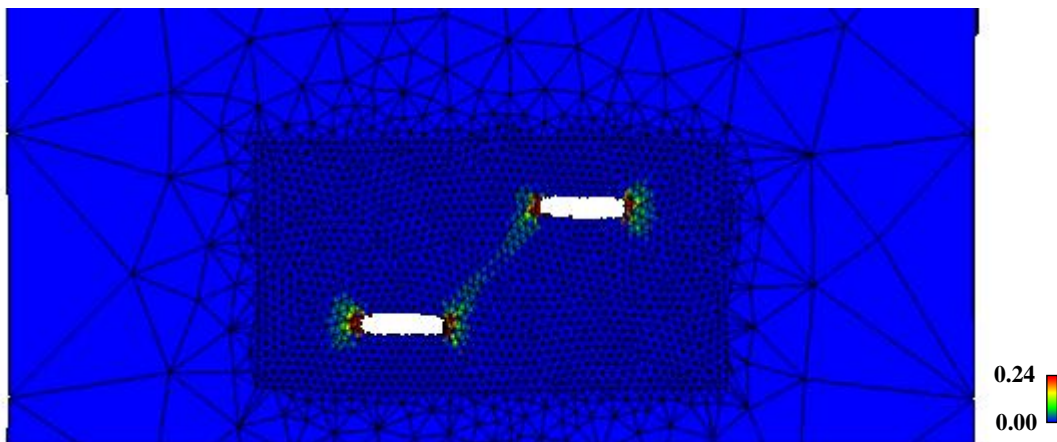


Fig. 5.5.8 Forced displacement =8 mm

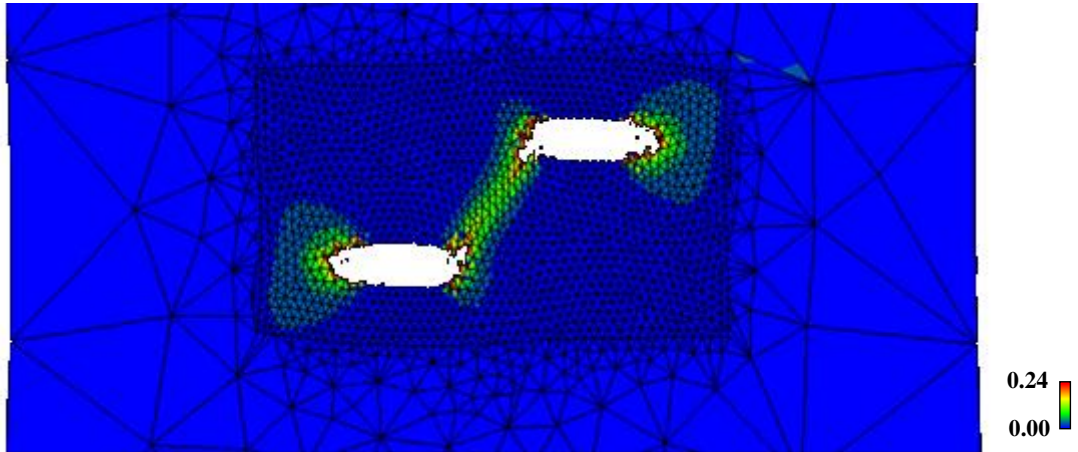


Fig. 5.5.9 Forced displacement =22 mm

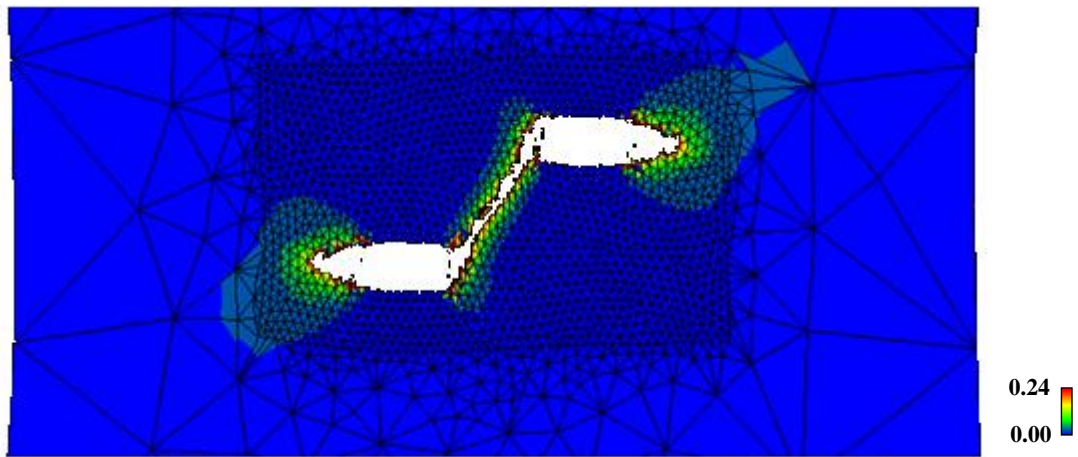


Fig. 5.5.10 Forced displacement=23 mm

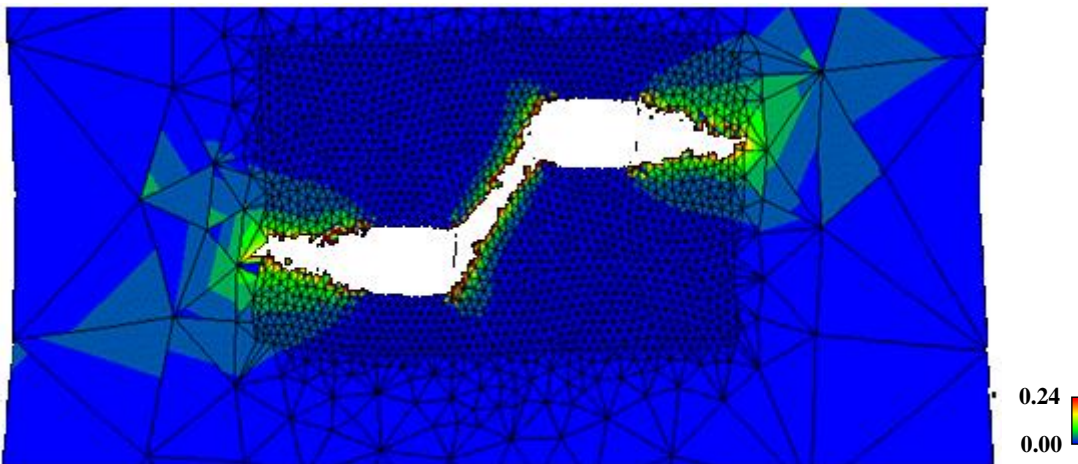


Fig. 5.5.11 Forced displacement=25 mm

5.4 段違い表面き裂

前節までにき裂進展挙動を実験結果と比較してきた。これによりシャリップも含めた単一き裂のき裂進展や混合モード負荷下におけるき裂進展や複数き裂におけるき裂合体など基礎的なき裂進展挙動について実験結果と良く合うシミュレーションが可能であることが分かった。さらに実用的な問題として以下を考える。圧力容器や配管などでは定格負荷による小さな荷重により材料表面からき裂が発生し、この負荷の継続により高サイクル疲労により表面き裂が生成される。ここで負荷が大地震などにより大負荷に変化する問題を考えるとこの問題は初期表面き裂を含む延性破壊問題として取り扱うことができる。そこで本節では前節で取り扱った SM400A 鋼の材料特性を用いて段違い表面き裂問題を扱う。ただし実験結果を所持していないため、ここでは有限要素法の計算による定性的な振る舞いの結果についてのみ示す。

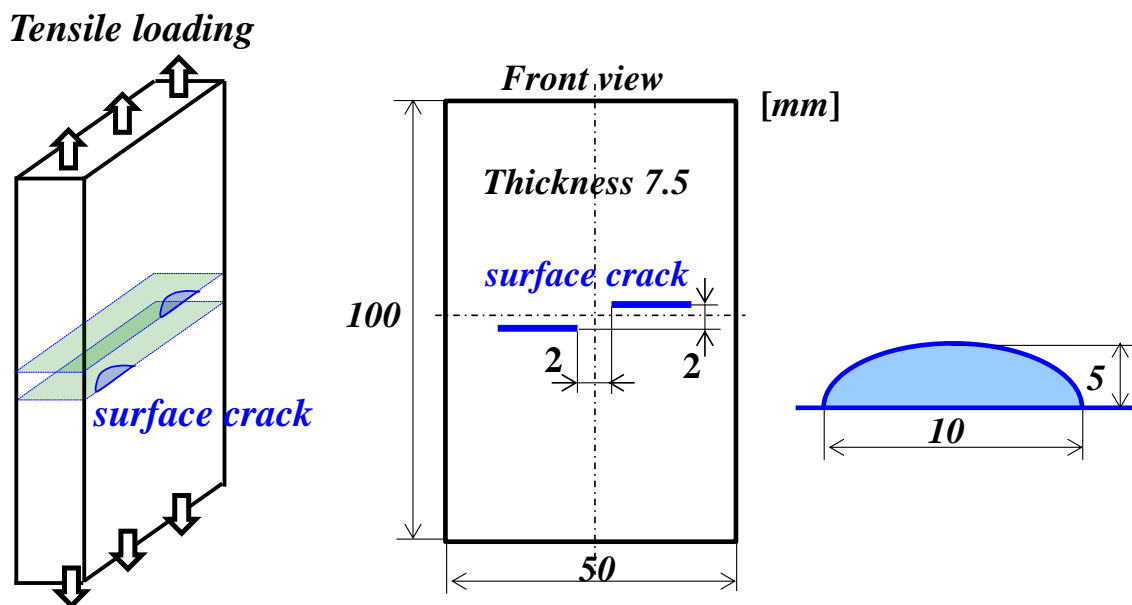


Fig. 5.5.1 Measurements of double surface crack model

図 5.5.1 は段違い表面き裂の全体形状と詳細寸法を示す。ここではアスペクト比として $5\text{ mm}/10\text{ mm}=0.5$ の半楕円状き裂を 2 つ導入した。段違いの高さ幅は 2 mm 、水平距離を 2 mm とした。この部材に対して 1 回引張荷重を掛けてき裂の相互作用を調べる有限要素解析を行う。図 5.5.2 に作成した要素モデルを示す。2 つの表面き裂を含む外側 5 mm 領域まで要素寸法 0.2 mm の細かな要素領域を作った。この細かな要素領域はき裂導入面からその板厚方向の裏側面まで作成している。また四面体二次要素を用いた。

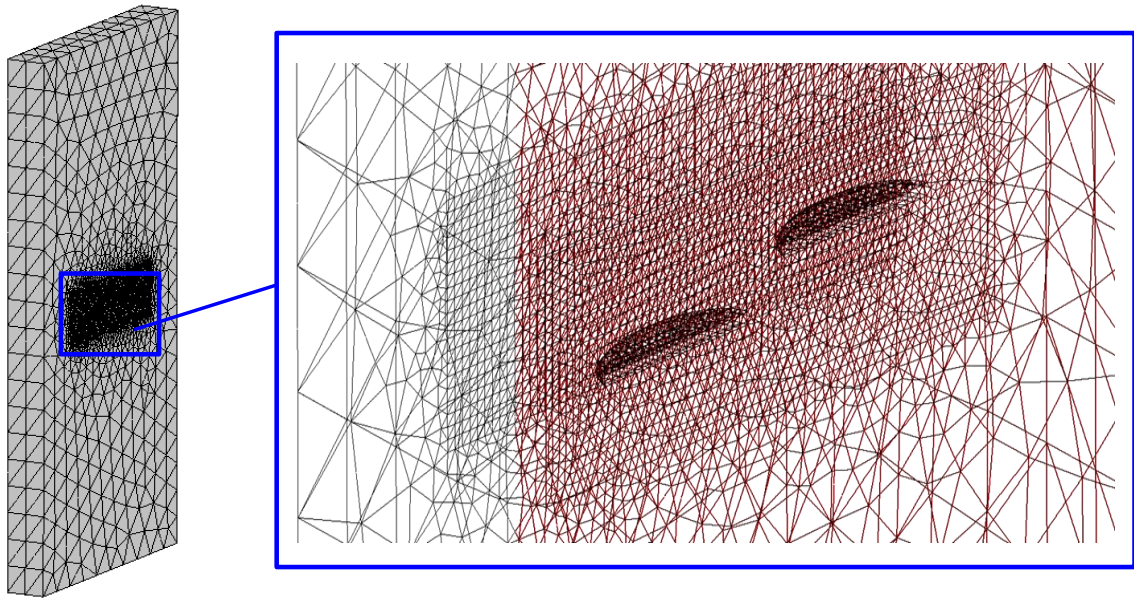


Fig. 5.5.2 FE model including double surface crack

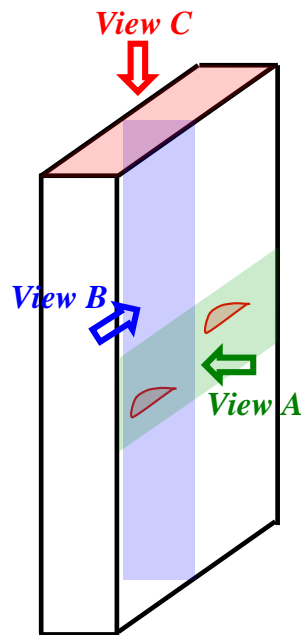


Fig. 5.2.3 Definition of view and corresponding section

図 5.2.3 は以後に結果を示すにあたり 3つの描画断目と視線方向を定義したものである。ViewA はき裂導入面(緑面)を真正面方向(緑矢印)から観察する視線を示す。また ViewBは2つの表面き裂同士を縦に分割した断面を青矢印の方向から観察する視線である。さらに ViewCは上面(赤面)の上方向から(赤矢印)破壊要素のみを透過して観察する視線である。これら3つの視線からき裂進展挙動を調べた。

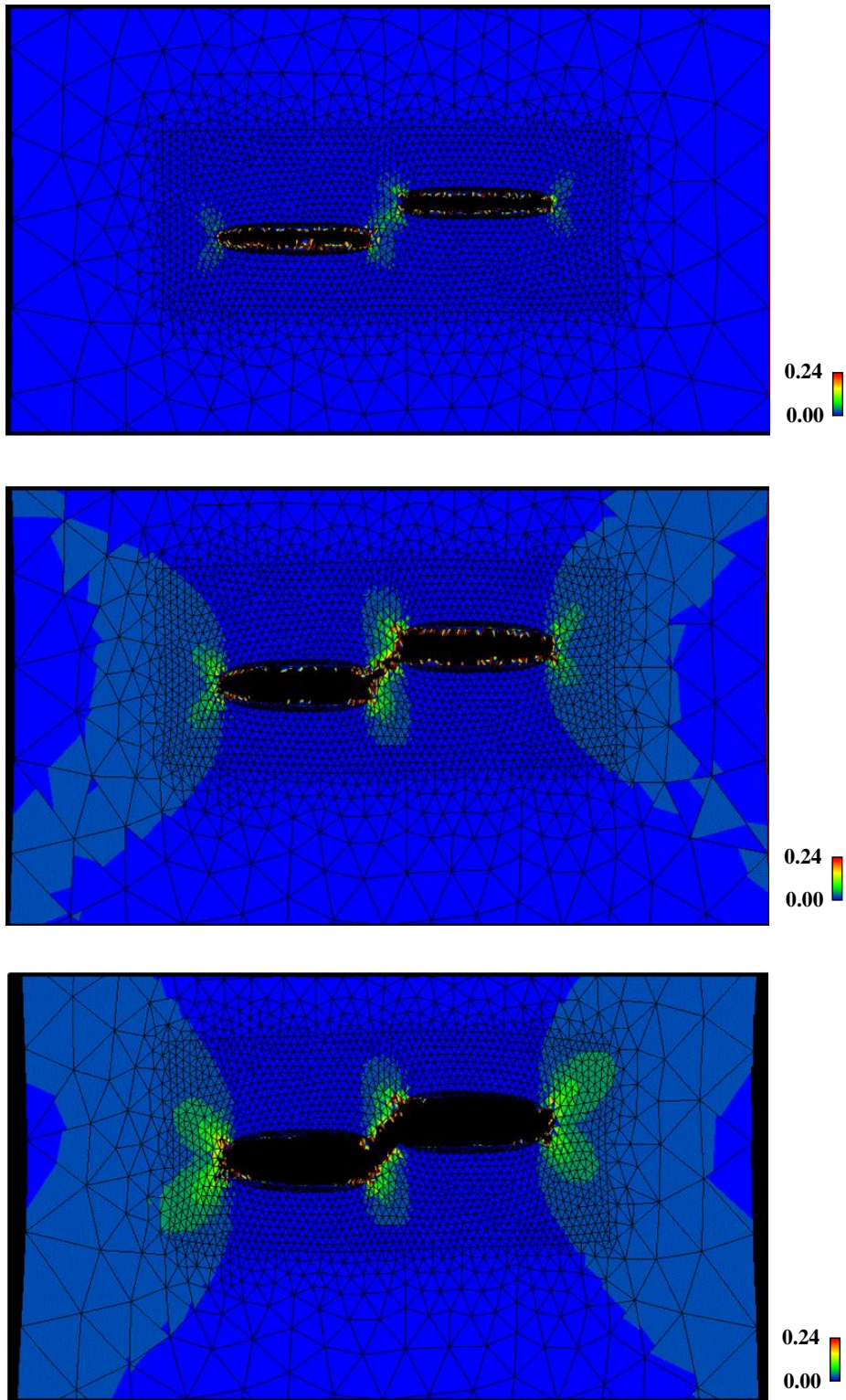


Fig. 5.2.4 Crack growth on the view of A with damage distribution

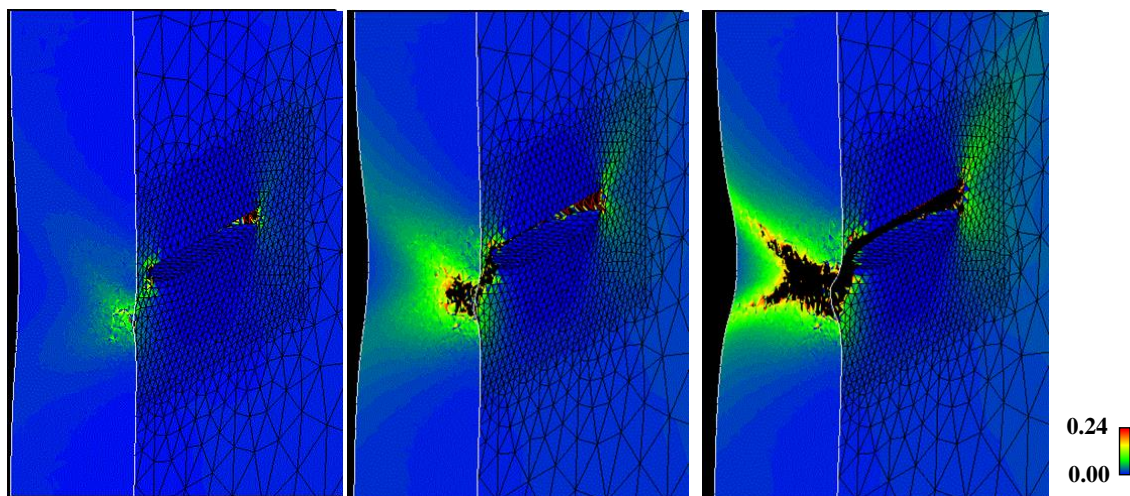


Fig. 5.2.5 Crack growth on the view of B with damage distribution

図 5.2.4 は ViewA(き裂導入面)見たき裂進展の各段階について損傷値の分布を示したものである。上図はき裂進展直後の状態を示すが、前節の段違い貫通き裂の時と同様にき裂同士の内側にて損傷値の高い領域が見られる。このまま負荷を掛け続けると中央図のようにき裂同士の内側でき裂が合体する。さらに引張続けると今度はき裂同士の外側にてき裂進展が生じる。このような大まかなき裂進展の振る舞いは段違い貫通き裂と類似している点が見られた。

次に ViewB(幅方向面)から見たき裂進展の様子を図 5.2.5 に示す。左図はき裂進展直後の状態を示し、中央図はき裂が合体した直後、右図は破断直前状態を示す。この視点は主に板厚方向におけるき裂進展の様子を示すが、き裂が合体した後のこの面におけるき裂は片側の自由表面でき裂が存在し、その反対側の面ではき裂が存在せず CT 試験片が受ける負荷に近い状態となっている。そのため片側のき裂が次第に進展し最終破断段階では平面応力状態である自由表面に向かって進展するためせん断破壊が支配的となる。このモデルは単軸引張負荷を与えているため、最終段階のせん断破壊は単軸負荷における最大せん断応力の向きである $\pm 45^\circ$ に近い向きで生じる。このため最終破断における自由表面近傍では傾斜破壊領域であるシャリップ破壊が形成されることが考えられる。この最終破断挙動は延性材料を用いた丸棒引張試験でしばしば観察されるカップアンドコーン破壊と類似した振る舞いであると考えられる。

さらに ViewC(上方向面)から見たき裂進展の様子を図 5.2.6 に示す。ここでは非破壊要素は非表示として破壊した要素のみを赤色で示す。この描画処理により 2つの半楕円表面き裂の相互作用が見やすくなる。この図によるとき裂進展直後(上図)はき裂前縁において一様な破壊領域が見られる。その後、き裂が合体しき裂が成長するとともに独立していた 2つの半楕円き裂が 1つの大きな半楕円き裂に近づいてゆく傾向が見られる。

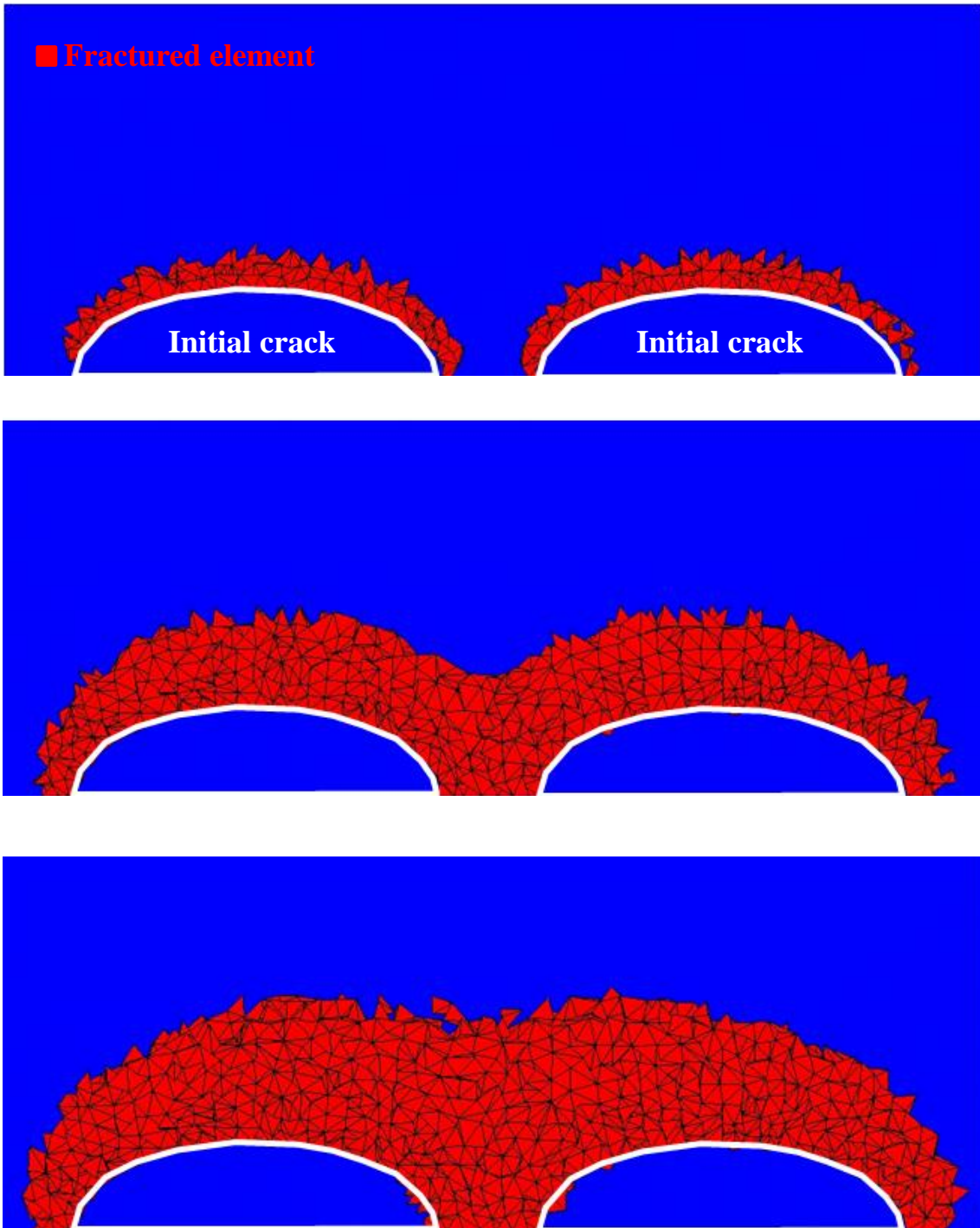


Fig. 5.2.6 Fractured element on the view of C

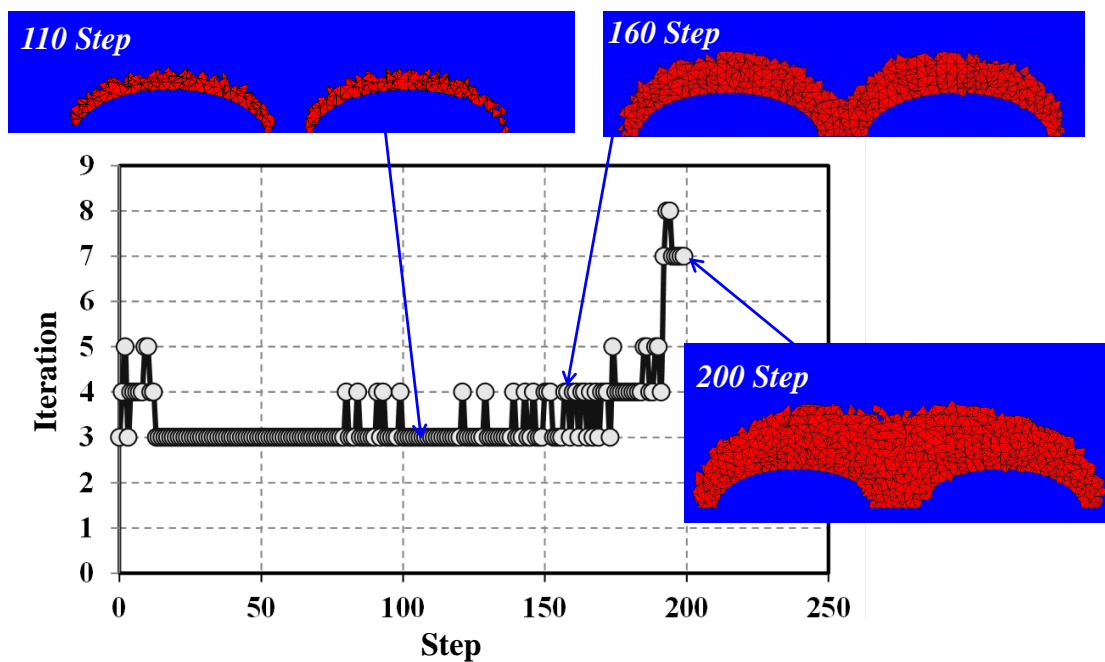


Fig. 5.2.7 Iteration to converge residual force

このような振る舞いは高サイクル疲労き裂で観察された報告(Kikuchi, et al., 2011)があるがこのように延性破壊においても同様の振る舞いが数値的に示されたことは非常に興味深く、今後実験による詳細な観察が課題として考えられる。

図 5.2.7 は本節で取り扱った段違い表面き裂問題の各計算ステップで釣合い状態を得るために非線形剛性方程式の求解に要した反復回数を示す。最終破断状態までわずか 200 ステップで解くことができた。また各々のき裂進展初期段階からき裂の合体初期段階までは大よそ 3~5 回の反復で求解することができた。また最終破断状態では最大 8 回の計算を要した。これは最終破断状態に近づくほどき裂先端から自由表面までの断面積が少なくなり 1 ステップあたりの応力変化量が大きくなることや図 5.2.5 のように板厚方向に局所くびれが現れ変形の局所化により 1 ステップあたりのひずみ増分量が大きくなるためである。

5.5 円柱圧縮破壊

本節では初期き裂を含まない部材についてき裂発生からき裂進展に渡り実験結果と数値計算結果が定性的に一致するか検証した。図 5.5.1 は Saanouni によって行われた鉄材の円柱圧縮試験(Saanouni, 2008)である。初期き裂を含まない円柱について図のように上下から圧縮荷重を掛けき裂発生からき裂の進展過程を経て破断に至るようすを示している。青丸で示した部材中央でき裂が発生し、その後さらに圧縮することで赤矢印の方向にき裂が進展してゆく傾向が見られる。このような方向にき裂が進展する理由は純粋圧縮の負荷環境下では最大せん断応力が $\pm 45^\circ$ の方向を向き、その方向に向かって滑り破壊が起きるためであると考えられる。

Saanouni はこの圧縮破壊に関して連続体損傷力学による数値計算を行っている。彼のモデルでは背応力の発展則として単一の Aromstrong-Frederick 則を用いており、前進形 Euler による応力積分を実施し Continuum な接線剛性を用いた陽的アルゴリズムに基づき商用ソフトである ABAQUS/Explicit を用いて計算している。その結果として実験結果を良く表現できる結果を得ている。本研究のモデルは背応力発展則に分割背応力モデルを用い、さらに大きな時間増分でも収束性を良くするために後退形 Euler 法による応力積分とそれと整合した Consistent 接線剛性を用いている。この陰的アルゴリズムによるシミュレーションでも実験結果を定性的に再現できることを確認する。

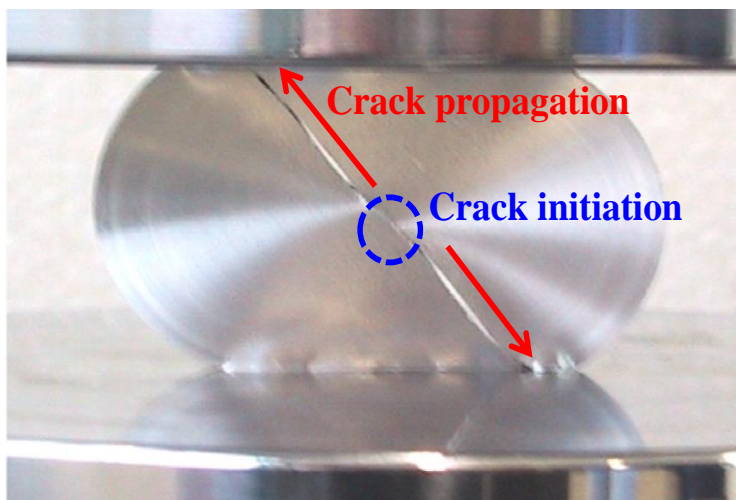


Fig. 5.5.1 Crack initiation and propagation of cylindrical specimen under compressive loading (Saanouni, 2008)

図 5.5.2 は計算に用いた四面体二次要素による形状モデルである。円柱の直径は 50 mm で厚さは 20 mm とした。また加工治具もモデル化し加工治具と円柱は接触モデルを導入した。摩擦係数は 0.1 とした。治具はヤング率 200 GPa、ポアソン比 0.3 の弾性体と

して扱った。また材料定数として表 3.5.1 を用いた。ただし **Unilateral** 効果の影響度合いとして $h=0.0$ として圧縮応力成分は損傷に寄与しないものとしている。さらに破壊時の損傷値として 0.5 を用いた。このモデルを用いて上側の治具に強制変位を掛けて円柱を押しつぶす解析を行った。下側の治具は変位固定している。

まず図 5.5.3 に非損傷弾塑性モデルにより計算した時の相当塑性ひずみ分布を示す。相当塑性ひずみは治具との接触部周辺で高くなっていることが分かる。しかしこの箇所は図 5.5.1 のように破壊起点になっていない。これは治具接触部において高い圧縮負荷が掛かるが圧縮負荷は損傷に対する影響が小さいためであると考えられる。相当塑性ひずみの値は引張と圧縮の区別がなくゼロ以上の値しか持たないので治具接触部周辺での相当塑性ひずみが高くなる。延性破壊の簡易指標や極低サイクル疲労破壊の簡易評価手法である **Coffin-Manson** 則ではしばしば相当塑性ひずみの値を用いて破壊評価がなされる。この問題に対して相当塑性ひずみによる破壊評価を行うと治具接触部が破壊起点という解釈になってしまうが、図 5.5.1 のように実際の破壊起点は円柱内部の中心部であるため異なっている。このように相当塑性ひずみによる簡便評価手法ではここで示したように問題によっては定性的な破壊起点すら予測できないこともある。

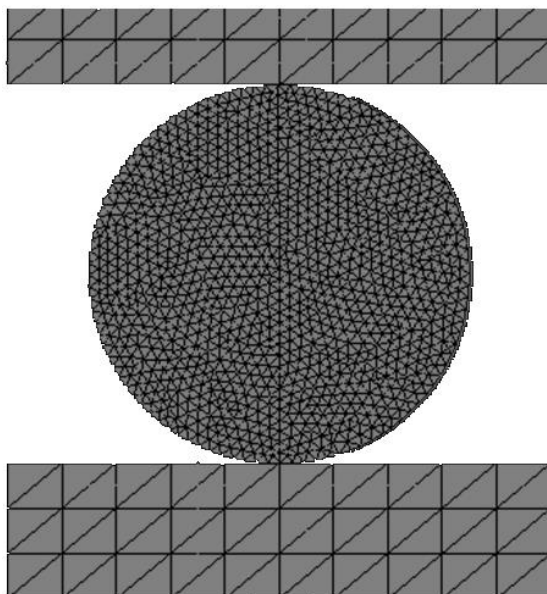


Fig. 5.5.2 Cylindrical compressive model

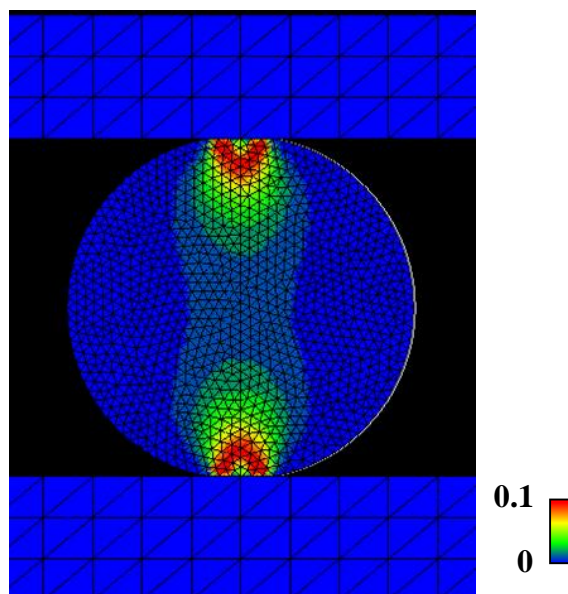


Fig. 5.5.3 Distribution of equivalent plastic strain (Undamaged model).
Enforced displacement is 3mm.

一方、損傷弾塑性モデルを用いて計算した損傷値分布を図 5.5.4 に示す。図 5.5.1 は圧縮変位量 3 mm 時点の損傷値である。治具接触部は直接的に圧縮されているものの **Unilateral** 効果を考慮したモデルであるため圧縮負荷で損傷発展は生じない。図 5.5.4(b)

ではさらに圧縮を行って圧縮変位量 7 mm 時点の損傷値を示す。この分布を見ると円柱の中心部で損傷値が高くなり実測と同様に巨視的き裂の発生(黒色部)も確認できる。これは治具接触部では摩擦により横方向の動きが拘束されるが、円柱のその他の部分は自由表面であるため左右に自由に伸びるためその結果として引張負荷が生じ損傷が発達するためであると考えられる。さらに圧縮を続け圧縮変位量 10 mm 時点の損傷値を図 5.5.4(c)に示す。この図から斜め方向の損傷値が見られる。これは圧縮負荷時の最大せん断応力方向への滑り破壊が生じているものと考えられる。そして最終的に図 5.5.4(d)のようにき裂進展が斜め方向に生じている。計算では 2 方向への斜めき裂へと進展しているが、実験では図 5.5.1 のように 1 方向への斜めき裂が生じている。これは計算上では円柱材のどこの箇所でも同一の材料特性を持たせているため損傷値の分布の対称性が比較的保たれるが、実際の材料は材料の場所ごとに材料特性のバラつきを持ちその非均質性により損傷発展の対称性が保たれず結果として損傷の高い方に偏ってき裂が進展することが理由であると考えられる。

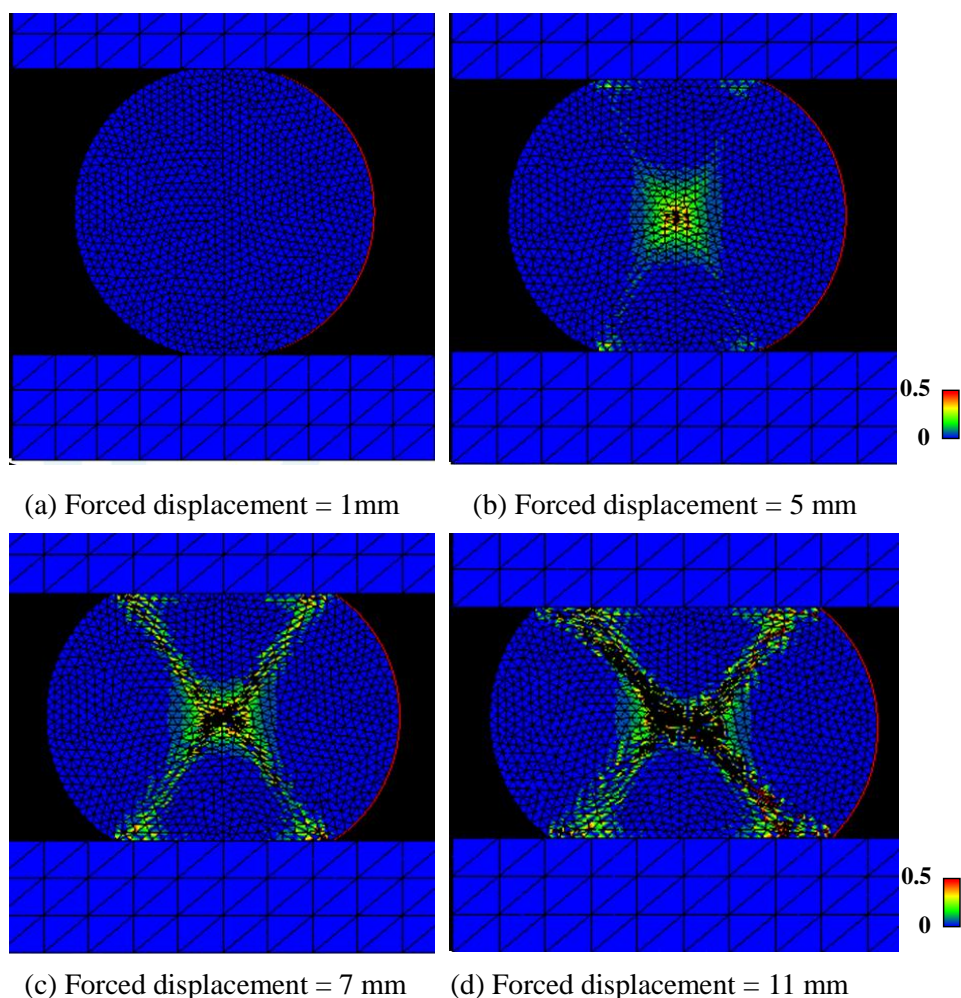


Fig. 5.5.4 Distribution of damage(Damaged model)

以上のように Sannouni による陽解法アプローチと同様に円柱圧縮問題において円柱の中心からき裂が発生し、その後斜めにき裂が進展するという定性的なき裂進展状態を本研究の陰解法アプローチでも再現することができた。陰解法アプローチでは比較的大きな増分量を取ることができるため 0.05mm の圧縮変位量を取り合計 220 ステップでこの問題を解くことができた。

5.6 動的打ち抜き破壊

本節では初期き裂を含まない板材の打ち抜き問題におけるき裂発生とき裂進展の定性的な振る舞いについて実験と比較検証した。図 5.6.1 のように平板の中心に球を衝突させる問題を取り扱う。平板の寸法は $70\text{ mm} \times 70\text{ mm} \times 2\text{ mm}$ で球の直径は 20 mm である。球を平板に衝突させる速度は 4500 mm/s としている。平板の端は固定している。また材質はアルミ合金である。この実験結果は Liu らによって行われた文献を参照した (Liu, et al., 2014)。

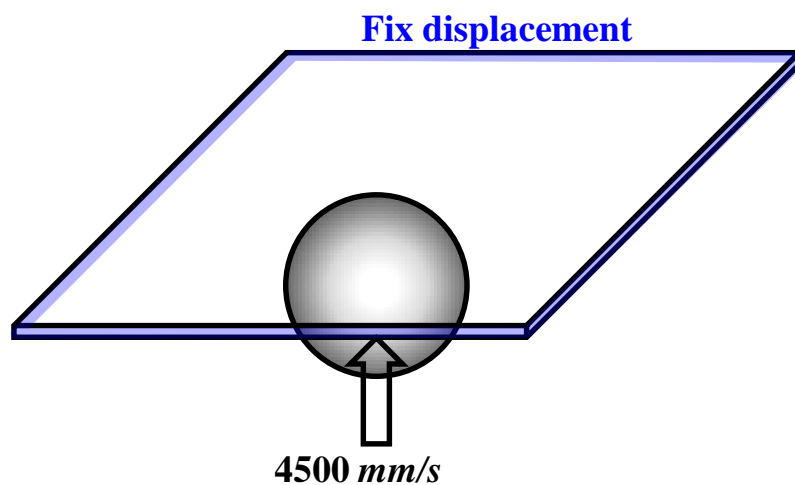


Fig. 5.6.1 Specimen of impact test

図 5.6.2 は彼らによって行われた破壊試験後の試験片の様子である。彼らの実験結果によるとき裂発生過程とき裂進展過程は次のとおりである。図 5.6.3 について平板の断面図とともに説明するとまず平板に球体が衝突し平板が凸変形する。その後、平板と球体の接触部位から周方向(青線)に沿ったき裂が発生する。さらに球体を押し付けると今度は半径方向(赤線)に向かってき裂が放射状に進展する。このような複雑なき裂発生、き裂進展挙動を連続体損傷力学による損傷モデルで表現できるか検証を行った。この問題は 1 回の大負荷による破壊なので図 5.6.4 のように単軸引張試験の応力ひずみ線図に合わせこむことで材料定数を決定した。同定した材料定数を表 5.6.1 に示す。この材料定数を用いて動的に数値計算し定性的なき裂進展挙動について実験と比較した。ただし時間の離散化には Newmark- β 法を用いている。

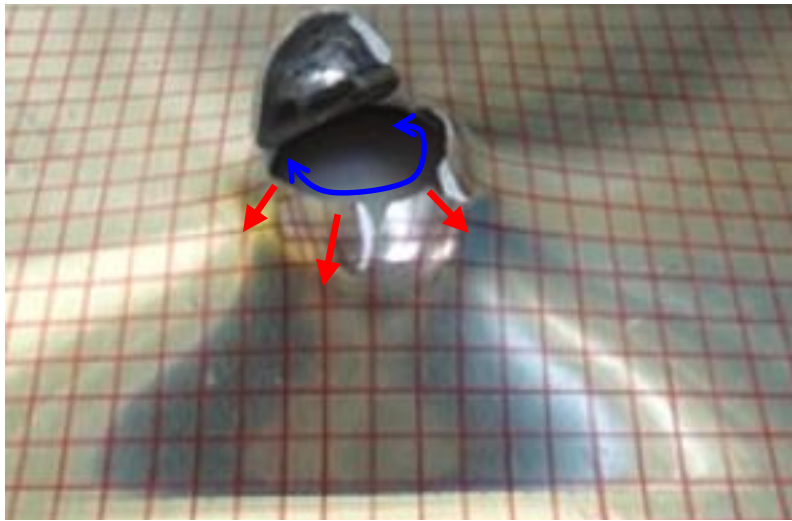
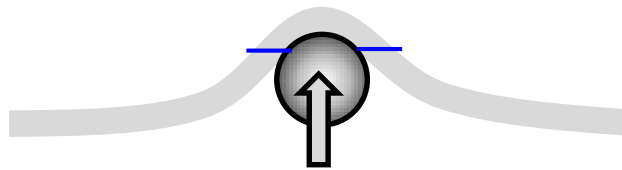
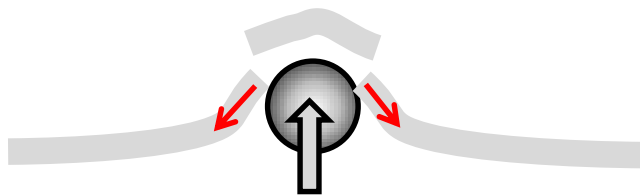


Fig. 5.6.2 Crack initiation and propagation in dynamic impact test
(Liu, et al., 2014)



(a) Crack initiation around the contact edge between plate and sphere



(b) Crack propagation in radial direction

Fig. 5.6.3 Crack initiation and propagation in section of plate

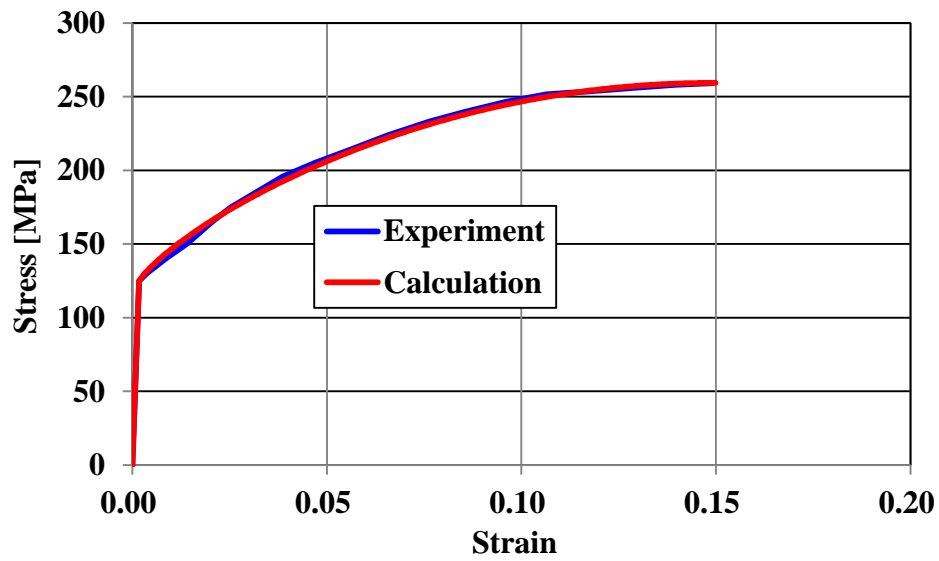


Fig. 5.6.4 Stress strain curve on uniaxial loading condition

Table 5.6.1 Material constants

Young's modulus	E [GPa]	72.00
Poisson's ratio	ν	0.33
Initial yield stress	σ_{y0}	125.00
Density	ρ [Kg/m ³]	2650.00
Isotropic hardening constants	A_1 [MPa]	150.00
	B_1	5.00
	A_2 [MPa]	150.00
	B_2	5.00
	A_3 [MPa]	50.00
	B_3	5.00
Kinematic hardening constants	a_1 [MPa]	1000.00
	b_1	2000.00
	a_2 [MPa]	466.67
	b_2	400.00
	a_3 [MPa]	666.67
	b_3	80.00
Damage constants	S	1.00
	r [MPa]	0.35
	h	0.00
	D_c	0.17

計算結果を図 5.6.5 に示す. 左図は **Mises** 応力分布を示し, 右図は損傷値の分布を示す. 上図から下図に掛けて時間が進んでゆくものとする. 損傷値分布では衝突している球体を非表示にしている. この結果を見ると球体衝突直後に接触部において平板が凸変形しながら応力波が発生し時間とともに応力波が伝播してゆく様子が見られる. 凸変形の後には図 5.6.2 の青線のように数値計算でも周方向のき裂が発生する. その後, さらに球体を押し付けることにより図 5.6.2 の赤線のように数値計算でも半径方向のき裂が発生する. 以上のように連続体損傷力学に基づく数値シミュレーションにより実験で観察されたき裂発生, き裂進展と定性的に良く一致した結果が得られることが分かった.

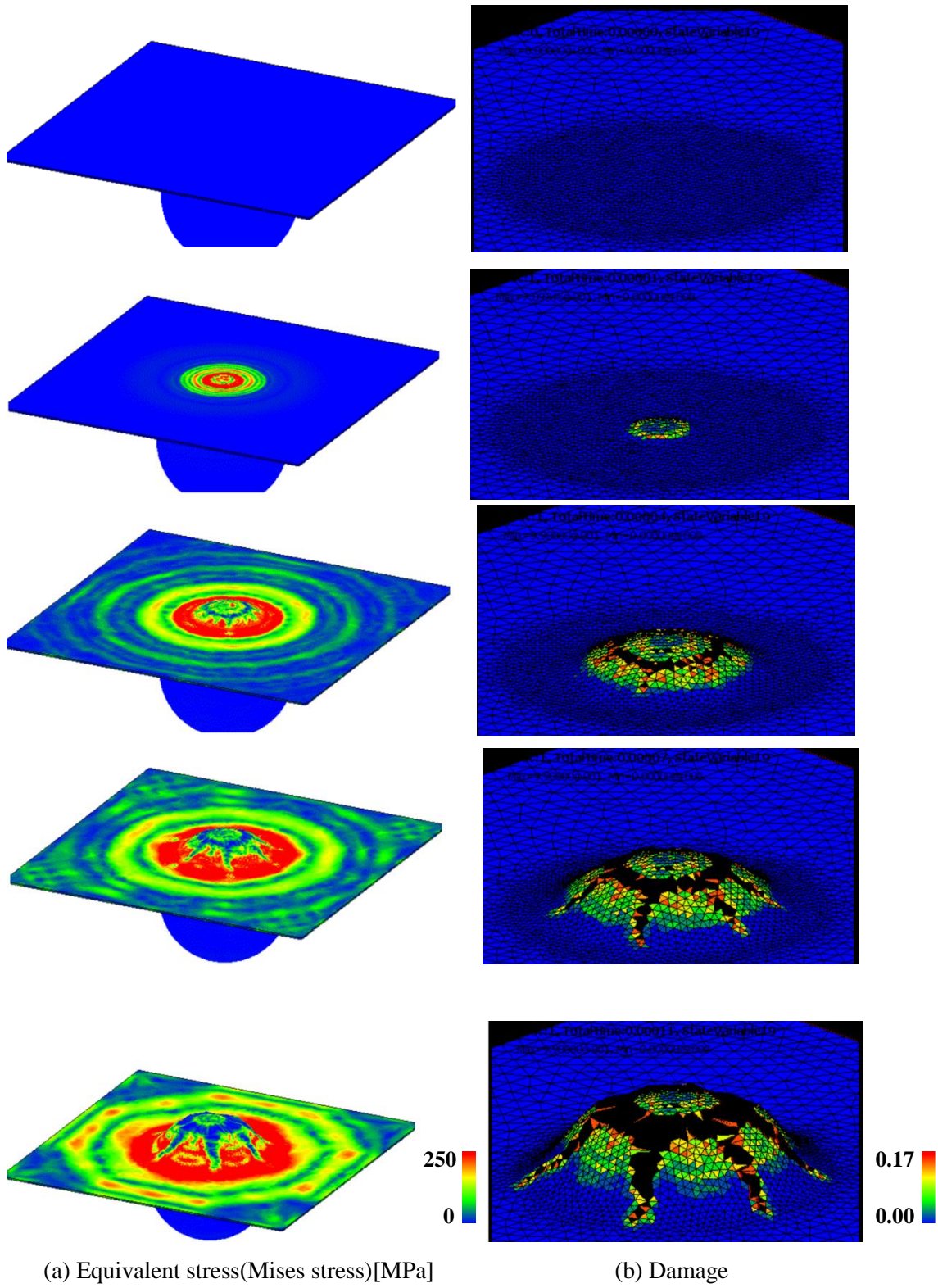


Fig. 5.6.5 Simulated crack growth of sphere impact model

5.7 極低サイクル疲労問題

本節では初期き裂を含まない部材について極低サイクル疲労のシミュレーションを行い本研究で提案する損傷弾塑性モデルの妥当性を調べる。用いている試験片は図5.7.1に示すように丸棒にノッチが付いた形状である。ノッチ径が鋭いR2タイプとノッチが緩やかなR10タイプを用いている。材質は20MnMoNi55 圧力容器鋼である。この試験片に対して $\pm 0.1\text{mm}$ の強制引張、強制圧縮変位を与えて極低サイクル疲労試験がPirondiaらによって行われた(Pirondia, et al., 2006)。彼らの実験結果によるとR2タイプでは30サイクル時点で巨視的な初期き裂が観察され、R10タイプでは100サイクル負荷しても巨視的なき裂は観察されていないとの報告がある。図5.7.2は材料が損傷を受けた時に試験片を縦に切断し損傷の状態を観察したものである。R2タイプでは巨視的な初期き裂が発生した後の断面を示し、R10タイプでは初期き裂発生前の断面を示している。この観察結果によるとR2タイプではノッチ底にてボイドの発達と巨視的なき裂が見られる。一方、R10タイプではノッチ底だけではなく材料内部においてもボイドが発達しており、R2タイプよりも断面内で比較的均一な損傷が発生していることが分かる。

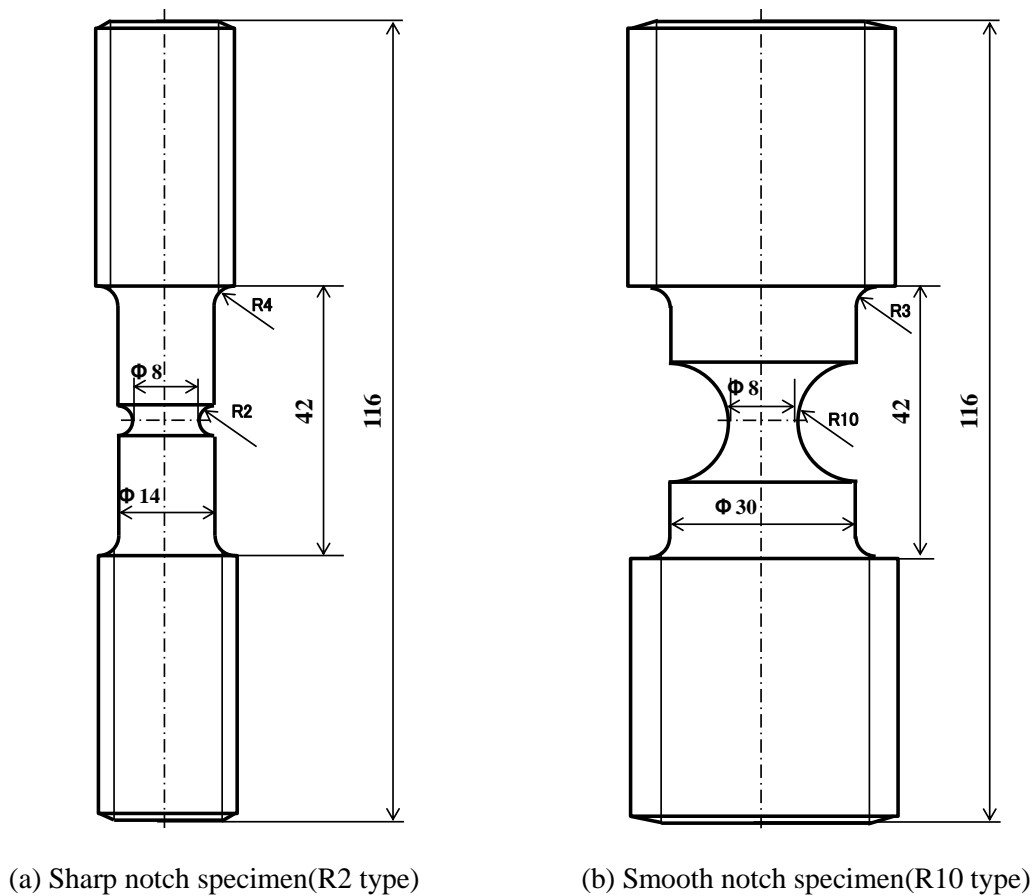
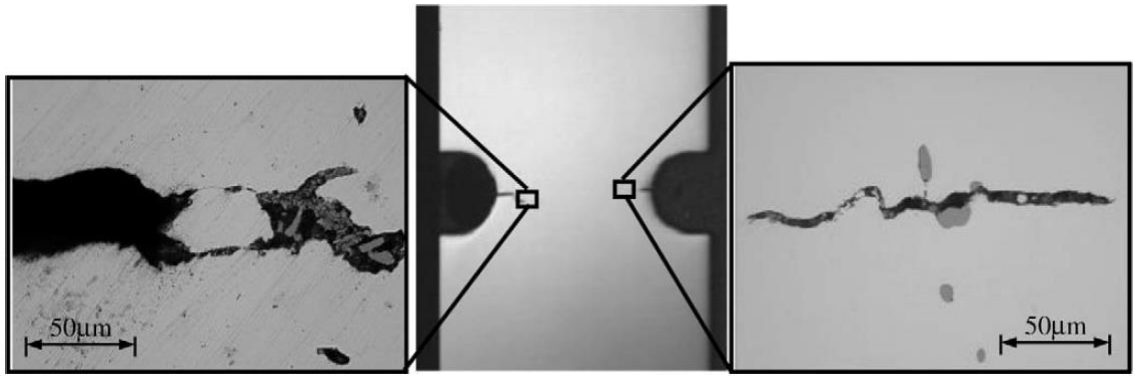
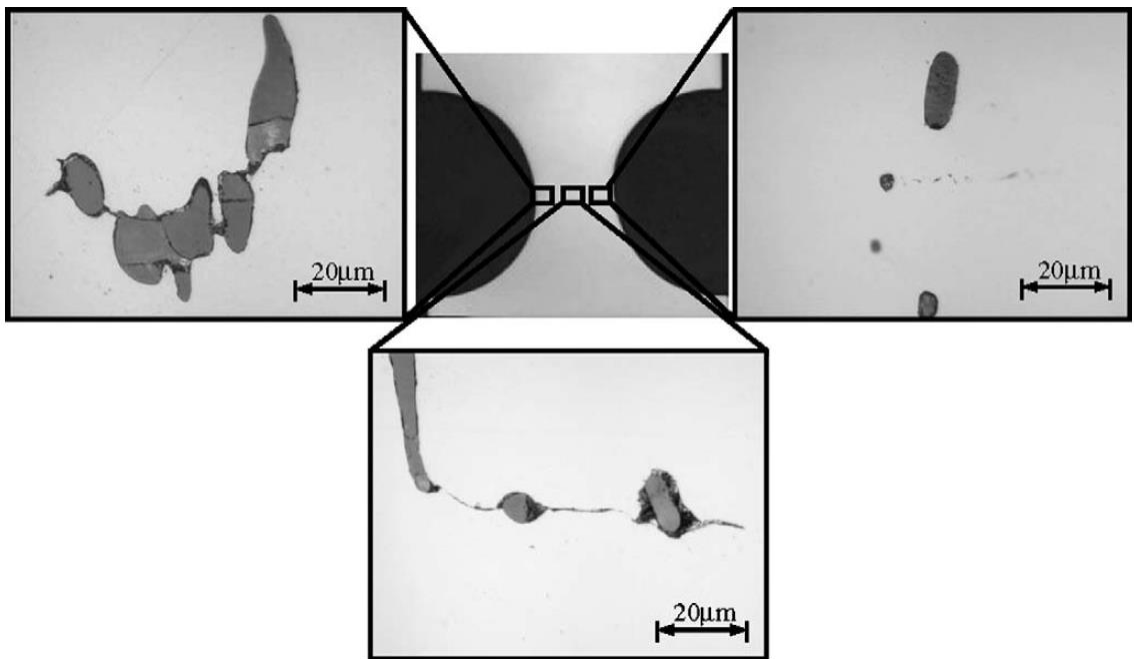


Fig. 5.7.1 Specimen with different notch

(Pirondia, et al., 2006)



(a) Sharp notch specimen(R2)



(b) Smooth notch specimen(R10)

Fig. 5.7.2 Microscopic failure
(Pirondia, et al., 2006)

この実験を本研究の損傷弾塑性モデルでシミュレートするにあたりまずは材料定数を決定する。Pirondia らの実験結果としてノッチを含まない丸棒材で単軸引張試験を行った時の応力ひずみ曲線(図 5.7.3)と同じく丸棒材で繰り返し負荷を与えた時のヒステリシスループ(図 5.7.4)が得られている。そのためこの両者の特性と一致する材料定数を用いた。

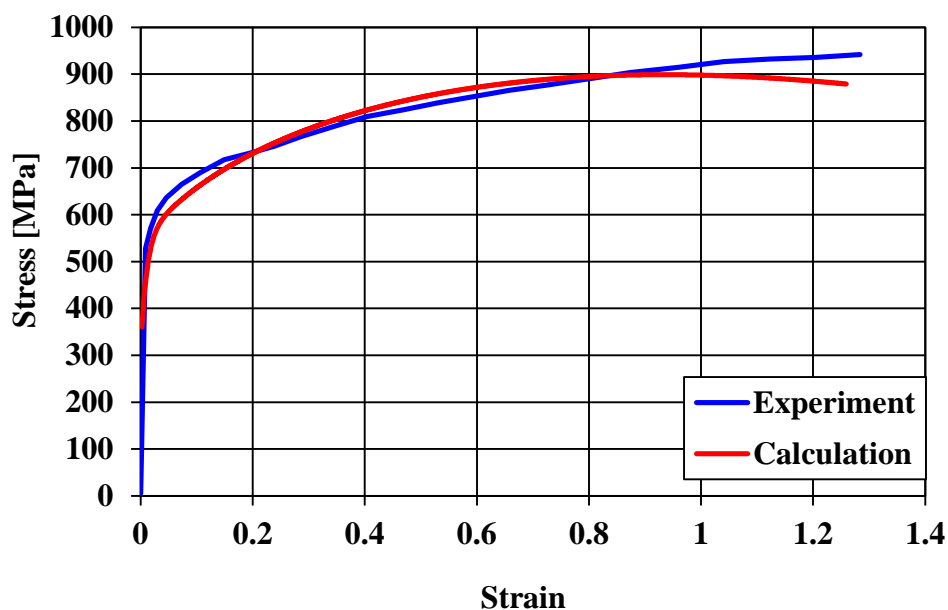


Fig. 5.7.3 Stress strain curve by uniaxial tensile test

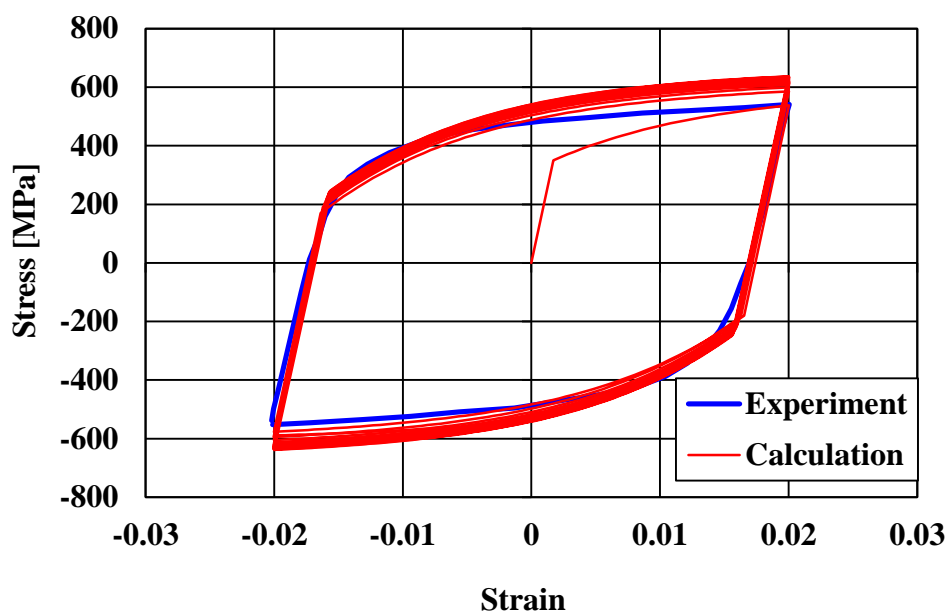


Fig. 5.7.4 Hysteresis loop by cyclic uniaxial loading test

数値計算に用いた有限要素法の形状モデルを図 5.7.5 に示す。半透明で図 5.7.1 のねじ部を除いた全体領域を示している。この形状は周方向に周期対称であるため、均一な材料特性を用いている計算上ではどの角度範囲まででモデル化しても周期対称条件を入力すれば同じ結果となる。座屈発生時は軸対称条件が有効とはならないが、実験では座屈の発生が確認されなかったため軸対称条件が成立するものとする。そのため図 5.7.1 のように周方向に 5° の領域のみ形状モデルを作成し、周期対称面は周方向に変位拘束した。また軸方向の対称条件も考慮した。要素タイプとして四面体二次用を用いている。このモデルについて繰り返し単軸負荷を与え巨視的き裂が発生するまでのサイクル数を計算した。

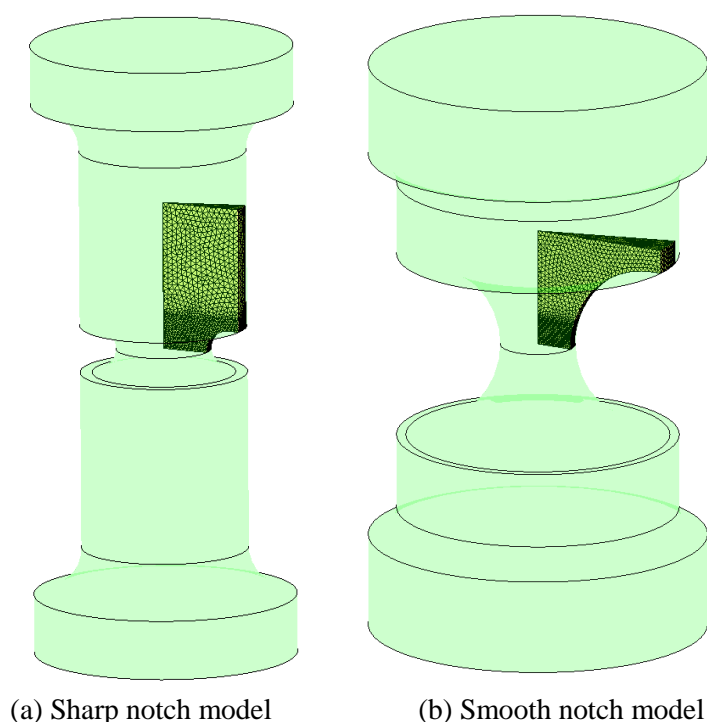
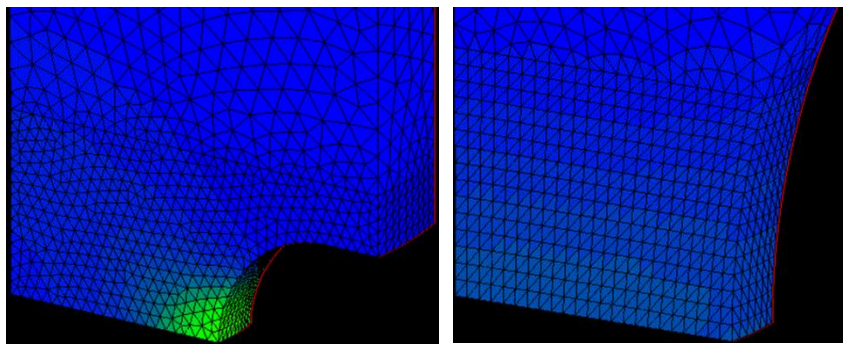


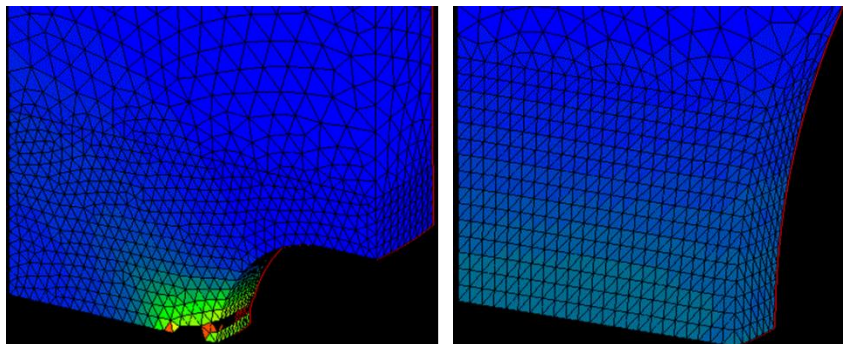
Fig. 5.7.5 FE model considering symmetric condition

図 5.7.6 は R2 タイプおよび R10 タイプについて各負荷サイクル時点の損傷値の分布を示したものである。20 サイクル時点ではまず R2 タイプのノッチ底で高い損傷値が見られるが、R10 タイプは R2 タイプほど損傷が発達していない。そして 32 サイクル時点で R2 タイプのノッチ底で破壊領域が見られ巨視的き裂が発生している。前述のように実験結果では R2 タイプにおいて 30 サイクルで巨視的き裂が発生したため破壊起点およびサイクル数共に良く一致していることがわかる。そして 50 サイクル時点で R2 タイプは破断状態に至る。また 50 サイクル時点では R10 タイプも損傷が発達しているものの R2 タイプの 20 サイクル時点のように損傷が一部に集中しておらず断面内で比較的均一な損傷値分布になっている。そして 115 サイクル時点で材料内部の中心点にて巨

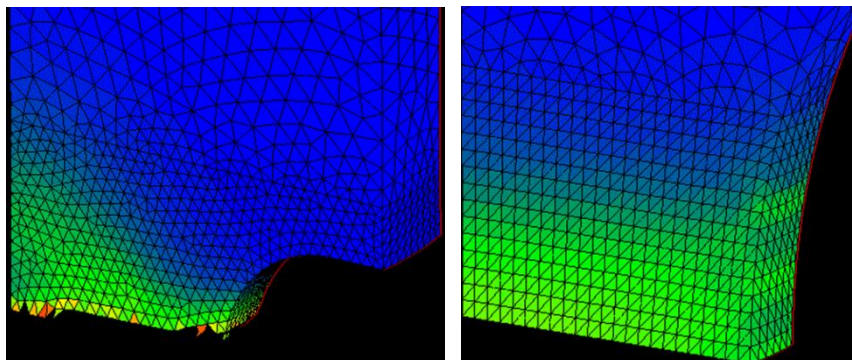
視的き裂が生じている。前述のように実験では 100 サイクル時点でも巨視的き裂が観測されなかったため、数値計算において 100 サイクル以降で巨視的き裂が生じたことは定性的に一致する結果となる。また R10 タイプの断面観察では図 5.7.2 のように断面内の複数個所でボイドが成長しており、このことは R10 タイプでは R2 タイプよりも比較的均一な損傷分布になっていることに対応しているものと考えられる。数値計算では全領域で均一な材料特性として解いているが、実際の材料では介在物の不均一配置や材料特性の場所毎のバラつきなどにより断面内の弱い特性の箇所から巨視的き裂が発生する可能性も考えられる。以上のように本研究で提案した損傷弾塑性モデルによりサイクル数や損傷状態などが実験の振る舞いと良く一致しており、極低サイクル疲労のシミュレーションが可能であることが分かった。



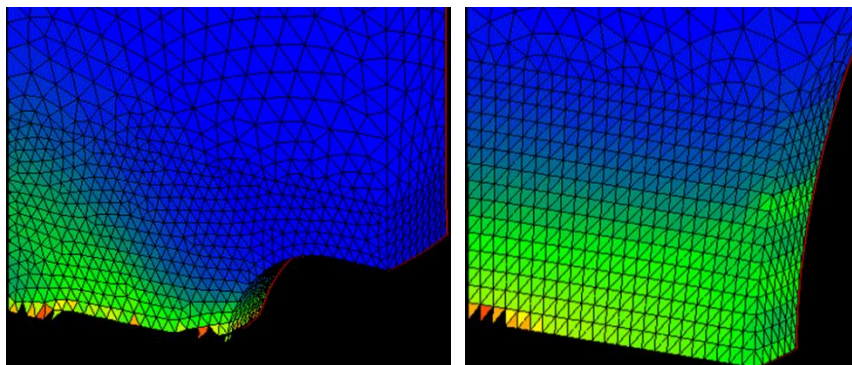
(a) 20 Cycle



(b) 32 Cycle



(c) 50 Cycle



(d) 115 Cycle

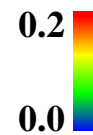


Fig. 5.7.6 Distribution of damage(Left :R2 model, Right:R10 model)

5.8 本章のまとめ

本章では第3章で示した損傷弾塑性モデルを用いてき裂発生、き裂進展を含む延性破壊シミュレーションを行った。また実験結果と照らし合わせることでモデルの妥当性を調べた。初期き裂を含む部材のき裂進展問題を取り扱った。まず3点曲げモードI貫通き裂問題を取り扱い破面形状やき裂進展挙動について実験結果と詳細に比較した。その結果、古典的破壊力学では評価が困難であるシャリップ破壊領域も含めてシミュレートできることが分かった。さらに混合モードき裂問題を取り扱いき裂進展方向が実験結果と良く一致する結果を得た。また複数き裂問題についても計算し、き裂間を介したき裂合体挙動もシミュレートできた。

次に初期き裂を含まない問題を取り扱った。円柱圧縮破壊問題では材料内部からのき裂発生と滑り破壊の定性的き裂発生、進展挙動が実験と良く一致する結果を得た。また動的衝突問題においても実験と定性的に良く一致するき裂形状を再現できた。

そして最後に極低サイクル疲労破壊の問題を取り扱った。ノッチ径を変えた実験結果と初期き裂発生に至るまでのサイクル数を比較した。その結果、初期き裂発生までのサイクル数や破壊起点が実験結果と良く一致した。

以上のように様々な破壊問題を本モデルで解くことにより連続体損傷力学による損傷モデルで1回負荷による破壊から極低サイクル疲労破壊まで幅広い延性破壊現象を表現できることが分かった。

第6章 結言

本論文では 1 回の負荷による破壊から極低サイクル疲労破壊までの延性破壊を評価できるモデルとして分割背応力による複合硬化モデルと連続体損傷力学による損傷モデルを連成した損傷弾塑性モデルを示した。同時にこのモデルを有限要素法といった数値解法に導入するにあたり、力学的つり合い状態に至るまでの収束性を向上させるための数値解法を提示した。すなわち後退形 Euler 法による応力積分とそれと厳密に整合した Consistent 接線剛性を示し陰解法によるアルゴリズムを提案した。

さらにモデルをより実現象に近づけるために静水圧依存性を考慮したモデルへと拡張しき裂閉口効果を考慮する Unilateral 効果も表現できるモデルへと拡張し、このモデルについても陰的アルゴリズムを示した。

また材料定数を自動的に同定する方法として遺伝的アルゴリズムを用いた手法を示した。これにより試行回数に対して実験との差異が小さくなり実験結果と上手くフィットする材料定数を見つけることができた。

本論文で示したモデルを用いてき裂発生からき裂進展に至る破壊挙動を様々な問題に対して計算した。また実験結果との比較を行うことでモデルの妥当性を調べた。まず初期き裂を含む部材のき裂進展問題について取り扱い古典的破壊力学では評価することのできないシャリップ破壊領域も含めた延性破壊領域をシミュレートできた。またモード I とモード II の混合モードき裂問題を計算し板厚表面から板厚内部にかけてのき裂進展方向が実験と良く一致することを示した。さらに初期き裂を含まない問題として円柱圧縮破壊問題や動的衝破壊問題を計算し、き裂発生箇所やき裂形状といった定性的な振る舞いが実験と良く一致していることを示した。そして極低サイクル疲労問題を取り扱い、初期き裂発生までのサイクル数やき裂発生箇所に対して数値計算結果と実験が良く一致する結果を得た。

以上の研究結果により、本論文で示す損傷弾塑性モデルが 1 回負荷の破壊から極低サイクル疲労破壊までの幅広い延性破壊現象を良く表現できるモデルであることを示した。さらに陰的アルゴリズムにより大きな時間増分に対して効率的に計算できる計算手法を提案した。これにより大地震時の大型建造物の破壊、電子機器落下時のはんだの破壊、自動車の衝撃入力時の破壊などといった延性破壊に関する工学分野の破壊予測技術が向上するものと期待できる。

今後の課題として材料や問題に応じてより以下に示すような詳細なモデルへの改良が考えられる。

- [1] 2 曲面モデルといったラチェット現象をより詳細に表現するモデルへの拡張
- [2] クリープ損傷と熱伝導との連成モデルへの拡張
- [3] コンクリート材などへも適用可能な異方損傷モデルへの拡張

謝 辞

本論文は私が広島大学工学研究科輸送・環境システム専攻博士課程後期在学中(2012年10月～2015年9月)に、本学工学研究院機械システム・応用力学部門構造システム研究室の岡澤重信教授(現:山梨大学), 田中智行助教のもとで行った研究成果をまとめたものです。博士課程後期課程の3年間に多くの方々からのご指導・ご支援を頂きました。ここに感謝の意を表します。

岡澤重信教授, 田中智行助教には, 研究を行うにあたって大変お世話になりました。お二人の日頃の尽力のおかげで当研究室が整った研究環境であったことで, 不自由なく研究を進めることができました。また北村充教授, 藤本由紀夫教授には論文の副査としてお世話になりました。実験を進めるにあたり田中義和助教および八川晃一さんにはデータ計測等においてご協力をしていただきました。

私が東京理科大学大学院の修士課程でお世話になった恩師の菊池正紀教授には理科大を卒業した後も研究に対する取り組み姿勢といったご指導をしていただきました。また同学の岡田裕教授には学会講演の際やその後の議論で様々なご意見をいただきました。

マツダ株式会社の渡部雅晃様には試験片の詳細形状の決定など実験面において多大なご協力をしていただきました。同じく岡田毅様には計算コンピュータのIT環境の整備について多くのご協力をしていただきました。さらに同社の藤川智士様, 奥田健司様には研究の意義をご理解していただき研究を進めるにあたって行き詰った時に精神的な支援をしていただきました。

株式会社アライドエンジニアリングの大山知信様, 柴田良教様には本研究で開発した材料モデルを導入するための材料モデル開発環境の土台整備に関する多くのご相談に載っていただきました。また SCSK 株式会社の中山啓様, 安達賢様, 今井雅則様には ADVENTURECluster のユーザー会にて本研究を産業界に向けて発表する機会を設けていただきました。

また高校時代からの親友である山本拓磨様とは私が機械系で彼が化学系とで分野は違っても共に計算力学を志す良き仲間であると同時に良きライバルとして日頃の自由な研究ディスカッションに時間を割いていただきました。

最後に, 私のことを信じて見守りここまで一つのことを追求できる大変貴重な機会を与えてくれた両親に心からの感謝を申し上げます。

平成 27 年 9 月 山王丸 将吾

参考文献

- (1) Apostolopoulos, C. A. and Rodopoulos, C. A., Inelastic Cyclic Behavior of As-Received and Pre Corroded S500s Tempcore Steel Reinforcement, *International Journal of Structural Integrity*, Vol. 1 (2010), pp.52-62.
- (2) Apostolopoulos, C. A. and Rodopoulos, C. A., Inelastic Cyclic Behavior of As-Received and Pre-Corroded S500s Tempcore Steel Reinforcement, *International Journal of Structural Integrity*, Vol. 1 (2010), pp.52-62.
- (3) Armstrong, P. J. and Frederick, C. O., A mathematical representation of the multiaxial Bauschinger effect, CEGB Report RD/BN/731, Berkeley Nuclear Laboratories (1966).
- (4) Beremin, F.M., A local criterion for cleavage fracture of a nuclear pressure vessel steel, *Metallurgical transactions A*, Vol.14, Issue 11(1983), pp.2277-2287.
- (5) Betegon, C., Rodriguez, C. and Belzunce, F.J., An analysis and modelisation of short crack growth by ductile fracture micromechanism, *Fatigue and fracture of engineering materials and structures*, Vol.20, Issue 5(1997), pp.633-644.
- (6) Bezensek, B. and Miyazaki, K., Alignment criteria for through-wall flaws in plates and pipes, 2008 ASME pressure vessels and piping division conference(2008).
- (7) Biel, M.U. and Golaski, L.S., The role of stress triaxiality and microstructure in ductile fracture of low carbon cast steel, *Mechanical behavior of materials V*, Vol.1(1988), pp.333-339.
- (8) Bluhm, J. I. and Morrissey, R. J., Fracture in a tensile specimen, *Proceedings of the first international conference on Fracture*, Vol.3 (1966), pp.1739-1780.
- (9) Bonora, N., A nonlinear CDM model for ductile failure, *Engineering fracture mechanics*, Vol.58(1997), pp.11-28.
- (10) Caddemi, S., and Martin, J.B., Convergence of the Newton-Raphson algorithm in elastic plastic incremental analysis, *International journal of numerical methods in engineering*, Vol.31(1991), pp.177-191.
- (11) Chaboche, J. L., Time-independent constitutive theories for cyclic plasticity, *International Journal of Plasticity*, Vol.2, No.2 (1986), pp.149-188.
- (12) Chaboche, J.L., Damage growth, crack initiation and crack growth, *Journal of applied mechanics*, *Journal of applied mechanics*, *Transactions of the ASME*, Vol.55(1998), pp.65-72.
- (13) Chaboche, J.L., General concepts, *Journal of applied mechanics*, *Transactions of the ASME*, Vol.55(1998), pp.59-64.

- (14) Chorin, A.J., Hughes, T.J.R., McCracken, M.F. and Marsden, J.E., Product formulas and numerical algorithms, *Communications on pure and applied mathematics*, Vol.31(1978), pp.205-256.
- (15) Chow, W.T and Atluri, S. N., Finite element calculation of stress intensity factors for interfacial crack using virtual crack closure integral, *Computational mechanics*, Vol.16(1995), pp.417-425.
- (16) Chu, C.C. and Needleman, A., Void nucleation effects in biaxially stretched sheets, *Journal of engineering materials and technology, Transactions of the ASME*, Vol.102, No.3(1980), pp.249-256.
- (17) Coffin, L.F, A study of the effects of cyclic thermal stresses on a ductile metal, *Transactions of the ASME*, Vol.76(1954), pp.923-930.
- (18) Crisfield, M.A., *Non-linear finite element analysis of solid and structures*, Vol.1, John Wiley and Sons(1991).
- (19) Dafalias, Y. F. and Popov, E. P., A model of nonlinearly hardening materials for complex loading, *Acta Mechanica*, Vol.23(1975), pp.173–192.
- (20) Davison, L. and Stevens, A.L., Thermodynamical constitution of spalling elastic bodies, *Journal of applied physics*, Vol.44(1973), pp.668-674.
- (21) de Souza Neto, E.A. and Peric, D. and Owen, D.R.J., Continuum modelling and numerical simulation of material damage at finite strains, *Archves of computational methods in engineering*, Vol.5(1988), pp.311-384.
- (22) de Souza Neto, E.A., Peric, D., and Owen, D.R.J., *Computational methods for plasticity: theory and applications*, John Wiley and Sons Ltd(2008).
- (23) Doghri, I., Numerical Implementation and Analysis of a Class of Metal Plasticity Models Coupled with Ductile Damage, *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Vol. 38, Issue 20 (1995), pp. 3403-3431.
- (24) Dufailly, J. and Lemaitre, J., Modeling very low cycle fatigue, *International journal of damage mechanics*, Vol.4, 1995, pp.153-170.
- (25) Dutko, M., Peric, D., and Owen, D.R.J., Universal anisotropic yield criterion based on superquadric functional representation, part 1 algorithmic issues and accuracy analysis, *Computational methods applied mechanics and engineering*, Vol.109(1993), pp.73-93.
- (26) Duvaut, G., and Lions, J.L., *Inequalities in mechanics and physics*, Academic Press(1976).
- (27) Feijoo, R.A., and Zouain, N., Formulations in rates and increments for elastic plastic analysis, *International journal of numerical methods in engineering*, Vol.26(1988), pp.2031-2048.

- (28) Feng, S.N., Zheng, C.Q. and Li, X.L., Influence of stress triaxiality and temperature on void growth and ductile/brittle transition behavior of 40 Cr steel, *Theoretical and applied fracture mechanics*(1992), pp.149-155.
- (29) Ghrib, F. and Tinawi, R., An application of damage mechanics for seismic analysis of concrete gravity dams, *Earthquake engineering and structural dynamics*, Vol.24(1995), pp.157-173.
- (30) Goods, S.H. and Brown, L.M., The nucleation of cavities by plastic deformation, *Acta Metallurgica*, Vol.27(1979), pp.1-15.
- (31) Gurson, A. L., Continuum theory of ductile rupture by void nucleation and growth:part I-yield criteria and flow rules for porous ductile media, *Journal of engineering materials and technology*, Vol.99(1977), pp.2-15.
- (32) Halphen, B. and Nguyen, Q.S., Sue les materiaux standards generalizes, *J. de mecanique*, Vol. 14(1975), pp.39-63.
- (33) Han, W. and Reddy, B.D., *Plasticity: Mathematical theory and numerical analysis*, Springer-Verlag(1999).
- (34) 橋口公一, 最新弾塑性学, 朝倉書店(1990).
- (35) Hayakawa, K., Nakamura, T. and Tanaka, S., Elastic-Plastic Behavior of WC-Co Cemented Carbide Used for Forging Tool Considering Anisotropic Damage and Stress Unilaterality, *International Journal of Damage Mechanics* (2010), pp. 421-439.
- (36) Hayhurst, D.R., Computational continuum damage mechanics, Its use in the prediction of creep in structures, IUTAM symposium on creep in structures, ed. by S. Murakami and N. Ohno, Kluwer Academic Publishers(2001), pp.175-188.
- (37) Hayhurst, D.R., Dimmer, P.R. and Chernuka, M.W., Estimates of the creep rupture lifetime of structures using the finite element method, *Journal of mechanics and physics of solids*, Vol.23(1975), pp.335-355.
- (38) Hill, R., *the mathematical theory of plasticity*, Oxford Univ. Press(1950).
- (39) 久田俊明, 非線形有限要素法のためのテンソル解析の基礎, 丸善(1992).
- (40) 久田俊明, 野口裕久, 非線形有限要素法の基礎と応用, 丸善(1996).
- (41) <http://www.rolledalloys.com/technical-resources/forming.dot> [accessd date:2015.5.12]
- (42) Huerta, A., Perez-Foguet, A. and Rodrigues-Ferran, A., Consistent tangent matrices for complex problems, substepping schemes and numerical differentiation, *European conference on computational mechanics*(1999).
- (43) Hutchinson, J. W., Singular behavior at the end of a tensile crack in a hardening material, *Journal of the mechanics and physics of solids*, Vol.16(1968), pp.13-31.
- (44) Iwan, W. D., On a class of models for yielding behavior of continuous and composite systems, *Journal of Applied Mechanics*, Vol.34 (1967), pp.612-617.

- (45) Jirasek, M., and Bazant, Z.P., *Inelastic analysis of structures*, J. Wiley(2002).
- (46) Ju, J.W., On energy-based coupled elastoplastic damage theories, constitutive modeling and computational aspects, *International journal of solids and structures*, Vol.25(1989), pp.803-833.
- (47) Jubran, J.S. and Cofer, W.F., Ultimate strength analysis of structural components using the continuum damage mechanics approach, *Computers and structures*, Vol.39(1991), pp.741-752.
- (48) Jurenka, J. and Spaniel, M., Advanced FE model for simulation of pitting crack growth, *Advances in engineering software*(2013), pp. 218-225.
- (49) Kachanov, L.M., *Foundations of fracture mechanism*, Izdatielistvo, Nauka, Moscow(1974).
- (50) Kachanov, L.M., *Introduction to continuum damage mechanics*, Martinus nijhoff publishers, Dordrecht(1986).
- (51) Kachanov, L.M., On rupture time under condition of creep, *Izvestia Akademi Nauk SSSR, Otd. Tekhn. Nauk*, No.8(1958), pp.26-31.
- (52) 菊池正紀, 永井政臣, き裂先端の拘束効果に関する研究 第2報 高靱性材の拘束効果, *日本機械学会論文集(A編)*, Vol.64, No.625(1998), pp.2367-2373.
- (53) 菊池正紀, 高橋昭如, 異なる負荷形式下のディンプル破壊シミュレーション, *日本機械学会論文集(A編)*, Vol.67, No.656(2001), pp.665-671.
- (54) 菊池正紀, 佐々木淳, 異なる拘束条件下におけるディンプル破壊シミュレーション, *日本機械学会論文集(A編)*, Vol.69, No.687(2003), pp.1621-1627.
- (55) 菊池正紀, 山王丸将吾, シャリップ破壊も含めた延性破壊過程の研究, *日本機械学会論文集(A編)*, Vol.73, No.732(2007), pp.934-941.
- (56) 菊池正紀, 山王丸将吾, 混合モード荷重下における延性破壊機構の研究, *日本機械学会論文集(A編)*, Vol. 74, No.745(2008), pp.1235-1242.
- (57) 菊池正紀, 石原豪人, 3点曲げ試験片の板厚による拘束効果の影響に関する研究, *日本機械学会論文集(A編)*, Vol.70, No.700(2004), pp.1778-1784.
- (58) Kikuchi, M., Wada, Y. and Suga, K., Surface crack growth simulation under mixed mode cyclic loading condition, *Procedia engineering*, Vol.10(2011), pp.427-432.
- (59) 北川浩, *弾塑性力学*, 裳華房(1987).
- (60) Kleiber, M. and Wozniak, C., *Nonlinear mechanics of structures*, Kluwer academic publishers(1991).
- (61) Kobayashi, A. S., *Prospect of fracture mechanics*, Noordhoff, Leyden(1974).
- (62) Krajcinovic, D., Constitutive equations for damaging materials, *Journal of applied mechanics*, *Transactions of the ASME*, Vol.50(1983), pp.355-360.
- (63) Krieg, R. D., A practical two surface plasticity theory, *Journal of Applied Mechanics*, Vol.42(1975), pp.641-646.

- (64) Krieg, R.D. and Krieg, D.B., Accuracies of numerical solution methods for the elastic perfectly plastic model, *Journal of pressure vessel technology, Transactions of the ASME*(1977), pp.510-515.
- (65) Ladeveze, P. and Lemaitre, J., Damage effective stress in quasi-unilateral conditions, *Proc. the 16th IUTAM congress, Lyngby*(1984).
- (66) Lemaitre, J. A course on damage mechanics, Springer-Verlag, Berlin(1992).
- (67) Lemaitre, J. and Chaboche, J.L., Aspect phenomenologique de la rupture par endommagement, *Journal de mecanique appliquee, Vol.2*(1978), pp.317-365.
- (68) Lemaitre, J. and Chaboche, J.L., *Mechanics of solid materials, Cambridge University Press*(1990).
- (69) Lemaitre, J. and Desmorat, R., *Engineering damage mechanics, Springer-Verlag*(2005).
- (70) Lemaitre, J., A continuous damage mechanics model for ductile fracture, *Journal of engineering materials and technology, Transactions of the ASME, Vol.107*(1985), pp.83-89.
- (71) Lin, J., Liu, Y. and Dean, T.A., A review on damage mechanisms, models and calibration methods under various deformation conditions, *International Journal of Damage Mechanics, Vol.14*(2005), pp.299-319.
- (72) Lubarda, V.A., Krajcinovic, D. and Mastilovic, S., Damage model for brittle elastic solids with unequal tensile and compressive strengths, *Engineering fracture mechanics, Vol.49*(1994), pp.681-697.
- (73) Lubliner, J., *Plasticity theory, Macmillan*(1990).
- (74) Ma, F., The effects of constraint on crack tip fields and fracture toughness, *International journal of fracture, Vol.69, Issue 4*(1995), pp.341-355.
- (75) Maier, G., A matrix structural theory of piece-wise linear plasticity with interacting yield plans, *Meccanica, Vol.6*(1970), pp.55-66.
- (76) Manson, S. S., Behavior of materials under conditions of therman stresses, Technical report TN 2933, N.A.C.A(1953)
- (77) Marcal, P.V., A stiffness method for elastic-plastic problems, *International journal of mechanical science*(1965), pp.229-238.
- (78) Marcal, P.V., *Finite element analysis with material nonlinearities-theory and practice, recent advances in matrix methods of structural analysis and design, University of Alabama Press*(1971), pp.257-282.
- (79) Martin, J.B., Reddy, B.D. and Griffin, T.B, Applications of mathematical programming concepts to incremental elastic plastic analysis, *Engineering structures, Vol.9*(1987), pp.171-176.
- (80) Matthies, H. and Strang, G., The solution of nonlinear finite element equations, *Int. J. Num. Meth. Engng., Vol.14*(1979), pp.1613-1626.

- (81) Maugin, G.A., The thermomechanics of plasticity and fracture, Cambridge University Press(1992).
- (82) Mediratta, S.R., Ramaswamy, V. and Rama Rao, P., Two stage cyclic work hardening and two slope Coffin Manson relationship in dual phase steels, Scripta Metallurgica, vol.20, issue 4(1986), pp.555-558.
- (83) Merkle, J.G. and Corten, H.T., A J integral analysis for compact specimen considering axial force as well as bending effects, Transactions of the ASME, Journal of pressure vessel technology, Vol.96(1974), pp.286-292.
- (84) Miyazaki, K., Hasegawa, K., Saito, K. and Bezensek, B., Experimental study of ductile fracture for non-aligned multiple flaws in a plate, Proceedings of the ASME 2009 pressure vessels and piping division conference(2009).
- (85) Mroz, Z., On the description of anisotropic workhardening, Journal of the Mechanics and Physics of Solids, Vol.15 (1967),pp.163–175.
- (86) 向井稔, 門田朋子, 廣畑賢治, 川上崇, 高橋邦明, はんだ接合部の損傷パスマシミュレーション, 日本機械学会論文集(A編), Vol.72, No.721(2006), pp.1364-1369.
- (87) 村上澄男, 連続体損傷力学, 森北出版株式会社(2008).
- (88) Murakami, S. and Kamiya, K., Constitutive and damage evolution equations of elastic-brittle materials based on irreversible thermodynamics, International journal of mechanical sciences, Vol.39(1997), pp.473-486.
- (89) Murakami, S. and Ohno, N., A continuum theory of creep and creep damage, Creep in structures, ed.by A.R.S. Ponter and D.R.Hayhurst, Springer-Verlag, Berlin(1981), pp.422-444.
- (90) Murakami, S., Mechanical modeling of material damage, Journal of applied mechanics, Transactions of the ASME, Vol.55(1988), pp.280-286.
- (91) 中村春夫, 高島典生, 小林英男, 中沢一, A533B-1 鋼の弾塑性破壊靱性および破壊抵抗の評価, 材料, Vol.32, No.363(1983), pp.286-291.
- (92) Needleman, A. and Tvergaard, V., An analysis of ductile rupture in notched bars, Journal of mechanics and physics of solids, Vol.32(1984), pp.461-490.
- (93) Needleman, A., A continuum model for void nucleation by inclusion debonding, Journal of applied mechanics, Vol.54, pp525-531.
- (94) Newmark, N.M., A method of computation for structural dynamics, Journal of engineering mechanics, ASCE, Vol.85(1959), pp.57-94.
- (95) Nguyen, H.Q., Gallimard, L. and Bathias, C., Numerical simulation of fish-eye fatigue crack growth in very high cycle fatigue, Engineering fracture mechanics(2015), pp.81-93.
- (96) 日本機械学会, 弾塑性破壊靱性 JIC 試験方法, 日本機械学会(1981).

- (97) Ohno, N. and Wang, J. D., Kinematic hardening rules with critical state of dynamic recovery, Part I: Formulation and basic features for ratcheting behavior, *International Journal of Plasticity*, Vol.9 (1993), pp.375–390.
- (98) 岡村弘之, 線形破壊力学入門, 培風館(1976).
- (99) Ortiz, M., and Popov, E.P., Accuracy and stability of integration algorithms for elastoplastic constitutive relations, *International journal of numerical methods in engineering*, Vol.21(1985), pp.1561-1576.
- (100) Paris, P. C. and Erdogan, F., A critical analysis of crack propagation laws, *Journal of Basic Engineering*, Vol.85(1963), pp.528-534.
- (101) Pedersen, T.O., Numerical modelling of cyclic plasticity and fatigue damage in cold-forging tools, *International journal of mechanical sciences*, Vol.42(2000), pp.799-818.
- (102) Perzyna, P., Thermodynamic theory of viscoplasticity, *Advances in applied mechanics*, ed. by C.S. Yih, Vol.11(1971), pp.313-354.
- (103) Prager, Recent developments in the mathematical theory of plasticity, *Journal of applied physics*, Vol.20 (1949), pp.235–241.
- (104) Prager, W., *An introduction to plasticity*, Addison-Wesley(1950).
- (105) Rabotnov, Yu. N., *Creep problems in structural members*, North-Holland, Amsterdam(1969).
- (106) Reddy, B.D., and Martin, J.B., Algorithms for the solution of internal variable problems in plasticity, *Computational methods applied mechanics and engineering*, Vol.93(1991), pp.253-273.
- (107) Rice, J. R. and Rosengren, G. F., Plane strain deformation near a crack tip in a power-law hardening material, *Journal of the mechanics and physics of solids*, Vol.16(1968), pp. 1-12.
- (108) Rice, J. R., Levy, N., The part-through surface crack in an elastic plate, *Journal of applied mechanics*, Vol.39(1972), pp.185-194.
- (109) Rice, J.R., *Continuum mechanics and thermodynamics of plasticity in relation to microscale deformation mechanics, constitutive equations in plasticity*, ed. by A.S.Argon, The MIT Press, Cambridge(1975), pp.23-79.
- (110) Rice, J.R., A path independent integral and the approximate analysis of strain concentration by notches and cracks, *Journal of applied mechanics*, Vol.35(1968), pp.379-386.
- (111) Rice, J.R., Paris, P.C. and Merkle, J.G., Some further results of J-integral analysis and estimates, *Progress in flaw growth and fracture toughness testing*, Special Tetch. Publication 536, ASTM(1973), pp.231-245.
- (112) Ricotta, M., Simple expressions to estimate the Manson-Coffin curves of ductile cast irons, *International journal of fatigue*, vol. 78(2015), pp.38-45.

- (113) Rybichi, E.F. and Kanninen, M.F., A finite element calculation of stress intensity factors by a modified crack closure integral, *Engineering fracture mechanics*, Vol.9(1997), pp.931-938.
- (114) Saanouni, K, Nesnas, K. and Hammi, Y., Damage modeling in metal forming processes, *International journal of damage mechanics*, Vol.9(2000), pp.196-240.
- (115) Saanouni, K., On the numerical prediction of the ductile fracture in metal forming, *Engineering fracture mechanics*, Vol.75(2008), pp.3545-3559.
- (116) 櫻庭健一郎, ステンレス鋼における最適疲労設計基準の確立, 産業技術研究センター研究報告, Vol. 4 (2009).
- (117) Sawyer, J.P.G., Wang, C.H. and Jones, R., An Implicit Algorithm Using Explicit Correctors for the Kinematic Hardening Model with Multiple Back Stress, *International Journal of for Numerical Methods in Engineering*, Vol. 50 (2001), pp.2093-2107.
- (118) Schreyer, H.L., Kulak, R.F. and Kramer, J.M., Accurate numerical solutions for elasto-plastic models, *Transactions of the ASME*, Vol.101(1979), pp.226-234.
- (119) 嶋田勝紀, 小芝鳥潤, 清水真佐男, 極低サイクル疲労における Manson-Coffin 則の実用性と累積損傷, *日本機械学会論文集(A 編)*, vol.53, No.491(1987), pp.1178-1185.
- (120) Sih, G. C., *Methods of analysis and solutions of crack problems*, Noordhoff, Leyden(1973).
- (121) Simo, J.C. and Govindjee, Exact closed form solution of the return mapping algorithm in plane stress elasto visco plasticity, *Engineering with computers*, Vol.5(1988), pp.254-258.
- (122) Simo, J.C. and Taylor, R.L., A return mapping algorithm for plane stress elastoplasticity, *International journal for numerical methods in Engineering*, Vol.22(1986), pp.649-670.
- (123) Simo, J.C. and Taylor, R.L., Consistent tangent operators for rate-independent elastoplasticity, *Computational methods in applied mechanics and engineering*, Vol.48(1985), pp.101-118.
- (124) Simo, J.C., and Hughes, T.J.R., *Computational inelasticity*, Springer-Verlag(1998).
- (125) Simo, J.C., and Ortiz, M, A unified approach to finite deformation plasticity based on the use of hyperelastic constitutive equations, *Computational methods applied mechanics and engineering*, Vol.49(1985), pp.221-245.
- (126) Sneddon, I. N. and Lowengrub, M., *Crack problems in classical theory of elasticity*, John Wiley and Sons(1969).
- (127) Sorem, W. A., Dodds, R. H. and Rolfe, S.T., Effects of crack depth on elastic plastic fracture toughness, *International journal of fracture*, Vol.47, pp.105-126.
- (128) Sun, DZ., Sester, M. and Schmitt, W., Development and application of micromechanical material models for the characterization of materials, *Journal de physique IV(C6)*, Vol.6(1996), pp.431-439.

- (129) Sun, J., Effect of stress triaxiality on micro-mechanism of void coalescence and micro-fracture ductility of materials, *Engineering fracture mechanics*, Vol.39, Issue 5(1991), pp.799-805.
- (130) Suquet, P., Sur les equations de la plasticite, *J. Mecanique*, Vol.20(1981), pp.3-40.
- (131) Susmel, L., The modified Manson Coffin curve method in fatigue assessment, *Multiaxial notch fatigue*, 2009, pp.210-239.
- (132) Tada, H., *The stress analysis of cracks handbook*, Del research corporation, Hellertown(1973).
- (133) 寺崎健, 谷江尚史, き裂進展モデルに基づくはんだ疲労寿命予測方法, *日本機械学会論文集(A編)*, Vol. 74, No. 740(2008), pp.574-582.
- (134) Tvergaard, V., ductile fracture by cavity nucleation between larger voids, *Journal of the mechanics and physics of solids*, Vol.30(1982), pp.265-286.
- (135) 鷺津久一郎, 宮本博, 山田嘉昭, 山本善之, 川井忠彦, *有限要素法ハンドブック II 応用編*, 培風館(1983).
- (136) 鷺津久一郎, 宮本博, 山田嘉昭, 山本善之, 川井忠彦, *有限要素法ハンドブック I 基礎編*, 培風館(1981).
- (137) Wilkins, M.L., Calculation of elasto-plastic flow, *Methods of computational physics*, Academic Press, Vol.3(1964).
- (138) Xia, L., Shih, C.F. and Hutchinson, J.W., A computational approach to ductile crack growth under large scale yielding conditions, *Journal of the mechanics and physics of solids*, Vol.43(1995), pp.389-413.
- (139) 矢川元基, 塩谷隆二, *超並列有限要素解析*, 朝倉書店(1998).
- (140) 矢川元基, *計算力学における超並列計算法*, 養賢堂(2002).
- (141) 山田嘉昭, *塑性・粘弾性, 有限要素法の基礎と応用シリーズ 6*, 培風館(1980).
- (142) Yamada, Y., Yoshimura, N. and Sakurai, T., Plastic stress-strain matrix and its application for the solution of elastic-plastic problems by the finite element method, *International journal of mechanical science*, Vol.10(1968), pp.343-354.
- (143) 八高隆雄, 長谷川正, *バウシニング効果に関する研究の歴史と現状*, 日本鉄鋼協会論文集 (1984), pp.1551-1558.
- (144) Yoshida F. Uemori, T. and Fujiwara, K., Elastic plastic behavior of steel sheets under in plane cyclic tension-compression at large strain, *International journal of plasticity*, Vol.18(2002), pp.633-659.
- (145) Zouain, N.P., Borges, L.A. and Hecke, M.B., A force method for elastic plastic analysis of frames by quadratic optimization, *International journal of solids structures*, Vol.24(1988), pp.211-221.