

量子情報分割

関野 裕司

広島大学大学院総合科学研究科

Quantum-Information Division

Yuji SEKINO

Graduate School of Integrated Arts and Sciences, Hiroshima University

量子力学を情報論的視点から見直すことによって生まれた“量子情報科学”は、近年盛んに研究され、その発展が著しい分野である。その中でも特に“量子複製”に代表される量子操作に対する定性的および定量的考察は、量子力学とりわけ“量子情報”の本質を理解する上で、極めて基礎的である。本論文では、出力が無相関であるような量子操作（無相関量子操作）に注目してその定性的および定量的議論を行い、“量子情報分割”の可能性を議論する。

無相関量子操作において、すべての出力の状態が、純粋状態の入力に依存する不完全複製操作（無相関複製）は、量子操作の線形性とエルミート保存性により、決定論的には不可能であることが示されており、その証明は確率的操作にも適用可能であるとされてきた。本論文では、最初に、そのような決定論の場合での証明の確率的操作への適用は誤りであることを示す。次に、量子操作の線形性、エルミート保存性の他に、さらに正值性の条件を仮定することによって、（任意の純粋状態の入力に対する）確率的無相関複製不可能性の完全な証明を与える。

最後に、得られた無相関複製不可能性の結果を用いて、無相関操作の情報論的考察を行う。具体的には無相関操作を入出力間の平均忠実度に関して最適化することによって、無相関操作を定量的

に評価し、情報論的に定義される量子情報分割は決定論的には不可能であるが、確率的には可能であることを示す。

第1章 序論

本章では、本論文の研究対象である無相関量子操作を身近な例（古典的な例）を使って説明した。さらにその例を用いて本論文の研究動機も記した。

第2章 量子力学における時間発展と測定

本章では、本論文全体を通して必要となる、量子情報科学における量子操作について論じた。

通常の量子力学では、量子状態はHilbert空間における大きさ1のベクトルで記述される。また量子状態の時間発展はユニタリ変換で与えられ、量子状態に対する測定は射影演算子で記述されるいわゆる von Neumannの（射影）測定で与えられる。ところが量子系の部分系に注目すると、その部分系の量子状態は一般に密度行列で記述され、時間発展、測定もそれぞれ線形・完全正值写像、POVM測定に一般化されることが知られている。量子情報科学では、このようにして一般化された量子状態に対する時間発展と測定を“量子操作”として統一的に扱うことが基本的であり、本章で

は、量子操作の数学的に厳密な取り扱いとその解説を行った。

第3章 量子複製

本章では、本論文の研究対象である量子複製に関して、その基本的な考え方と研究の歴史を記した。特に完全複製不可能定理が生まれた経緯と、この不可能定理が後にどのように発展したのかに焦点を当てた。さらに、第4章の研究内容の動機付けとなる、「出力間における相関の有無という視点で見たときの従来の量子複製の問題点」を論じた。

Herbert は、我々の身の回りにある情報（すなわち古典情報）においては当たり前のように可能である“完全複製”が、(任意の)量子状態に対しても可能であると仮定すると、相対論とは矛盾する超光速通信が可能となることを主張した。この主張に対して、実質反論する形で Wootters, Zurek, Dieks 等は“完全複製不可能定理”を証明した。この定理は、任意の量子状態を完全複製する操作は量子力学においては存在しないことを示した。完全複製不可能定理は禁止則でありながら、その発表の14年後に、Buzek, Hillery 等が、複製後の状態（出力の状態）がオリジナルな状態（入力の状態）とは完全には一致しない“不完全複製”であれば、量子操作においても可能であることを、具体例を挙げて示し、それによって“量子複製”と呼ばれる新しい分野が開かれた。Buzek, Hillery 等はさらに、出力の状態が入力の状態にどの程度依存しているのかを、入出力間で定義される平均忠実度を用いて定量的に評価し、得られた具体的な値は後に Gisin, Brass 等によって最適値であることが示された。

しかし従来の量子複製では複数の出力の状態間に相関が残り、出力が互いに独立してはいない。実際、上で論じた Buzek, Hillery 複製操作でも出力間に相関が存在している。これでは“複製”と呼ばれるにはふさわしくない。ここから次のような疑問が生まれる。すなわち「出力の状態が互いに無相関で、かつ入力に依存するような量子操作（無相関複製）は可能だろうか？」。

この問題が本論文の最初の研究動機であり、次

章で詳しく扱ったテーマである。

第4章 無相関複製の不可能性

本章では、本論文の最初の主要な結果である、確率的無相関複製不可能性の証明を行った。最初に、すでに知られている決定論的無相関複製不可能性の証明を詳しく述べ、次にその証明が確率的操作には適用できないことを、反例を挙げることによって示し、最後に確率的無相関複製の不可能性の完全な証明を与えた。

D'Ariano 等は、量子操作の線形性とエルミート保存性から決定論の場合の無相関複製不可能性が導かれることを示した。つまり、任意の純粋状態の入力を考えたとき、複数の出力の状態が互いに無相関でかつ入力に依存するような決定論的操作は、量子力学では存在しないことを証明した。D'Ariano 等は、さらに、その証明がそのまま確率的操作にも適用することができることを主張し、結果として、確率の場合も含めて、無相関複製不可能性が導出されたと主張した。

そこで筆者はこの主張を詳しく調べ、決定論的証明の確率の場合への適用は誤りであることを、反例を挙げて示した。さらに、この反例の一般論を考察し、D'Ariano 等の証明の確率の場合への適用は、一般に不可能であることを示した。具体的には、確率的無相関操作においては一般に、「入力に依存した実現確率をすべての出力が共有する」という特異な性質があることを指摘し、その特異性が、決定論的証明の確率の場合への適用を不可能にしていることを示した。次に、量子操作が持つ性質である線形性、エルミート保存性、正値性が、(上で挙げた反例を含め)すべての確率的無相関複製の可能性を完全に排除することを証明した。

以上より D'Ariano 等の決定論の場合の証明と、本章での確率の場合での証明によって、無相関複製はすべての量子操作で不可能であることが示された。

第5章 量子情報分割

本章では、第4章で得られた無相関複製不可能性の結果を用いて、無相関量子操作の最適化を行

う。最適化は、入力と出力間の忠実度をすべての入力状態で平均した“平均忠実度”に対して行う。

最初に、第4章で得られた無相関複製不可能性を定性的に考察し、確率的無相関操作では、入力に依存した出力状態の実現確率が、すべての出力で共有されるために、確率的操作では、入力の量子情報は分割可能であることを定性的に論じた。次に、実際の最適化に用いたエンタングルメント忠実度の導入を行い、さらに平均忠実度との間に成り立つ線形な関係式についても合わせて論じた。続いて、エンタングルメント忠実度を求めるために必要となる“無相関操作に同型な演算子”を求めるために、3つの補助定理の証明を行い、無相関操作に同型な演算子を具体的に導いた。最後に、得られた同型な演算子からエンタングルメント忠実度を作り、それを決定論の場合と確率の場合、さらに対称の場合（つまり各出力に対する忠実度が全て等しい場合）と非対称の場合に分けてそれぞれの平均忠実度の最適値を導出し、さらにその値を実現する具体的な量子操作も導いた。その結果、情報論的に定義される“量子情報分割”は量子操作において可能であることを示した。

第6章 結論と議論

本章では、論文全体の結論と得られた結果を議論した。結論は以下の通りである。

1. 無相関複製は確率的操作においても不可能である
2. 量子情報分割は決定論的には不可能である
3. 量子情報分割は確率的には可能である

結論1：すでに知られていた量子操作の線形性とエルミート保存性を使った決定論的無相関複製不可能性の証明は確率の場合には適用できないことを、反例を挙げることによって示した。次に確率的無相関操作の一般論を考察し、量子操作の線形性、エルミート保存性、正值性から確率的無相関複製不可能性の証明を与えた。

結論2, 3：結論1で得られた無相関複製の不可能性から、入力の量子情報の分割可能性を議論した。具体的には、まず無相関複製不可能性の結果を用いて、定性的に量子情報分割が可能であるか否かを議論し、決定論操作では不可能であるが、確率的操作では、入力に依存した確率をすべての出力が共有することによって、量子情報分割が可能となることを示した。次に、無相関量子操作を入出力間の平均忠実度に対して最適化することによって定量的に評価し、定量的考察でも同様に、量子情報分割は決定論的には不可能であるが、確率的には可能であるという結果を得た。