論 文 審 査 の 要 旨

博士の専攻分野の名称	博　士（　理学　）	氏名	宮　崎　隼　人
学位授与の要件	学位規則第 4 条第 1・2 項該当		

論文題目

The conservation law for nonlinear Schrödinger equations with non-vanishing boundary conditions at spatial infinity（空間遠方で消滅しない境界条件をもつ非線型シュレディンガー方程式の保存則について）

論文審査担当者

主　　査　　教　授　川下　美潮

審査委員　　教　授　吉野　正史

審査委員　　教　授　坂元　国望

審査委員　　准教授　眞崎　聡（工学研究院）

〔論文審査の要旨〕

非線型 Schrödinger 方程式は様々な物理現象を記述するモデル方程式として現れるが、偏微分方程式論の立場から見ても興味深い方程式である。その形は、線型 Schrödinger 方程式に低階の非線型項が加わった時間発展型をしている。線型の場合は解の存在・一意性が容易にわかるが、非線型の場合にはそれすらが問題になる。そこで、解がどれくらいの長い“時間”存在し、その解がただ一つであるかどうかということに興味が持たれ、古くから盛んに研究されている。

非線型 Schrödinger 方程式の時間局所解を得た段階で、保存則が成り立っていることが分かったとする。さらにその保存則が時間大域解を得るために有効な先見評価式を導くものであれば、局所解を延長できる。このように時間大域的に解が一意的に存在することが、局所解の存在を保証する空間・初期値に対して示すことができる。本論文はこの発想に立ち、解が空間遠方で減衰しない性質を持つことが期待される非線型 Schrödinger 方程式に対して、局所解を得た段階でエネルギー保存則が成り立つこと、および、それを用いることにより局所解を得るために必要となる仮定をおくだけで時間大域解が得られることを主張する。

本論文の内容は大きく分けて次の 2 点からなる。

(1) 非線型Schrödinger方程式の保存則の導出に関する考察。

(2) 非線型Schrödinger方程式の時間大域解の一意存在性についての考察。

一般に非線型Schrödinger方程式の解の一意存在性を議論するには、線型Schrödinger方程式の解作用素（Schrödinger半群という）とDuhamel原理を用いてもとの方程式を積分方程式に変換し、それが解けるような関数空間をうまく設定することにより行われる。まずは、時間に関する局所解の一意存在性を得るために逐次近似法が適用できるようにすることを考慮して関数空間が設定される。もちろん、解が満たすべき保存則を意識して空間設定を行うが、実際に保存則が満たされているかどうかはこの段階では分からない。方程式が出てきた現象的な背景を考えると明らかなように思えるが、証明が必要である。

本論文の内容(1)は通常のべき乗型の非線型項をもつ非線型Schrödinger方程式の場合に小澤徹教授（早稲田大学）が提示した保存則の新たな導出法が、他の形の非線型項の場

合にも有効であることを示したものである。この導出法は単にSchrödinger半群のユニタリー性と積分方程式を解く際に導入した解が属している関数空間の双対性に関する性質だけから保存則を導出するもので、微分操作を用いない。この方法における急所は、式変形において方程式をうまく利用できる形に変形することと、現れる双対内積の意味づけをどのように行うかというところにある。

べき乗型非線型項の場合、解は空間遠方で減衰する。ところが、非線型Schrödinger方程式には空間遠方で消滅しないのが自然なものもある。例えばGross-Pitaevskii方程式と呼ばれる非線型Schrödinger方程式がそれに当たる。本学位申請者（以下、申請者という）はこのようなタイプの方程式についてべき乗型のときと同様の考察を行った。この場合も質量保存則、エネルギー保存則に当たる性質があるが、それらを方程式の解が属する関数空間の双対性の性質と、この解が満たしている積分方程式から直接導いた。基本的な考え方はべき乗型の場合と同じではあるが、この方程式の解は空間遠方で減衰しない関数になることから、関数空間の選び方がかなり異なる。この事実と非線型項の形から、現れる双対内積の意味づけが複雑になり、先行研究の単なる模倣ではうまくいかない。この部分を克服するために、局所解の存在を示す際にも必要になった解の値の大小による分解のみならず、周波数空間で見て周波数が大きいところと小さいところに分解することも用いて、現れた双対内積の意味づけを行った。このように、申請者が扱った一般的な場合に対する証明法は、小澤教授の仕事を発展させたもので、その方法も単なる後追いで出来るものではない。

次に、申請者は(2)の時間大域解の一意存在性を局所解を構成したときに用いた空間において調べた。通常、局所解を得た後、その解が時間大域的に存在するかどうかが大きな問題になる。大域解の存在証明は、局所解があまり大きくならないことを示す先見評価式を導くことにより、局所解を順次つないでいけることを確認するという方法が用いられる。先見評価式は保存則から導かれることも多いので、大域解の存在証明のためにも保存則を導くことが重要になる。

保存則の直感的な導出は、保存量と思われるものを時間微分し、解が方程式を満たしていることを用いて変形し時間微分が恒等的に零であることを示すことによる。一方、上記の逐次近似法が有効となる関数空間の元は、上記の手続きが許されるだけの微分可能性をもっていない。この問題を回避するために、初期値や方程式を少し変形し微分可能性が十分にある解の近似列で、その極限が本来の解になるものを構成するという操作を経て保存則を得るというのが通常の手法である。しかし、この方法は手間がかかる上に、非線型項が一般的な形をしている場合は、保存則を導くために行う極限操作のために非線型項の微分可能性に対する仮定を、局所解の構成の際に設けたものに加えて、新たに仮定を付け加える必要も起こりえた。

さて、(1)の考察により、局所解を構成したときに用いた空間において保存則が成り立つことが示されている。だから非線型項に新たな仮定をおくことなく、時間大域解の存在を示すために必要となる解の先見評価式が得られることになる。この手法で申請者は先行研究では付けられていた追加の仮定をなくすことに成功した。これが冒頭で述べた内容であり、他の問題についても本論文の発想は生かせるように感じる。

以上、審査の結果、本論文の著者は博士（理学）の学位を授与される十分な資格があるものと認める。

公表論文

H. Miyazaki, The derivation of the conservation law for defocusing nonlinear Schrödinger equations with non-vanishing initial data at infinity, J. Math. Anal. Appl. 417 580-600 (2014).