学位論文要旨

The conservation law for nonlinear Schrödinger equations with non-vanishing boundary conditions at spatial infinity

（空間遠方で消滅しない境界条件をもつ非線型シュレディンガー方程式の保存則について）

氏名　　宮﨑　隼人

非線型 Schrödinger 方程式は非線型媒質中のレーザービームの自己集束現象や, Bose-Einstein 凝縮等, 多くの物理現象を記述する方程式であり, 1970 年代から数学的にも活発に研究が進められている研究対象である. 偏微分方程式の解に対しては, 方程式のもつ対称性に対応し種々の保存則が成立する. 例えば, ベキ型の非線型項をもつ非線型 Schrödinger 方程式

$$i\partial_t u + \Delta u = \lambda |u|^{p-1} u, \qquad u|_{t=0} = u_0 \qquad (\ p \geq 1,\ \lambda \neq 0\ ). \tag{1}$$

の解に対しては, ゲージ不変性に対応する質量 (あるいは電荷) 保存則, 時間並進対称性に対応するエネルギー保存則が代表的な保存則である. 本論文の主題は, このような保存則の成立条件と Schrödinger 方程式のもつ解空間の構造との関係性について, 1 つの示唆を与えることである.

本論文の構成について述べる. 2 章では, 方程式 (1) の先行結果について述べる. 始めに, 線型 Schrödinger 方程式の解表示を与え, Schrödinger 方程式の特徴的な性質である分散性を表現する Strichartz 評価について述べる. 次に, L^2 の枠組のクラスにおける初期値問題 (1) の時間局所適切性について述べる. さらに, 方程式 (1) におけるさまざまな保存則の形式的な導出方法を提示し, その導出手法を正当化するための標準的な方法である元の方程式の解に極限移行するような滑らかな近似解を構成する手法を解説する. 最後に, 保存則の応用として得られる方程式 (1) の時間大域的な性質について述べる.

3 章では, 本論文において主に焦点を当てる方程式である, 空間遠方で消滅しない境界条件をもつ非線型 Schrödinger 方程式

$$i\partial_t u + \Delta u = f(|u|^2) u, \qquad u|_{t=0} = u_0 \tag{2}$$

の先行結果について概説する. 方程式 (2) は物理的な要請から次の意味での境界条件

$$\exists \rho_0 > 0 \quad s.t. \quad |u(x)|^2 \to \rho_0 \quad as \quad |x| \to \infty$$

を仮定する. また非線型項 $f : [0, \infty) \to \mathbb{R}$ には次の defocusing と呼ばれる性質を仮定する:

$$f(\rho_0) = 0, \quad f'(\rho_0) > 0.$$

まず, Béthnel-Saut (1999) により示された, 方程式 (2) において $f(r) = r - 1$, $\rho_0 = 1$ とした

$$i\partial_t u + \Delta u = (|u|^2 - 1) u, \qquad u|_{t=0} = u_0 \tag{3}$$

の初期値問題が, 空間 2, 3 次元において関数空間 $1 + H^1(\mathbb{R}^n)$ の任意の初期値で時間大域的適切となることを述べる. 次に Gérard(2006) の結果である, 空間 2, 3 次元において初期値問題 (3) がエネルギー空間

$$E_{\rho_0} = \{u \in H^1_{loc}(\mathbb{R}^n); \nabla u \in L^2(\mathbb{R}^n), |u|^2 - \rho_0 \in L^2(\mathbb{R}^n)\}, \quad \rho_0 = 1$$

上で時間大域的適切となることを述べる. 特に, エネルギー空間 E_{ρ_0} の構造と E_{ρ_0} 上の Schrödinger 作用素がどのように扱われるのかについて概説する. 最後に, Gallo (2008) により示された, 空間 4 次元以下において適切な条件を付加した一般化非線型項 $f \in C^{m+1}([0,\infty))(m = \lfloor \frac{n}{2} \rfloor + 1)$ の下で, 初期値問題 (2) が E_{ρ_0} 上時間大域的適切であることを述べる.

4 章では, 小澤 (2006) により与えられた方程式 (1) の保存則導出における新しい手法について述べる. これまで, Schrödinger 方程式のように主に正則性が低い解を考える方程式では, 保存則を導出するとき, 元の解に極限移行するような滑らかな近似解を構成する必要があり, 方程式ごとの個別の議論が必要であった. しかし, 小澤 (2006) により, 方程式 (1) においてこの近似解を構成する議論は必要ではなく, 時間局所解を構成した際の解空間の情報にさえ注目すれば保存則は自動的に成立することがわかることが明らかにされた.

5 章では, 本論文の主結果を述べる. Gallo (2008) が扱った方程式 (2) では, 解を時間大域的に延長するために必要なエネルギー保存則を, 初期値を滑らかな関数で近似し, 滑らかな近似解を構成することにより導いている. この際, 空間 2, 3, 4 次元において, 非線型項 f を時間局所解を構成する際に必要な回数 (2 回) よりも多く微分する必要があるため, 非線型項に過剰な仮定 $f \in C^{m+1}([0,\infty))(m = \lfloor \frac{n}{2} \rfloor + 1)$ が必要であった. そこで宮崎 (2014) は, 空間 2, 3, 4 次元において, エネルギー空間の構造に注目し非線型項 $f(|u|^2)u$ を

$$f(|u|^2)u = \chi(D_x)f(|u|^2)u + \sum_{j=1}^{n}(1-\chi(D_x))P_j(D_x)\partial_{x_j}(f(|u|^2)u)$$

$$(\chi(\xi) \text{ は Cutoff 関数}, \ P_j(\xi) = i\xi_j/|\xi|^2)$$

のように分解し, 小澤 (2006) の手法を応用することによって, f の過剰な仮定を取り除き, 時間局所解を構成するために必要な滑らかさ $f \in C^2([0,\infty))$ の下でエネルギー保存則を導くことに成功した. この結果は, 非線型 Schrödinger 方程式において保存則が成立するかどうかということは, 時間局所解を構成する際の解空間の構造に注目することにより判断できるということを示唆している.