論　文　要　約

算数教育における数学的概念の構成と再構成に関する研究

長谷川　順一

論 文 目 次

第１章　本研究の目的と方法

１　本研究の目的

児童･生徒は数学的概念や知識の構成と再構成を繰り返すことによって、それぞれが保持している数学的諸概念やそれらからなる数学的知識を構造化し拡大するとともに精緻化させていく。本研究では、その様相を次のような３つの素材にそくしてミクロの観点から児童の誤判断の様相を捉えるとともに、その修正に向けて教材･教具の観点から提言を行う。検討する３つの素材は、以下の通りである。

① 三角形･四角形の概念

小学校第２学年で「三角形･四角形」の学習が行われる。そのとき、三角形･四角形について言語的説明がなされるが、その後も、あるいは中･高学年であっても、正方形や長方形は四角形だと判断しても不等辺四角形に対しては四角形ではないと判断する児童がみられる。本素材には、三角形･四角形の概念の構成活動やそこで用いられる教具の意義、誤判断の生成などの、検討を加える上で興味深い観点が含まれている。それらを明らかにするとともに、三角形･四角形の概念の構成に向けた活動について検討する。

② 図形の面積と周長の分離

面積の用語及び正方形、長方形の求積公式は第４学年で、平行四辺形や三角形、台形などの求積公式は第５学年で扱われる。第４学年用算数教科書の面積への導入場面では等周長の正方形と長方形の広さ比べが取り上げられ、それらの直接比較、任意単位による測定を経て面積の普遍単位が導入される。そのような場面をもとに学習しても、図形が等周長であれば等積であると判断する児童が多くみられる。図形が等周長であっても等積であるとは限らないことを授業で意図的に取り上げても、場面が異なると「等周長であれば等積である」と判断する児童が少なからずみられる。この素材については、授業事例を通して図形の面積と周長の分離の困難さを示すとともに、そこで用いられる教具の効果について検討する。

③量分数と分割分数の混同

「１ｍの半分も２ｍの半分も１/２ｍ」とするといったように、単位量を考慮せず対象全体に対する分割操作をもとに当該の量を分数表現する誤判断がみられることはよく知られている。ここでは、そのような問題を「量分数と分割分数との混同の問題」ということにする。ここで量分数とは量の普遍単位を用いた分数表現を、分割分数とは対象全体を等分割したとき、その部分の分数表現をいう。分数の四則計算や商分数などは量分数を用いた問題場面をもとに計算方法などが説明されることから、量分数の概念理解は不可欠である。ここでは、量分数の理解というミクロな観点から問題を実証的に扱い、教材の開発や授業実践に対して提言を行う。

これらの素材について検討するに際しては、平林の次の指摘に留意したい。すなわち、平林は、数学は現実の事物事象に対する我々の活動性にその最初の起源をもつということを基本的な視点とし、ひとまとまりの数学を発生的に子どもに学習させようとすれば、それにつながる一連の活動性を子どもに誘発させるようなたくまれた現実に子どもを置く必要があり、子どもの活動性を誘発する数学的道具が教具であると述べる。また、「１枚の紙片、１本の糸くずでも、それが子どもの活動を組織づけ、方向づけるのに利用されれば、

それは教具である」と述べている（平林、1987、pp.348-349)」。平林は、数学へと向かう子どもの活動性を引き出し組織づける道具として教具を位置づけるとともに、１枚の紙片でも教具になり得ると述べることで、児童を指導する教師の役割の重要性を指摘するのである。子どもを数学的概念の構成と再構成に向かわしめる教具の機能とその使用のあり方に留意して、上記の３つの素材について検討を進めたい。

２　本研究の意義

本研究は、次のような意義を有している。本研究ではミクロの観点からの授業検討、調査研究、授業実験に基づき３つの素材について実証的に検討し、誤判断の様相やその修正のための方法について具体的な提案を行う。そのため、同様の素材を用いて実施される授業実践や教育研究に対して具体的な資料を提供するものとなる。また、教材･教具を含む教育実践を研究対象として研究を実施する際の研究方法の事例を示すものともなろう。

３　研究方法

以下では研究方法の背景を述べ、次いで具体的な研究方法を示す。

（１）ミクロな観点からの検討

数学的知識の構成と再構成のメカニズムを明らかにしようとした理論の１つにピアジェの均衡化理論がある（Piaget、1975)。ピアジェは数や量、空間など数学教育に関連する基礎的概念を取り上げ発達論的観点から検討を加えたが、その発達を推進する要因の１つを均衡化に求めた。均衡化理論はシステムに対する攪乱とそれに対する補償のメカニズムや、さらには数学的知識の発達過程の機序をも明らかにしようとする理論であり、児童の数や量についての知的操作のメカニズムを記述し説明するとともに、数学的構造までもその射程に含めるものであった。しかしピアジェ没後には、ピアジェの領域普遍的な知能の構造論が批判的に検討され、代わって領域依存的な発達を観点とする知識の構成論が提唱されるようになったことはよく知られている。そのような論の１つに、概念変化研究がある。

一般に、概念変化とは概念の再構造化、再体制化を意味し、中核となる概念が変化することによる理論変化の様相をとるとされる（Murphy, 2006 ; Vosniadou, 2008)。但し、子どもが保持している概念が理論と呼ばれるような体系をなしているかについては、異論もある（diSessa、2006）なお、稲垣･波多野（2005）は、概念変化を「新しい情報により生じた知識体系の混乱から、現在の知識体系の構成要素の複雑な相互作用によって、その一貫性を回復する認知的試みである」と説明している。

このような概念変化研究の基本的観点は、非常に興味深い。しかし、算数教育の観点に立てば、概念変化に伴う現象の記述に留まらず、授業を通して局所的な概念の変化を継続的に生起させる必要がある。誤判断がみられ、それがその後の学習内容に影響を与える場合は、その解消を自生的な過程に委ねておくのではなく、早急に対応を講じることが必要になるのである。

（２）意図的漸進的な数学的概念の構成と再構成

先にも述べたように、算数教育では、概念が数学的に適切でないように構成されていれば、意図的に指導を行い修正する必要がある。このとき、概念変化研究の観点からなされた波田野･稲垣の次の指摘は重要である。波田野･稲垣（2006）は、概念変化は自生的に生じる場合と、教科に関する体系的教授により科学に関する概念装置を理解することによっ

て生じる場合があるとし、概念変化を引き起こすための教授方略に関して、次の２点を指摘している。１つは、学習者が自分のもつ知識の中に不整合があることを自覚することであり、もう１つは、既有知識の中に再体制化に必要な知識が存在していることである。それらは、数学教育において児童の概念の構成と再構成のための支援や教授的介入のあり方を検討する際にも、重要な観点となる。そのためには、授業観察、調査研究、授業実験によって、児童や検討する素材に応じて、どのように不整合が自覚されるか、再体制化に必要とされるどのような知識を保持しているかを明らかにする必要がある。

（３）算数的活動の内包する問題

Tall らは、数学的問題を解決しようとする個人に数学的情報がインプットされた場合、それによって活性化される２つの認知的コンポーネントを仮定している。１つは、情報に含まれる数学的概念の定義からなるコンポーネント（概念定義）であり、もう１つは、その概念に関するこれまでの諸経験からなるコンポーネント（概念イメージ）である。適切な数学的処理が行われるには、情報のインプットに対して概念定義と概念イメージのそれぞれが相互作用的に活性化され、適切な数学的処理としてアウトプットされなければならない。しかし、情報がインプットされると概念定義が呼び出されるのではなく概念イメージが喚起され、そのために数学的には不適切な判断がなされることがあるという（Tall & Vinner, 1981; Vinner 1983, 1991; Vinner & Hershkowitz, 1983）。算数的活動を充実させることによって、児童は概念イメージを豊富化させていくことになる。このとき、数学的に適切な概念が取り出され、不適切な属性が除去され、概念イメージとの適切な関係のもとで言語的定義に基づいて判断ができるようになる、そのような算数的活動を個々の概念にそくして検討する必要がある。

（４）研究の具体的方法

本研究ではミクロな観点から検討を進める。そのために、授業観察、調査研究,
授業実験によって実証的に検討を進める。授業観察では、フィールドノート、あるいはテープレコーダーやビデオカメラによって授業を記録するようにした。調査研究は、調査用紙を用い学級単位で一斉に実施する形式で行った。また授業実験とは、教材･教具の有効性を検討することを目的とし学級単位で実施する授業であって、事前･事後調査を行い概念理解の様相を明らかにしようとするものをいう。

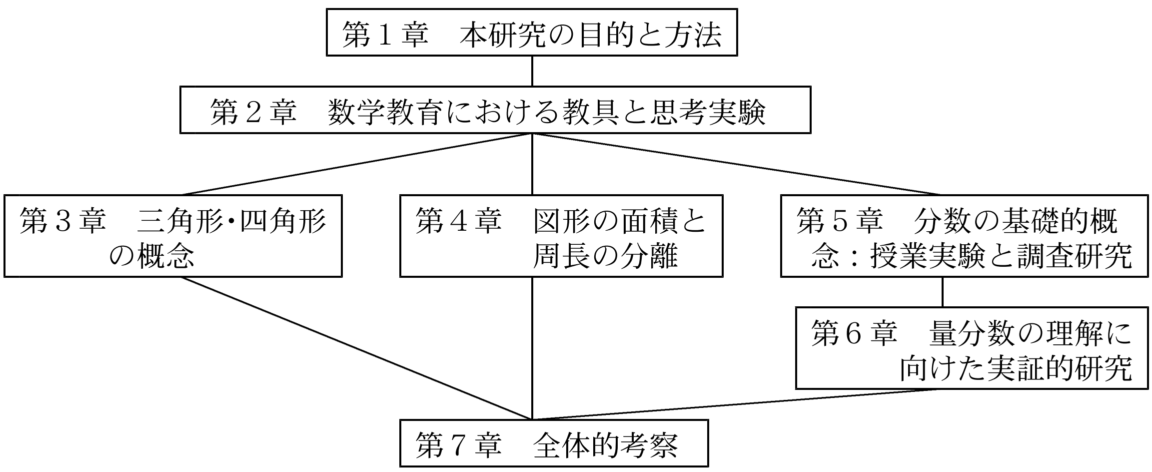
このとき、調査と授業には次のような差異があることに留意する必要がある。記述回答を求める調査の場合は通常、その結果が調査対象者にフィードバックされることはない。そのため、記述内容が正答であったとしても強化はなされない。誤答であっても、修正されることはない。一方、授業の場合は、ある児童･生徒の意見発表に対して賛成･反対はもとより、多様な発言がなされる。また、それが推奨される。それによって、ある意見に対して十分な理解に達していなかった児童･生徒が理解を深め、様々な意見に対する自身の考えを明確化することもあろう。授業での発言者の意見が全員を代表するものでは必ずしもないこととともに、調査によって得られた判断傾向がどのような場合にも常に適用される方法を表しているのではないことには注意しなければならない。それらを総合的に勘案し、教材･教具や授業方法の開発の資料として用いる必要がある。次の表１は、授業と調査の異なりをまとめたものである。

表　1　　調査と授業での反応とその扱い

	調査（個別記述回答）	授業
他の児童･生徒からの影響	影響は遮断される	強い発言者から影響を受けることがある
児童･生徒の質問や発言	認められない	意見交換の場面では奨励される
児童･生徒自身の意見の明確化	回答の記述に応じて明確化される	意見発表や意見交流に従って明確化される
正誤（賛否）のフィードバック	通常は与えられない	児童･生徒･教師の発言などによってフィードバックが与えられる
正答の強化や誤答の修正	通常はなされない	意見交流や正誤のフィードバックに応じて強化や修正がなされる
考えの変更	調査時間内には可能	１授業時間を越えて可能
問題に対する答えの扱い	個人の成果	学級集団の成果

4　本論文の構成

本論文は、次のような章から構成している。第２章では、算数･数学教育における教具と思考実験の機能について述べる。第３章では、三角形･四角形の概念について検討する。第４章では図形の面積と周長の分離の問題を取り上げる。第５章と第６章では、量分数と分割分数の混同の問題について考察を加える。なお、第５章と第６章は本来は１つにするべきであるが、大部のため２つの章に分割している。第７章では３つの素材に共通する特徴を整理するとともに、今後の検討課題を示す。



第２章　数学教育における教具と思考実験

１　はじめに

本章では、数学教育における思考実験と教具、及びそれらの関連性について検討する。そのために、先ず中学校数学の授業事例（長谷川、1988）を示す。本事例を取り上げるのは、そこで扱われている教科内容よりもむしろ授業展開の方法に焦点を当てるとともに教具や思考実験に注目したいがためである。

２　授業事例：２枚の硬貨を投げる問題

本授業事例は、中学校第３学年の生徒を対象とし２枚の 100 円硬貨を投げるとき２枚とも表が出る確率、１枚表で１枚裏が出る確率を求める問題（この問題を「２枚の硬貨を投げる問題」という）を扱ったものである。生徒に問題を提示すると、確率はそれぞれ１/４と１/２とする意見と１/３と１/３とする意見の２つが発表された。それに対して、１枚に印をつけたらどうかとの発言がなされたが､それを巡って次のような討論が展開された。

Ｓ 1：(両方ともに１/３を主張している生徒）印をつけたからといって確率は変わらない（｢変わる｣ ―の声)。

Ｓ 2：印をつけたら、Ａが表向いてＢが裏向いた場合とＡが裏向いてＢが表向いた場合は区別がついて４通りになるけど、印がないときは区別がつかないから、表と裏の場合は１通りになる。

Ｓ 3：印をつけたと考えたらＡとＢと分かれて４通りになって、ＡとＢの印を変えなくても同じ 100 円玉といっても２種類あるから、４通りの出方がある。

Ｓ 4：１枚に色をつけたとしたら、２枚の 100 円玉は区別できて確率は１/４と１/２にります。色を消しても、確率が変わるわけがない。

このような意見が出された後、硬貨を投げる実験を行うことになった。実験後にデータを集計し相対度数を求めると､「２枚ともに表」は 0.26､「１枚表１枚裏」は 0.51 となった。この結果をどう考えるかを問うと､「ともに１/３」とした生徒からは「１/４と１/２に近いけど、もっとやってみないとまだ分からない」との意見が出された。相対度数を求めることによって１/４と１/２に近い値が得られたが、それは「正しい答え」を示唆するが論理的帰結を示すものではない。そこで授業者はＳ 4 の発言を想起させ、１枚の硬貨に塗った色を徐々に消していけばどうか、確率が１/４から１/３に変わることがあるかを問うことで、10 円硬貨１枚、100 円硬貨１枚の場合と同じように考えなければならないことを確認して授業を終了した（図１）。

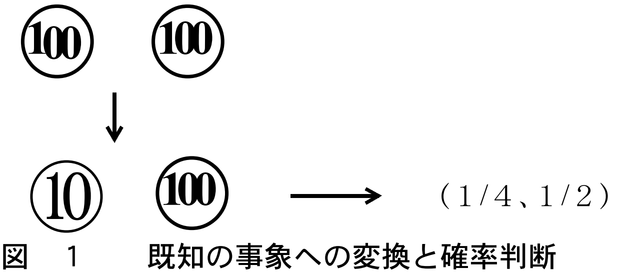


図　１　　既知の事象への変換と確率判断

本事例では授業冒頭で硬貨を用いながら問題が提示され、それに対する異なる判断が引き出された。意見の対立を解消するために行われた思考の上で硬貨に色を塗りそれを徐々に消去するという操作は、思考実験といえるだろう。それによって確率は「１/３」であると主張していた生徒は認知的葛藤に直面することになり、判断方法の変更を余儀なくされたのである。

３　教具と思考実験

平林は、数学は活動から生まれ、活動そのものであるという認識に沿った教育実践には教具･学習具の問題と表記の問題の２つの大きな問題がある、教具･学習具の問題は数学教育の出発点であり数学的活動の萌芽であり、数学的表記の問題は終着点であり成果であるとし、数学教育における教具の重要性を指摘していた（平林、1979；1987、pp.343-401）。また、算数の授業事例を検討する中で、問題場面を設定するために用いられる教具と問題解決を示唆する教具の異なる２つの教具の特性に着目し、前者を課題性、後者を説明性としてそれぞれの教具の性質を特徴づけようとした（平林、1985）。長谷川（1990）は、教具の範囲をむしろ狭く捉え、機能の観点から教具を次のように特徴づけた。すなわち、数学教育における教具とは、次のような機能をもつ物的対象である：①数学的な状況を設定することができる、②児童･生徒の思考を反映し対象化することができる、③それを操作することによって何らかの数学的結論を導き出すことができる、④思考を伝達しようとする意図のもとに、その手段･方法として用いることができる、⑤それに対する操作は内面化されることによって、心的イメージとして機能するに至る。また、平林に倣って課題性、説明性に富む教具を、それぞれ課題教具、説明教具と呼ぶとした。本論では、教具は基本的には、児童による操作が可能な物的対象をいうことにする。

ところで、先に示した授業事例では、思考実験が重要な機能を果たしていた。数学教育における思考実験とは、基本的には対象に対する物理的操作の思考の上での実行を意味するといってよいであろう。例えば、二等辺三角形の等辺を思考の上で重ねてみることによって底角の等しいことを確認する（Pinto & Tall、2002）などがそれに該当する。このとき、思考実験は個人によって行われている。また、ガリレオ･ガリレイの行った思考実験について検討した金子（1986）は、話し手と聞き手の間の記号操作に基づいて創案されるパラドキシカルな意味空間としての拡りにこそ注目すべきであると指摘する。このときは、思考実験は個人が実施する以上に、複数のものが対話を行う中で、それを主導するものが矛盾への逢着を意図して集団的思考に操作を加えている。２枚の硬貨を投げる問題を扱った授業事例では、後者の意味での思考実験が展開されたといってよい。それを生徒が自身の思考の道具として、内化させていくことが期待される。事象に数値（確率）を対応させる写像の構成や極限事象を考えるなどの科学史の上でみることができる思考の方法は、科学教育においても概念変化を引き起こす１つの要因となると考えられている（Carey and Spelke、1994）が、数学教育においてもその意義について検討する必要があろう。

２枚の硬貨を投げる問題を扱った授業事例では、最初に授業者が示した硬貨は課題教具として用いられた。しかし説明教具に該当する機能は、思考実験がそれを担っていた。現在であれば、そのような操作はパソコンを用いて画面上で実現することが可能であり、そのように用いられるパソコンは説明教具ということになろう。このように、説明教具は思

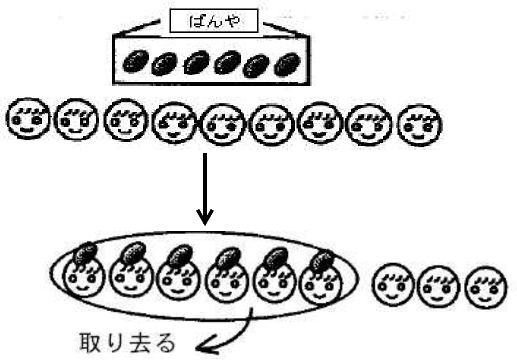
考実験的であり、思考実験を具体化したものとみることができる。

４　教具の活用と思考実験：事例

数学教育では、概念や数学的知識の構成や再構成を目的として様々な教具が用いられている。また、思考実験によってはじめて分け入ることのできる内容もある。ここでは、小学校算数第１学年の「求差:」(Hasegawa, 2002)、中学校第３学年の「0.999･･･＝１　といっていいか」を扱った授業事例（長谷川、1985a）を示す。

（１）求差の導入（小学校第１学年）

授業者は、求残の復習に続いて、「あんパン８個、豆パン３個、どちらが何個多いですか」との問題場面を児童に示した。児童からは「あんパン、５個多い」との発言がなされ「８－５＝３」との立式も発表されたが、なぜ引き算になるかを児童は説明できず「８＋３＝５」なども発表される中で授業が終了した、次時にも再度求差が扱われたが、このときは「子ども９人がパン屋さんにクリームパンを買いに来たが、クリームパンは6個しかなかった。パンが買えない子どもは何人ですか」との問題場面が提示された。この場面に対しても「６－９＝３」などの式が発表されたが、何れについても児童は立式の理由が述べられなかった。その中で、ある児童が黒板に提示された子ども（顔の絵）にパン（の絵）を配り、子ども１人とパン１個をセットにして6セットを取り去って示した（図２）。それによって「(子ども９人)－(パンが買えた子ども６人)」として問題場面が全体から部分を除去する求残に帰着され、この問題場面についても引き算で表現できることが示された。



：問題場面

：(子ども９人)－(パンが買えた子ども６人)

図　２　　比較場面の求残への帰着

本事例では、パンや子どもの顔をかいた絵が、最初は課題教具として、次いで説明教具として用いられた。本事例で扱われた問題は分離量を扱った素材であることから場面の連続的変形はなじまないが、一方の対象を他方に分配し除去するという行動が、児童の理解を促したことは間違いない。

（２）「0.99･･･＝１　といっていいか」(中学校第３学年)

本事例は、中学校第３学年の生徒を対象として実施された。 $x = 0.333\cdots$、$x = 0.666\cdots$ を $10x - x$ によって分数に直す方法を扱い、最後に $x = 0.999\cdots$ に取り組ませると、ややあって生徒から驚きとも何ともつかない声が上がった。生徒に意見を聞くと、$x = 0.333\cdots$ の場合、$10x - x$ を計算することから $0.333\cdots = 1/3$ が得られるが、$1 \div 3 = 0.333\cdots$ であり問題はない。0.666.･･･ も同様である。0.999･･･ の場合 $0.999\cdots = 1$ となるが、$1 \div 1 = 1$ であって 0.999･･･ではない、どこかおかしいとの発言がなされた。計算が

間違っているのではないかとの意見が出されたが、0.333･･･ や 0.666･･･ については問題はないから 0.999･･･ ＝１ についても問題はないとの発言もなされた。ある生徒は一旦は 0.999.･･･＜１であると主張したが、その後、「0.333･･･＝１/３ の両辺を２倍すれば 0.666･･･＝２/３で正しいから、３倍した 0.999･･･＝１ も正しい」と主張した。他の生徒からは「0.999･･･＜１なら、どれだけの差があるか。差があっても、それを越えて 999･･･ を続けていける」などの意見が出された。

最後の発言は、差がいくらかを問いつつ、差があるとしたとたんに、それを越えて 999 を付加したらどうかと問うという構造において思考実験的である。なお、本授業は確定的な結論を得ることを目的として実施されたものではなく、上記の生徒の発言をもって授業を終了した。

５　第２章のまとめ

２枚の硬貨を投げる問題を扱った授業は、①問題の提示と生徒の意見発表、②討論と意見の分布の明確化、③ 硬貨投げの実験、④ 確実な知識との関連づけ（実験結果の解釈）といった学習活動から構成されていた。本事例には硬貨を投げる実験が含まれており、通常は実験を伴わない数学教育での授業展開の典型事例であるとはいえない。しかし、③を実験や教具を用いた諸活動、討論などと変更することによって、数学的概念の構成や再構成を目的とする授業に対して１つのモデルを提供するものとなる。

特に、数学的概念の構成や再構成を目的とする授業では、どのような教具を用いる必要があるか、どのような思考実験が有効かを検討する必要がある。数学的概念は構成と再構成の繰り返しを通して数学的に適切な概念へと精錬されるとともに、他の数学的概念と関連づけられ構造化がなされていく。その過程を支援し指導する方法を開発することは、数学教育研究の大きな目標の１つである。なお、以下では小学校算数教育、中学校数学教育を包括的に述べる場合は「数学教育」といい、小学校の算数教育を明示するときは「算数教育」の語を用いる。

第３章　三角形･四角形の概念

１　問 題

三角形・四角形の語は、小学校第２学年で扱われる。その後、長方形、正方形、直角三角形（第２学年)、二等辺三角形、正三角形（第３学年)、平行四辺形、台形、ひし形（第４学年）のように三角形･四角形の概念を基礎とする図形学習が行われる。しかし、小学校高学年であっても、三角形や四角形の弁別が十分にできない児童もみられる。本章では、三角形･四角形の概念構造を明らかにした上で、小学校第２学年の児童を対象とし三角形･四角形を扱った授業事例を示す。また、児童の三角形･四角形の弁別の様相を明らかにすることを目的として実施した調査研究の結果を報告する。

２　三角形･四角形の概念の構成に関する対応＝操作

ある直線図形がｎ角形であるとする判断方法には、次のような方法が考えられる（長谷川、1985b；Hasegawa,、1997)。①頂点の数を数える、②辺の数を数える、③合同変換に

よって既知の図形に帰着させる、④与えられた図形に合同変換ではないある種の変形を加えることによって既知の図形に帰着させる。これらの方法は、図３に示した図式によって表現される。ここで、ＦやＦ′はｎ角形を、ℕは自然数の集合とするとき、ϕ：Ｆ →ℕ は①や②の方法を、ψ：Ｆ → Ｆ′ は③や④の方法を表している。①②の方法と③④の方法は相補的であり、三角形･四角形を扱う授業ではそれらがともに用いられることが望まれる。

$$\begin{tikzcd}
\mathbf{F} \arrow[r, "\phi"] \arrow[d, shift right, "\psi"'] & \mathbb{N} \arrow[d, equal] \\
F' \arrow[r, "\phi"'] \arrow[u, shift right, "\psi^{-1}"'] & \mathbb{N}
\end{tikzcd}$$

図　３　ｎ角形の判断

３　授業事例とその検討

三角形･四角形への導入を目的とした授業では、 ϕ：Ｆ →ℕ だけではなく、ψ：Ｆ → Ｆ′ も用いている児童を観察することがある（長谷川、1985b；長谷川･高橋、1991)。例えば、次のような例があげられる。

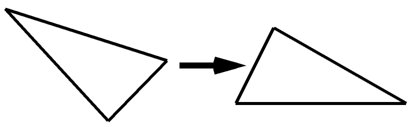


図　４ａ　三角形の回転移動

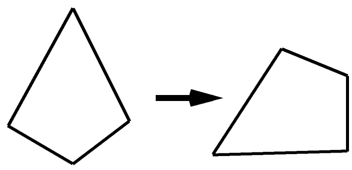


図　４ｂ　回転移動による判断

三角形･四角形を扱った授業で、ある児童は画用紙で作成され黒板に提示された図形を動かしながら「この形（図４ａ）も三角形に似ていないけど、(図を回転させ）動かすと三角に見えます。この四角も動かすと、四角に見えます(図４ｂ)」と発言した。これは③を用いた例である。同一の授業ではないが、三角形･四角形を扱った授業で、ある児童は等脚台形と等脚ではない台形が同じ仲間であることを説明する際に、動作によって斜めの辺の部分を広げる操作を示し、広げたら同じになると説明した。この方法は、④に該当するものである。また、図４ａ,４ｂに示したような図形から「３-かく」や「４-かく」を経て三角形や四角形の概念が取り出されるが、最初に提示された図４ａ,４ｂの図形は課題教具であり､操作の対象として用いられればそれらは説明教具として機能したことになる。

図５は、三角形や四角形の「へり」の直線性が、授業という集団的思考の中で達成された事例を示したものである（第２学年「三角形･四角形」第１時)。

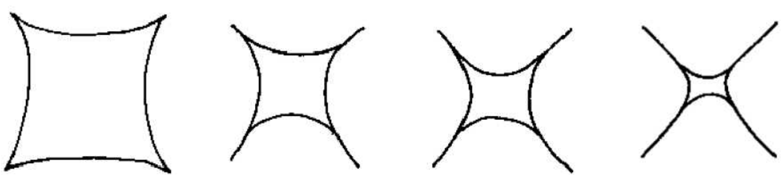


図　５　星芒形とその変形

図５左端の図形に対して「四角」とする児童が多くみられる。そこで、授業者が児童の発言に従って図形をかき加えていったところ、右端の図形については四角ではないとの発言があり、「それならどこまで曲げたものが四角なのか分からない」との児童の発言によって、「へりはまっすぐである」ものだけを考えることになった。図形を変形した際の極限図形を考える思考実験が行われた事例であり、このような変形の過程を物的対象によって具体化すれば、それは説明教具ということになろう。

４　三角形・四角形」についての授業実験

授業観察で得られた知見に基づき、公立小学校第２学年１学級の児童を対象とし、1993 年 10 月に「三角形・四角形」の単元を取り上げて授業実験を行った。一連の授業は、三角形・四角形の概念理解のより強固な定着を目標としたものであった(長谷川・香川、1994)。授業ではジオボードを用いた図形の構成活動を基本とし、算数教科書に記載されている内容も取り入れて実施された。ジオボードを用いたのは、課題教具と説明教具の両方の特性を備えていること、図形の構成や変形が容易に行える、つまり「かいたり消したり」が自由にできる可塑性をもつ教具であること、ジオボードを操作することによって図形のイメージと定義とを対応させながら概念の構成を図ることができることによる。

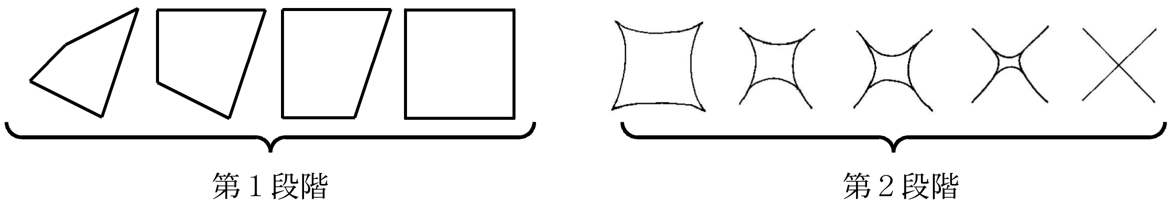


図　６　四角形の扱い

本単元への導入には四角形を用い、ジオボードでの四角形の構成と図形の変形を扱い、そこにみられる不変性（$\phi(F)=4$）に着目することから、四角形の言語的説明が導入された（図６、第１段階)。また、へりが直線であることについては、星芒形様の図形の変形をもとに直線でなければならないことを示すようにした（図６、第２段階)。

それ以降もジオボードを用いた活動を中心に、本単元の指導が行われた。事後調査の結果、三角形・四角形の弁別問題についての児童の正答率は高かった。表２は、調査結果の一部を示したものである。調査１、２は授業実験を行った学級の児童（37 名）を対象とし、調査３は他の公立小学校第２学年の児童（61 名）を対象として、実施したものである。実施時期は、調査１は単元の学習終了２週間後、調査３、４は約５ヵ月後であった。

表　２　図形弁別問題の例

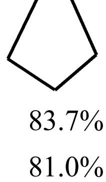
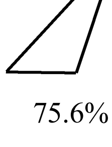
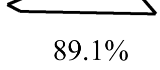
図形			
調査１	83.7%	75.6%	89.1%
調査２	81.0%	81.0%	81.0%
調査３	26.2%	24.6%	24.6%

表１に示した図形は弁別が困難なものであるが、授業実験実施学級の児童の正答率は高

い。このことから、図形の判断方法に留意しジオボードを用いて実施した一連の授業の効果が確かめられた。

5　三角形･四角形の弁別に関する調査

授業実験の実施後、学習指導要領が改訂されたこともあり、児童の三角形･四角形の弁別についての実態を明らかにすることを目的とし、2012 年３月に公立小学校第２～５学年各２学級の児童を対象として調査を行った。図７は、調査問題で用いた図形例である。

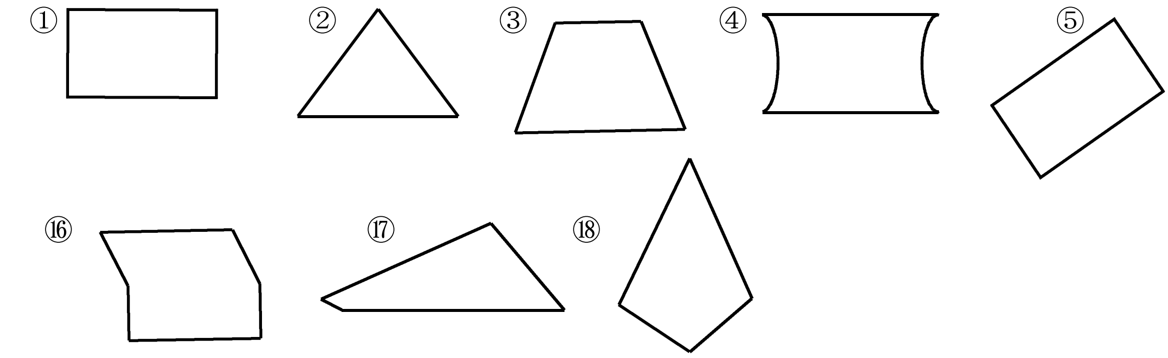


図　7　　提示図形（一部）

調査では、図７の①→②→③→‥‥→⑱の順に図形を示した問題冊子と、⑱→⑰→⑯→‥‥→①の順に示した問題冊子の２種類を作成し、各学級でそれらをランダムに配布した。前者に回答した児童群を「長方形先行群」、後者に回答した児童を「不等辺四角形先行群」という。問題は、それぞれの図形について三角形か、四角形か、どちらでもないかを問うものであった。

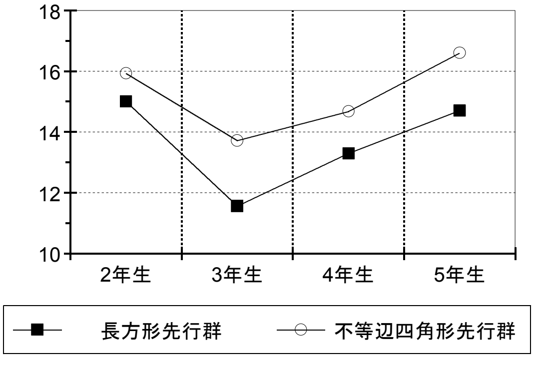


図　8　　学年別群別の結果（平均値）

調査の結果について、正答に１点を与え学年及び群別に平均値を算出した。図８は、その結果を表したものである。学年×群の２要因の分散分析を行い検討したところ、学年の主効果、群の主効果が有意であった。HSD 法によって多重比較を行ったところ、(３年生)＝(４年生)＜(２年生)＝(５年生) であり、第３、４学年で正答率の低下がみられ、第５学年では回復がみられた。後者については、第５学年で扱われる図形の合同や多角形の角

の和の学習が効果をもたらしていることが追加調査によって確かめられた。前者については、第３、４学年で扱われる二等辺三角形や正三角形、平行四辺形やひし形を学習する際、等辺や等角が強調されることによるものであることが推測される。また、図形ごとに点検したところ、不等辺四角形先行群では頂点（かど）の数によって判断していると思われる傾向がみられた。

６　ｎ角形の扱い

三角形･四角形の弁別調査について、第５学年では正答率の上昇がみられた（図８）。これに関して、第５学年で「図形の合同」や「三角形･四角形の角の和」を学習すると、三角形･四角形の弁別の正答率が向上することが確かめられた。特に後者では五角形や六角形の角の和も取り上げられていることから、三角形･四角形の概念構成には、五角形や六角形などを扱うことの有効性が示唆される。

７　第３章のまとめ

ジオボードを用いた三角形･四角形の授業では、児童が意欲を持って積極的に取り組む様子が窺えた。また、三角形･四角形の弁別に関する調査結果から、第２学年以降に三角形･四角形が扱われる場合は、不等辺三角形や不等辺四角形に基づいて三角形･四角形の概念を再学習する機会をもつ必要がある。その場合もジオボードを用いるなど、すぐれた教具によって設定される数学的シツエーションにおいて児童が数学を学習できるよう、その環境整備に努める必要がある。

第４章　図形の面積と周長の分離

１　問 題

「面積」については、小学校第１学年で、直接比較、間接比較、任意単位（個別単位）による測定が、第４学年では面積の普遍単位、長方形や正方形の求積公式、複合図形の求積などが、第５学年では平行四辺形、三角形などの求積公式が扱われる。また、面積に関する学習上の困難な点がいくつか知られているが、その中の１つに等周長図形であれば等積であるとする誤判断がある（例えば、細谷、1968；銀林、1975；Montangero 1976；Russell, 1976；梶、1983；Fischbein et. al., 1979；西林, 1988；工藤･白井、1991；土井、1993)。
その原因について西林(1988)は、児童は２次元の図形と１次元の周とを別のものであると考えていることから、面積と周長とを混同しているというのは適切ではないとし、液量の保存概念の獲得と図形が等周長なら等積であるとする判断との相関関係を検討した結果、周長による面積判断は保存概念の獲得を媒介にして生じると指摘している。また、そのような誤反応は「成長によるエラー」であるという。それに対して、成長によるエラーとすると誤反応は成長に伴って不可避的に生じると見なすことになる、算数教育のあり方を検討する必要があるなどの指摘もなされている（工藤･白井、!990)。

２　「面積」の言語的説明について

算数教科書では「広さのことを面積という」のように「面積」の説明がなされているが、

それは数学的定義とはいえない。数学的には面積は、加法性、合同変換のもとでの不変性などによって定義されるが、それらは児童が具体的な対象の広さを比較するなどの行動によって実現されている。そうであれば、「広さのことを面積という」という説明がなされる以前に、行動を通して面積の性質を理解する場面を充実させる必要がある。

3　等周長の正方形と長方形の面積比較

ここでは、1997 年 12 月に小学校第４学年２学級の児童を対象として実施された３時間の授業実験（長谷川、2008）の概要を示す。授業の目的は図形の構成を通して図形の面積と周長との分離を図ることであり、第１時には等周長（周長 12cm）の図形を構成し面積について考える活動が、第２時には等積（面積４ cm^2）の図形を構成しその周長を考える活動が、第３時には多様な等積図形（面積４ cm^2）を構成する活動が、それぞれ行われた。授業内容は同一であったが、第１時と第２時には１学級ではジオボードを使用し（ジオボード学級、ジオボードで構成した図形をかくワークシートも使用）、１学級では方眼紙を用いて（方眼紙学級）活動が展開された。第３時には、方眼紙学級でもジオボードを用いた図形の構成活動が行われた。

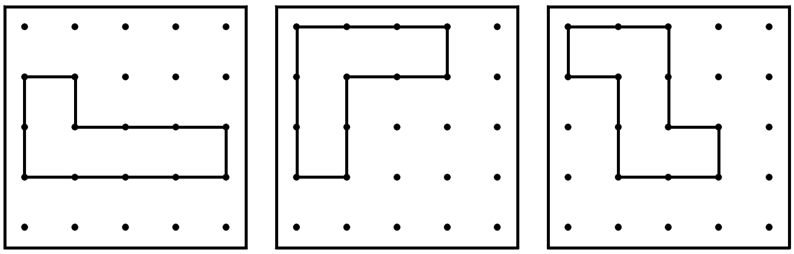


図　9　　ジオボード学級で提示された図形

授業第１時には,、授業者は図９を示し、児童からそれらは等積であり等周長であるとの発言を取り出した上で、周りの長さが同じなら面積も同じといえるかと問い。賛成、反対、分からないの何れかへの挙手を求めた。その結果、ジオボード学級の約５割割、方眼紙学級の約３割の児童が賛成とした。授業者が意見を求めると、前者では図形を変形すると面積が変わりそうだとの意見が、後者では周りが同じだから面積も同じといった意見が発表された。授業者は再度意見の分布をみた上で、図形の構成活動に入っていった。第１時の最後には、児童が構成した図形を画用紙にかいて黒板に提示し、それらを点検することから、両学級ともに「周りの長さが同じでも面積が同じとは限らない」との発言がなされ、授業を終了した。　第２時も同様に授業が実施された。第３時には方眼紙学級でもジオボードを用いて、面積が４ cm^2 の多様な図形を構成する活動が行われた。

授業前及び各授業終了直後に実施した情意調査からは、児童はそれぞれの授業に対して興味関心をもって取り組んでいたことが明らかになった。一方、面積に関する事前事後調査の結果、等周長の正方形と長方形の面積比較問題について、何れの学級でも事前事後調査間に有意な差はみられなかった。

４　等周長の正方形とひし形の面積比較

小学校第５学年の児童を対象とし、等周長の正方形とひし形の面積を比較するマッチ棒問題（図 10）を用いて 1994 年３月に調査を行った。このとき、この問題に回答する前に平行四辺形の求積公式を適用する問題などに回答することの効果を検討したが、先にマッチ棒問題に回答し後で平行四辺形の求積公式適用題に回答した児童群との差異はみられなかった（長谷川･岩田、1996）。

図　10　マッチ棒問題

また、公立小学校の第１～５学年の児童を対象とし、マッチ棒問題と同様の問題を用いて 2012 年３月に調査を行った（長谷川･吉川、2014）。その結果、「同じ広さ」とする回答の割合は第１学年の児童よりも第２、３学年の児童の方が多くみられた。

５　第４章のまとめ

授業実験や調査研究から、図形が等周長であれば等積であるとする判断の強固性が明らかになった。一方、児童はジオボードを用いた図形の構成活動に多くの興味関心をもって取り組んだ。それは、答えは１つとは限らない、自分のペースで図形を作り出すことができるなどのためであったことが推測される。ジオボードを用いて等周長や等積の図形を作る活動は、多くの児童が誤判断を示す素材をもとに授業を構想し実施する際のモデルを示すものでもある。面積を扱う際には、面積と周長との分離を図る機会を設定することが望まれる。また、ジオボードは課題教具であり説明教具でもあった。すぐれた教具を用いることによって、興味深い授業展開が可能になったのである。

第５章　分数の基礎的概念：授業実験と調査研究

１　問 題

量分数とは、２/３ｍや２/３Ｌのような量の普遍単位を用いた分数表現をいう。分数学習には様々な困難な点が知られているが（例えば、吉田･栗山、1991）、本章と次章では量分数と分割分数の混同の問題を取り上げ検討する。量分数と分割分数（あるぃは操作分数）との混同とは、例えば対象全体がどのような長さであってもそれがm単位で表示されていれば、対象全体の２/３の長さは２/３ｍであるとするなどをいう。このような問題は以前から指摘されており（例えば、石田、1985；駒林･狩原、1990；岩崎･橋本･高澤、1993）、同様の反応は数直線への分数の位置表示でもみられる（Novlillis-Larson,　1980；Kerslake, 1986）。本章では、この問題を巡って実施された授業実験、調査研究について報告する。

２　量分数概念の確立を目標とした授業実験

量分数と分割分数の混同の問題についての児童の実態を明らかにするとともに、問題を

解決する方法を検討するための資料を得ることを目的として授業実験を実施した（長谷川、1997a）。ここでは、国立大学教育学部附属Ｑ小学校第４、５学年各１学級の児童を対象とし、1996 年５月に実施した授業実験の概要を示す。

本授業の第１時は、高山（1993）を参考に計画し実施したものであり、次のように展開された。先ず、授業者が１ｍの赤色の紙テープを配布し長さは１ｍであることを告げ、ついで白色の紙テープを配布する。白色のテープの長さはそれぞれ異なっており、それを用いて１/２ｍを作る課題が提示される。児童が作った「１/２ｍ」のテープ数本を黒板上に提示すると全て長さが異なっており、授業者が「バラバラでおかしくないか」を問い、それを巡って児童が討論を行う。以下は、Ｑ小学校第４学年の学級での、授業最初の時点での児童の討論の様子を示したもである。

Ｃ 1：もとが１メートルじゃないと、そこに書いてある（問題の板書をいう） 1/２メートルといわないわけじゃないので、バラバラでもいいです。

Ｃ 2：テープの長さが１/２メートルのが長い分は、１本の長さが長いということが分かって、 1/２メートルが短いってことは、もとが短い。

Ｃ 3：バラバラではおかしいと思います。わけは１メートルを２つにした長さが１/２メートルだから、始めに１メートルに切りそろえた方が１/２メートルとして正しいと思います。

Ｃ 4：どんな長さでも同じ大きさに１/２に折ったら、1/２メートルになると思います。

Ｃ 5（Ｃ 3）：1/２になるけど、 1/２メートルにはならないと思います。

Ｃ 6：僕もＣ 3 と同じで、 1/２と１/２メートルは違うと思います。

そこで授業者が挙手によって意見の分布をみると、バラバラで「おかしくない」は 26 名、「おかしい」」は７名、「よく分からない」は２名であった。その後、同様の発言が続くことになった。その中で、「１/２＋１/２＝１」には全員が合意したが、「メートルがついているから１ｍの半分も３ｍの半分も１/２ｍ」「１/２ｍ＋１/２ｍは１ｍになることも３ｍになることもある」「１/２ｍは 50cm とは限らない」といった意見が多数を占め、適切な量分数判断には至らなかった。第２時にも討論が継続されたが、結論には至らなかった。そこで第３時には、授業者が量分数の解説を行い再学習する機会を設けるようにした。

Ｑ小学校第５学年の学級でも同様にして「１/２ｍ」が提示されたが、児童の意見の分布をみると、バラバラで「おかしくない」は 10 名、「おかしい」は 25 名であった。それに対して、児童からは「２/２ｍは１ｍで、それを半分に割ったら 50cm」「１/２は長さが決められていなくて、１/２ｍは１ｍの半分だから 50cm」といった発言が続き、１時間の授業時間内に「１/２ｍ」の適切な判断方法についての合意に至ることができた。

それら２つの学級では、長さに続いて液量の分数表示が扱われた。長さ、液量を扱った授業終了後（それぞれ事後調査１、２）、及び約１ヵ月後に（事後調査３）、量分数判断についての問題を用いて事後調査を実施した（図 11)。その結果、５年生では正答率の有意な増加がみられたが、４年生については低いままに留まった。

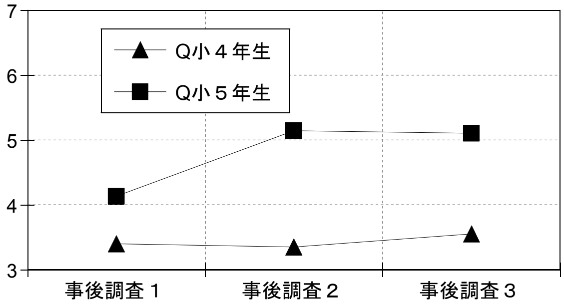


図　11　　Ｑ小学校第4、５学年 事後調査１、２、３の結果

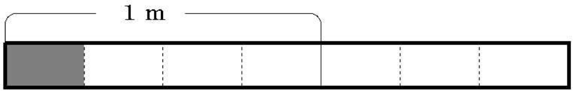
３　量分数概念の確立に関連する知識の検討

量分数の理解に関連すると思われる帯分数･仮分数、量の小数や下位単位による表示、帯分数を含む分数の足し算を取り上げ、それらの問題に取り組むことによる量分数に関する問題の回答への影響を検討した（長谷川、1997b)。その結果、帯分数を含む分数の足し算の問題（分数で体積が示された２つの液量の合併を容器の図に図示させる）が量分数の適切な判断に影響を及ぼすことが示唆された。

４　量分数概念の理解に関する継時的調査

第３学年で分数を学習して以降、児童の保持している量分数概念はどのように変化するだろうか。このことを明らかにするため、１校の公立小学校で第３学年の「分数」単元の学習終了後から第４学年の「分数」単元の学習直前までの間に、量分数に関する問題（８～ 10 題）を用いた４回の調査を実施した（1997 年 12 月～ 1998 年 12 月；対象児童は 151 名。長谷川、2000)。図 12 は、第２回調査の２つの問題を示したものである（｢長さ分数記入問題」｢液量図示問題」は問題文には記されていない)。なお、第１回調査と第４回調査（数直線（線分）に分数を表示する問題を除く)、第２回調査と第４回調査の問題はそれぞれ同一問題であり、前者と後者は数値が若干異なる以外は形式などは同一であった。

（３)長さ分数記入問題：テープがあります。黒くぬってあるところの長さは、何ｍでしょうか。分数で答えましょう。



（４）液量図示問題　：水が３ ℓ はいる、入れ物があります。 1/2 ℓ にあたるところに、　色をぬりましょう。

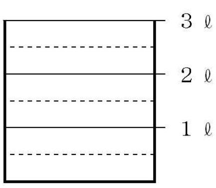


図　12　量分数問題の例

図 13、14 は、それぞれ量分数問題（３)、（４）の結果を表したものである。｢典型的誤

答」は、長さ分数記入問題では「1/7ｍ」としたもの、液量図示問題では全体の1/2を塗ったものをいう。「単位なし」は数値のみを記入したものである。また、液量図示問題の「分母の数」は、分母の数値だけます目を塗ったものをいう。

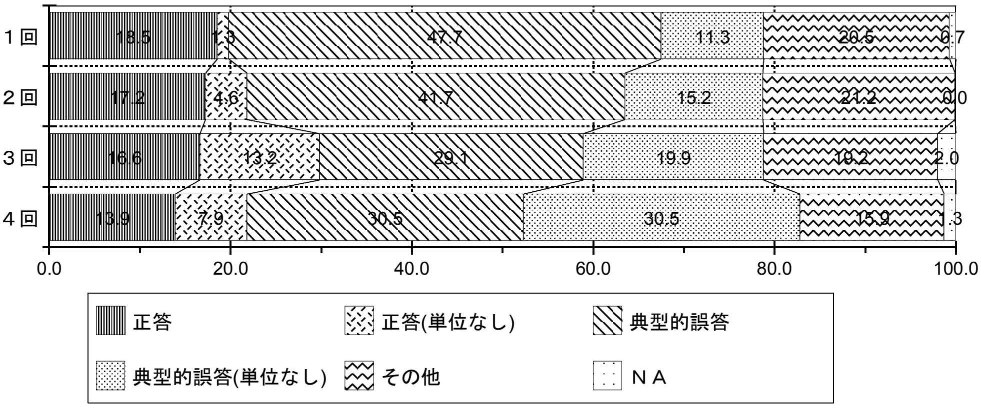


図　13　（3）長さ分数記入問題の回答分布

Z

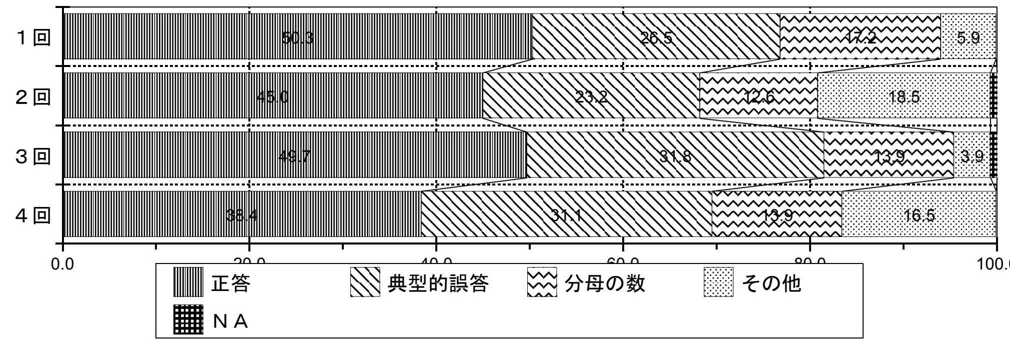


図　図　14　（4）液量図示問題の回答分布

第４回には単位のないものを含む典型的誤答が増加し（図 13)、正答が減少している（図 14)。また、典型的誤答が分数の学習終了後からみられる。このことから、授業での量分数指導のあり方を検討する必要がある。なお、上記以外の問題についても、同様の傾向が窺えた。また、分数で答える問題か図示する問題かによって回答の状況が異なる。そこで、問題の提示順序や問題に示す図の異なりが回答に及ぼす影響を調査した。その結果、図示する問題に先に回答した児童群や、単位量を強調した図を示した問題に先に回答した児童群では、分数値で答える問題に対する正答率が高くなった。図 16 は図 15 の図を示すことによる長さ分数記入問題への影響を示したものである（この問題以外の他の量分数問題は、継時的調査を行った小学校で用いた第２回調査問題と同一であった。弱、中、強提示の各問題に回答した児童群の、長さ分数記入、長さ図示問題以外の問題に対する回答に有意な差はみられなかった)。

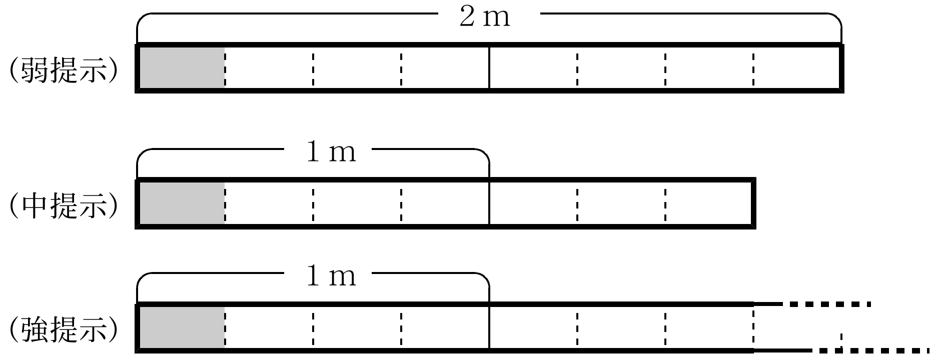


図　15　　長さ分数記入問題のテープ図

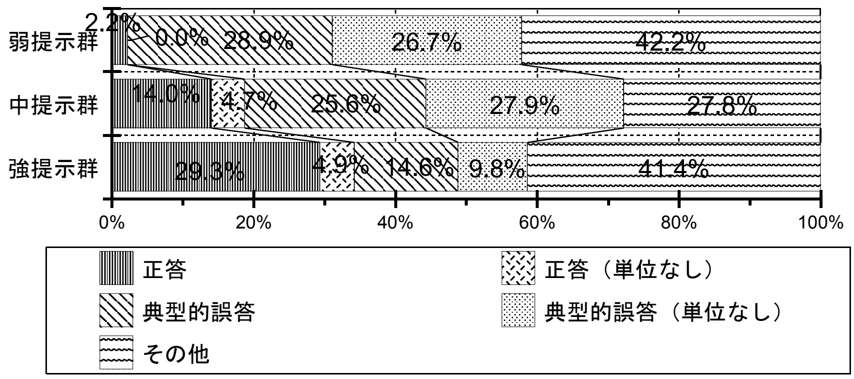


図　16　　長さ分数記入問題の回答分布

5　第５章のまとめ

量分数概念の再構成には、児童の既有知識内に「１/２m＋１/２m＝１m」や「１/２m＝ 50cm」のような量的関係が含まれていることが非常に重要である。また、帯分数についての理解も重要であることが示唆された。１年間継続実施された調査の結果をみると、分数学習終了後にはすでに典型的誤答が少なからずみられ、その後正答が漸減し典型的誤答が漸増する傾向が窺えた。「分数」単元での量分数の指導の充実と、その後の対応を検討する必要がある。さらに、図の提示方法によって児童の量分数判断に異なりがみられることは、児童の保持している量分数概念の脆弱性を表している。このことは、誤判断に強固に固着しているということでは必ずしもないことを示してもいる。調査で正答率が比較的高かった問題などを中心に教材･教具を作成し、それらを用いた授業では児童に判断方法の言語化、意識化を促すことによって、適切な量分数概念の構成を図る必要がある。

第６章　量分数の理解に向けた実証的研究

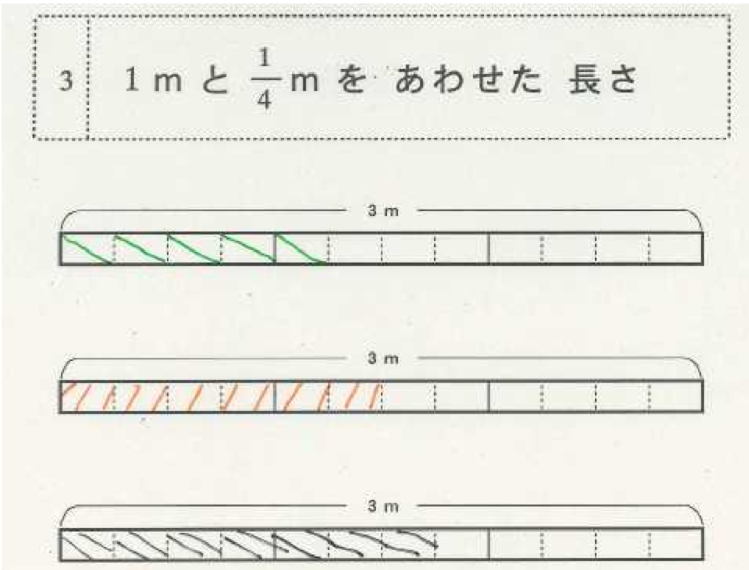
１　問 題

本章では、量分数と分割分数の混同が生じた場合への対応について、小学校第４学年の児童を対象として実施した授業実験、第３学年の児童を対象とし分数の導入を扱った授業実験（２つの授業実験では私が授業を行った）、及び第５学年の児童を対象とし量分数に

関する問題の提示順序が児童の量分数判断に及ぼす影響を検討した調査研究の結果を示す。それを通して、量分数の指導の方法などをさらに明確にすることが本章の目的である。

2　量分数概念の理解における数直線モデルの効果

数直線上に分数を位置づける問題が児童の量分数判断に及ぼす影響を検討するため、国立大学教育学部附属小学校第４学年の児童を対象とし 1999 年 7 月に授業実験を行った（長谷川、1999)。このとき１学級では第１時には長さの問題を、もう１学級では第１時には数直線の問題を扱った授業を行った。前者の学級を「長さモデル学級」、後者の学級を「数直線モデル学級」という。長さモデル学級では、第１時には、全長３ｍのテープ図がかかれたワークシートを用い、各自がワークシートに指定された長さを記入（色を塗る）した後、OHP シートにかき込んで発表するという形式で進められた。問題は、「２ｍ」、「２ｍと１/４ｍをあわせた長さ」、「１ｍと１/４ｍをあわせた長さ」の順に取り上げた（児童は帯分数や仮分数は未習であった)。「１ｍと１/４ｍをあわせた長さ」に対しては、図 17 のような発表がなされた。



← 緑色

← オレンジ色

← 黒色

図　17　　長さモデル学級（第１時）

緑色とオレンジ色（児童がかき込む際に使用したマーカーの色）の発表があった後、授業者がどちらに賛成かを挙手によって調べると、緑色に賛成 25 名、オレンジ色に賛成０名、どちらも賛成（両方ともに正しい）16 名となった(２度挙手したものが含まれる。黒色はその後発表された)。意見を求めると、児童から次のような発言がなされた。

Ｃ 1：私は緑に賛成です。それは、１メートルに塗って、その４分の１に塗ったので、緑に賛成です。

Ｃ 2：メートルは１メートルとは限らないと思います。２メートルでもメートルがついているし、３メートルでも ･･･。別に、２メートルでも４分の１にしたら、オレンジのようになります。

Ｃ 3：緑に賛成しているのだけど、オレンジでもいいわけを教えてください。

Ｃ ４：オレンジでもいいわけは、１メートルと書いてあるから１メートルを取って、４分の１っていうのは、残りの２メートルの４分の１でも４分の１メートルになっているから、それで２メートルの４分の１にしたらいいと思いました。

このような討論が続いたが、時間内には決着がつかなかった。第２時には第１時に残された問題の解決につながることが期待される分数の数直線表示を扱ったが、実際には第１時と同様の発表が続くことになった（図 18)。

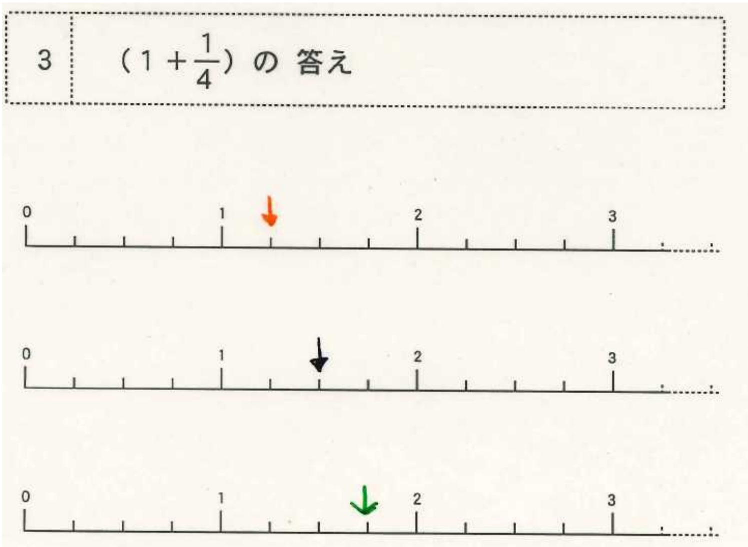


図　18　　長さモデル学級；第２時

一方、図 18 の数直線の図を用いて第１時に分数の数直線表示を扱った数直線モデル学級では、長さモデル学級でみられたような異なる意見の発表はなされなかった。このことは、数直線への帯分数的分数表示を用いる方が、量分数と分割分数の混同を誘発しにくいことを示している。

３　分数の導入：授業事例とその検討

授業で用いられるワークシートなどに示された図について、全体量が単位量を越える図が児童の量分数判断にどのような影響を及ぼすかを検討した（長谷川、2001)。そのために 2000 年 12 月上旬、国立大学教育学部附属小学校第３学年３学級の児童を対象として、「分数」単元を通した授業実験を実施した。このとき、１学級では算数教科書に従い、全体量が単位量（１m、１L、１）である図を用いて授業を行った（図 19　a は用いた図の例である)。この学級を「真分数学級」ということにする。他の２学級では、授業で扱う内容は基本的には真分数学級と同じであるが、ワークシートなどで提示する図は単位量を越えるものを用いた（図 19 ｂは用いた図の例である)。これら２つの学級を「帯分数学級１、２」ということにする。これらの学級では実際には帯分数表記は扱わず、例えば「１mと１/３mをあわせた長さ」のようにして単位量を越える数量を表現した。授業時間数は全６時間で計画した。なお、本授業実験を行った当時は、「分数」は第３学年から学習するようになっていた。

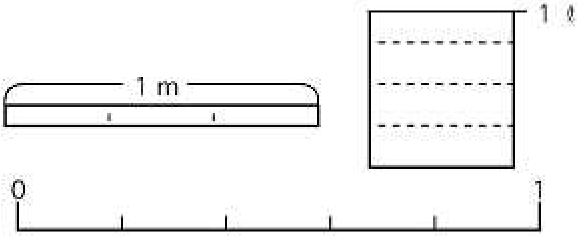


図　19a　真分数学級で用いた図の例

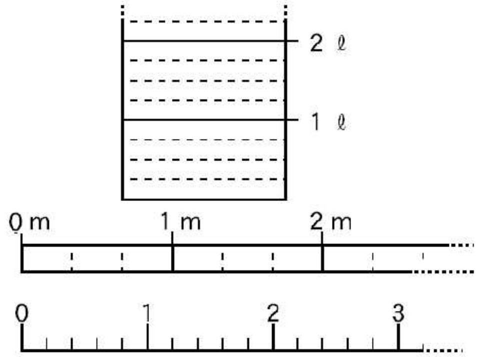


図　19b　帯分数学級で用いた図の例

単元の学習終了後に、量分数問題による調査（第１回は単元学習終了数日後、第２回は単元学習終了約２ヶ月後、第３回調査は第２回調査半月後）を行った。但し、第２回調査で平均値の低下がみられたので、第３回調査では、量分数問題の前に全体量が１-１/４ Ｌの容器の図に対して３/４ Ｌ に色を塗る問題など、図示された対象の全体量への注目を促す問題をおいていた。図 20 は、量分数問題の各学級平均値の推移を表したものである。なお、帯分数学級１では事情によって第３回調査は実施できなかった。

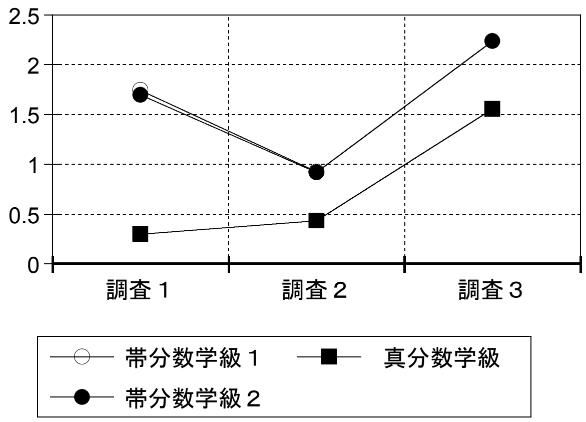


図　20　　量分数問題：平均値の推移

学級（真分数学級と帯分数学級２）×調査（１～３回調査）について分散分析を行ったところ交互作用が有意であり（$F(2,142) = 3.04$、$p < .05$）、単純主効果を分析したところ、調査１で２学級間に有意な差がみられた（$F(1,71) = 18.08$、$p < .01$）。但し、用いた問題が量分数問題の中でも困難な問題であったためであろう、平均値は必ずしも高いとはいえなかった。

４　提示される図が量分数判断に及ぼす影響

学習指導要領の改訂に伴って、分数学習の学年配置は大きく変化してきた。ここでは 1998 年の学習指導要領に基づき第４学年で「分数（真分数、帯分数、仮分数）」を学習した公立小学校第５学年３学級の児童を対象とし（第５学年で扱われる分数は未習）、量分数問題の提示順序が児童の量分数判断に及ぼす影響について検討した。児童は帯分数や仮分数を学習していることから、量分数に関するより適切な判断方法を獲得し構成していることが推測される。そこで、全体量が単位量であるテープ図などを用いた基礎的な分数理

解を問う問題と３つの量分数問題を作成した。さらに、３つの量分数問題の提示順序のみを入れ換えた３種類の問題冊子を作成し調査を実施した（それぞれの問題冊子に回答した児童をもって群を構成した。基礎問題に対する群間の差異はみられなかった)。図 21 は、量分数問題（全体量明示分数記入問題）の例を示したものである。

（２）長さが３ｍの テープがあります。黒くぬってあるところの長さを、分数で答えましょう。

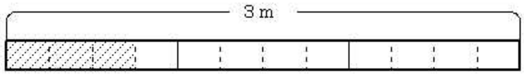
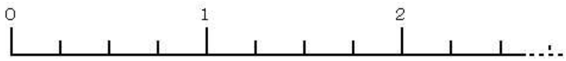


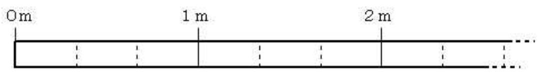
図　21　量分数問題（全体量明示分数記入問題）の問題例

調査結果を検討したところ、図 22 に例示した量分数問題(全体量不明確分数図示問題)に先に回答した児童（全体量不明確図示群）の全体量明示分数記入問題（図 21）の正答率は、全体量明示分数記入問題に先に回答した児童(全体量明示分数記入群)よりも有意に高かった（図 23)。

（１）下の数直線に、１-１/４を ↓ の しるしで 表しましょう。



（３）テープがあります。１-２/３ｍ に、色をぬりましょう。



((２）は３/４の数直線表示、（４）は上と同じ図に１/３ｍを図示する問題。)

図　22　量分数問題（全体量不明確分数図示問題）の問題例

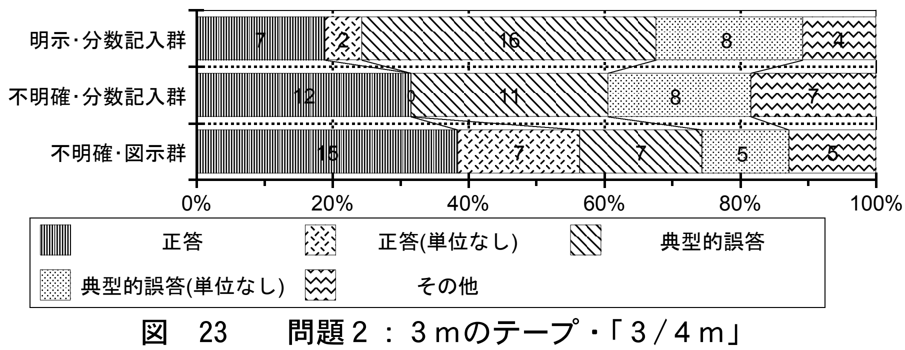


図　23　　問題２：３ｍのテープ・「３／４ｍ」

これらのことから、数直線や数直線様のテープ図に帯分数で示された数量を図示する問題によって、単位量を確認するなどの量分数判断に必要な知識が活性化されたことが推測される。但し、児童にはフィードバックは与えられていないので、このような問題を授業で取り上げ適切な判断方法やその際の注意する点などを意識化させ言語化させることによ

って、量分数概念の構成や再構成を促す必要がある。

数直線や数直線様の図が有効であることは、単位量の分割によって分数が得られたとしても、それを可能な限り早期に「大きな対象」に埋め込んでいくことの重要性を示している（図 24 ）。

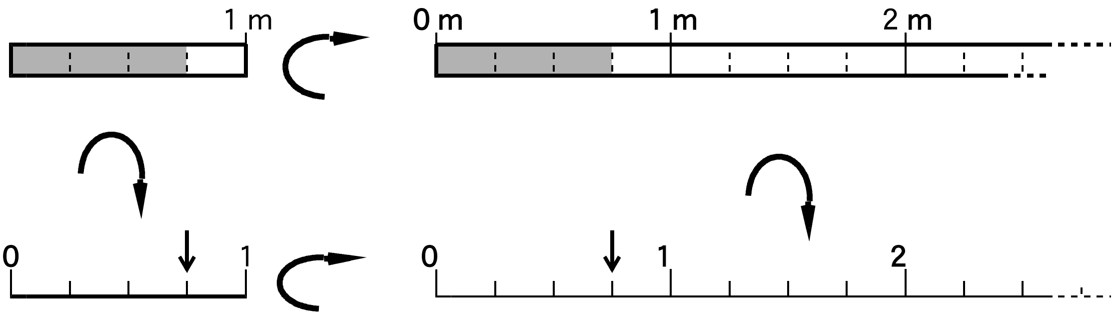


図　24　「大きな対象」への埋め込み

5　第５章･第６章のまとめ

量分数の導入時には、数直線や数直線様のテープ図などを用い、帯分数･仮分数表示された数量を図示する活動が重要である。分数だけではなく、整数や小数表示された数量、m単位のテープ図の cm 単位での表示や図示、「１ｍ＝ 50cm」の確認などの活動も、量分数概念の構成や再構成とって重要である。そのようにして、様々な表示が数直線や数直線様のテープ図などによって統一的に把握される指導を行なう必要がある。そのような活動は、整数、分数、小数を統合した有理数概念の構成に大きく寄与するものになるであろう。

量分数の再学習を扱う場合は、分数に関して児童がどのような知識を保持しているかを把握しておく必要がある。また、どのような図や問題をどのように配置するかが重要な要因となる。一度、対象全体に対する分割操作に基づく判断方法が活性化されれば、それを克服することは困難である。学級の児童全員が理解している数学的に適切な概念や知識を確認し、それを基盤として量分数概念の再構成が進められるよう、図や問題を系統化する必要がある。

授業で用いられた紙テープや「１ｍと１/４ｍをあわせた長さ」を図示する図は、それを用いて作られた「１/２　m」のテープや提示された図が課題性をもち、児童の討論を引き起こす契機となった。このように、紙テープや図は課題教具としての機能を担うものであった。また、図 24 に示した「大きな対象への埋め込み:」をパソコン画面で提示することも考えられる。そうすれば、それは説明教具としての機能を担うものとなろう。

分数の四則計算や商分数などは量分数を用いた問題場面によって導入がなされ、問題の解決を通して計算方法などが説明される。しかし量分数の理解が不十分であれば、それに基づく説明は説明とはならない。量分数はもとより、それに基礎をおく分数の四則計算などの説明も含め、さらなる検討を進める必要がある。

第７章　全体的考察

１　結果の特徴

３つの素材には、共通する側面がみられた。それらを整理して示す。

（１）誤反応の増加：小学校の学年進行に伴って、３つの素材ついて誤反応の増加がみられた。但し、その原因は異なっており、三角形･四角形及び量分数概念については算数教育上の問題が考えられ、今後の工夫改善の余地は大きい。一方、図形の面積と周長の分離については、主として発達の問題が原因であると考えられる。しかし、図形の面積と周長の分離が算数の教科内容として意図的に取り上げられるようになれば、算数教育の問題として改めて検討しなければならなくなる。

（２）文脈による反応の異なり：何れも問題提示のあり方によって、反応に異なりがみられた。その原因については概念理解の脆弱性が考えられるが、他の観点も考慮したさらなる検討が求められる。

（３）概念の言語的説明について：数学では概念を言語によって定義し、それに従って推論がなされ結論が導かれる。ところが、三角形･四角形や「１/２ｍ」については算数教科書で言語的説明が示されているが、それが概念の定義として児童の思考を制御しているとは必ずしもいえない。算数教育では概念の言語的説明の意義理解を児童に促すとともに、その基盤である活動の一層の充実が求められる。

特に三角形･四角形や量分数について、児童が保持している概念が全く誤っていれば、それは授業で修正されることになろう。全体としては適切な数学的概念ではなくとも、限定された範囲内では正しい判断がなし得るが故に、通常の授業では間違いが顕在化されないのである。概念の定義はいくつかの条件から構成されているが、児童がそれを学習する段階、あるいは習熟段階で、その条件の中で核となる条件と周辺化される条件が生じていることが想定される。

量分数について、例えば１/２ｍの場合、「３ｍの半分も 10 ｍの半分も１/２ｍだ」と主張する児童にとっては、分数の学習後に「２等分したものの１つ分」が核となる条件となり「１ｍ」が周辺条件となって、さらにそれが「□ｍ」で置き換わることによって量分数に擬似的な概念が生成されている。その判断が全長が１ｍのテープに適用されれば適切な判断をもたらし正概念と同等の結果が得られることから、それを保持している者にとっては誤判断が一層強化されることになる。このような現象は、概念定義の後退現象と呼ぶことができる。定義の条件が周辺化しないよう、後退を起こさないよう、意図的に「引き戻す」授業の実施が求められる。

２　数学的概念の構成と再構成

３つの素材を通して、そこにみられる数学的概念の構成と再構成の諸相を検討した。ここでは、数学的概念の構成と再構成を目的として算数的活動を展開する場合の留意事項を述べる。

（１）関連する知識とともに当該の概念を扱う。

数学的概念の構成と再構成にとって、その概念の理解をサポートする知識を算数的活動の中にどのように配置するかを検討する必要がある。

（２）数学的概念･知識の構造化を進める。

児童の誤判断を修正するなど数学的概念の再構成を目的とする場合は、児童が保持している知識内に不整合を自覚できるものがあるか、さらに再構成に必要な数学的知識を保持しているかを確認する必要がある。

（３）教具や図、思考実験によって思考の外化、対象化、言語化を促す。

適切な判断がなされた場合だけではなく、不適切な判断がなされた場合についても、その根拠や原因を言語化し自覚的に把握できるようにする必要がある。そのためには、素材に含まれる数学的構造を適切に表現する教具や図の使用が不可欠である。本論で検討した教具や図から、図形に関する教具としては条件に適合する多様な図形が簡便に構成できる教具が、数に関する教具としては数の構造を表現する教具が、それぞれ有効であることが示唆される。

また、思考実験には児童が単独で行う場合と集団的思考の中で展開される場合があった。授業では、問題場面に対する児童の判断を想定した上で、集団的思考過程としてどのような思考実験が展開可能かを検討したい。また集団的思考過程として実現された思考実験が個々の児童の思考の上でも実施されるよう、活動の展開を計画する必要がある。

（４）当該の概念の学習終了後も、再学習する機会を意図的に設ける。

数学的概念が導入されて以降も、再学習を行い適切に強化する機会を意図的に設ける必要がある。概念定義の後退現象が生じている場合は、早期に回復する必要がある。

平林（1987、pp.375-376）は、言語としての数学の深層構造、表層構造という語を用い、次のように論じている（要約して示す)。｢身体的活動から生じた数学は内面化され心的活動として進展する。心的活動性は言語としての数学の深層であり、その構造は深層構造である。数学的表記は言語としての数学の表層に属し、深層構造から生まれたものであるが、一旦表層において構成された表記は、深層の活動に影響を与え深層構造を変革することもある。──｣

上に述べた(１)～(４)は、平林（1987）のいう数学教育の深層構造と表層構造が適切な関連性をもち相互補完的に機能する、その出発点での算数的活動のあり方について、具体的な素材をミクロな観点から検討することによって得られた事項を述べたものであった。

３　今後の課題

ここでは本論の結果を基盤とし、今後検討する必要のある事項を３点、述べる。

（１）図形、面積、分数のそれぞれについての体系的検討

本論では、それぞれの体系的学習の出発点のみを検討した。そこで得られた諸結果に立って、その後の学習のあり方を体系的に検討する必要がある。

（２）有理数概念の検討

本論では量分数を取り上げ検討したが、その後、分数の学習が進められ、さらに整数、小数、分数が関連づけられ有理数として統一的に把握されていくことになる。そのような児童における有理数概念の成立について、概念変化研究の視点（Stafylidou & Vosniadou, 2004；Vamvakoussi & Vosniadou, 2004，2010）も考慮しつつ検討を進めたい。

（３）教具論の構築

「２枚の硬貨を投げる問題」を扱った授業（第２章）を実施してから、30 年余が経過

した。この間のパソコンの普及、ICT の発展はめざましいものがある。授業を実施した当時は物的対象として実現できなかったものが、仮想的にではあれパソコンの画面上で実現できるようになってきている。そのような観点を含め、数学教育における新たな教具論の構築が検討されてよいであろう。

本論で得られた成果を基盤に、検討課題についてさらに研究を深めたいと考えている。

文 献

Carey, S. and Spelke, E.（1994）"Domain-specific knowledge and conceptual change." Hirschfeld, L. A. and Gelman, S. A. eds., *Mapping the mind: Domain specificity in cognition and culture."* Cambridge University Press, 169-200.

土井捷三(1993)「人格形成的機能を高める教科構成論の研究」所収、風間書房、223-276

Fischbein, E. Tirosh,D. and Hess, P.（1979）"The intuition of infinity." *Educational Studies in Mathematics,* 10, 3-40.

銀林 浩(1975)「量の世界」麦書房、79

長谷川順一（1985a)「中学校の数学の授業を通して見た無限概念について」 西日本数学教育学会「数学教育学研究紀要」 11、104-109

長谷川順一（1985b)「初等段階における図形の概念形成に関する一考察」 西日本数学教育学会「数学教育学研究紀要」 11、98-103

長谷川順一（1988)「数学の授業における概念の構成に関する一考察－確率についての事例をもとに」 西日本数学教育学会「数学教育学研究紀要」 14、61-66

長谷川順一（1990)「概念の構成に関する操作と教具について」 平林一榮先生頌寿記念出版会編 「数学教育学のパースペクティヴ」 聖文社、222-244

長谷川順一（1997a)「量分数概念の確立を目標とした授業事例とその評価」 全国数学教育学会誌「数学教育学研究」、３、107-115

長谷川順一（1997b)「量分数概念の確立に関連する知識の検討」 日本数学教育学会誌、79(10)、285-293

Hasegawa, J. (1997c) "Concept formation of triangles and quadrilaterals in the second grade." *Educational Studies in Mathematics,* 32, 157-179.

長谷川順一（1999)「量分数概念の理解における数直線モデルの効果」 日本教育方法学会紀要「教育方法学研究」、25、39-46

長谷川順一（2000)「量分数概念の理解に関する継時的研究－小学校３～４年生を対象として－」 日本数学教育学会誌、82(12)、2-14

長谷川順一（2001)「分数の導入(３年生)：全体量が単位量を越える図の提示が量分数判断に与える影響」 日本教育方法学会紀要「教育方法学研究」、27、81-90

Hasegawa, J. (2002) "Case studies on the symbolism of difference-finding problems in first grade." *For the Learning of Mathematics*, 22, 21-28.

長谷川順一(2008)「事例研究：『面積』と『周長』との分離を目標とした算数の授業－ジオボードを用いた図形の構成をもとに－」 日本教育方法学会紀要「教育方法学研究」、33、25-36

長谷川順一･岩田貴宏(1996)「等周長の正方形と平行四辺形に対する小学生の面積判断」 日本数学教育学会誌 78(4)、4-9

長谷川順一･香川朋子（1994)「ジオボードをもとにした『三角形･四角形』の展開」 日本数学教育学会誌、76(12)、302-306

長谷川順一･高橋浩司(1991)「事例研究：小学校第２学年『三角形･四角形』の導入につい

て」　香川大学教育実践研究、16、63-72
長谷川順一･吉川基雄（2014)「面積に関する基礎概念について（２）：小学校第１～５学年の児童を対象とした調査とその結果」　香川大学教育実践総合研究、28、35-44
波多野誼余夫･稲垣佳世子（2006)「概念変化と教授」（大津由紀雄･波多野誼余夫･三宅なほみ編)「認知科学への招待２」　研究社、94-110
平林一榮（1979)「教具論」、赤摂也編「教育学講座第 11 巻　算数･数学教育の理論と構造」 学習研究社、297-314
平林一榮（1985)「授業を通してみた算数･数学教育の問題－小学校５年の『割合』を例に－」　西日本数学教育学会昭和 59 年度第２回例会発表資料
平林一榮（1987)「数学教育の活動主義的展開」　東洋館出版
細谷 純(1968)「空間･量･数の認識とその発達」黒田孝郎他編「教育学全集６　論理と数学」 小学館、81-112
稲垣佳世子･波多野誼余夫（2005)「子どもの概念発達と変化」 共立出版、202
石田忠男（1985)「分数･小数の意味理解はなぜむずかしいか」　教育科学算数教育、327、21-27
岩崎秀樹･橋本正継･高澤茂樹（1993)「分数の意味と指示について（Ⅲ）－分数概念の初期的形態とその変容、量分数の場合－」　西日本数学教育学会 「数学教育学研究紀要」、19、77-84
金子 務（1986)「『思考実験』－そのレトリカルな構造：ガリレオの論法に即して」 大阪府立大学紀要(人文･社会科学）34、1-14
Kerslake, D.（1986） "Fractions: Children's strategies and errors. A report of the strategies and errors in secondary mathematics project." NFER-NELSON, 87-89.
梶 外志子（1983)「子どもの面積と周りの長さの認識について」　日本数学教育学「数学教育学論究」、39･40、49-66
工藤与志文･白井秀明(1991)「小学生の面積学習に及ぼす誤ルールの影響」　教育心理学研究、39、21-30
駒林邦男･狩原尚義（1990)「カリキュラム開発･研究『分数の生い立ち』」　岩手大学教育学部附属教育工学センター「教育工学研究」12、1-16
Montangero, J. (1976) "Recent research on child's conception of space and geometry in Geneva: Research work on spatial concepts at the international center for genetic epistemology." J. L. Martin ed., *Space and geometry,* ERIC/SMEA. 99-128.
Murphy, P. K.（2006） "Changing knowledge and beliefs." in Alexander, P. and Winne, P. H. eds., *Handbook of Educational Psychology,* Lawrence Erlbaum, 305-325.
西林克彦（1988)「面積判断における周長の影響」教育心理学研究 36(2） 120-128
Novillis-Larson, C. N.（1980） "Locating proper fractions on number lines: Effects of length and equivalence." *School Science and Mathematics*, 53(5), 423-428.
Piaget, J.（1975） "The equilibration of cognitive structures." The University of Chicago Press. 94-108.
Pinto, M, and Tall, D.（2002） "Building formal mathematics on visual imagery: A case study and theory." *For the Learning of Mathematics,* 22, 2-10.
Russell, J.（1976） "Nonconservation of area: Do children succeed where adults fall?" *Developmental Psychology*, 12(4), 367-368.
diSessa、A. A.（2006） "A history of conceptual change research." R. K. Sawyer ed., *The Cambridge Handbook of the Learning Science,* Cambridge University Press, 265-281.
Stafylidou, S., and Vosniadou, S.(2004） "The development of students' understanding of the

numerical value of fractions." *Learning and Instruction,* 14(5), 503–518.
高山 守（1993）「ふぞろいの１/２ｍたち」　数学教室、499、8-43
Tall, D. and Vinner, S.（1981）"Concept image and concept definition in mathematics with particular reference to limits and continuity." *Educational Studies in Mathematics*, 12, 151-169.
Vamvakoussi, X., and Vosniadou, S.（2004）"Understanding the structure of the set of rational numbers: A conceptual change approach," *Learning and Instruction,* 14(5), 453–467.
Vamvakoussi, X., and Vosniadou, S.（2010）"How many decimals are there between two fractions? Aspects of secondary school students' understanding of rational numbers and their notation." *Cognition and Instruction*, 28(2), 181–209.
Vinner, S.（1983）"Concept definition, concept image and the notion of function." *The International Journal of Mathematics Education in Science and Technology.*" 14(3), 293-305.
Vinner, S.（1991）"The role of definitions in the teaching and learning of mathematics." D. Tall ed., *Advanced Mathematics Thinking,* Springer, 65-81.
Vinner, S. and Hershkowitz, R.（1983）"On concept formation in geometry." ZDM, 83(1), 20-25.
Vosniadou, S.(2008）"Conceptual change research: An introduction." in Vosniadou, S. ed., *International Handbook of Research on Conceptual Change,* Routledge, 453-467.
吉田甫・栗山和広 (1991)「分数概念の習得過程に関する発達的研究」　教育心理学研究、39 (4)、382-391