

学位論文要旨

論文題目

数学学習における一般化の機能に関する研究

広島大学大学院教育学研究科
文化教育開発専攻（数学教育学分野）

早田 透

目次

序章：本研究の目的と方法

- 本研究の目的と方法
- 本論文の内容と構造

第1章：数学学習における一般化研究の 成果と課題

- 1.1 国際的な一般化研究の動向
 - 1.1.1 Mason(1989, 1996)の一般化論：繊細な注意の移行
 - 1.1.2 Dörfler (1991)の一般化論：記号の対象化と変数の構成
 - 1.1.2 近年の動向：一般化に基づいた研究
- 1.2 我が国における一般化研究：一般化と拡張
- 1.3 先行研究の課題

第2章：数学学習における一般化の機能

- 2.1 個々人の状態に依る二段階の一般化
- 2.2 一般化の機能：その手段と目的から
 - 2.2.1 変数化の機能
 - 2.2.2 純化の機能
 - 2.2.3 統合の機能
 - 2.2.4 発見の機能
- 2.3 一般化の機能：意味に関わる問題
 - 2.3.1 意味付けの機能
 - 2.3.2 社会化の機能

第3章：一般化の機能の順序に基づく構造

- 3.1 《純化》の機能と他の機能
- 3.2 《変数化》の機能と他の機能
- 3.3 《統合》の機能と他の機能
- 3.4 《発見》の機能と他の機能
- 3.5 《意味付け》の機能と他の機能
- 3.6 《社会化》の機能と他の機能

第4章：一般化の機能と学習者の関わり方

- 4.1 一般化の機能とその構造に基づく教授実験の目的と方法
- 4.2 アプリオリ分析による具体化
 - 4.2.1 一般化の機能に基づく授業の構成：円周角の定理
 - 4.2.2 一般化の機能に基づく授業の構成：正方形の個数問題
- 4.3 教授実験の分析
 - 4.3.1 問題解決学習と一般化
 - 4.3.2 実施の概要
 - 4.3.3 結果の分析

終章：本研究の総括と今後の課題

- 本研究の成果
- 本研究に残された課題

本論文の引用・参考文献

- 引用・参考文献一覧
- 本論文に関わる筆者の主要な先行研究

1. 問題の所在

数学を学習するとは、新しい知識を知るようになる過程における、数学に裏付けられた活動であろう。こうした活動の中で最も重要なものの一つが一般化であるが、実際の授業においては必ずしも十分に実践されてきていないことが指摘されている。しかも、学習者が十分に一般化が出来ないだけでなく、一般化しようとしなないという実態までもが認められてる(Tatsis & Tatsis, 2012, p. 7)。他方で、極めて幼い普通の学習者達にさえ、その精神に一般化する能力と傾向が備わっていることがはっきりしている(cf. Tatsis & Tatsis, 2012, p. 7)。一般化する能力と傾向があるにも関わらず一般化しようとしなないという状況は一見すると奇妙であり、ここに何らかの問題があることが指摘される。

ここで、我々の日常生活では具体的（特殊）な事柄で十分であることが多く、かえってその方が便利であったりすることに注目したい。加えて、（数学においてさえ）何か解らないことがあったときに「具体的に教えて/説明して」とよく言うように、具体的な事柄は一般的な事柄よりも簡単でさえある。このような理由から、学習者の観点からすると「私達は何のために一般化をするの？」と疑問を持つことは自然である。換言すると、学習者に対して一般化を動機付けるものが何か、という点を議論する必要が認められる。

2. 本研究と先行研究の関連

上述した一般化を動機付ける力、即ち一般化の推進力とでも呼ぶものに対して、先行研究は大別して、我々が認知的と呼ぶアプローチと、認識論的と呼ぶアプローチの2つを採っている。認知的なアプローチとは端的に言うと、学習者個々人の好み、興味、関心、知的な状態、メタ認知などに焦点をあて、一般化を促す試みである。

こうした認知的なアプローチは勿論間違っているわけではない。しかし、どのような状況で一般化が要請されるものであるか、という点を考察する上では十分ではない。例えば、「 $3+5=8$ 」という一つの問題に学習者が直面したとき、数学的には多様な一般化が想定され得るが、学習者がそうした一般化を行うことは考えにくい。それは、問題それ自体が一般化を要請していないためである。他方で、問題それ自体が一般化を要請するようにつくりになっていたとしても、個々の生徒達がそれに興味や関心を抱くかどうかは—実際の教室でよく教師が悩んでいるように—また別の問題である。

即ち、個々人に依存した一般化の推進力を認知的な推進力と捉えるならば、典型的には問題に潜在しているであろう、個々人に依存せず普遍的に求められる一般化の認識論的な推進力を明らかにする必要が認められる。ここで、一般化の認識論的な推進力としては、学習者にとっての一般化の意味・目的・実用性が想定され得る。これらを纏めて「一般化の機能」と呼ぶことにすると、先行研究では一般化の機能に対して2つの見解が認められる。

一つ目は、例えばDavydov (2008)によると、一般化とはある種の不変性を探究した上で単語によって指示し、その結果として一般化が便利な構造や体系化をもたらすということである(pp. 74-75)。これは一般化の機能として完全に正しく、ある程度共有された見解である (cf. Radford, 1996)。しかしながらこの機能は、数学における一般化に固有の機能ではない上に、完成された数学（あるいは科学的知識）を観察者の視点から観たときに、そこで一般化が担っていた機能であることが指摘される。例えば、「単語で一般性を指示するために一般化をする」と学習者が考えているわけでは無いであろう。従ってDavydov (2008)のような見解は、本研究と関連しており矛盾もしないが、我々とは全く異なる関心であることが指摘される。

二つ目の見解は、一般化がある種の推論やコミュニケーションの適用範囲を広げる、変数化の役割を担っているということである。これは本研究の関心とも合致する、一般化の重要な機能である。しかし、変数化は一般化の機能の一つに過ぎず、一般化の機能の全体像は必ずしも明らかではない。中島 (1981)や伊藤 (1993)のように、変数化以外の一般化の機能を指摘した先行研究もあるが、それらもやはり一般化の機能を部分的・散発的にしか指摘していない点が問題であろう。従って、本研究においては一般化の機能の全体像を提示する必要が認められる。

以上の様に、本研究が関心を持つ一般化の機能は先行研究においてさえ殆ど検討されてきていないことが指摘される。このため、一般化の機能は直観的、ないしは感覚的に理解されていると考えられ、学習者が感じる疑問へと明示的に答えるものになっていない。換言すると、一般化の機能は学習者達のみならず、数学教師や数学教育研究者にとってさえ不明瞭なのである。このことが一要因となり、一般化する能力と傾向が備わっているにもかかわらず一般化しようとしないう、という状況を引き起こしていると考えられる。

3. 本研究の課題と論文構成

先行研究においては、一般化の機能は学習者の観点から分析されていないか、あるいはその全体像が明らかになっていないかの何れかであった。従って、本研究は数学学習における一般化の機能を学習者の観点から同定すると共に、それらの機能と学習者が、学習の中でどの様に関わり合っているかを明らかにすることを目的とする。このための具体的な研究課題として、次の3つを設定する。

[研究課題1] 数学学習において一般化が有する機能の全体像を同定すること

[研究課題2] 研究課題1で明らかにされた一般化の機能がどの様な構造を持つかを明らかにすること

[研究課題3] 研究課題1と2を踏まえ、実際の学習において学習者は一般化の機能とどの様に関わるかを明らかにすること

この課題を踏まえ、本論文は序章と終章を含めた6章から構成される。「第1章：数学学習における一般化研究の成果と課題」においては、先行研究を検討することで、一般化の機能という研究対象が未だに踏査されていないことを示すとともに、その研究が教育研究上価値を有することを論じる。「第2章：数学学習における一般化の機能」は本研究の中心となる部分であり、先行研究が示した、学習者の観点から捉えた一般化する活動に基づきながら、一般化が有する6つの機能を同定していく。従って、第2章の成果が研究課題1に対する答えであり、また本論文の主たる成果となる。「第3章：一般化の機能の順序に基づく構造」では、各々の機能が働く順序に注目することで、一般化の機能が有する構造を明らかにしていく。第3章の成果が、研究課題2に対する答えである。ここで第1～3章は、純粋に理論的な研究である。これに対して、例えば実際の学習者の学習を観察して機能を同定するべきだ、といった意見が想定されよう。しかし、第1章で詳しく述べるように、一般化の機能についてはまだ殆ど何も研究されてきていない。このため、我々は観察の理論負荷性(ハンソン, 1986)の問題に直面することになり、一般化の機能を観察することは不可能である。「第4章：一般化の機能と学習者の関わり方」では、同定された一般化の機能とその構造を用いて実際の授業を設計・実践して観察することを通して、第1～3章の考察結果の整合性と限界を明らかにする。これは研究課題3の答えでもある。

以上の様に、本論文は第2章の成果（研究課題1への答え）を主たる成果とし、第3章と第4章の成果（研究課題2と3の答え）によって第2章の成果をより深めるという構成を採っている。

4. 各章の概要：本研究の成果

第1章：数学学習における一般化研究の成果と課題

本研究の主題である、数学学習における一般化の機能は、これまで検討されてきていない研究対象である。しかし、数学教育研究においては検討されていない研究対象であるということと、研究として価値が認められるものであるかは別の話である。そこで、第1章は一般化に関する先行研究を概観し、成果と課題を整理した。

国際的な動向としては「数学学習における一般化とは何か」ということが課題としてあがっており、Mason (1989)やDörfler (1991)を初めとする研究が成果を挙げている。近年では、この問いに対しては或る程度答えが出たものと見做され、一般化を用いた学習や、一般化を用いて特定の能力（代数など）を育むといったことが研究対象となってきたことを示した。我が国の動向としては、国際的な動きとはやや一線を画した独自の動きが認められ、幾つかの点で優れた成果を残しており、特に一般化と拡張(cf. 中島, 1981)という極めて重要な区別を、時代を先取りする形で認めていることを示した。

こうした成果を挙げる一方で、学習者の観点から一般化を捉える試みの不足を指摘した。例えば、Dörfler (1991)によって提示された一般化モデル (Dörfler, 1991, p. 74)は、明らかに理想的な学習者を観察者の視点からモデル化したものである。更により重要な課題として、一般化の個々の様相が何故促進されるのかということについて言及していない点が挙げられる。結果として、知られているように、一般化する能力と傾向は若い学習者にさえ備わっているにも関わらず、一般化しようとしなない場合があるという実態 (Tatsis & Tatsis, 2012)が認められる。

この点について、前述したように、そもそも一般化自体がどのような状況で要請されるものかという点についてはあまり議論されてきていない。後者のような一般化の推進力を個々人に依存せず、普遍的に求められる認識論的な推進力として捉えたとき、そこには一般化の意味・目的・実用性が該当すると考えられる。我々はこれらを纏めて、一般化の機能と呼ぶことにした。

以上二つの課題から、我々は一般化の機能を学習者の観点から同定する必要があることを示した。

第2章：数学学習における一般化の機能

第1章の課題より、学習者の観点から一般化の機能を同定すべく、まず学習者の観点から一般化という活動そのものの本性について考察した。ここで、我々はHarel & Tall (1991)による、ある事柄の適用範囲を単純に広げる「膨張的一般化」と、ある種の再構成によって適用範囲を広げる「再構成的一般化」という分類に注目した。氏らの一般化の区分は学習者の観点に基づいており（従って、本研究の言う拡張に該当する選言的一般化も同定されている）、本研究の目的のために有用だからである。ただし、氏らの分類において、「再構成」の意味がやや漠然としているため、ある種の再解釈も含むものとして捉え直すこととした。

この様に考えると、「膨張的一般化」に対応して、ある事柄の適用範囲を単純に広げることそれ自体が機能を有する場合と、広げることによって何らかの機能を発現させる場合があることが指摘される。前者として、我々は本質的ではないと見做した事柄を変数にして推論の適用範囲を広げる《変数化》を、後者として問題を簡単に解決するために本質的ではないと見做した事柄を無視する《純化》を同定した。例えば、ある具体的なひし形の面積を求める方法を見出したとき、ひし形の1辺の具体的な長さなどは本質的ではないため、1辺の長さがどのような大きさのひし形にでも同じ方法を用いることが出来る。このとき、1辺の長さは《変数化》されたといえる。一方、

$\sqrt{103 \times 102 \times 101 \times 100 + 1}$ の根号を外すという問題は実直に取り組むよりも、

$\sqrt{(n+3) \times (n+2) \times (n+1) \times n + 1}$ という、より一般の問題場面を考えてみることで、

$\sqrt{n^4 + 6n^3 + 11n^2 + 6n + 1}$ の根号を外す問題に帰着される。因数分解や代数計算の幾つか

の基礎に基づいて計算し、 $\sqrt{(n^2+3n+1)^2}$ を求めることは当初の問題よりも容易であり(cf. ポリヤ, 1959), 《純化》が機能したといえる。

同様に、「再構成的一般化」に対応して、再構成・再解釈それ自体が機能を有する場合と、再構成・再解釈によって何らかの機能を発現させる場合があることが指摘される。前者として再解釈・再構成によって推論の適用範囲を広げる《統合》を、後者として再解釈・再構成によってある事柄を数学的に価値付ける《発見》を同定した。例えば、ひし形の面積を求める方法(対角線 \times もう一方の対角線 $\div 2$)は対角線が直交してさえいれば適用可能なため、たこ型にも利用できる。この様に《統合》が機能することで、ひし形の求積方法という観念の基、ひし形とたこ型が一つのものとなり、結果として《変数化》の場合とは違った方法でひし形の求積方法の適用範囲が広がっている。一方、《純化》で例に出した $\sqrt{103 \times 102 \times 101 \times 100 + 1}$ をより一般的な、 $\sqrt{(n+3) \times (n+2) \times (n+1) \times n + 1}$ という問題場面を考え、 $\sqrt{n^4 + 6n^3 + 11n^2 + 6n + 1}$ の根号を外し $\sqrt{(n^2+3n+1)^2}$ としたとき、 $\sqrt{(n+3) \times (n+2) \times (n+1) \times n + 1}$ の形で表される式は全て(但し、 $n \in \mathbb{N}$)因数分解可能であるという命題を見出すことも出来る。これは《発見》が機能するということであり、一般化過程で特殊から独立した対象(cf. Dörfler, 1991)に対して自覚的に価値付ける機能である。

更に、Harel & Tall (1991)は理解という観点から一般化と意味の関係に言及している。Dörfler (1991)が強調するように、一般化過程においては個人が見出す意味と、社会的に交渉され共有される意味の二つがあると考えられる。前者としてHowson (2005)が述べる意味の作り方をもとに、既知の対象と推論から意味を作り上げる《意味付け》という機能を同定した。既知の自然数と演算法則から、より一般の「整数」を構成するというプロセスは意味付けの機能が働く典型的な場合であり、伊藤(1993)はこの機能に着目した教授学習論を提案している。一方、後者として我々は個々人の認知を社会的に共有可能なものへと高める《社会化》という機能を同定した。ある個人が正しいと思ったことは、たとえ観察者から見て正しかったとしても常に他者に受け入れられるとは限らないため、ユークリッド原論の記述の仕方が典型的であるように、そこに一般性が要請される。これが《社会化》の機能であり、ある推論が誤りに陥らないように調整すると(cf. Beth & Piaget, 1966)という側面も含んでいる。

以上6つの一般化の機能の同定が第2章の成果であり、表1に纏められる。表1の6つの機能が、「研究課題1：数学学習において一般化が有する機能の全体像を同定すること」に対する答えである。これは、例えばDavydov (2008)が観察者の視点から述べる、一般化がある種の不変性を探究した上で単語によって指示し、結果として一般化が便利な構造や体系化をもたらす(pp. 74-75)といった機能とは異なっており、学習者の観点から同定された機能となっている。

表1：数学学習における一般化の6つの機能

純化の機能	問題を簡単に解決するために、本質的ではないと見做した属性を無視する
変数化の機能	推論の適用範囲を広げるため、本質的では無いと見做した属性を変数にする
統合の機能	一つの観念に様々な対象を取り込むことで、推論の適用範囲を広げる
発見の機能	ある問題の解決等に潜んでいる対象を数学的に価値付ける
意味付けの機能	新たな事柄を既知の事柄と推論のみから作り上げ意味を付与する
社会化の機能	主観的な認知をより客観的で共有可能な認識へ高める

第3章：一般化の機能の順序に基づく構造

第2章で明らかにされた一般化の機能は、活動の中で様々な形で働くことが予想される。このとき、各機能が互いに排他的な関係に無いことは明らかであろう。従って、この様な機能二者間の関係、それも認識論的な順序を入れた関係を明らかにすることで、一般化の機能についてよりよく理解することが出来ると期待される。なぜならば、2機能の関係は、機能全体の関わりを見る上での最小単位となり得、しかも順序が大きな影響を与えると予想されるためである。

第3章全般に渡って個々の機能同士の順序に基づく関係を述べた。その中で、例えば《変数化》と《統合》が働くとき、働いた順序に応じて違いはあるにせよ、必然的に他方の機能が働くことを示した。ひし形の求積方法が既知であるとき、もしも何らかの理由で相互の対角線が互いを内分する比（ひし形なら1：1）を《変数化》すれば、《統合》が働いたこ型もひし形の求積方法の適用対象に含まれざるを得ない。他方、何らかの理由でひし形とたこ型を《統合》しようとしたとき、相互の対角線が互いを内分する比は《変数化》されざるを得ない。いずれの場合にせよ、《変数化》と《統合》がある種不可分な関係として機能する場合が認められる。他にも、対象の特徴から離れて再解釈を行う《発見》が、対象の特徴から離れる《統合》が機能した結果として機能し得ることを論じた。これは、例えば《変数化》は対象となる特殊の特徴を有しているため《発見》が生じ辛いということでもある。

これら個々の様相が、「研究課題2：研究課題1で明らかにされた一般化の機能がどの様な構造を持つかを明らかにすること」に対する答えである。

第4章：一般化の機能と学習者の関わり方

第4章では、実際の学習者が一般化の機能とどの様に関わるかを教授実験を通して観察し、一般化の機能に関する、第2章・第3章での理論的成果の有効性と限界を明らかにした。我々の目的を鑑み、研究成果の理論的一般性を保証する量的研究ではなく、一般性を犠牲にしてでもより詳細な実態が明らかになることが期待される、質的な分析を行った。また、そのための方法として、アプリアリ分析とアポストリアリ分析という方法(cf. Artigue, 1992)を採用した。これは、理論（本研究の場合第2章と第3章の成果）と数学に基づいて学習を設計（アプリアリ分析）し、実際の授業が成功的な例となるように努め、その後理論の適用範囲や限界を探る（アポストリアリ分析）研究方法である。

具体的なアプリアリ分析として、幾何に関わる内容である「円周角の定理」と、数とパターンの踏査に関わる内容である「正方形の個数問題」の分析を行った。第2章と第3章の成果を用いたアプリアリ分析を行い活動を設計した上で、生徒の実態を加味した「期待される活動」を設計し、問題解決学習(cf. 田中, 尾崎, & 前田, 2009)に準じた学習指導案を作成し、教授実験に臨んだ。

中学校1年生30名に対する50分の「正方形の個数問題」の教授実験（授業者は生徒達の数学を担当している筆者自身）の結果、第3章の成果と、それに基づくアプリアリ分析によって予想された学習者と一般化の機能の関わり方が、ある程度正しかったことが示された。しかし、《純化》が機能することで《発見》が機能するのではないかと予想したが、実際には自発的な《発見》は機能しなかった。実践上の原因としては、学習者の活動を促す支援設計の不備に集約することができる。理論的には、《純化》と《発見》の構造に関わる議論を再度行う必要がある。しかしそれ以上に、三つ以上の一般化の機能の構造に関わる議論が不足していること、一般化の機能ではない事柄との関係の議論が不足していること、一般化の機能を授業設計に活かす際の理論的枠組み（特に支援に関して）の不足が考えられる。

こうした成果によって第2章・第3章の成果の有効性と限界がある程度明らかになった。加えて、「研究課題3：研究課題1と2を踏まえ、実際の学習において学習者は一般化の機能とどの様に関わるかを明らかにすること」に対して、一定の様相が明らかになった。

5. 本研究の意義と今後に残された課題

以上の様に、本研究は、先行研究において明示的な研究対象となっていなかった一般化の機能を研究対象とし、その研究対象としての価値を明らかにしながら、理論的

に全体像を提示した。この点が本研究の新規性であり、主たる成果は表1に示す一般化の6つの機能である。第3章と第4章の成果は、これら6つの機能を深めている。こうした機能が明らかになったことで、次の様な教育実践上、並びに研究上の意義が認められる。

[実践上の意義1：学習者の一般化を促すための指針]

我々がアприオリ分析で示したように、教師は数学学習において、学習者にとって一般化の機能が意味を持つような状況を設計しなければならないという点が示唆される。例えば《純化》や《統合》といった機能を学習者が実感できるような場面を設計することで、一般化に取り組むことが期待される。

[実践上の意義2：機能の順序に基づく構造が学習系列へと変換可能]

第3章で示した一般化の機能の順序を伴う構造は、授業を設計する上で、特に教師の支援を設計する上での指針となる点が挙げられる。例えば、《統合》が機能するとき《変数化》を伴うことを我々は示したが、実際に学習を設計するとき《統合》を期待する活動と《変数化》の関わりを分析したり、支援の設計に活かすことが可能である。

[実践上の意義3：自発的に一般化する学習者となるための精神的習慣]

おそらく最も重要な教育的示唆として、こうした機能の構造に基づいた授業が日々の実践で繰り返されることを通して、学習者達の中に一般化に関するある種の習慣が形成されることが期待される点である。例えば、何か新しいことを見出す必要があるときに《発見》の機能を用いるために一般化したり、何か全く新しい事柄を見出したときに、既存の対象にも適用範囲を広げるために《統合》の機能を用いるなどの活動を我々は期待したい。しかし、初学者にとってその様な活動に取り組むこと自体が何の教授学的手立ても無いままに実現できるとは考えにくい。しかしながら、日々の実践の繰り返りで、それぞれの機能のよさや、3章で述べたようなある種の順序性が精神的習慣として身につくことで、学習者達が自ら一般化の機能を活用し、手がかりとし、数学をする活動に取り組んでいくことが期待される。

[研究上の意義1：研究領域の拡大と基礎研究として領域全体の理解を底上げ]

本研究の成果が一般化研究に対して新たな対象を提供したことで、いくつかの問題に対して重要な示唆を提供することが挙げられる。例えば、第1章で述べたように、一般化を通して代数的能力を育むということが国際的に広く研究されている。しかし、その成果は未だ十分ではなく、Dörfler (2008)は《統合》の機能に注目するよう(勿

論, その様な言葉遣いではないが) 促している。筆者の予想するところでは, 他の機能にも注目しなければ, 真に代数的な能力を育むことは出来ないであろう。

[研究上の意義2: 学習者の実態をより深く分析するためのツールになる]

本研究の成果は一般化の認知的な推進力に関わる研究への寄与が期待される。第1章で述べたように, 一般化を促進するような状況を如何に構築するかは, 一般化研究に関わる重要な課題の一つである。これまでは, 関心やメタ認知(cf. 岩崎, 2007)といった認知的な推進力に焦点があたって来ていることは既に述べた。両者の関連を明らかにすることで, 一般化を促進する状況に関する研究が進展すると期待される。

以上の様な成果を挙げる一方で, 本研究は基礎研究であり, 未着手の課題も多く残されている。特に取り組まなければならない課題は, 次の4つである。

[課題1: 内容領域等の固有性に応じた違いの検討]

序章で述べたように, またその導出過程に見られるように, 本研究で述べた「一般化の機能」は学習段階や領域を問わず認められるものである。しかしながら, 機能の仕方(例えばどの機能が働き易いか, あるいは働きにくい)は学習段階や領域によって異なることが容易に予想され, 明らかにする必要性が認められる。

[課題2: 他の推論の機能との関わりの検討]

実際の学習において, 一般化は他の様々な活動・推論と関わる。論証する活動や, 拡張する活動は典型的に一般化と関わる活動であるが, それらの活動・推論の機能と一般化の機能がどの様に関わるかを明らかにしなければならない。

[課題3: 研究成果の妥当性の更なる検証]

本研究が明らかにした事柄は, 第4章の授業実験によってある程度妥当性が裏付けられている。しかし, 全ての機能について網羅しているわけではないし, また量的な手法を採っていない以上, 研究成果の一般性は十分に保証されていない。本研究とは異なる手法の研究によって, 研究成果の妥当性を保証していくことが課題である

[課題4: 一般化の機能の構造に関する全体像の検討]

一般化の機能同士の関係・構造については, 本論文ではその最小単位についてしか述べておらず, より複雑な様相が明らかにされるべきである。第4章のアポステリオリ分析で認められた本章の理論の限界は, まさにこの点に帰着できると言える。

本要旨の引用・参考文献一覧

Artigue, M. (1992). Didactical engineering. In R. Douady & A. Mercier (Eds.), *Research in Didactique of Mathematics: Selected papers* (pp. 41-65). Grenoble: La Pensée Sauvage.

- Beth, E. W., & Piaget, J. (1966). *Mathematical epistemology and psychology*. Dordrecht, Holland: D. Reidel.
- Davydov, V. (2008). *Problems of developmental instruction: A theoretical and experimental psychological study*. New York: NY: Nova Science Publishers.
- Dörfler, W. (1991). Forms and means of generalization in Mathematics. In A. J. Bishop, S. Mellin-Olsen & J. v. Dormolen (Eds.), *Mathematical Knowledge: Its Growth Through Teaching* (pp. 63-85). Dordrecht, Netherlands: Kluwer.
- Dörfler, W. (2008). En route from patterns to algebra: comments and reflections. *ZDM Mathematics Education*, 40, 143-160.
- Harel, G., & Tall, D. (1991). The general, the abstract, and the generic. *for the learning of mathematics*, 11, 38-42.
- Howson, G. (2005). "Meaning" and school mathematics. In J. Kilpatrick, C. Hoyles, O. Skovsmose & P. Valero (Eds.), *Meaning in mathematics education* (Vol. 37, pp. 17-38): Springer.
- Mason, J. (1989). Mathematical Abstraction as the Result of a Delicate Shift of Attention. *for the learning of mathematics*, 9(2), 2-8.
- Radford, L. (1996). Some reflections on teaching algebra through generalization. In N. Bernarz, C. Kieran & L. Lee (Eds.), *Approaches to Algebra* (Vol. 18, pp. 107-111). Netherland: Springer.
- Tatsis, B., M., & Tatsis, K. (2012). *Generalization in mathematics at all educational levels*. Rzeszów, Poland: Rzeszów University.
- 伊藤説朗. (1993). 『数学教育における構成的方法に関する研究（上）』 明治図書出版
- 岩崎秀樹. (2007). 『数学教育学の成立と展望』 ミネルヴァ書房
- 田中光一, 尾崎正和, & 前田静香. (2009). 『FESMインタビュー』 未公開インタビュー記録
- 中島健三. (1981). 『算数・数学教育と数学的な考え方 その進展のための考察』 金子書房
- ハンソン, N. R. (1986). 『科学的発見のパターン』 (村上陽一郎 訳). 講談社 (原著版は1958年)
- ポリヤ, G. (1959). 『数学における発見はいかになされるか1 帰納と類比』 (柴垣和三雄 訳). 丸善株式会社 (原著版は1953年)