論 文 審 査 の 要 旨

博士の専攻分野の名称	博　士（　理学　）	氏名	中森　さおり
学位授与の要件	学位規則第 4 条第 1・2 項該当		

論文題目

Bernstein type theorems for some types of parabolic k-Hessian equations
（ある種の放物型 k-Hessian 方程式に対する Bernstein 型定理）

論文審査担当者

主　　査	准教授	滝本　和広
審査委員	教　授	阿賀岡　芳夫
審査委員	教　授	川下　美潮
審査委員	教　授	吉野　正史

〔論文審査の要旨〕

本論文の著者 中森さおり は，放物型 k-Hessian 方程式と呼ばれる完全非線形 2 階偏微分方程式を考察し，解の特徴付けを与える「Bernstein 型定理」を得ることに成功した。

著者は次で与えられる放物型 k-Hessian 方程式を考察した。

$$-u_t\, F_k(D^2u)= -u_t\, S_k(\lambda_1, \dots, \lambda_n)=1 \quad \text{in } R^n\times(-\infty,0].$$

ただし，C^2 級関数 u に対し，$\lambda_1,\dots,\lambda_n$ は u の（x 変数に関する）Hessian 行列 D^2u の固有値を表し，S_k (k=1, … ,n)は k 次基本対称関数を表す。

k-Hessian 作用素 $F_k(D^2u)$は，k=1 のときは Laplace 作用素，k=n のときは微分幾何学でお馴染みの Monge-Ampère 作用素に帰着される。これら特別な場合については比較的扱いやすいが，著者が考察している一般の k の場合は，非線形性が非常に強く，解析するための道具が少ないため取り扱いが困難である。k-Hessian 方程式の研究が始まったのは Caffarelli-Nirenberg-Spruck (1985)以降であり，未知の部分が多い研究領域である。

しかしながら，物理学・微分幾何学・確率制御問題・数理ファイナンスなどの世界においてさまざまな完全非線形偏微分方程式が脚光を浴びている。その研究は非常に重要な意味を持つものであるが，解の構造の理解には程遠い状態である。そのような流れの中で，著者は放物型 k-Hessian 方程式に対して理論的な考察を与え，Bernstein 型定理を得た。

著者が証明した主定理を述べる前に，20 世紀初頭に Bernstein が極小曲面に関して示した定理を述べる。

<u>定理.</u>　$f=f(x,y)\in C^2(R^2)$かつ R^3 内の曲面 $z=f(x,y)$が極小曲面であるならば，
f は x と y の 1 次多項式である。

この定理は R^2 上の極小曲面方程式の全域解の特徴付けを与えている。このような Bernstein 型の定理が，幾何学的な構造を持った他の偏微分方程式に対しても成立することが期待される。実際，Monge-Ampère 方程式に対しては次のような結果が知られている。

<u>定理.</u>　R^n 上の凸関数 $u\in C^4(R^n)$が $\det D^2u=1$ in R^n の解であるならば，
u は 2 次多項式である。

この結果は Pogorelov (1978)によって証明され，現在までに多くの拡張がなされている。特に, k-Hessian 方程式 $F_k(D^2u)=1$ in R^n に対する Bernstein 型定理は Bao-Chen-Guan-Ji (2003)によって得られた。

一方，放物型 Monge-Ampère 方程式 $-u_t \det D^2u=1$ in $R^n\times(-\infty,0]$に対する Bernstein 型定理は Gutiérrez-Huang (1998)によって得られた。しかし，放物型の完全非線形方程式に対する Bernstein 型定理の研究は，これまで放物型 Monge-Ampère 方程式に限られていた。

さて，本論文の主定理は次の通りである。

<u>定理.</u>　$1\leqq k\leqq n$ とし，$u\in C^{4,2}(R^n\times(-\infty,0])$は放物型 k-Hessian 方程式

$$-u_t F_k(D^2u)= -u_t S_k(\lambda_1, \dots, \lambda_n)=1 \quad \text{in } R^n\times(-\infty,0]$$

の strictly convex-monotone な古典解であり, 次の 2 つを満たすと仮定する。

(A1) ある定数 $m_1\geqq m_2>0$ が存在し，任意の$(x,t)\in R^n\times(-\infty,0]$に対して $-m_1\leqq u_t(x,t)\leqq -m_2$ が成立する。

(A2) ある定数 $A,B>0$ が存在し，任意の $x\in R^n$ に対して $u(x,0)\geqq A|x|^2-B$ が成立する。

このとき, u は定数 $m>0$ と 2 次多項式 p を用いて $u(x,t)= -mt+p(x)$と書ける。

さらに, 本論文ではより一般化された放物型 k-Hessian 方程式に対しても Bernstein 型定理が得られることが述べられている。

証明には放物型 Monge-Ampère 方程式（$k=n$ の場合）に対する Bernstein 型定理を得た Gutiérrez-Huang の手法を用いている。主に次の 3 つのステップからなる。

(1) Du の局所評価を導出する。

(2) Pogorelov type lemma と呼ばれる命題を証明する。

(3) (1),(2)と Evans-Krylov type theorem を組み合わせることにより，D^2u と u_t の局所 Hölder 評価を導出する。

$k=n$ の場合に比べ，一般の k の場合は解析が非常に難しくなり，どのステップにおいても k-Hessian 作用素に関する深い理解と多くの計算を必要としている。

また本論文では，古典解よりも弱い意味の解である粘性解については，(A1),(A2)の仮定を外すと $u(x,t)= -mt+p(x)$（m は定数，p は 2 次多項式）という形でない放物型 k-Hessian 方程式の解が存在することを示している。著者の結果は，完全非線形偏微分方程式に対する Bernstein 型定理の研究が発展する上での大きな一歩であり，今後の研究（特に，粘性解の場合でも Bernstein 型定理が成立するか，他の完全非線形偏微分方程式に対しても Bernstein 型定理が成立するか等）の端緒となるものとして高く評価できる。

以上の諸点を考慮した結果，本論文の著者 中森さおり は博士（理学）の学位を授与されるに相応しい十分な資格があるものと認める。

公表論文

(1) Uniqueness of boundary blowup solutions to k-curvature equation.
Saori Nakamori, Kazuhiro Takimoto.
Journal of Mathematical Analysis and Applications, **399** (2013), 496-504.

(2) A Bernstein type theorem for parabolic k-Hessian equation.
Saori Nakamori, Kazuhiro Takimoto.
Nonlinear Analysis: Theory, Methods & Applications, **117** (2015), 211-220.