学位論文要旨

Bernstein type theorems for some types of parabolic k-Hessian equations
（ある種の放物型 k-Hessian 方程式に対する Bernstein 型定理）

申請者　中森 さおり

次の定理は，極小曲面方程式に対して成立する結果としてよく知られている。

Theorem 1. (Bernstein, 1915) C^2 級関数 $z = z(x, y)$ が極小曲面方程式

$$(1 + z_y^2)z_{xx} - 2z_x z_y z_{xy} + (1 + z_x^2)z_{yy} = 0$$

の $\mathbb{R}^2$ 全体の解ならば，z は x, y の 1 次式で表される。即ち，

$$z(x, y) = ax + by + c. \ (\exists a, b, c \in \mathbb{R})$$

このように全空間でみたす偏微分方程式の解の特徴づけに関する定理を Bernstein 型と呼ぶことにする。最初に得られた完全非線形偏微分方程式に対する Bernstein 型定理は Monge-Ampère 方程式に対するものであった。

Theorem 2. (Pogorelov, 1978) $u \in C^4(\mathbb{R}^n)$ が，*Monge-Ampère* 方程式

$$\det D^2 u = 1 \quad in \ \ \mathbb{R}^n$$

の *convex* な解ならば，u は *2* 次多項式である。

この定理の証明には，Monge-Ampère 作用素 $\det D^2 u$ は convex な関数に対して退化楕円型であるという性質が使われており，convexity の仮定は自然なものである。

次によく知られているのが，本論文の主結果でも扱っている k-Hessian 方程式である。

$$F_k(D^2 u) = S_k(\lambda_1, \ldots, \lambda_n) = 1 \quad \text{in} \ \ \mathbb{R}^n.$$

ただし，$\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ は Hessian 行列 $D^2 u$ の固有値で，S_k は k 次基本対称関数を表す。また，$k = 1, n$ という特別の場合にはそれぞれ Poisson 方程式，Monge-Ampère 方程式となる。この方程式に対する Bernstein 型定理は次である。

Theorem 3. (Bao-Chen-Guan-Ji, 2003) $1 \leq k \leq n$ とし，$u \in C^4(\mathbb{R}^n)$ を *k-Hessian* 方程式

$$F_k(D^2 u) = 1 \quad\quad in \ \ \mathbb{R}^n$$

の *strictly convex* な解とする。さらに，定数 $A, B > 0$ が存在して，

$$u(x) \geq A|x|^2 - B, \quad \forall x \in \mathbb{R}^n$$

をみたすならば，u は *2* 次多項式である。

さらに，放物型 Monge-Ampère 方程式についても Gutiérrez-Huang (1998) によって次の Bernstein 型定理が証明されている。

Theorem 4. (Gutiérrez-Huang, 1998) $u \in C^{4,2}(\mathbb{R}^n \times (-\infty, 0])$ を放物型 *Monge-Ampère* 方程式

$$-u_t \det D^2 u = 1 \quad \text{in } \mathbb{R}^n \times (-\infty, 0]$$

の *convex-monotone* な解とする。さらに，定数 $m_1, m_2 > 0$ が存在して，

$$-m_1 \leq u_t(x,t) \leq -m_2, \quad \forall (x,t) \in \mathbb{R}^n \times (-\infty, 0]$$

をみたすならば，u は

$$u(x,t) = C_1 t + p(x)$$

の形になる。（ただし $C_1 < 0$ は定数，p は *2* 次多項式）

より一般的な放物型 Monge-Ampère 方程式の場合は性質の良さから使える道具が多く，Bernstein 型定理が Xiong-Bao (2011) によって証明されている。一方，放物型の k-Hessian 方程式については使える道具が少なく，今まで研究がなされていなかった。そこで放物型 k-Hessian 方程式に対する Bernstein 型定理が得られないか考察したところ，次の定理を得た。

Theorem 5. (Nakamori-Takimoto, 2015) $1 \leq k \leq n$ とする。もし，$u \in C^{4,2}(\mathbb{R}^n \times (-\infty, 0])$ が放物型 *k-Hessian* 方程式

$$-u_t F_k(D^2 u) = 1 \quad \text{in } \mathbb{R}^n \times (-\infty, 0]$$

の *strictly convex-monotone* な解であり，次の仮定 (A1), (A2) をみたすとする。

(A1) 定数 $m_1, m_2 > 0$ が存在して，次をみたす。

$$-m_1 \leq u_t(x,t) \leq -m_2, \quad \forall (x,t) \in \mathbb{R}^n \times (-\infty, 0].$$

(A2) 定数 $A, B > 0$ が存在して，次をみたす。

$$u(x,0) \geq A|x|^2 - B, \quad \forall x \in \mathbb{R}^n.$$

このとき，u は

$$u(x,t) = C_1 t + p(x)$$

の形になる。（ただし $C_1 < 0$ は定数，p は *2* 次多項式）

本論文では上の証明を述べている。また，一般の放物型 k-Hessian 方程式についても同様の定理が得られたことを述べている。さらに，2 つの未解決問題を紹介している。1 つは，粘性解の場合に Bernstein 型定理が成立するかどうかについて，もう 1 つは，k-曲率方程式などの他の完全非線形偏微分方程式について Bernstein 型定理が得られるかどうかについて述べている。