

# 関数の考えを育てる関数指導Ⅱ

河寄祐子 ・ 天野秀樹 ・ 植田敦三\* ・ 下村哲\* ・ 松浦武人\* ・ 寺垣内政一\*

要約. 本研究の目的は、理想とする変化の割合の力を育てることのできる指導過程を考案し、その効果を検証することである。そのため、理想とする変化の割合の力を設定し、それに対する従来の関数指導の課題点を示唆し、理想とする力を育てることができる指導過程を考案した。その結果、指導過程の実践の際には、理想とする姿がおおむね見られたが、単元の最後に行った授業では理想とする姿は見られなかった。

キーワード： 変化の割合

## I. はじめに (本研究の目的)

中学校の関数指導で、変化の割合の意味を理解させ、変化の割合の考えを活用できる生徒を育成することは、高等学校における微分の考えへの接続をはじめとして重要なことである。今年度の全国学力・学習状況調査において、1次関数の表から変化の割合の意味を問う問題の正答率は47.8%であり、変化の割合における指導のあり方を改善していくことが喫緊の課題とされている。「変化の割合」とは、ある区間にけるおおまかな変化の様子を、割合といった一つの指標で表した数値である。したがって、変化の割合を理解することは、ある区間における変化の様子を表した割合がわかることである。その理解があつてこそ、刻々と変わる事象を調べるとき、 $x$ の増加量の幅を柔軟に変化させ、変化の割合を活用することができる。1次関数における現在の教科書は、変化の割合を定義した後で、傾きと関連づけて視覚化して理解を深める形式になっている。変化の割合が一定でない例として反比例を扱ってはいるものの、この形式では、生徒の印象として、変化の割合は $x$ の係数部分を決めるもので、この値1つにより変化の仕方のすべてが確定するという見方ができあがってしまう。言いかえると、 $x$ の増加量に対する $y$ の増加量という意味や、ある区間によって決められる割合といった感覚を十分に伸ばしきれない形式になっている。これらの問題意識のもと、理想とする力を育てるには、関数領域3年間で単元の構成を見直す必要がある。

そこで、本研究は、理想とする変化の割合の力を設定し、それに対する従来の関数指導の課題点を示唆し、理想とする力を育てることができる指導過程を考案し、そ

の効果を検証することを目的とする。

## II. 研究の方法

本研究では、「変化の割合」を理解し、利用できている理想的な姿を設定する。その力に照らし、従来の関数指導の中での変化の割合の指導過程にある課題を明らかにする。次に、課題点を改善するための授業を実践し、成果の有無を明らかにする。

### 1 「変化の割合」を理解している姿

- ・ 新たな変化 (増加・減少) を量化したものとして、 $x$ の増加量に対する $y$ の増加量の割合をみるのが理解できる。
- ・ ある区間によって決められるものである
- ・  $x$ の増加量は常に正であり、それに対する $y$ の増減を量化しているということが理解できる。
- ・ 刻々と変動するものの変化の様子を調べるツールとして、変化の割合を活用することができる。
- ・  $x$ の増加量の幅を柔軟に変化させたりすることができる。
- ・ 2つの変化の様子を比較するとき、適切な区間を設定することができる。

### 2 従来の「変化の割合」の指導の課題

従来の指導過程では、変化の割合を一次関数の中で学習する。一次関数の変化の割合は一定であることから、グラフが直線となること、さらに、「変化の割合」と「傾き」の関係を学習し、変化の割合の理解を図の中でイメージ化し理解を深める。このように、変化の割合の理解

の流れを大まかに表すと、

「数式 (割合)」 ⇒ 「図形 (傾き)」  
という順になっている。

しかし、このような指導の過程では、変化の割合の理解に次のような課題が生まれる。1つ目の課題としては、割合の理解に抵抗のある生徒が多い実態がある。2つ目は、小学校における割合の学習では、1を超えるものをほとんど扱っていないが、変化の割合は1を超えることが多い。このことが、変化の割合の理解へのハードルを上げる要因となっている。

一方で、一次関数を学ぶ前の生徒は、傾きの「緩急」と「増減の大きさ」の関係を理解している。また、傾きの緩急は「角の大きさ」で認識している。

この「角の大きさ」という既知の概念を、割合という新しい概念へと、図の中で丁寧にスムーズにつなぐ指導があれば、変化の割合の理解につながるのではないかと、この考えのもと新たな指導計画を考案した。

### 3 新たな単元設計の視点

変化の割合の意味を比例で扱い、比例で既習している右上がりでは増加で、右下がりでは減少、傾きが急・緩やかというグラフの中で生徒が持っている増減の概念からつなげていくような形で、「図形 (傾き)」⇒「数式 (割合)」という順で、変化の割合という新たな概念に高める。

授業では、図1のイメージに基づいて、次の①から③に留意して指導する。

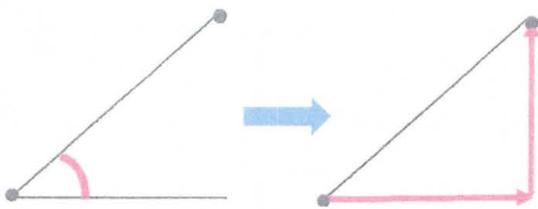


図1

- ①傾き具合を角度で認識している実態をしっかり理解し、それを横に対する縦の割合を見るという視点に移行させることを指導の際に重点に置いていく。
- ②xは増加が前提であるということを、図の中で矢印を用いて明確にする。
- ③割合という概念の拡張(1を超える)を意識して、理解ができているか丁寧に説明する。

次に、変化が一様でない反比例で変化の割合を扱う。グラフが直線でないものにおいて、変化の割合を扱うことにより、線分(斜辺部分)の存在が消え、変化の割合を決めているのは、区間であるということ(図2参照)へと概念を深めていくよう指導する。

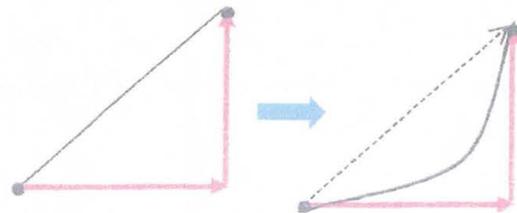


図2

授業では、次の④～⑥に留意して指導する。

- ④ある区間によって決められるものである
- ⑤2つの変化の様子を比較するとき、適切な区間を設定することができる。
- ⑥グラフの中で、2点間の動きとして動的に見せることにより、図形という静的なものの中に、点の変化を量として表すということを常に強調する。

### 指導計画

|     |        |     |
|-----|--------|-----|
| 第1次 | 1次関数とは | 1時間 |
| 第2次 | 関数の調べ方 | 3時間 |

- |                         |
|-------------------------|
| (1) 変化の割合とは～比例・反比例を調べる～ |
| (2) 1次関数の変化の割合を調べる      |

|     |          |     |
|-----|----------|-----|
| 第3次 | 1次関数のグラフ | 3時間 |
| 第4次 | 直線の式の求め方 | 3時間 |
| 第5次 | 1次関数の利用  | 4時間 |

- |              |
|--------------|
| (1) 1次関数の利用  |
| (2) 変化の割合の利用 |

### 4 授業の概要

広島大学附属東雲中学校第2学年1・2組(80名)を対象として、平成26年7月から授業実践を行った。単元計画の中で          で囲んだ範囲のみの授業の詳細を以下に示す。

- |                                    |
|------------------------------------|
| 第2次 関数の調べ方 (1) 変化の割合とは～比例・反比例を調べる～ |
|------------------------------------|

(1時間目) 図1のような $y=2x$ と $y=3x$ のグラフを提示して、2つの関数の変化の仕方を比較させ、どちらの方が増え方が大きいかを理由とともに考えさせた。

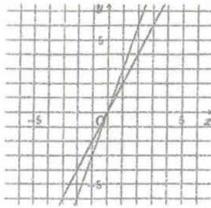


図3  $y=2x$ と $y=3x$ のグラフ

生徒の反応は、2より3の方が急であるということというグラフの勾配によるや、1増えることに対して、2ずつ増えるのと3ずつ増えるのでは、3の方が大きいからという増え方による説明というものであった。

次に、坂道の勾配7%を見せ、7%の意味を予想させた。生徒の反応は、 $360^\circ$ を100%として7%分の角と予想した。横を100%としたときの、縦の割合であることを説明し、勾配を表す方法として、横に対する縦の割合を利用している急であるという“勾配”と“ペース”をもとにして、増え方を表す値として、 $x$ の増加量をもとに $y$ の増加量の割合を求めると、増え方の大きさを量で捉えることができると変化の割合の概念を説明した。また、山道の勾配は一定でないことにも触れ、平均的な勾配を表しているということにも触れた。このとき留意したことは、割合ということばと意味がしっかりとつながるようにするという点である。元にするものは何か?ということを確認した。図形中で変化の割合を、2点間の変化を見るものとして、矢印を引きイメージをつかませた。(図4)

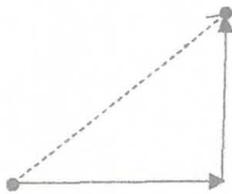


図4 傾きを考えるための直角三角形

次に反比例 $y=-\frac{6}{x}$ と $y=-\frac{12}{x}$ のグラフ(第1象限のみ)

を提示し、2つの関数の変化の仕方を比較させた。右上がりの曲線の中で考察させるためである。また、傾きをグラフの中で考える際、直角三角形を描きやすくするためにマス目のあるグラフを提示した。(図5)

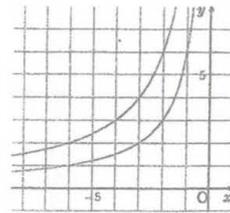


図5  $y=-\frac{6}{x}$ と $y=-\frac{12}{x}$ のグラフ

比例と同様、どちらの方が増え方が大きいかを理由とともに考えさせた。この時は、変化の割合を変化が一定でない関数で見ることができるということを評価することをねらいとした。

生徒の反応は以下の通りであった。

- (A) 原点から $x=-2$ に向かって「傾きを考えるための直角三角形」をかき矢印の勾配を比べる。
- (B) 異なる $x$ の区間で「傾きを考えるための直角三角形」をかき、 $x$ が1増加するときに対する $y$ の増え方を考え比較する。
- (C) 格子点でグラフが交わる場所を基準として、 $x$ の区間を $-6$ から $-2$ までに限定して、「傾きを考えるための直角三角形」をかき、 $y$ の増え方を変化の割合を求め比べる。
- (D) それぞれの $x$ が1ずつ増えるときの $y$ の増え方を調べる。

(2時間目) これらの生徒から出た考えを全体で考察していくことにより、反比例という変化が一定でない、グラフは曲線となる場合の変化を調べるには、どのようにしていけばいいかを以下のように構築していった。

授業の概要を以下に示す。

T: (A)の比べ方へどうか?

S: 1つの $y$ の値だけを比べているから、 $y$ の増加量の比較にはなっていないからだめ。

T:  $y$ の増加量にしていくためには、点は何点いる?

S: 2点

T: どんな2点?

S: グラフの上にあるもの。

T: では、(B)はどうだろう?

S: いいと思う。(ほとんどの生徒)

T: 違うと思う人?

S:  $-3 \leq x \leq -2$ に $y=-\frac{6}{x}$ の方をもってきたら、 $\frac{2}{1}$ と $\frac{1}{1}$

で逆になるからおかしい。

T: つまり, 同じ変域で比べなくてはならないということ。

T: すべての区間についてもいえるかな?

S: 区間をいろいろ変えて, 変化の割合を調べていく。

T: ④の方法も紹介

(3時間目) 前回はマス目のあるグラフを与え, 生徒は  
その中で「傾きを考えるための直角三角形」をかき, 変  
化の割合を調べることを行った。傾きという既知のこと  
から, 未知である変化の割合へとなめらかに結びつける  
ためである。さらに, 混乱をさけるために, 今回は増加  
する場合のみを扱った。この時間は, グラフを提示せず,  
式と区間を与え, 変化の割合を求める方法を教えた。xに  
対応するyの値を求め, yの増加量を求めて, xの増加  
量に対するその割合を求める。多くの生徒はグラフをか  
いて, イメージをもってから, 変化の割合を考えていく  
ことができた。グラフのイメージを自分で作ることが難  
しい生徒のために, メモリのない反比例のグラフを隅に  
置き考えやすくなるように工夫をした。生徒から出た考  
えを全体で考察していくことにより, グラフの中でなく,  
式の中で直角三角形を変化の割合を求める方法に重点を  
置き, 直角三角形を引っ張ってきて対比しながら理解し  
ていくような形で指導した。

### 第2次 関数の調べ方 (2) 1次関数の変化の割合を調べる

前時まで, 比例という変化が一定のものと, 反比例  
という変化が一定でないものの変化のようすを, 変化の  
割合を用いて考察してきた。この時間では, 1次関数の  
変化のようすを変化の割合を用いて調べさせた。1次関数  
の特殊なものである比例の変化の割合はどこでも一定で  
あることは把握しているうえで, 1次関数  $y = 2x + 1$  の  
変化の割合を, xが1から3と3から6と-3から-1で調べ,  
すべて2であることから, いつでも2になるという予想  
を生徒が立てた。ほとんどの生徒がyの増加量/xの増加  
量を計算し求め, 同じになるということを発見的にでき  
ていた。同じではないとした生徒がいた。理由は, yの  
増え方のみを比較したためである。どんな区間でも変化  
の割合が2になることを文字式を用いて, 説明させた。  
文字式の計算上, 多項式の除法については補った。

### 第5次 1次関数の利用 (2) 変化の割合の利用

生徒の印象として, 変化の割合はxの係数部分を決め  
るもので, この値1つにより変化の仕方のすべてが確定  
するという見方ができあがってしまう。言いかえると, x  
の増加量に対するyの増加量という意味や, ある区間に  
よって決められる割合といった感覚を十分に伸ばしきれ  
ない形式になっている。これらの問題意識のもと, 生徒  
個々がもつ変化の割合の捉えをゆさぶり, 見つめ直させ  
る授業を設計した。直角三角形における一つの辺に対す  
る斜辺の変化を調べる活動を設定する。この題材は, 変  
化が一律でなく, また, 実測して調べることができると  
ころにも価値がある。したがって指導にあたっては, 変  
化の割合は関数のほとんどを決めるといった生徒の捉え  
をゆさぶり, 身のまわりの事象を関数として捉える際  
の変化の割合は, 区間の決め方で変わり, 大まかな変化の  
傾向を読み取る際に有効であるという考えからも見つめ  
直させるように設定していきたい。具体的には, 斜辺の  
変化の仕方を調べる過程で, xの増加量の幅を柔軟に変  
化させ, 適切に区間を設定する必要性がある問いかけを  
することで, 事象の変化を区間ごとに考察できるように  
させたい。

変化の割合を用いて1次関数が検討する学習活動を通  
して, 変化の割合が区間により決まることと, 大まかな  
変化を表す量であることがわかる。

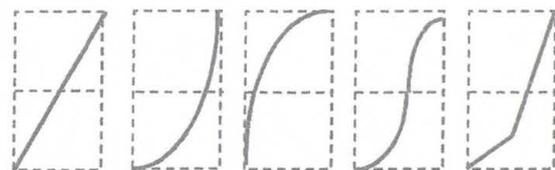
授業の概要を以下に示す。

T: 1次関数の変化の割合が2をジェスチャーで表すとど  
うなるか?

S: →1, ↑2

S: 傾き2

T: ア～オについて, 変化の割合が2であるか。



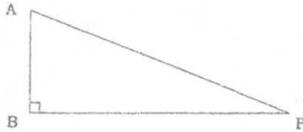
S: アのみで他は2ではない。

T: 変化の割合は同じでも, 中身が異なる場合がある

T: 課題提示

直角三角形 ABP は  $AB = 4\text{ cm}$ , 点 P を点 B から毎秒  
3cm の速さで動かした図形です。このとき, 時間が経  
つにつれて, 斜辺 AP の長さはどうに変化します

か？



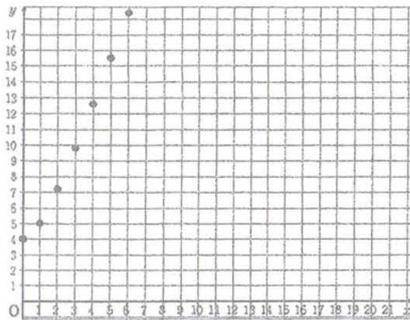
T: どのように変化するか予想させる。

S: イがほとんど アが少し

T: 実測して調べよう

S: 斜辺 AP の長さを測って調べ、表やグラフにまとめる。

|   |   |   |     |     |      |      |      |      |
|---|---|---|-----|-----|------|------|------|------|
| x | 0 | 1 | 2   | 3   | 4    | 5    | 6    | 7    |
| y | 4 | 5 | 7.2 | 9.8 | 12.6 | 15.5 | 18.4 | 21.3 |



S: 斜辺 AP の長さの変化を考え、発表する。

- ・ 曲線になる。
- ・ x が1ずつ増えると、y は2,2,2,2,6,2,8,2,9,2,9,2,9 増える
- ・ x が3までは増加量が徐々に増し、3以上は一定になりそう

T: 点と点の間はどう結べばいいか？

S: なめらかな曲線 直線ではない

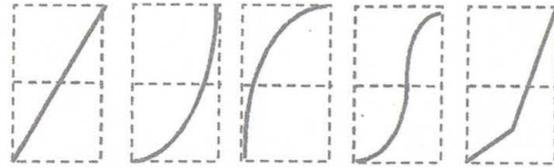
### Ⅲ. 結果と考察

「変化の割合」を理解し、利用できる理想的な姿を設定し、その力に照らし、従来の関数指導の中での変化の割合の指導方法をし、7月に実践した。その後、11月に、変化の割合を利用する授業を実践した。変化の割合の理想とする姿に照らして、生徒の発言やワークシートから生徒の反応を考察することで、成果の有無を以下に述べる。

#### 1 結果

##### (1) 導入場面

授業の導入で生徒に、以下のようなア～オを提示して、変化の割合が2であるものはどれかと発問した。



それに対して、すべての生徒が、アのみで他は2ではないとした。一部の生徒に判断の理由を聞くと、そのように判断した理由は、区間により変わるもので、変化の割合は2とは決まらないということであった。

##### (2) 活用場面

実測データを考察する際には、「刻々と変動するものの変化の様子を調べるツールとして、xの増加量の幅を柔軟に変化させたりして、変化の割合を活用することができる」姿が生徒の意見やワークシートの記述から見られた。

### 2 考察

##### (1) 導入場面

この反応から、生徒が考える、変化の割合とは、変化が一樣であるもののみ認めるもので、そうでないものでは認められないという認識の在り様が見える。つまり、変化の割合は、ある区間によって決められる値であり、大まかな変化の様子を調べるものであるという理想とする認識がみられなかった。要因としては、変化の割合の意味を、変化が一樣でない反比例の中で図とともに意味を理解させたが、その後、変化の割合を扱う場面が、変化の割合が一定であることを用いる面のみで、そのことにより変化の割合の意味理解が薄れて消えていったことに要因があると考えられる。

##### (2) 活用場面

実験した値からは、変化の様子は、途中から直線のように近似していけそうな変化であったが、そのようには判断せずに、生徒は緩やかに登っていくや、ちよつとずつ変化していくや、増え方は一定ではないという考えを変化の割合により考察することができた。

また、ワークシートでは、区間を狭めてyの増加量を調べるものや、yの増加量の変化をグラフにして調べるものも見られた(図6・7)。

国立教育政策研究所：全国学力・学習状況調査報告書—  
一人一人の生徒の学力・学習状況に応じた学習指導の改  
善・充実に向けて, 2014

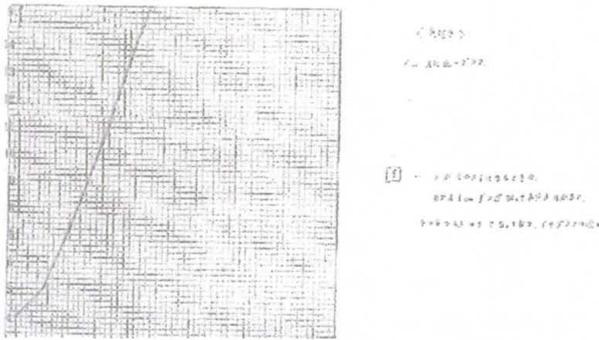


図6 生徒によるワークシートの記述例

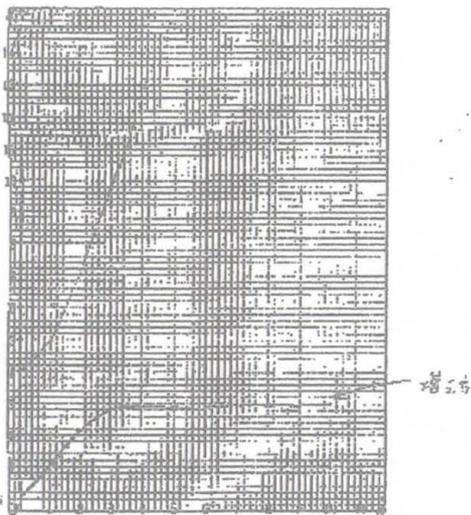


図7 生徒によるワークシートの記述例

#### IV. おわりに

本研究では、「変化の割合」を理解し、利用できている理想的な姿を設定し、それを育てることをめざした授業を実践した。その結果、単元の最後に実践した授業では、変化の割合の理解についての理想とする姿をみることができなかった。そのことにより、変化の割合の理解を確かにするには、意味理解の場面だけでなく、その後、変化の割合を用いて変化の様子を調べることを設定することが必要であることが明らかになった。一方で、単元の最後に設定したような、変化の割合の意味を確かめる課題の必要性が見られた。今後も、変化の割合を理解し利用できる理想の姿をめざした授業を継続して実践することや、本実践が従来通りの授業とは異なる視点を生徒にもたせることを科学的に解明することに取り組みたい。

#### 引用・参考文献

広島大学附属東雲小学校・中学校, 東雲教育研究会実施

## Function instruction which raises the idea of a function II

Yuko KAWASAKI, Hideki AMANO, Atsumi UEDA, Tetsu SHIMOMURA, Taketo MATUURA and Masakazu TERAGAITO

**Abstract.** The purpose of this study is to devise a process guidance that can grow the rate of force change to the ideal is to verify the effect. Therefore, set the rate of force change to the ideal, and suggests the problems of the conventional functions guidance for it, was devised guidance process that can grow force to ideal. As a result, to obtain the actual to the ideal and could not sufficiently.

**Key words :** rate of change