

論文審査の要旨

博士の専攻分野の名称	博 士 (理 学)	氏名	田端 亮
学位授与の要件	学位規則第 4 条第 ①・② 項該当		
論文題目			
The values of the generalized matrix functions of 3×3 matrices (3×3 行列の一般化行列関数の値)			
論文審査担当者			
主 査	教 授	木村 俊一	
審査委員	教 授	島田 伊知朗	
審査委員	教 授	松本 眞	
審査委員	准教授	高橋 宣能	
〔論文審査の要旨〕			
<p>$n \times n$ 行列 A に対して、A の Determinant とは、A の各行各列から 1 つずつ n 個の成分を選び出してかけ合わせた積全てについて、その成分の並び方に応じて +1 あるいは -1 という係数をかけて足し合わせたものである。係数を全て 1 にして足し合わせたものは A の Permanent と呼ばれる。その他にも、行列の成分 n 個を同様にかけて積に自然に定めた係数をかけて足した関数が定義され、一般化行列関数と呼ばれる。これは n 次対称群の部分群 G と、G の表現 λ に対応してそれぞれ定義される。Determinant は G が n 次対称群で表現が交代表現の場合、Permanent は G が n 次対称群で表現が自明表現の場合である。本論文では、半正値エルミート行列に対して一般化行列関数の取りうる値を研究する。以下、行列としては半正値エルミート行列のみを考えるものとする。</p> <p>1917年、Schur が、一般化行列関数のうちで Determinant が最小の値を取ることがを証明した。一方、1966年、Lieb が、一般化行列関数のうちで Permanent が最大の値を取るのであろうと予想した (Permanental Dominance Conjecture)。Lieb の予想は n が 4 以上の場合は未解決であり、n が 3 の場合も folklore として知られているのみで、証明が書かれた論文は存在しない。本論文は、$n=3$ の場合に Permanental Dominance Conjecture を完全に解決し、しかもただ単に一般化行列関数が Permanent 以下であることを示すのではなく、Determinant を 0、Permanent を 1 として正規化した数直線上で各一般化行列関数が動きうる範囲を完全に決定し、その意味で Lieb 予想 (と Schur の定理) を精密化したものである。</p> <p>証明の道具として、参考論文で半正値エルミート 3×3 行列 $A = (a_{i,j})$ で $\det A < \text{Per } A$ を満たすものに対し関数 T を $T(A) = (a_{1,2}a_{2,3}a_{3,1}) / (a_{1,1}a_{2,3} ^2 + a_{2,2}a_{1,3} ^2 + a_{3,3}a_{1,2} ^2)$ と定義した。 $T(A) = x + yi$ とあらわしたとき、この $T(A)$ のとりうる値が $-\frac{1}{6} \leq x \leq \frac{1}{3}$ かつ</p>			

$54x(x^2 + y^2) - 27(x^2 + y^2) + 1 \geq 0$ によってあらわされる領域であることが示される。この $T(A)$ から、いくつかの一般化行列関数を取りうる値が読み取れる。例えば 3 次対称群の表現 $(2,1)$ が定める一般化行列関数は $\frac{1}{2} - \frac{3}{2}\text{Re}(T(A))$ なので、数直線上 $[0, 3/4]$ という範囲で動く。同様に 3 次交代群の非自明な表現 ω が定める一般化行列関数は $\left[0, \frac{1}{\sqrt[3]{2}}\right]$ という範囲で動くことが示される。

本論文では、参考論文で残されたケース、すなわち G が位数 2 の部分群となるケースを解決した。自明指標 χ_+ に対しては $\left[\frac{1}{3}, 1\right]$ 、交代指標 χ_- に対しては $\left[0, \frac{1}{\sqrt{3}}\right]$ という範囲が得られる。証明は $T(A)$ をさらに精密化した関数の挙動を詳しく調べることによって成し遂げられている。

本論文はこれまで文献にあらわれなかった $n=3$ の場合の **Permanental Dominance Conjecture** を精密化した形で完全解決したものである。さらにその後の $n>3$ の場合の一般化行列関数の挙動、特に $n \rightarrow \infty$ とした場合の深い研究につながりつつある。

以上、審査の結果、本論文の著者は博士（理学）の学位を授与される十分な資格があるものと認める。

公表論文

Tabata, Ryo: The values of the generalized matrix functions of 3×3 matrices, Hiroshima Mathematical Journal, to appear.

参考論文

Tabata, Ryo: Sharp inequalities for the permanental dominance conjecture, Hiroshima Mathematical Journal, 40 (2) (2010) 205-213.