広島大学　学部・附属学校共同研究機構研究紀要
〈第43号　2015．3〉

中等教育を一貫する論証指導の実践に基づく開発研究

岩知道秀樹　清水　浩士　天野　秀樹　岩崎　秀樹
入川　義克
（研究協力者）杉野本勇気　大滝　孝治　森山　健　辻本　亜希

１．本研究の課題意識

中学校における数学の論証の理解は20％に充たないといわれている。歴史的にみれば、進学率が20%を超えなかった旧制中学の教材が，戦後，新制中学の教材になったことから生じる論理的帰結といえばそれまでだが，義務教育にあってこうした常識はむしろ非常識であろう。高等学校への進学が98％を超え，無償化が実施，そして言語活動の充実が叫ばれているような状況では，論証の学び直しが積極的に高等学校でなされてもよいと考えられる。しかし中学校と高等学校が中等教育として一貫化されるような状況下で，それが単なる中学校の焼き直しであれば，高等学校ですることの意味が必ずしもあるとは思えない。

現在の中学校のカリキュラム，前期中等教育段階では、ある種の直観性を手立てに命題の真偽に関心が置かれるため，図形を対象として，命題論理としての論証に焦点が当てられる。一方，数はもっぱら形式的・機械的操作と不可分な関係にあり，さらには文字使用と記号認識の未熟さも手伝って，数に関する思考を対象化することには困難を伴うため，必ずしも論証指導が意識的になされているとはいえないのが現状である。しかし高等学校，後期中等段階では，「数と計算」あるいは「文字と式」に関する論証を学習する条件や環境は全く異なっている。たとえば無限を前提とする一般的な計算結果はもはや算数的事実として存在しえず、そのため数学的に展開しうる「推測」や「予想」として、真偽の検討が求められる命題となる。ただしその命題は､図形を参照する日常言語のそれではなく、数式のレベルの命題であって、図形のレベルでの命題論理とは異なる、ある意味で述語論理的な記号使用と数学的認識の展開が、そこに求められなければならない。なぜなら教科「数学」における数は図形に比べればはるかに抽象的な存在となり、具体的な量ではなく数値それ自体を具体として扱うため、数学の側で意識する，しないに関わらず，いずれの数が論議領域かどうかを確定しなければならない。そこに述語論理の必然性が内在している。例えば，数学的帰納法はその典型といえよう。そのためより積極的に、数を対象とする厳密な議論の中で，言語活動の充実を図りながら数学的な感性を養うことは後期中等段階の目標として，設定されてしかるべきであろう。

２．研究の目的・方法

本研究では，中等教育，とりわけ後期中等教育における論証カリキュラムを開発していくことを目指している。前期中等教育で行われる三平方の定理を頂点とした論証指導のカリキュラム構成に対して，後期中等教育を対象とした論証指導のカリキュラム構成の１つのモデルを作るためにSylvesterの定理を取り上げる。それは連続する数の和として数学的活動を容易に仕組め，さらにその操作的取り扱いにおいて幾何的直観が重要な役割を果たすことや，その論証的取り扱いにおいて，存在性や一意性に触れる点は，Sylvesterの名に恥じぬほど，数学性に優れているからである。Sylvesterの定理の論証過程は，生徒が抱きがちな論証の必然性や厳密性というハードルをクリヤーするばかりでなく，Freudenthalのいう局所的組織化への可能性を十分に備えている。本稿では，Sylvesterの定理を用いた教授実験により後期中等教育段階での論証の課題や実際の生徒の状況，反応などを分析し，カリキュラム開発に向けた示唆を得ることを目的とする。その中でも，一意性の考え方「だけしかない」，存在するという考え方「存在」を要素の数の検討から意識づけさせる，そしてそれらを考える上で基礎となる写像の考え「対応する」をどのように生徒が意識しているかを検討し，それらの意識づけを行うための課題を

Iwachido Hideki, Shimizu Hiroshi, Amano Hideki, Iwasaki Hideki, Irikawa Yoshikatsu, Suginomoto Yuki, Otaki Koji, Moriyama Ken, and Tsujimoto Aki: Research and Development into Lessons for Teaching Mathematical Proofs at Secondary School

あぶりだすことが目的となる。

３．Sylvesterの定理

われわれは，高校数学における論証の学び直しを，中学数学における論証の焼き直しに求めるものではない。むしろ中学数学における図形教材そのものを変更して，論証の学習指導において一意性や存在性を意識し，局所的な組織化（Freudenthal, 1971）を経験するような学習があってもよいと考える。そのための適切な教材として，Sylvesterの定理を提案する。Wittmann（2001）はSylvesterの定理を次のように示している。

【Sylvesterの定理】
自然数Nを連続する自然数の和としてかき表すとき，その表し方はNの奇数の約数（以下「奇約数」とする）の数に等しい。

例えば21ならば，１以外に3,7，21の３個の奇約数を持つのだから，10＋11，6＋7＋8，1＋2＋3＋4＋5＋6の３通りだけ，連続する自然数の和としてかき表すことができる。

Sylvesterの自然数定理を論理式で表現すれば以下のように変換可能である：

条件P：nの連続自然数和表現はk個ある．
条件Q：nの奇数約数はk個ある．
Sylvesterの自然数定理：P ⇔ Q

この形式に従えば，P⇒QとQ⇒Pという二つの命題が設定可能となる。また，両者の操作的証明はアレイ図を用いて行われ，それぞれ異なった証明プロセスを経る（岩知道・他, 2014)。本稿では，後期中等段階の学習を，操作的証明による幾何的・視覚的・直観的な補助を用いながら，次のような形式的証明への移行させるように設定している。

①　P⇒Qの場合

P⇒Qの操作的証明はWittmann（2001）によって与えられており，階段状のアレイ図を，底辺が偶数の場合と奇数の場合とに場合わけし，それぞれ縦割り変形と横割り変形によって長方形をつくることによって行われる（図１，２）。

（証明）

Ⅰ　項数が奇数l_1で自然数和がかき表せる場合，mを中央数とすると

$$n=\left(m-\frac{l_1-1}{2}\right)+\left(m-\frac{l_1-1}{2}+1\right)+\cdots(m-1)$$

$$+m+(m+1)\cdots+\left(m+\frac{l_1-1}{2}-1\right)+\left(m+\frac{l_1-1}{2}\right)$$

$$=m+m+m+\cdots+m+m$$

$$=m\times l_1$$

すなわち，任意の項数が奇数の自然数和に対して，の奇数約数が一つ存在する。

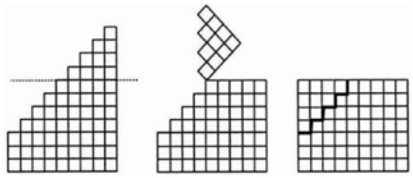

図１　項数が奇数の場合（Wittmann, 2001, p. 548）

Ⅱ　項数が偶数l_2の自然数和でかき表せる場合，自然数和の最初の数をa_1とすると

$$n=a_1+(a_1+1)+(a_1+2)+\cdots+(a_1+l_2-2)+(a_1+l_2-1)$$

$$=\frac{1}{2}l_2(2a_1+l_2-1)$$

l_2は偶数であるため，$(2a_1+l_2-1)\,l_2$は偶数であるため，$(2a_1+l_2-1)$はnの奇数約数となる。任意の項数が偶数の自然数和に対して，nの奇数約数が一つ存在する。

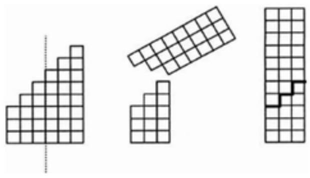

図２　項数が偶数の場合（Wittmann, 2001, p. 548）

任意の連続する自然数和に対してあるnの奇数約数が存在する。また，それぞれの場合が重複する可能性については，

$$\mathrm{m}-\tfrac{l_1-1}{2}>0,\ (a_1+l_2-1)\geq l_2\ \text{より}$$

$$2\mathrm{m}+1>l_1,\ 2\left(\frac{1}{2}l_2\right)+1\leq(2a_1+l_2-1)$$

nの約数における大小関係から
$l_1<(2a_1+l_2-1)$が保証される。このため，奇数約数が重複しないことが保証される。

② Q⇒Pの場合

Q⇒Pの操作的証明は，奇数約数を底辺とする長方形から階段を作る方法で行われる（cf. 杉野本・他, 2011; 岩崎・他, 2013)。この操作的証明では，奇数約数によって長方形を作成し，それを階段状に変形していく操作となる（図３)。底辺の長さによって場合分けが必要になり，底辺が長い場合は，数の範囲を整数に拡張する場面が生じる（図４)。

（証明）
ある自然数nが奇数約数l（l≠1）を持つならば,

$$n=m\times l=m+m+\cdots+m$$

さらに，中心の項を軸として，連続する整数の和の形式に変換することが可能である。

$$=\left(m-\frac{l-1}{2}\right)+\left(m-\frac{l-1}{2}+1\right)+\cdots(m-1)+m+(m+1)\cdots+\left(m+\frac{l-1}{2}-1\right)+\left(m+\frac{l-1}{2}\right)$$

…（※）

先頭の項 $\left\{m-\left(\frac{l-1}{2}\right)\right\}$ に着目して,

（ｉ）$m-\left(\frac{l-1}{2}\right)>0\quad 2m+1>l$のとき

$$n=\left\{m-\left(\frac{l-1}{2}\right)\right\}+\left\{m-\left(\frac{l-1}{2}+1\right)\right\}+\cdots+(m-1)+m+(m+1)+\cdots+\left\{m+\left(\frac{l-1}{2}+1\right)\right\}+\left\{m+\left(\frac{l-1}{2}\right)\right\}$$

その項数は１で，奇数である。

（ⅱ）$m-\left(\frac{l-1}{2}\right)\leq 0$のとき

$$n=\left\{m-\left(\frac{l-1}{2}\right)\right\}+\left\{m-\left(\frac{l-1}{2}+1\right)\right\}+\cdots+0+1+\cdots+m+\cdots+\left\{m+\left(\frac{l-1}{2}+1\right)\right\}+\left\{m+\left(\frac{l-1}{2}\right)\right\}$$

この場合，整数の範囲に拡張して考え，負の数を用いれば，連続する整数の和でかき表すことができる。その項数は，０のキャンセル，もしくは０を中心に左右がキャンセルされるため偶数である。

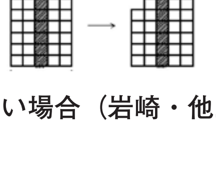

図３　底辺が短い場合（岩崎・他, 2013, p. 227）

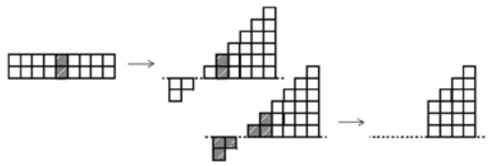

図４　底辺が長い場合（岩崎・他, 2013, p. 227）

（ｉ）～（ⅱ）のそれぞれの場合で，ある奇数約数lの値によって一通りだけの連続する自然数の和が構成でき，（ｉ）と（ⅱ）では，項数の奇遇不一致のため，それぞれの場合が重複することはない。

奇数約数に依存せずに連続する自然数和が構成される可能性は，証明プロセスの逆操作により，奇数約数を見つけることができるため，ありえない。

上記の証明に見られるように一意性や存在性など数学的に高度な考え方を必要とする。これらを直接的に生徒に理解させることは，非常に難しいが，そのような考え方を経験させることができることが，Sylvesterの定理の教育的価値の１つである。

４．教授実験の意図

本研究で取り上げている一意性や存在性は，数学，数学教育において様々な領域で現れ，数学の論理的感性を支える数学的な見方，考え方であり，学習段階を貫く概念であるともいえる。例えば，素因数分解の一意性，一対一対応として１つの値が決まればもう一方が定まると言う関数の考え方，方程式の恒等式の考え方など多くの場面で一意性が内在している。前期中等教育のメインとされる論証においても暗黙的ではあるがそれは現れる。例えば，三角形の３つの合同条件では，それぞれが３つの条件を持つ（例えば２角狭辺)。その３つの条件がそれぞれぞれ定まることによって，３角形の形が一意に定まるので合同であるということが言えるのである。またそこには，一般の三角形のという，本来存在しないものを存在するということが前提として話が展開される。しかし合同条件を用いた前期中等教育における指導は，論証の手法習得に重点が置かれているため，当然このようなことはあまり顕在化されない。数学者である根上・中本（2002）らが，基礎体力に対応するような数学的素養・資質を，「基礎数学力」と表現しているが，その中で，《１対1の対応がつけば，同じ個数ずつ存在する》(p.65）という「１対１対応の考え方」が論証に不可欠であることを指摘しているが，これは鳩の巣原理にも関連している。また数概念の起源にも関連していると考えられる。このように，程度，その関連の仕方は異なるにしても一意性の考え方は，数学，数学教育における様々な場面に

現れる。故に，それは数学を学ぶ際に習得されるべき思考方法といってよいと考える。また存在性は，判別式という形で高校数学に現れるものであるが，解の存在というそのこと自体は注目されず，単なる計算の道具として扱われがちである。この部分をもっとフューチャーしていき，数学科で養うべき思考法として取り上げるべきである。

本稿では，一意性を「だけしかない」や存在性を「存在」という少し広い意味合いを持って用いることで，一意性，存在性の意識化を図ることを考える。行動な数学的考えとして扱うのであれば，一意性を考えるときには，すべてを考えることになるため「全射」の考えをしていることになり，存在性を見るときには1つの奇数約数に対して階段状がある，１つの階段状に対して奇数約数があるという「単射」の考えが内在しており，それらを扱うことになる。

その数学的に高度な考え方は，日常言語においても「だけ，しか，のみ」や「ある」という考えは，よくなされることである。当然その基礎として写像の考え方が必要になることは言うまでもない。故に，そのような思考を数学科授業の目標，育成されるべき力として設定することも適切であり，数学学習の充実につながるものであると考える。

５．教授実験

前節での目的を踏まえて教授実験は，日程，対象，目的，授業の概要をもって行われた。

調　査①：2014年５月26日（月）
調査対象：広島大学附属福山高等学校５年生
（１）階段から奇数約数型授業を実施したクラス 40名
（２）奇数約数から階段型授業を実施したクラス 38名
調査目的：生徒が「だけしかない」,「存在」といった考え方をどの程度するか，意識を持っているかを分析する。
授業概要：（１）では，nの連続自然数和表現はk個であるならば，nの奇数約数はk個あるという形で生徒に提示し，具体的な数の検討からその証明を行う。（２）では逆に，nの奇数約数はk個あるならば，nの連続自然数和表現はk個あるという形で提示をし，具体的な数の検討からその証明を行う。二つの授業の中で要素の数への着目から,「だけしかない」や「存在」にどれほど注目することができるかを見る。

調　査②：2014年12月９日（月）
調査対象：広島大学附属福山高等学校５年生 40名
調査目的：調査①を踏まえ，「だけしかない」,「存在」といった考え方に着目できるように写像の考え，「対応する」をとられることを含め，授業設計をした上での生徒の記述を分析，検討すること。
授業概要：調査①と異なり，授業において，定理を提示せず具体から定理を推測，命題化させる。その奇数約数と階段状の関係についてわかったこと，疑問に思ったことを各個人で考え，自由に記述する。

６．授業の展開と分析

調査①の（１）の授業では，「nの連続自然数和表現がk個あるならばnの奇数約数はk個ある」という形でSylvesterの定理を提示し，具体的な数で検証，その証明を行った。証明を行う際には，Ⅰとして階段状の項数が奇数であるもの，Ⅱとして階段状の項数が偶数であるものの２つに場合分けをし，どちらも式を変形して行くことで，異なる奇数約数にたどり着くような授業展開であった。その授業では，具体的な数では展開されていることがわかるものの，論証の段階では最初の項数の奇遇による場合分けが読み取れているとは言い難い生徒も確認された。すなわち，授業の途中から論証プロセスを辿ることが分からなくなっている生徒が多くいたといえる。これは，１つの階段状から１つの奇数約数が定まるということが見にくかったためであると考えられる。その中でも，プロセスを辿ることができた生徒は，少しではあるが一意性への着目に向かう可能性を示した。すなわち，「全射」という認識に達していたと見ることできる生徒は，２人ほどしか見出すことができなかった。その理由として，研究授業において，形式的証明を進める中で，操作的証明とのつながりを強調するよりも，文字式への変換に時間をかけた。そのため，その後の展開への見通しができたのではないかと考えられる。

下の図は，ⅠとⅡがうまく分けることができ，階段状を式化したのちに奇数約数がわかるような式に変形，説明を加えることができた生徒の解答である。

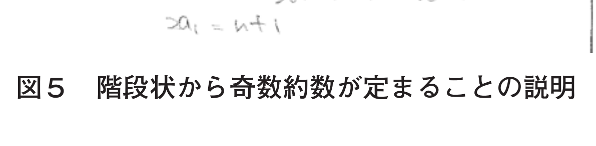

図５　階段状から奇数約数が定まることの説明

調査①の（２）の授業では，「nの奇数約数はk個あるならば，連続自然数和表現はk個ある」という形でSylvesterの定理を提示し，具体的な数で検証，その証明を行った。

その授業では，長方形を階段にするという操作的証明の動的な意味が，長方形の高さが階段状の中央数に切り替わることが，生徒には見やすかったため，写像的な考え方，この奇数約数に対してこの階段状が発生するという考え方は，調査①の（２）に比べ容易であったと考えられる。そうしたことから，「奇数約数から階段状を作り出すことができる」という認識に達していたと同定できる生徒は多く見出すことができた。

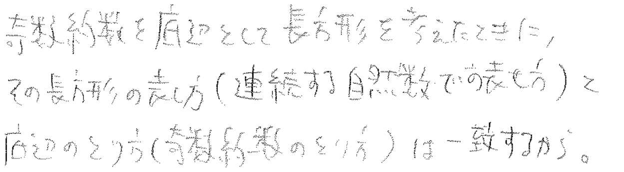

図６　奇数約数から階段状が定まることの説明

多くの生徒は，具体的な数字の操作では，中央数に着目し，式変形をしていた。しかし具体的操作の文字化は出来ていても，その文字を用いて操作，論証することは困難であった。

また本当に奇数約数と階段状の数が一致するのかに疑問を持つ生徒も少なからずみることができた。下記の図は，その典型であり，１つの奇数約数から１つの階段状が定まるかに対して疑問を持っていると考えられる。この生徒は，単射に対する意識がしっかりとできていると考えられるが，ほとんどすべての生徒は意識することができていなかった。

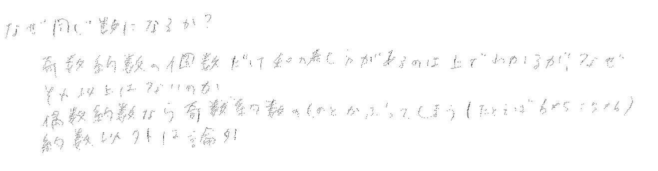

図７　奇数約数と階段状の数の一致への疑問

調査①の結果から，全射，単射について意識することは，こちらが意図をして授業を展開したとしても，生徒に意識をさせることが難しいことが示唆された。

調査②では，具体的な数で検証を行い，奇数約数の数と階段状の数が一致することを確認させた。そこで作られた命題の証明は，行わず，奇数約数と階段状の関係についてわかったこと，疑問に思ったこと，この命題が役立つことは何かを自由に記述させた。

その結果，完全にとは言えないが，要素の数が一致する理由について言及できている，換言すれば調査①で目的とするようなことまで言及できたものは見られなかった。しかし，この授業で一番の目的としていた写像の考え，「対応する」ということについては，もともとSylvesterの定理を与える調査①とは異なり，意見が発散してしまった。

同じ方法で写像として「対応する」が理解できている例として，下の図の答えが見られた。

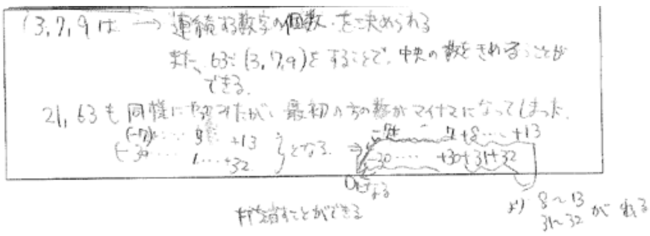

図８　奇数約数と階段状の写像への記述

また奇数約数に着目し，ある奇数約数から階段状を示そうとしているが，階段状の存在にとらわれてしまっている例が図９である。これは，元の数を奇数約数で割ったものを項数として考えている。

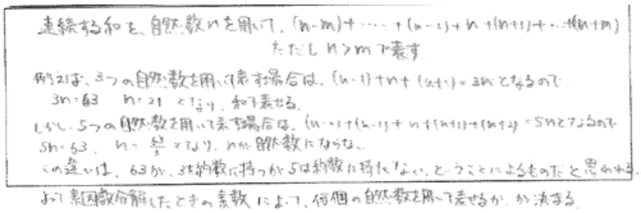

図９　写像の意識から階段の存在の有無への言及

次の図は写像を，絵で表現しているが，「対応する」ということには言及できていない。

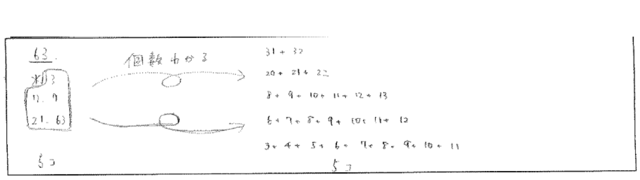

図10　写像は意識しているが対応をしていない図

しかし，先の証明のように真ん中の数を作るという作り方自体が写像の考え方を用いているという解答もあれば，授業と異なる自らオリジナルの階段状の発見の仕方を行い，１つの奇数約数から１つの階段状が対応するという考えが全くないものも見られた（図11)。これは扱い方によっては，単射に言及できると考える。

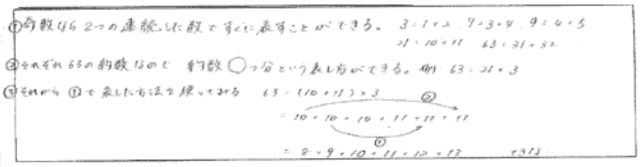

図11　１つの奇数約数から複数の階段状の発見

また逆写像に関しても指摘をしているものもあった。しかし，指摘をしているだけであって，それがなぜかについては全く言及をできていない。

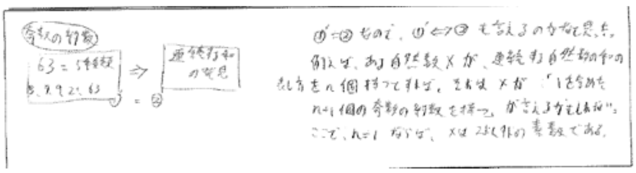

図12　逆への意識

２つの調査から，我々が今回目的として設定した「だけしかない」，「存在」という高度な考え方，それらの基礎となる「対応する」という写像の考え方は，それらを意図していたとしてもかなり生徒にとっては困難を伴うことであるということが分かった。一方で写像，「対応する」ということに焦点を当てる中で，十分「だけしかない」，「存在」という考え方を導きうるということが分かった。これらを踏まえて適切な授業設計が必要である。

これらの思考方法は，数学科で育成されるべき思考方法であるものの，日常で意識しないにしろ使う思考方法である。そのような思考方法を教材に内在させて，数学を対象として生徒に経験をさせたという意味では有意義なものになったが，それらを実際に記述として顕在化させるにはさらなる工夫が必要である。

７．成果と今後の課題

本稿では，後期中等教育の論証指導の目的として，「だけしかない」，「存在」を考えさせることを設定し，授業設計，教授実験を行った。その結果，後期中等教育段階の生徒がそれらの考え方を身に付けているとは言い難いため，１つ目的として設定することが意味のあること，そしてそれらを意図した授業設計をすることもかなりハードルが高いことが示唆された。特に，「だけしかない」，や「存在」の基礎として考えられる写像の考え方「対応する」は，与えると非常に簡単であるが，生徒自身に発見させることは非常に困難であることが分かった。これは普段の写像，関数の学習がどれほど意味のあるものなのか，応用を見越したものなのかを再度検討しなければならないと考える。

今後の課題は，今回の教授実験を踏まえ，Sylvesterの定理を用いた授業はもちろん，普段の授業においてそれらの考え方をいかにして身に付けていくか，カリキュラムに組み込んでいくかを検討することが残されている。

引用（参考）文献

１）岩知道秀樹・岩崎秀樹・杉野本勇気・大滝孝治（2012），「中等教育を一貫する論証指導の意義と課題（５）：一意性の意識化に向けた一つの試み」．日本数学教育学会『第45回数学教育論文発表会論文集』，pp. 89－94.

２）岩知道秀樹・杉野本勇気・岩崎秀樹・大滝孝治（2014），「中等教育を一貫する論証指導カリキュラムに関する考察」．日本数学教育学会『第47回数学教育論文発表会論文集』，pp. 89－94.

・岩崎秀樹・岩知道秀樹・杉野本勇気・大滝孝治（2012）「中等教育を一貫する論証指導の意義と課題（４）～中学校１年生の一意性の意識に関する調査分析～」，第36回全国数学教育学会研究発表会発表資料.

３）岩崎秀樹・大滝孝治・杉野本勇気・岩知道秀樹（2013），「数学教師を目指す教育学部初年次学生の論証認識に関する考察」．日本科学教育学会『科学教育研究』，37（３），pp. 226－234.

４）杉野本勇気・岩崎秀樹・大滝孝治・岩知道秀樹（2011），「高校数学における論証指導：Sylvesterの定理に向けた局所的組織化」．日本数学教育学会『数学教育』，93（９），pp.13－16.

５）根上生也・中本敦浩（2002）．「１対１対応を考えよう〈Nの数学④〉」，『数学セミナー』，41（７），65－71．東京：日本評論社.

６）Freudenthal, H.（1971）．Geometry between the devil and the deep sea. Educational Studies in Mathematics, 3, 413-435.

７）Wittmann, E.C.（1995）．Mathematics education as a ‘design science’, ESM, 29（４），355-374.

８）Wittmann, E. C.（2001）. The alpha and omega of teacher education: Organizing mathematical activities. In D. Holton（ed.），The teaching and learning of mathematics at university level: An ICMI study（pp. 539-552）．The Netherlands: The Kluwer Academic Publishers.