

数学的活動を充実させる数学科授業の実践的研究

— 根気強く考え続ける力の育成に向けて —

富永 和宏 橋本 三嗣 砂原 徹 青谷 章弘
内海 美香 川久保晃一 喜田 英昭 森脇 政泰
吉田 将康 河崎 祐子 小山 正孝 下村 哲
影山 和也

1. はじめに

平成21年に改定された高等学校学習指導要領¹⁾(以下「学習指導要領」とする)では、教科の目標として新たに「創造性の基礎を培う」という文言が付け加えられた。創造性の基礎については、平成21年に出された高等学校学習指導要領解説 数学編²⁾(以下「学習指導要領解説」とする)の数学科の目標の部分で「知的好奇心、豊かな感性、健全な批判力、直観力、洞察力、論理的な思考力、想像力、根気強く考え続ける力など」とさらに詳しく述べられている。

数学科の目標に創造性の基礎を培うことが付け加えられた背景としては、平成20年に出された中央教育審議会の「学習指導要領等の改善について」の答申³⁾(以下「答申」とする)の中でも述べられているように、これからの知識基盤社会において「生きる力」をはぐくむことがますます重要になっていることが挙げられよう。基礎的・基本的な知識や技能を修得するだけでなく、それらを活用して課題を解決するために必要な思考力・判断力・表現力等を高めることに加え、生涯学び続けようとする学習意欲の向上や学習習慣の確立、豊かな心や健やかな体の育成などが求められているのである。

これは「学習指導要領解説」の中で高等学校の数学教育で創造性の基礎を培うことを「人間形成に大きな役割を果たすもの」と述べていることから確認できる。また、創造性の基礎を培うには「数学の学習が生徒一人一人にとって主体的な活動になっていなければならない。」とも述べられており、学習のあり方についても言及されている。

これら創造性の基礎とされる様々な力の中で、今回の研究で注目したのは「根気強く考え続ける力」であ

る。これは「答申」の中の「子どもたちの現状と課題」で指摘されている「学習意欲やねばり強く課題に取り組む態度自体に個人差が広がっている」という課題にも関係するものである。

この課題に関しては、国立教育政策研究所が作成した「全国学力・学習状況調査の4年間の調査結果から今後の取組が期待される内容のまとめ 中学校編」⁴⁾の中でも、数学的な表現を用いて説明する問題で無答率が約4～5割にのぼることが指摘されている。つまり、根気強く考え続ける力を育成することは中学校においても取り組むべき内容であると言える。

では、根気強く考え続ける力を育成するにはどのようにすればよいのであろうか。「学習指導要領」では、教科の目標の冒頭で、創造性の基礎を培うことと同様に、数学的活動を重視することが新たに付け加えられている。数学的活動は数学学習に関わる目的意識をもった主体的な活動のことであり、これを教科の目標の冒頭に記すことで、学習者が主体的に学習活動に取り組むことの必要性を強く示している。

つまり、生徒一人一人が目的意識をもって主体的な学習活動に取り組むことは、双方の目標を達成することにつながると思われる。したがって、本研究では創造性の基礎を培う一端として、根気強く考え続ける力の育成に向けて、数学的活動を充実させる数学科の授業実践を目指して取り組むこととした。

2. 研究の仮説と方法

2. 1 研究の仮説

1でも述べたように、数学科の授業において根気強く考え続ける力を育成するには、数学的活動を充実させた授業を行うことが大いに有効であると考えられる。

Kazuhiro Tominaga, Mitsugu Hashimoto, Toru Sunahara, Akihiro Aotani, Mika Utsumi, Kouichi Kawakubo, Hideaki Kida, Masayasu Moriwaki, Yasuhiro Yoshida, Yuko Kawasaki, Masataka Koyama, Tetsu Shimomura, and Kazuya Kageyama: Practical study of mathematics lessons for enriching students' mathematical activities: Nurturing students' perseverance to think mathematically

は、根気強く考え続ける力を育成するために数学的活動を充実させた授業づくりを行うに当たっては、どのような視点を持って臨めばよいのであろうか。

長崎は数学の学習指導のさらなる改善に向けて、以下の4つのことを述べている。⁵⁾

- ・実世界の問題場面を総合的に取り上げ、数学の理論を意識しながら、自らの考えを作り、批判的に問題を検討していくこと。
- ・1人では解明が難しい共通の目標を目指して、グループの参加者が対等に疑問や考えを出し合い、互いに変容していくこと。
- ・数学は人間が社会において創り上げてきたものであり、構造の美しさと社会的な有用性を持っており、人間の能力にも影響していることなど数学を学ぶ意義について話し合うこと。
- ・実世界での数学の活用を、単なる個々の内容の応用としてでなく、活用としての系統を持った内容領域として考えるなど、実世界とつながるカリキュラムを目指すこと。

これらの示唆を踏まえ、日頃の授業における生徒の学習への取り組み方について検討した結果、根気強く考え続ける力を育成するために数学的活動を充実させた授業づくりを行うには、次の4つの視点を重視する必要があると考える。

- ① 実世界での問題場面への数学の活用
 - ② 考えることの楽しさが実感できる課題
 - ③ コミュニケーションを通じた思考の練り上げ
 - ④ 達成感や自己肯定感を実感できる活動
- それぞれの視点について、もう少し詳しく述べる。

① 実世界での問題場面への数学の活用

数学的活動は、実世界での問題における数学的な要素を取り出し、数学的に表現したものを数学の考え方や技能を使って考察・処理し、得られた結果を評価したものを、実世界の問題にあった形に表現したり、判断したりするものである。このような数学的活動に取り組み、日常生活や社会生活における課題を解決することで、生徒に数学の有用性などを実感させることができる。そして、そのような学習活動を重ねることで、数学を学ぶ意義についても意識させることができると考えられる。

学ぶ意義を知り、目的意識をもって課題に取り組むことは、根気強く考え続ける力を育成することにつながるものである。

② 考えることの楽しさが実感できる課題

図形の課題が好きな生徒は多い。図形の課題には操作的な活動を通して考察を進めることができるものも多く、見通しが立てやすいというのも理由の一つであ

る。実際、生徒の感想にも「もうちょっとで解けそうなときは頑張れる」というものもある。また、課題にパズル的な要素があるものは、課題解決に向ける意欲を高めることも多い。このように、生徒が考えることを楽しみ、自ら進んで積極的に課題に取り組むことができるような課題を扱うことは、根気強く考え続ける力を育成することにつながるものである。

③ コミュニケーションを通じた思考の練り上げ

課題についてお互いの疑問や気づき、アイデアを出し合うことで、自分の考えをよりよいものに練り上げる活動は、課題を解決するチャンスを増やすだけでなく、互いに励まし合って課題に取り組む姿勢も与えてくれる。これは一人で課題に取り組むことに比べて、はるかに根気強く考え続ける力を育成することにつながるものである。

④ 達成感や自己肯定感を実感できる活動

数学の苦手な生徒の中には、課題に取り組む意欲も低く、教師が課題の解説を始めるまで待ちの姿勢でいる者も少なくない。このような生徒にこそ根気強く考え続ける力を育成することが求められる。そのためには「課題が解けてよかった」という達成感や「自分はよく頑張った」という自己肯定感が実感できる学習活動に取り組ませることが有効であると考えられる。誰も「課題を解決してスッキリしたい。」という気持ちは持っており、課題を解決することで達成感を得ることが次の学習への意欲につながるからである。

しかし、そのためには「自分で解決した」という自己効力感を生徒に持たせることも必要である。他人に一から十まで教えられたのでは自己効力感を持っていないだろう。したがって、達成感や自己肯定感を実感させるためには、生徒の状況に合わせ課題解決に向けて見通しが持てるような細やかな指導が望まれる。このような指導が根気強く考え続ける力を育成することにつながるものである。

続いて、それぞれの視点による授業構成の例を次に示す。

① 実世界での問題場面への数学の活用

「検査の精度」(数学A 確率)

高い熱が出たときにインフルエンザにかかったかどうかを検査することは、日常生活で起こりうる出来事である。この検査の結果と病気の感染の有無については以下の4通りに分類できる。すなわち、(A)検査は陽性で病気に感染している、(B)検査は陽性で病気に感染していない、(C)検査は陰性で病気に感染している、(D)検査は陰性で病気に感染している、である。

ここで、検査の信頼度を99%とし、病気にかかる割

合を1000人の1人とした場合、(A)～(D)となる確率はそれぞれどうなるかを求めさせた。結果は(A)が99/100000、(B)が999/100000、(C)が98901/100000、(D)が1/100000である。この結果からは2つの特徴が指摘できる。1つは検査が陽性であったとしても、実際に病気に感染している人よりしていない確率の方が10倍も大きいということである。もう1つは、検査で陰性なのに病気であるという確率は極めて小さいということである。

日常生活において最も懸念する事象は(D)であることを考えれば、この結果は納得できるものであると同時に、陽性であれば重ねて検査を受けることでさらに病気の感染の有無の判断の精度を高めることができる仕組みを確認した。

このように実世界にある事象の中に含まれている数学的要素を取り上げ、数学的に処理するだけでなくその結果を実世界に戻して考察を進めるような授業を行うことは、数学の有用性などのよさを実感させることができるとともに、生徒が主体的に課題に取り組み、根気強く考え続ける力を育成することにつながると考えられる。

② 考えることの楽しさが実感できる課題

「軸を刺した球の転がる跡」(数学A 図形の性質)

図1のような球に軸を刺したような立体を考える。

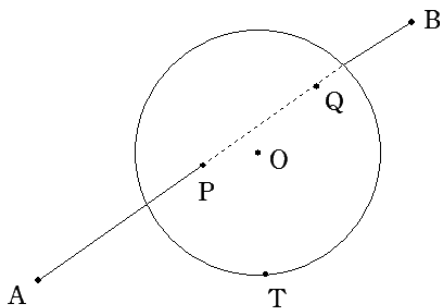


図1 軸を刺した球

線分ABが球面と交わっている点をP、Q、球Oが地面に接している点をTとする。ここで点Aを地面に固定して、球を転がすとき、球の接地点がえがく図形を考えた。軸が球の中心を通っている場合は球の動きも一定で図形も容易に予想できるが、図1のように中心を通っていない場合は、球の動きは弾み車(フライホイール)のようになり、接地点のえがく図形もとらえにくい。まずは模型でその動きを見せてから、接地点のえがく図形を予想させた。その後模型を各グループに配布し、接地点のえがく図形を実験で調べさせた。すると動きは一定でないのにえがく図形は円になることがわかった。

ここで具体的な数値として $AP=9\text{ cm}$ 、 $PQ=7\text{ cm}$ を与え、接地点のえがく円の半径ATを求めさせる。数値を求めることは4点A、P、Q、Tと球の中心Oが同じ平面上にある場合を考えれば、三平方の定理を使って求めることはできる。そこで、球の中心が同一平面上にない場合でもATの値が変わらないことの理由についても考えさせた。

その結果、球の中心が4点A、P、Q、Tと同じ平面上にない場合でも、図2のように、線分ABと接地点Tで決まる平面で球を切断した図形を考えれば、方べきの定理から切断面の円の半径に関わらず、ATの長さが一定であると言えることがわかった。

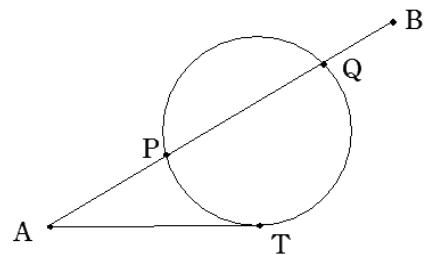


図2 方べきの定理

このように、操作的活動や実験を取り入れたり、予想外の結果が得られることで好奇心が刺激されたりするような学習活動を行うことで、考えることの楽しさが実感できる授業を行うことは、生徒が積極的に課題に取り組み、根気強く考え続ける力を育成することにつながると考えられる。

③ コミュニケーションを通じた思考の練り上げ

「三角錐の体積」(中1数学)

三角錐の体積は底面や高さの等しい三角柱の体積の1/3になることを、図3のような3つの三角錐の模型を用いて確かめる授業を行った。

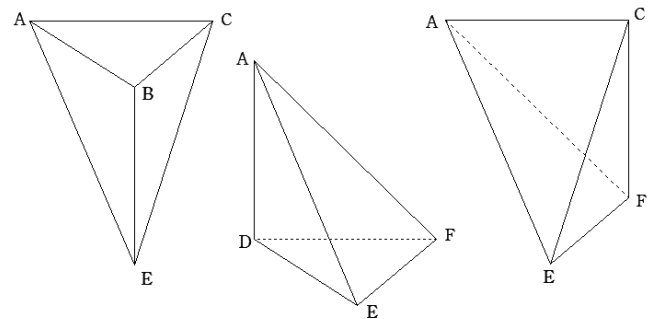


図3 三角柱になる3つの三角錐

まずは3つの三角錐を組み合わせて三角柱にすることに取り組んだ。うまく組み立てられず苦勞する生徒も少なくなかったが、周囲で協力して作業を進めるように指示したところ、お互いが協力して図4のような

三角柱に組み立てることができた。

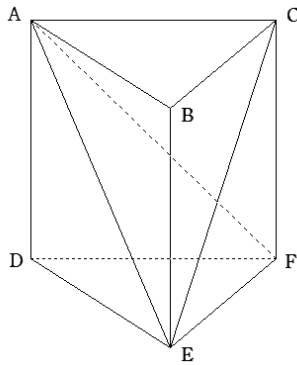


図4 3つの三角錐を組み立てて作った三角柱

三角柱に組み立てることができたところで、このことから三角錐が三角柱の $1/3$ の体積であることが説明できることを指摘し、なぜそう言えるか理由を考えさせた。図3の三角錐のうち左と中央の三角錐は、底面が合同で高さも等しいから、体積も等しいことはすぐに確認できたが、右の三角錐についてうまく説明できない生徒が多かった。そこでグループに分かれてお互いに気づきを話し合わせたところ、中央と右の三角錐を組み合わせると四角錐E-ADFCになること、その四角錐の底面を二等分するように分ければ2つの三角錐になるので体積が等しいことなどが多くのグループで確認できた。したがって、3つの三角錐はすべて体積が等しいので、三角錐の体積は三角柱の体積の $1/3$ であるとまとめることができた。

このように、それぞれの考えを発表するような話し合いだけでなく、作業についてもコミュニケーションをとりながら励まし合って進めたり、適切なアイデアが出ないときにお互いに気づきを話し合ったりすることは、生徒が根気強く考え続ける力を育成することにつながると考えられる。

④ 達成感や自己肯定感を実感できる活動

「軌跡」(数学Ⅱ 図形と方程式)

軌跡の課題として、点 $A(\sqrt{2}, \sqrt{2})$, $B(-\sqrt{2}, -\sqrt{2})$ からの距離の差が $2\sqrt{2}$ である点 $P(x, y)$ のえがく軌跡を求めさせた。条件を満たす式を立てるところまではできるのだが、根号を含む式を整理するには複雑で手間のかかる手順が必要である。

この時点で手を止めてしまう生徒も少なくないが、移項を利用すれば手間を減らすことができることと結果はとても簡潔な形にまとめることができることなどを机間指導の中で伝え、できるだけ多くの生徒に自力で解決するように働きかけた。

複雑な計算であるが、それを乗り越えて $y=1/x$ という簡潔な形に整理することができた生徒の中には、軽

い驚きの表情を浮かべたり、満足そうな表情を見せたりするものもいた。

このように、生徒の状況に合わせて課題解決に向けて見通しが持てるような指導を行うことで、達成感や自己肯定感を実感させることは、根気強く考え続ける力を育成することにつながるものである。

以上、根気強く考え続ける力を育成するために数学的活動を充実させた授業づくりを行う4つの視点について述べてきたが、これら4つの視点は、それぞれが独立したものではなく、1つの教材の中に複合して含まれるものである。したがって、根気強く考え続ける力を育成するための学習活動を展開するには、その授業で取り組む数学的活動の狙いを明確にすることが重要である。その狙いにそった形で、重視する視点を軸に授業を構成していくことが求められる。

2. 2 研究の方法

本研究では、前述の4つの視点を重視して、根気強く考え続ける力を育成するために数学的活動を充実させた授業の例として、2つの研究授業を実施した。また、中学3年3クラスと高校2年5クラスを対象に、根気強く考え続ける力に関するアンケートを実施し、生徒の意識について調査した。以下では、その概要を示しながら、考察を進めていくことにする。

3. 研究の内容

3. 1 研究授業(1)「図形と方程式」(数学Ⅱ)

①本時の題目

正方形を切り分けて長方形に並べ替える活動

②本時の目標

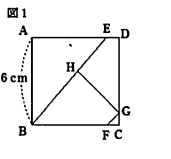
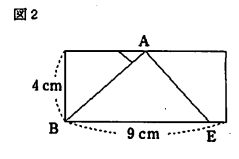
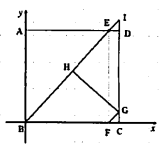
図形を座標平面に設定し、方程式を利用して処理・考察することで図形の性質を調べることができる。

③指導の経過と今後の計画

座標平面で直線を式で表すことは小学6年から扱われる内容であり、中学2年の1次関数で直線のグラフと1次方程式の関係を詳しく扱う。その後も座標平面上で三角形や平行四辺形、正方形などの図形と直線や放物線などの関数のグラフを合わせて扱い、図形の性質から方程式を立て、解決する課題は中学3年の2乗に比例する関数や高校の数学Ⅰの2次関数のところでも学習している。しかし、これらの内容のほとんどは座標平面上の課題を解決するのに図形の持つ性質を利用することを目的としたものである。

本時の内容は、正方形を切り分けて長方形に並べ替えることを取り上げる。大まかな切り分け方は図で示されており、実際に画用紙を切り分けるために切り分けた部分(パーツ)の辺の長さを求めることが課題である。この課題を解決するにはパーツの相似を利用す

表2 授業の学習指導過程

学習内容	指導過程, 学習活動	指導上の留意点, 評価
(導入) 課題の提示	・課題を提示して、正方形の切り分け方を考えさせる。	
正方形を切り分けて長方形に並べ替える	1辺6cmの正方形ABCDを図1のように切り分け、図2のように並べ替えて、縦4cm横9cmの長方形を作りたい。AEの長さは何cmにすればよいか。  	
(展開) 課題の考察	・図1を印刷した紙を切り分けて、パーツの移動の仕方などを確かめる。 ・切り離し線やパーツの図形的な性質に注目して、条件を整理する。 ・わかった条件を発表し、全体で確認する。	・図1を印刷した紙を配布する。缺で切り離して使うよう指示する。 ・机間指導で個別にヒントを出すなどの支援を行う。 ・周囲で話し合うように指示する。 ・DE=CF, BE // GF など。
課題の解決	・わかった条件をもとに方程式を立てるなどして、AEの長さを求める。 ・相似が思いつかない生徒には辺BCをx軸、辺ABをy軸とする座標平面を考え、直線BEの式を求めるよう指示する。	○課題を解決するために粘り強く考えているか。(関心・意欲・態度) ○図形の性質や直線の方程式など既習事項を利用して解決しているか。(見方・考え方) ・点Eを(k, 6)として、方程式を考える。
課題の確認	・求めた辺の長さで厚紙を切り分け、長方形に並べ替えられることを確認する。	
(まとめ) 本時のまとめ	・既習事項を利用して問題を解決できたことにふれ、数学のよさを確認する。	

る方法もあるが、パーツの位置が並べ替えによって比較しづらい配置になっているため、気づかない生徒も多いと予想される。そこで、気づかなかった生徒には座標平面上に正方形を配置し、パーツの辺の平行や垂直などの性質を利用して方程式を立て、交点の座標を方程式から求め、辺の長さを決定する流れで指導することにした。

この方法の長所は、図形の性質を方程式で表すことで、相似の関係に気づかなくても、順を追って進められることである。これによって、図形を代数的に処理できるという数学のよさを実感させたい。

また、本時は実際に切り分けた紙を並べ替えて図形の性質を考察するなど、具体的な操作を取り入れた学習活動を行う。このような活動を通して自分で見通しを立てて課題を解決することは達成感や自己肯定感の獲得につながる。その経験を重ねることで、課題に積極的に取り組む態度を養いたい。

④授業構成について

本授業は、表1のような特色付けを行い、表2に示した学習指導過程によって構成した。

表1 授業の特色付け

実世界での問題場面への数学の活用	考えることの楽しさが実感できる課題	コミュニケーションを通じた思考の練り上げ	達成感や自己肯定感を実感できる活動
	◎	○	◎

(◎非常に重視している, ○重視している)



図5 授業中の生徒の様子

⑤授業の振り返り

授業での生徒の活動の様子の観察、授業後に回収したワークシートの内容、同じく授業後に実施したアンケートの結果から、研究授業の振り返りを行う。

課題を提示したときは「どのパーツがどこへ動いたのか?」、「どこから手をつけるの?」等戸惑いも多かったが、図6の正方形を印刷した紙を配布すると、缺で切り離して並べ替えるなど積極的に課題に取り組む生徒がほとんどであった。早くにパーツの相似に気づいた少数の生徒は、図の中に書き込みを入れたり、数式を立てたりと取り組みを進めていたが、半分以上の生徒はまだ見通しが持てずに迷っている様子であった。

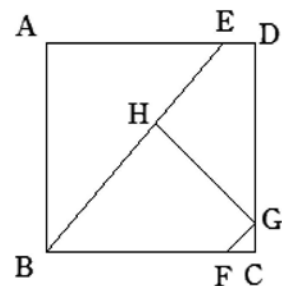


図6 正方形の切り分け

そこで、周囲と自由に気づきを相談するよう呼びかけるとともに、手が止まっている生徒には机間指導でヒントを与えるなどの指導を行った。その結果、図5に示すように、自分たちで気づきを話し合う生徒やヒントをもとに自分で考えようとする生徒が増えてきた。それでもまだ見通しの持てない生徒もいたので、図形を座標平面において考えることを提案した。ワークシートでは細かく段階を踏んで小問を設定しており、見通しを持てなかった生徒もほとんどはその流れで解き進めることができた。実際、授業後に回収したワークシートからは36人中32人の生徒が自力で課題を解決していることが確認できた。

授業のまとめでは、求めた値を使って実際に正方形の厚紙を切り分け長方形に並べ替えた。この作業で自分の出した解答が正しかったことが実感でき、嬉しそうな様子の生徒も少なくなかった。最後に、図形の課題に方程式を利用することで解決の見通しが立てにくかった問題が整理されたことは、数学の持つよさの一つであることを確認した。さらに、作図の3大難問が定規とコンパスだけでは作図できないことを証明するのも図形の問題を方程式に直して扱うことを紹介し、ものごとを変換して考えるという数学の本質についても少し触れることができた。

授業後のアンケートで「今日の課題について粘り強く取り組むことができましたか。」という質問に対しては、36人中「できた」9人、「ややできた」12人という回答であり、「普通」14人も合わせると、97%の生徒が普段またはそれ以上に課題に取り組んだことがうかがえる。加えて「今日の課題についてしっかり考えることができましたか。」という質問に対しては、「できた」15人、「ややできた」13人という回答であり、「普通」6人も合わせると、94%の生徒が普段またはそれ以上に課題についてしっかり考えたことがうかがえる。

また「周りとの意見交換は自分にとってプラスになりましたか。」という質問に対しては、「なった」15人、「ややなった」13人という回答であり、「普通」5人も合わせると92%の生徒が普段またはそれ以上に意見交換がプラスになったと感じていることがうかがえる。

授業後の感想では、課題の面白さについて「計算よりも思考することが主だったと感じた。難しかったけど、分かってくると面白かった。」「図形をいじるのは好き。」「難しい方がやる気がでる。」「最後まで解ききってスッキリしたかったから頑張った。」等の意見が寄せられた。また、数学的な見方・考え方のよさについては「図形の問題なのに座標で解くなんて、いろいろな解法があるんだなと思った。」という意見もあった。さらに、達成感や自己肯定感については「自

分だけで解ききれなかったのは悔しいけど、答えがでたときはなるほどーと思えたのでよかった。」「解けてスッキリした。」などの意見が寄せられた。

3.2 研究授業(2)「確率」(中学数学2年)

①本時の題目

コインゲームはどちらが有利か考えよう

②本時の目標

- ・事象の結果を予想するのに確率の考え方が有効であることを実感する。
- ・計算で求めた数学的な確率が統計的な確率にほぼ等しい値をとることを確認する。

③指導の経過と今後の計画

小学6年では場合の数について学習している。ここではカード並べやリレーの走る順番などの具体的な事象について、重なりや数え落としが無いように整理して数え上げることを扱っている。また、中学1年では資料の活用で相対度数を学習している。ある事象が全体に占める割合を考えることは、確率の考えにつながるものである。

本時は確率の導入の学習である。確率については、天気予報の降水確率など身近な場面で触れることも多いので生徒も何となくイメージを持っているが、「サイコロの1の目が出る確率は $1/6$ 」ということに対して「3回振れば確率は $1/2$ 」と考える生徒も少ない。そこで、まずは確率の考え方についてきちんと理解できるような学習を行いたい。また、確率の考えは広く社会に利用されているものであり、数学の持つよさを実感するには適した題材である。したがって、確率の有用性を感じ取ることができる学習を考えた。

本時で扱うコインゲームの課題は単純なコイン投げにおける確率の計算とは異なり、いわばハイリスクハイリターンとローリスクローリターンのどちらが有利かを問う期待値の考えにつながるものである。もちろん、確率や期待値を計算することを求めるものではなく、確率と事象の結果からどのように判断するのかその過程を考えさせたい。

また、本時は共同で実験を行ったり、予想について話し合ったりするなどコミュニケーションを重視した学習活動を行いたいと考えている。お互いに気づきを述べ合ったり、考えを話し合ったりする活動に取り組むことは、一人で課題に取り組む場合よりも、より積極的に粘り強く課題に取り組むことができると考えているからである。

④授業構成について

本授業は、表3のような特色付けを行い、表4に示した学習指導過程によって構成した。

表3 授業の特色付け

実世界での問題場面への数 学の活用	考えることの 楽しさが実感 できる課題	コミュニケーションを通じ た思考の練り 上げ	達成感や自己 肯定感を実感 できる活動
◎	○	◎	○

(◎非常に重視している, ○重視している)

〈指導過程〉 表4 授業の学習指導過程

学習内容	指導過程, 学習活動	指導上の留意点, 評価
(導入) コインの話 (展開) 課題の提示	・ コイントスをしたとき、表と裏の出方に差はあるかと問いかける。 ・ 課題を提示する。	・ サッカーの試合ではコイントスが行われることなども紹介する。
コインゲームはどちらが有利か	100円玉3枚持っているAさんと50円玉2枚持っているBさんが、持っている硬貨を全部投げ、表の出た枚数の多い方が相手の硬貨を全てもらえるゲームをする。どちらが有利だろうか。ただし、表の枚数が同じ時は引き分けで硬貨のやり取りはないものとする。	
結果の予想	・ どちらが有利かを理由もつけて予想する。 ・ 立てた予想について、周囲で話し合う。	(生徒の予想) ・ 投げる枚数が多く負けにくいのでAさん。 ・ 負けても損が小さく勝つともうけが大きいBさん。
課題の考察	・ どうすれば課題を解決できるか考える。	(生徒の意見) ・ 結果のパターンを数える ・ 実際に実験してみる
課題の解決	・ 実験用のコインを配布し、2人1組で50回実験を行い、結果をまとめる。 ・ クラス全体の実験結果を集計し、その結果からどちらが有利なのかを判断する。 ・ コインを2枚投げたときの結果のパターン(表表、表裏、裏裏)とその起こりやすさについて考え、実験結果と比較する。	・ コインは机から15cm以上持ち上げて落とすように指示する。 ○ 集計結果から平均(期待値)の考えでどちらが有利かを判断できる。 (見方・考え方) ・ 実験結果から表裏が表表や裏裏より多くなっていることを指摘し、その理由を考えさせる。 ○ 表裏が多くなる理由について粘り強く考えることができる。
(まとめ) 本時のまとめ	・ 数え上げて調べた結果のパターンやその起こりやすさは実験結果にほぼ近い値をとることから、数え上げて調べることにも意味があることを確認する。	(関心・意欲・態度)

⑤ 授業の振り返り

課題を提示した生徒の反応は非常に意欲的で、すぐに「Aさんが有利だと思う。」「Bさんが有利だと思う。」と自分の予想を理由とともに述べていた。ただ、慎重な生徒もいて「ちゃんと確率を調べないとどちらが有利かは分からない。」と発言している。

その発言も取り上げながら、例えばBさんの方が勝つ確率が高ければ、収入も多いし、勝つ確率も高いのだからBさんが有利なのは明らかであることを確認した。逆にAさんが100回中99回も勝つような、あまりに極端な場合ならAさんが有利であることも確認した。

結局どちらが有利かを判断するには、AさんBさんがどれくらいの確率で勝てるのかを調べることが大切

であるということを確認した上で、その確率を調べる方法について考えさせた。

「結果が何通りあるか数える。」という意見も出たので、よく聞いてみると「Aの結果が4通りでBの結果が3通りだから全部で12通りの結果がある。このうちAが勝つのが6通り、引き分けが3通り、Bの勝つのが3通りなので、Aの勝つ確率は50%、Bの勝つ確率は25%です。」ということであった。非常に面白い考えであることを評価して、本当にそうなるか実験して確かめることにした。

実験は2人1組で行い、それぞれがAさん、Bさんの役となってコインを投げ、その結果を50回分記録した。さらにその結果をクラス全体で集計したところ

Aの勝ちが494回、Bの勝ちが160回、引き分けが296回となった。この950回分の収益を計算すると、わずかではあるがAさんが有利という結果が出た。さらにBさんの結果についても集計し、コイン2枚を投げて表の出た枚数が2枚のときが234回、1枚のときが509回、0枚のときが207回であることも確認した。

この結果をもとに「コイン2枚を投げたときの結果は表2枚、表裏1枚ずつ、裏2枚の3通りであるが、なぜこの3通りの結果にこんなに差がついてしまったのだろうか。」と問いかけた。生徒からは「コインの出方は表表、表裏、裏表、裏裏の4通りがあって、表裏1枚ずつというのは、表裏と裏表の2つが重なっているから。」との回答があった。実際、実験でのコインの出方もその比率に近いことから、場合の数から結果の比率を調べれば、実際の結果に近い値を得ることができるということを確認した。

授業のまとめでは、日常生活だけでなく、自然科学の世界や経済活動でも確率が広く活用されていることを紹介するとともに、確率を求めるには統計結果から算出したり実験によるシミュレーションを行ったりすることに加えて、場合の数を調べて計算する方法もあることを確認した。

授業後のアンケートで「今日の課題について粘り強く取り組むことができましたか。」という質問に対しては、37人中「できた」17人、「ややできた」16人という回答であり、「普通」4人も合わせると全員が普段またはそれ以上に課題に取り組んだことがうかがえる。

「今日の課題についてしっかり考えることができましたか。」という質問に対しては、「できた」16人、「ややできた」17人という回答であり、「普通」4人も合わせると、全員が普段またはそれ以上に課題についてしっかり考えたことがうかがえる。また「周りとの意見交換は自分にとってプラスになりましたか。」という質問に対しては、「なった」19人、「ややなった」16

人という回答であり、「普通」2人も合わせると全員が普段またはそれ以上に意見交換がプラスになったと感じていることがうかがえる。

授業後の感想では、課題や活動の面白さについて「実験したのが楽しかった。予想と違ってAの方が有利だったのも面白かった。」「計算できるようになったら、このコインゲームの確率も計算してみたい。」「計算でも実験の結果に近い値が出せることがわかったのが面白かったです。」等の意見が寄せられた。また、学習内容と関連して「うちの班は極端な結果になって、確率の計算からすると変な結果になったけど、クラス全体で集計すると計算上のデータに似た結果になったので、調べるデータ数が多いほど計算の結果に近くなるのだと思いました。」と、統計的確率と数学的確率の関係についての考察を述べているものもあった。数学的な見方・考え方のよさについては「計算したことが予想に使えるとは、確率はいろいろなことに使えるなと思いました。」という意見もあった。また、コミュニケーション活動については「意見交換ではいろいろな考えが出されて楽しかったです。」「友達と自分で予想が違って、しっかり考えることができた。」等の意見があった。さらに、達成感や自己肯定感については「自分だけであの回数を実験するのは無理だけど、みんなでやったらわかったのでよかった。」などの意見が寄せられた。

(補足) 今回の実験は、確率の計算から見れば「Bの勝ちが少な過ぎる」という結果になった。実際、950ゲーム中Bが勝つゲームが160回以下になる確率は5%である。この結果、計算上の期待値ではBが有利となる筈がAの方が有利という実験結果になってしまった。

実験結果が偏った理由としては、コインの投げ方が正しくなかったことが考えられる。そのことを議論するのも確率の学習としては意義あるものであるが、本時の目標と照らし合わせて、この授業では取り上げずに後の授業で指導することにした。

3.3 根気強く考え続ける力に関するアンケート

(対象 中学3年生113人, 高等学校2年生183人)

質問1 あなたは、数学の学習で根気強く考える力を養うために大切なものは何だと思えますか。次の各項目について、大切だと思う度合いを下記の例にならって回答してください。

ア：大切でない イ：やや大切でない
ウ：やや大切である エ：大切である

①生徒の学習意欲

中学生 ア 2% イ 4% ウ 32% エ 62%

高校生 ア 0% イ 1% ウ 11% エ 88%

②授業で扱う題材

中学生 ア 2% イ 5% ウ 30% エ 63%

高校生 ア 1% イ 7% ウ 41% エ 51%

③指導者の指示や説明の内容

中学生 ア 4% イ 7% ウ 33% エ 56%

高校生 ア 0% イ 4% ウ 26% エ 70%

④指導者の出す指示やヒントのタイミング

中学生 ア 3% イ 10% ウ 37% エ 50%

高校生 ア 1% イ 11% ウ 44% エ 44%

⑤教室の環境

中学生 ア 4% イ 10% ウ 49% エ 37%

高校生 ア 2% イ 12% ウ 38% エ 48%

⑥生徒間のコミュニケーション

中学生 ア 3% イ 10% ウ 37% エ 50%

高校生 ア 3% イ 18% ウ 51% エ 28%

質問2 あなたは、数学の学習で根気強く考える力を養うのに適している教材は何だと思えますか。次の各項目について、適していると思う度合いを下記の例にならって回答してください。

ア：適していない イ：やや適していない
ウ：やや適している エ：適している

①百題計算のような沢山の計算問題

中学生 ア 32% イ 38% ウ 20% エ 10%

高校生 ア 15% イ 51% ウ 25% エ 9%

②やや複雑な方程式の文章題

中学生 ア 8% イ 18% ウ 44% エ 30%

高校生 ア 2% イ 8% ウ 56% エ 34%

③グラフを利用して解く関数の問題

中学生 ア 3% イ 17% ウ 42% エ 38%

高校生 ア 0% イ 4% ウ 26% エ 70%

④図形の証明問題

中学生 ア 5% イ 15% ウ 38% エ 42%

高校生 ア 3% イ 10% ウ 43% エ 44%

⑤面積や辺の長さ、角度など図形の計量問題

中学生 ア 3% イ 20% ウ 45% エ 32%

高校生 ア 1% イ 18% ウ 56% エ 25%

⑥ゲームやパズルの要素のある問題

中学生 ア 4% イ 10% ウ 35% エ 51%

高校生 ア 2% イ 21% ウ 37% エ 40%

⑦現実にある課題に対する応用問題

中学生 ア 7% イ 15% ウ 40% エ 38%

高校生 ア 5% イ 11% ウ 49% エ 35%

⑧並べた基石の個数のような変化と規則性の問題

中学生 ア 8% イ 13% ウ 50% エ 29%

高校生 ア 3% イ 17% ウ 51% エ 29%

質問3 あなたがこれまでに根気強く考えたと思える

課題があれば教えてください。

(中学生)

- ・もうちょっと頑張ったら解けそうなもの
- ・解けそうで解けないもの
- ・複雑な因数分解
- ・作図の問題
- ・難しい図形の問題
- ・面倒な確率の問題
- ・補助線を使う図形の証明
- ・パズルみたいな要素のあるもの
- ・解くのが楽しいもの
- ・いろいろ解き方を試しながら解くもの
- ・お互いに見せ合うもの
- ・回りの人と相談しながら解くもの
- ・実験があるもの

(高校生)

- ・課題研究
- ・途中は複雑であるが最後は簡潔な形になるもの
- ・予測を立てて得られた結果を確かめるもの
- ・見通しが持てそうで、でも最後までは見えないもの
- ・発想の転換が必要なもの
- ・現実の課題に応用できる内容のもの
- ・コミュニケーションを取りながら解き進めるもの
- ・一見簡単そうで、実は難しい問題

4. 考 察

3で述べてきた研究授業やアンケートの結果から、根気強く考え続ける力を育成するための授業づくりの4つの視点について考察を行う。

①実世界での問題場面への数学の活用

3.3のアンケートの結果から、中高ともほぼ8割の生徒が現実にある課題に対する応用問題は根気強く考え続ける力を養うのに適している課題だと考えていることがわかった。さらに自由記述の質問3でも「現実の課題に応用できる内容のもの」との回答もあった。また、3.2の研究授業では学習内容が実世界での課題に応用できることについて、数学の有用性を認めている感想の記述があった。

以上のことから、実世界での問題場面への数学の活用は根気強く考え続ける力を養う授業づくりに有効であると判断できる。特に数学的活動を充実させた学習活動を行うことは、実世界での問題場面から必要な要素を取り出し、数学的に表現・処理し、得られた結果を現実に即した形で解釈・判断するといった過程を経ることで、数学の有用性だけでなく、数学的な表現のよさや論理的思考のよさも実感できるという利点が挙げられる。

さらに、そのような学習において数学の持つよさと学ぶ意義を改めて指導者が確認することで、生徒は明確に意識することができる。数学のよさを知り、学ぶ意義を意識できた生徒は、より積極的に自ら進んで学習に取り組むことができるだろうし、それが根気強く考え続ける力を養うことにつながると考えられる。したがって、指導者は実世界での問題場面への数学の活用を授業に取り入れるとともに、数学の持つよさや数学を学ぶ意義についても指導することが重要である。

②考えることの楽しさが実感できる課題

3.3のアンケートの結果から、根気強く考えたと思える課題として、「パズルみたいな要素のあるもの」や「解くのが楽しいもの」、「いろいろ解き方を試しながら解くもの」など、考えることの楽しさが感じられるものが挙げられている。それとともに「複雑な因数分解」や「面倒な確率の問題」、「補助線を使う図形の証明」、「一見簡単そうで、実は難しい問題」など、すぐに解けるような簡単なものではなく、ある程度時間をかけて思考に集中して解く問題も挙げている。このことは3.1の研究授業の感想で「難しかったけど、分かってくると面白かった。」、「図形をいじるのは好き。」、「難しい方がやる気がでる。」等の回答からも汲み取ることができる。

以上のことから、考えることの楽しさが実感できる課題は根気強く考え続ける力を養う授業づくりに有効であると判断できる。したがって、指導者は生徒の状況に合わせて適切な難しさがああり、考えることの楽しさが実感できるような教材を扱うことが望まれる。また、指導者は生徒の主体的な思考活動を大切に、解き方を教える指導ではなく、答えに至る筋道を引き出す指導を行う必要がある。そのためには生徒の状況をよく観察し、必要な指導を必要なタイミングで行うことも求められる。その重要性は3.3のアンケートで「指導者の指示や説明の内容」や「指導者の出す指示やヒントのタイミング」が大切またはやや大切と考えている生徒が8割以上いることから確認できる。

③コミュニケーションを通じた思考の練り上げ

3.3のアンケートの結果から、ほぼ8割の生徒が生徒間のコミュニケーションは数学の学習で根気強く考える力を養うために大切なものと考えていることがわかった。さらに、これまでに根気強く考えたと思える課題として「回りの人と相談しながら解くもの」や「コミュニケーションを取りながら解き進めるもの」という回答も寄せられた。また、3.2の研究授業の「意見交換ではいろいろな考えが出されて楽しかったです。」、「友達と自分で予想が違って、しっかり考えることができた。」等の感想からも、生徒間のコミュ

ニケーションが思考活動に有効に働いていることが確かめられた。

以上のことから、コミュニケーションを通じた思考の練り上げは根気強く考え続ける力を養う授業づくりに有効であると判断できる。したがって、指導者は授業の中にグループでの話し合いなどを必要に応じて取り入れ、生徒間で気づきを述べ合ったり、互いの考えをやり取りしたりする活動を行うことが望まれる。

ただし、グループ討議等で指摘されている課題として、決まった生徒しか発言せず、十分な意見交換が行われていないことが挙げられる。⁶⁾ 指導者はこの点に注意して、お互いが高め合えるような話し合い活動ができるように働きかける必要がある。

④達成感や自己肯定感を実感できる活動

3.3のアンケートの結果から、根気強く考えたと思える課題として、「もうちょっと頑張ったら解けそうなもの」、「途中は複雑であるが最後は簡潔な形になるもの」、「予測を立てて得られた結果を確かめるもの」など、努力して答えを得るという行為や努力して得た答え自体に意味を感じるものが挙げられている。これは、3.1の研究授業での「解けてスッキリした。」という感想や3.2の研究授業での「自分だけであの回数を実験するのは無理だけど、みんなでやったらよかったのでよかった。」という感想からも汲み取ることができる。

以上のことから、達成感や自己肯定感を実感できる活動は根気強く考え続ける力を養う授業づくりに有効であると判断できる。達成感を実感するには課題を自力で解決することが求められる。したがって、指導者は生徒が主体的に課題解決に取り組む活動を行うことができるように授業を構成すべきである。そして、自分だけで解決するのが難しい生徒には適切な指導を行うことで、自力解決を促すようにしたい。

とは言え、生徒全員が自力で解決するまで待っていない、授業の進度が年間の学習計画通りに進まなくなるおそれもある。大切なのは「自分なりに頑張ることができた。」、「自分はいよくやった。」という自己肯定感を実感させることであり、そのためには生徒が主体的に課題に取り組み、相応の自己効力感を感じとらせる指導が必要である。3.1の研究授業の「自分だけで解ききれなかったのは悔しいけど、答えがでたときはなるほどーと思えたのでよかった。」のような感想を持つ生徒ならば、次の学習にも主体的に取り組むことが期待できる。

以上、根気強く考え続ける力を養う授業づくりの視点について考察を行ってきた。これまでの考察をふま

えると、根気強く考え続ける力を養う授業として適しているのは、各単元の学習内容を活用して数学的活動に取り組む課題学習の授業であると考えられる。もちろん、課題学習の授業だけで根気強く考え続ける力を養うことは不可能であり、日頃の授業から数学的活動に取り組む必要がある。その上で、課題学習の時間には取り上げる課題を工夫し、生徒が考える楽しさや達成感、自己肯定感を実感できるように数学的活動を充実させた授業づくりに取り組むことが重要である。

5. 今後の課題

本研究では根気強く考え続ける力を育成するために数学的活動を充実させた授業づくりを目指して取り組んだ。今後は、単元ごとにどのような指導が可能かということを検討し、教材の開発や指導の工夫のあり方について取り組む必要がある。

また、根気強く考え続ける力を育成するために数学的活動を充実させた授業を行うには課題学習が適していることから、年間の指導計画においてどのように課題学習を配置するのがより効果的なのかを検討し、実践・検証するなど、指導計画の構成についても取り組む必要がある。

引用・参考文献

- 1) 文部科学省(2011),『高等学校学習指導要領』,東山書房.
- 2) 文部科学省(2011),『高等学校学習指導要領解説 数学編 理数編』,実教出版.
- 3) 中央教育審議会「幼稚園,小学校,中学校,高等学校及び特別支援学校の学習指導要領の改善について(答申)」(2008),
http://www.mext.go.jp/b_menu/shingi/chukyo/chukyo0/toushin/_icsFiles/afieldfile/2009/05/12/1216828_1.pdf
- 4) 文部科学省国立教育政策研究所教育課程研究センター「全国学力・学習状況調査の4年間の調査結果から今後の取組が期待される内容のまとめ～児童生徒への学習指導の改善・充実に向けて～中学校編」(2012),教育出版
- 5) 長崎榮三「数学的リテラシーの結果をどう生かすか」(2014),文部科学省『中等教育資料 平成26年5月号』,学事出版. pp.18-21
- 6) 富永和宏・橋本三嗣・砂原徹ほか「言語活動を充実させた数学科授業の実践的研究」(2014),学部・附属学校共同研究紀要 第42号,広島大学 学部・附属学校共同研究機構, pp.105-112