

論文審査の要旨

博士の専攻分野の名称	博 士 (理 学)	氏名	和田 幸史朗
学位授与の要件	学位規則第 4 条第 ①・② 項該当		
論文題目			
Two-point homogeneous quandles with cardinality of prime power (素数冪位数の二点等質カンドル)			
論文審査担当者			
主 査	教 授	田丸 博士	
審査委員	教 授	阿賀岡 芳夫	
審査委員	教 授	作間 誠	
審査委員	准教授	古宇田 悠哉	
〔論文審査の要旨〕			
<p>カンドルは Joyce (1982) により導入された代数系であり、その演算のみたすべき公理は結び目のライデマイスター変形と対応している。このことから、カンドルは結び目の研究と密接に関係する。実際、カンドルを用いて多くの結び目の不変量が構成されることが知られており、そのような研究は現在も活発に進展中である。</p> <p>一方で、各点において点対称が定義される空間（多様体）を対称空間と呼ぶ。対称空間に対して、点対称を用いて演算を定義したものはカンドルになる。この事実は、Joyce によっても指摘されていたが、両者を関連付けた研究が始まったのは極めて最近である。</p> <p>和田氏は、上記の枠組みの中で、対称空間論を用いたカンドルの研究を推進している。和田氏が本論文で得ている結果は、素数冪位数の二点等質カンドルの完全な分類である。この結果は、既知の結果を大幅に一般化するとともに、いくつかの予想あるいは未解決問題に完全な解答を与えるものである。以下、その内容を述べる。</p> <p>定義：カンドルが二点等質であるとは、内部自己同型群によって任意の二点の組が任意の二点の組に移ること。</p> <p>カンドルの二点等質性は、リーマン多様体に対する二点等質性の類似物であり、Tamaru (2013) により導入されたものである。リーマン多様体が二点等質であるための必要十分条件は、ユークリッド空間または階数 1 対称空間と等長的になることである。従って二点等質カンドルも、カンドル全体の中で基本的なクラスを成すことが期待される。また、これに関連する次の概念がある。</p> <p>定義：元の個数が n 個の有限カンドルが巡回型であるとは、任意の点に対して、右作用から定まる演算（点対称のようなもの）の位数が $n-1$ となること。</p>			

巡回型カンドルが二点等質であることは、定義から容易に分かる。有限な二点等質カンドルに関して、以下の予想は基本的な問題と考えられる。

予想 1：有限な二点等質カンドルは巡回型に限るか？

予想 2：位数 n の巡回型または二点等質カンドルが存在することと、 n が素数冪となることは同値か？

これらの予想は、素数位数のときに正しいことは既知であった。すなわち、素数位数の二点等質カンドルは巡回型に限り、また任意の素数 $p (>2)$ に対して位数 p の二点等質カンドルが存在する。一方で、和田氏が本論文の結果を得るのとほぼ同時に、Vendramin によって以下が示された：有限な二点等質カンドルの位数は素数冪に限る。

前述の通り、本論文の主結果は、素数冪位数の二点等質カンドルの分類である。分類は、有限体の原始根との対応を具体的に与えるものであり、極めて明示的である。また、その議論の帰結として、以下のことも結論付けられる：

- ・ 素数冪位数の二点等質カンドルは巡回型に限る。
- ・ 任意の素数冪 $q (>2)$ に対して、位数 q の二点等質カンドルが存在する。

これらの帰結と上記の Vendramin の結果を合わせることにより、予想 1, 2 はどちらも肯定的に解決されたことになる。このように、和田氏の得た結果は極めて強いものであり、有限な二点等質カンドルに関する問題をほぼ解決したものであると言える。また、二点等質カンドルを用いた結び目の不変量の研究、またカンドルについての更なる構造の研究においても、本論文の結果は重要な役割を果たすと考えられる。

以上、審査の結果、本論文の著者は博士（理学）の学位を授与される十分な資格があるものと認める。

公表論文

Koshiro Wada;

Two-point homogeneous quandles with cardinality of prime power.

Hiroshima Math. J., 掲載決定.

参考論文

和田 幸史朗;

On classification of two-point homogeneous quandles of cyclic type.

In: 研究集会「結び目の数学 IV」報告集, 144--148 (2012).