学位論文要旨

Two-point homogeneous quandles with cardinality of prime power

(素数冪位数の二点等質カンドル)

和田　幸史朗

カンドルは結び目や曲面結び目に多くの不変量を供給する ([4, 2]). 特に [1] において与えられたカンドルコサイクル不変量と呼ばれる結び目不変量は, 曲面結び目の非可逆性の判定に有効であることが示されている. カンドルコサイクル不変量はカンドルとそのコサイクルによって与えられるが, 具体的にコサイクルを与えられる構造を持つ有限カンドルを用いなければ不変量の計算は困難になる. しかし, 実際に計算に有用なコサイクルが得られている有限カンドルは, [5, 6] において取り扱っているカンドル以外はほとんど知られていない. そのため特別な構造を持つ有限カンドルはカンドル理論において重要な研究対象になる.

本論文では, 特に素数冪位数の二点等質有限カンドルを考える.

定義 1. カンドル (X, s) が二点等質であるとは, 内部自己同型群 $\mathrm{Inn}(X, s)$ が次を満たすときをいう：任意の 2 点 $(x_1, y_1), (x_2, y_2) \in X \times X$ $(x_i \neq y_i, i = 1, 2)$ に対して, $f \in \mathrm{Inn}(X, s)$ が存在して

$$f(x_1) = x_2, f(y_1) = y_2.$$

先行研究により素数位数及び素数の 2 乗の位数の二点等質カンドルは, 巡回型のアレクサンダーカンドルと同型となることが知られている ([3, 7]). また参考論文では位数 12 までの巡回型カンドルを列挙し, 12 以下の素数冪位数の場合にのみ巡回型カンドルの存在を確認している. このことを踏まえて本論文では, 素数冪位数の二点等質カンドルの分類を [3, 7] における結果の自然な拡張として与えた.

次が本論文の主定理である.

定理 2. 素数冪位数 q $(q \neq 2)$ のカンドル (X, s) に対して, 次の 3 つは同値：

(i) (X, s) は二点等質カンドルである.

(ii) (X, s) は原始根 ω を伴う有限体上のアレクサンダーカンドル $(\mathbb{F}_q, \omega)$ に同型である.

(iii) (X, s) は巡回型カンドルである.

また, 任意の巡回型カンドルは二点等質であることが知られており, これに関して田丸により次の予想が与えられている.

予想 3 ([7])**.** 任意の二点等質有限カンドルは巡回型である.

この予想に対して, Vendramin により二点等質有限カンドルは素数冪位数の場合にしか存在しないことが示されている ([8]). よって本論文の主定理から上記の予想を含んだ以下の系が与えられる.

系 4. 任意の二点等質有限カンドルは原始根 ω を伴う有限体上のアレクサンダーカンドル $(\mathbb{F}_q, \omega)$ に同型である. また, 二点等質有限カンドルは巡回型である.

参考文献

[1] J. S. Carter, D. Jelsovsky, S. Kamada, L. Langford, M. Saito, *Quandle cohomology and state-sum invariants of knotted curves and surfaces*, Trans. Amer. Math. Soc., **355** (2003), no. 10, 3947–3989.

[2] R. Fenn, C. Rourke, *Racks and links in codimension two*, J. Knot Theory Ramifications, **1** (1992), 343–406.

[3] S. Iwanaga, *On the classification of two-point homogeneous quandles of cardinality* p^2, Master's thesis (in Japanese), Tokyo University of Science, (2013).

[4] D. Joyce, *A classifying invariant of knots, the knot quandle*, J. Pure Appl. Algebra, **23** (1982), 37–65.

[5] T. Mochizuki, *Some calculations of cohomology groups of finite Alexander quandles*, J. Pure Appl. Algebra, **179** (2003), 287–330.

[6] T. Nosaka, *On quandle homology groups of Alexander quandles of prime order*, Trans. Amer. Math. Soc., **365** (2013), 3413–3436.

[7] H. Tamaru, *Two-point homogeneous quandles with prime cardinally*, J. Math. Soc. Japan, **65** (2013), no. 4, 1117–1134.

[8] L. Vendramin, *Doubly transitive groups and cyclic quandles*, J. Math. Soc. Japan, in press.