論 文 審 査 の 要 旨

博士の専攻分野の名称	博　士（　理学　）	氏名	渡　辺　朋　成
学位授与の要件	学位規則第 4 条第 1・2 項該当		

論文題目

Global existence and decay estimates for the nonlinear wave equations with space-time dependent dissipative term

（時空間に依存する消散項を持つ消散型波動方程式の大域的な解の存在と減衰評価　）

論文審査担当者

主　　査	教　授	川下　美潮
審査委員	教　授	吉野　正史
審査委員	教　授	坂元　国望
審査委員	准教授	眞崎　聡（工学研究院）

〔論文審査の要旨〕

この論文は消散型波動方程式と呼ばれる非線型方程式の外部領域（有界閉集合の外部からなる領域）における初期境界値問題の解の存在と一意性、及び、得られた解の時刻に関する減衰評価について調べたものである。消散型波動方程式とは通常の波動方程式に消散効果を表す時間に関する 1 階微分の項（消散項という）がつけ加わった方程式である。この方程式の消散項をなくせば通常の波動方程式になる。一方、時間に関する 2 階微分の項を取り除けば熱方程式になる。このように、この方程式は波動方程式と熱方程式の両方の性質を持っていることが予想される。一次元の場合は電信方程式とも呼ばれ、この解が熱方程式の解のように振る舞う部分をもつことが予想され、それが時刻が大きくなるときに解の主要部分になることが重要な役割を果たしたことは歴史的にも知られている。

線型かつ消散項が正定数のときの消散型波動方程式に対する初期値問題の解は Fourier 変換表示でき、それを用いれば、初期値に適当な微分可能性を要求すれば時刻に関する減衰評価は熱方程式と一致することが分かる。そのため、線型部分が消散型波動方程式である半線型・準線型消散型波動方程式について、小さい初期値に関する時間大域解の一意存在性や減衰評価について多くの研究者が興味を持っており、現在でも精力的に研究されている。その中で、本学位申請者（以下、申請者という）は次の状況下で時間大域解の存在と一意性、及び、得られた解の時刻に関する減衰評価を得た。

(1) 方程式は準線型消散型波動方程式で、非線型項は時空間変数について 1 階および 2 階微分のみを含む関数で与えられる。

(2) 滑らかな境界をもつ星形閉領域の外部領域で考え、Dirichlet 境界条件を課す。

(3) 解（や初期値）が属する空間は通常の L^2–Sobolev 埋め込み定理が使える程度の滑らかさを要求する。さらに初期値は十分小さく、かつ整合条件をみたすと仮定する。

(4) 消散項は滑らかで時間について非増加な非負値関数で、空間遠方においてある正定数以上である。

(5) 減衰評価を得る際には、初期値が遠方で減衰していることを表す仮定が必要になる。

(6) 非線型項は２次の項を含んでも構わない。

扱っている方程式は連続体力学に由来を持つ方程式そのものではないが、(1)の非線型項はそれを意識したもので、無意味ではない。(2)の Dirichlet 境界条件は技術的なものではあるが、この分野における現在の研究動向を考えれば自然な設定と見るべきである。(3)も同様で、他の研究と比べても標準的な仮定である。申請者の研究の特徴は(4)～(6)にある。

消散項のない通常の非線型波動方程式の場合、時間大域的に解が存在するためには非線型項の形が重要である。解のエネルギーは概ね伝播錐(light cone)と呼ばれる時空間における円錐に沿って伝わる性質がある。そのため非線型項も概ね伝播錘の近くで大きくなると考えらる。一般には２次の非線型項があるとそれが大きくなりすぎ、解が存在することの妨げになる。２次の非線型項でもあっても、それが「零条件」と呼ばれる代数的な条件を満たせば、解のエネルギーをうまく打ち消しあうようになる。その結果、非線型項は大きくならず、解は大域的に存在することが示されている。一方、もし消散項があれば、もともとからエネルギーは消散し、非線型項の形によらず解は大域的に存在し、減衰評価も得られることが期待される。参考論文では境界がなく、消散項の係数は空間変数のみに依存し、非線型項が２次式の場合に時間大域解が一意的に存在することを示した。さらに(5)の仮定を加え、微分とエネルギー減衰の速さとの関係を明らかにした。主論文では参考論文で行った考察をさらに推し進め、(6)の２次の非線型項を持つときに消散項の係数の仮定を(4)の様に弱くすることに成功した。

(5)の仮定は空間遠方における減衰を初期値に多く仮定すれば減衰評価が良くなることを意味しているが、この方面では既に多くの研究がある。その中で、いわゆる Hardy の不等式を効果的に用いる方法があるが、それが本論文と深い関係にある。本論文は、線型方程式ではよく知られたこの方法を(1)の形の非線型項がある場合へ拡張したものである。

(4)の状況下では、有界な領域においては通常の波動方程式の場合と同じでエネルギーは遠方に逃げていき、遠方では消散項の効果が働き、全体ではエネルギーは減衰するという構造になっている。そのため解は大域的に存在し、減衰評価を得る。実際にそれを示すためにはエネルギー評価を丹念に行う必要がある。既存の仕事で線型部分の扱いや非線型項が２次の項を含まないときはおおむね分かっていたが、(6)の様に２次の非線型項を含んでいる場合で、(4)、(5)の場合を取り混ぜた一般的な場合を扱ったのは申請者の創意工夫によるものである。

申請者が行った証明方法は独特で、それも評価に値する。通常は方程式をそのままの形のままで扱い、評価の際に非線型項の処理が出来るように導入すべきノルムを工夫することで対処するが、申請者は先に方程式をスケール変換し、スケールの入ったノルムの評価を行うことにより非線型項から来る寄与をうまく処理した。この方法は消散項の係数が時空を表す独立変数に依存している場合にその力を発揮する。非線型方程式を扱う際には解の高階微分の評価が常に必要となり、そのために方程式を微分しなくてはならない。すると消散項の係数にも微分が入ってしまい、それらの項を処理する必要が生じる。スケール変換しないと、これらの項が無視できず、その処理は面倒であるが、スケール変換しておけば、単にスケールパラメータを小さくするだけで必要な評価がすぐに得られることが分かった。申請者の方法によれば、解の評価を行うために導入されるエネルギーノルムが方程式からみて自然に導入されるという利点があり、そのため、証明が簡潔かつ見通しのよいものになっている。

以上、審査の結果、本論文の著者は博士（理学）の学位を授与される十分な資格があるものと認める。

公表論文

Tomonari Watanabe ;

Global existence and decay estimates for the nonlinear wave equations with space-time dependent dissipative term, Journal of Hyperbolic Differential Equations 掲載決定.

参考論文

Tomonari Watanabe;

Global existence and decay estimates for quasilinear wave equations with nonuniform dissipative term, Funkcialaj Ekvacioj, 掲載決定.