学位論文要旨

Global existence and decay estimates for the nonlinear wave equations with space-time dependent dissipative term

（時空間に依存する消散項を持つ消散型波動方程式の大域的な解の存在と減衰評価）

氏名　　渡辺　朋成

次の時空間に非一様な消散項を持つ非線形消散型波動方程式の外部領域 $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ $(d \geq 2)$ における初期境界値問題を考える.

$$
\text{(DW)} \quad \begin{cases} (\partial_t^2 - \triangle + B(t,x)\partial_t)u(t,x) = F(\partial u, \partial^2 u) & (t,x) \in [0,\infty) \times \Omega, \\ (u(0), \partial_t u(0)) = (u_0, u_1) \in H^L \times H^{L-1}, & \\ u(t,x) = 0 & (t,x) \in [0,\infty) \times \partial\Omega, \end{cases}
$$

ここで $u : \Omega \to \mathbb{R}^n$ $(n \geq 1)$, $B = (B_{pq})_{p,q=1,2,\cdots,n}$ であり, H^L は L 次の L^2-Sobolev 空間である.

消散型波動方程式は, 波動現象を表現する波動方程式に, 消散（例えば摩擦など）の効果を考慮した方程式である. 特に $B(t,x)\partial_t u$ の項は消散項と呼ばれ, どのように消散効果が働くのかを表現している. 今回は時空間 (t,x) に依存する非一様な消散係数 B を持つ消散項を考えるが, 特に次のような性質を仮定する.

$$
(*) \begin{cases} \text{ある定数 } b_0 > 0, R > 0 \text{ が存在して次を満たす：} \\ \sum_{p,q=1}^n B_{pq}(t,x)\eta_p\eta_q \geq 0 \quad (t \in [0,\infty), x \in \Omega, \eta \in \mathbb{R}^n), \\ \sum_{p,q=1}^n B_{pq}(t,x)\eta_p\eta_q \geq b_0|\eta|^2 \quad (t \in [0,\infty), |x| \geq R, \eta \in \mathbb{R}^n). \end{cases}
$$

すなわち $B(t,x)$ は空間遠方で一様に正値となっている一方, ある有界領域上 では消散効果が消える $(B = 0$ となっている$)$ ことを許している. さらに非線形項 F としては, ある対称性を持つ二次以上のものを扱う.

問題 (DW) において二次以上の非線形項 F を扱う場合, B が一様に正の場合には時間大域的な解の存在が知られている一方, B が一様に 0 の場合には時間大域的な解を持たない例が報告されている. したがって条件 $(*)$ の下で, (DW) が時間大域解を持つかどうかは明らかではない. そこで主論文ではまず, 次の時間大域解の存在定理を証明した.

定理 1. $L \geq [d/2] + 3$ とする. ある定数 $\delta > 0$ が存在して, $L-1$ 次の整合条件を満たす $(u_0, u_1) \in H^L(\Omega) \times H^{L-1}(\Omega)$ が

$$
\|(u_0, u_1)\|_{H^L \times H^{L-1}} \leq \delta
$$

を満たすならば, (DW) は $\displaystyle\bigcap_{j=0}^{L-1} C^j([0,\infty); H^{L-j} \cap H_0^1) \bigcap C^L([0,\infty); L^2)$ 上で一意に解を持つ. ここで H_0^1 は, コンパクトな台を持つ滑らかな関数全体 C_0^∞ の H^1 ノルムによる閉包である.

定理 1 の証明には, 消散型波動方程式が持つ性質であるエネルギー消散効果と局所エネルギー減衰を組み合わせることによって, 高階微分まで含めたエネルギー評価を導出することが重要となる. この際, 非線形波動方程式の解析に用いられる非線形項の処理方法と, $v(t,x) = \lambda^{-1}u(\lambda t, \lambda x)$ $(\lambda > 0)$ というスケール変換を用いることで, 一般的な条件が課された $B(t,x)$ や $F(\partial u, \partial^2 u)$ を扱うことに成功した.

また時間減衰評価については, 次の定理を証明した.

定理 2. *定理 1 の仮定に加えて, 次の (H1) と (H2) を仮定する.*

(H1) $\|d_0(\cdot)\{B(0)u_0 + u_1\}\|_{L^2} < \infty$.

(H2) $\displaystyle\int_0^\infty \|d_0(\cdot)\partial_t B(s)\|_{L^\infty} ds < \infty$.

ここで $d_0 : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ は次で定義する.

$$d_0(x) = \begin{cases} |x| & (d \geq 3), \\ |x|\log(A|x|) & (d = 2). \end{cases}$$

ただし A は $\inf_{x\in\Omega} A|x| \geq 2$ を満たす定数である. さらに $d = 2$ の時は, 次の (H3) も仮定する.

(H3) *ある $M > 0$ が存在して, $u_0(x) = u_1(x) = 0 \quad (|x| \geq M)$.*

この時 (DW) の時間大域解 u は次を満たす.

$$\sum_{\mu=0}^{L-1} \|(\partial_t^\mu u(t), \partial_t^{\mu+1} u(t))\|^2_{H^{L-\mu}\times H^{L-\mu-1}} = O(t^{-1}) \quad (t \to \infty), \tag{1}$$

$$\|(\nabla u(t), \partial_t u(t))\|^2_{L^2\times L^2} = O(t^{-2}) \quad (t \to \infty). \tag{2}$$

定理 2 は Morawetz・Ikehata らによって導入された, 解 u の不定積分 $w(t) = \int_0^t u(s)ds$ の評価を利用する手法と, 先に得た解 u に対する高階エネルギー評価を組み合わせることで得られる.

参考論文 (1) では初期値問題 $(\Omega = \mathbb{R}^d)$ に対して定理 1 と定理 2 に対応する結果を示し, さらに $d \geq 3$ の場合には次の事実も得ている.

- $B(t,x) = B(x)$ ならば, 高階時間微分 $\partial_t^\mu u$ についてより良い時間減衰評価が得られる.
- 定理 2 における付加条件 (H1)-(H2) について, 別の付加条件を考えることができる.

これらの事実は, 外部領域における初期境界値問題に対しても示すことができる. 一方で $d = 2$ おける初期値問題の場合, (H3) を仮定したとしても時間減衰評価 (1)(2) が得られるとは限らない. これは二次元全空間では Hardy 不等式が成立しないことから, 減衰評価の導出に必要な評価が得られないからである. しかし参考論文 (1) では, 非線形項 F が発散形であるならば, $d = 2$ または 1 の場合にも時間減衰評価 (1)-(2) を成立させる別の付加条件が存在することを示している.