

学位論文要旨

Geometry of homogeneous polar foliations of complex hyperbolic spaces

(複素双曲空間の等質 polar foliation の幾何)

久保 亮

リーマン多様体 M への等長的作用が 極作用 (polar action) であるとは、 M のある完備連結部分多様体 Σ が存在して、すべての軌道が Σ と交わり、かつ交点で直交することである。特に、 Σ として平坦な部分多様体が取れる場合、その極作用は 超極作用 (hyperpolar action) と呼ばれる。

対称空間への極作用の研究は盛んに行われている。特に、コンパクト型の場合には既に Kollross らによって、既約対称空間への極作用の分類が完成している。一方で、非コンパクト型の場合には、いくつかの個別の対称空間を除いて一般には分類がなされていない。また、そのような作用の軌道(すなわち等質部分多様体)に関しては幾つかの先行研究がある([2, 3, 5, 6])が、その外在的・内在的幾何については多くの場合で分かっていない。

本論文では、特に複素双曲空間への特異軌道を持たない極作用(すなわち等質 polar foliation を誘導する作用)を考え、それらの軌道の極小性を決定した。そのような作用は Berndt, Díaz-Ramos によって既に分類されていて([3]), 非自明なものは軌道同値という同値関係の下で $2n - 1$ 個存在することが示されている。これらの作用は、巾零群による作用と(巾零群ではない)可解群による作用という大きく 2 種類に分けることができるので、本論文では N-type, S-type と呼んでいる。ここで、N-type の極作用は n 個存在し、それらの余等質性はそれぞれ 1 から n であるのに対し、S-type の極作用は $n - 1$ 個存在し、それらの余等質性はそれぞれ 1 から $n - 1$ であることに注意する。

次が本論文の主定理である。

主定理. 複素双曲空間への特異軌道を持たない極作用について、次が成り立つ:

- (1) 各 S-type の極作用は唯一の極小軌道を持つ,
- (2) 各 N-type の極作用は軌道の合同性を持ち、また極小軌道を持たない。

注意. リーマン多様体への等長作用が 軌道の合同性を持つ とは、各軌道が互いに等長的に合同であることをいう。特に、参考論文 1 ([10]) において作用が軌道の合同性を持つための十分条件が与えられていて、上記の N-type の極作用が軌道の合同性を持つこともそれを用いて示されている。

注意. 上記の極作用については, すでにいくつかの先行研究がある. 特に, 余等質性 1 の場合には, 上記の結果は Berndt, Tamaru によって既に示されている ([1], [4]). したがって今回の結果は, 余等質性 1 の場合を含む形で極作用の場合に自然に拡張したものである. また, 参考論文 2 ([7]) において, 余等質性 1 の場合に作用の軌道が Ricci soliton になるものの分類や, (余等質性が 1 とは限らない) S-type の極作用の軌道が弱鏡映部分多様体であることが示されている.

参考文献

- [1] J. Berndt, Homogeneous hypersurfaces in hyperbolic spaces. *Math. Z.* **229** (1998), no. 4, 589–600.
- [2] J. Berndt, Polar actions on symmetric spaces. In: Proceedings of The Fifteenth International Workshop on Diff. Geom. **15** (2011), 1–10.
- [3] J. Berndt & J. C. Díaz-Ramos, Homogeneous polar foliations of complex hyperbolic spaces. *Comm. Anal. Geom.* **20** (2012), no. 3, 435–454.
- [4] J. Berndt & H. Tamaru, Homogeneous codimension one foliations on noncompact symmetric spaces. *J. Differential Geom.* **63** (2003), no. 1, 1–40.
- [5] J. C. Díaz-Ramos, Polar actions in complex space forms. In: Proceedings of The Sixteenth International on Diff. Geom. **16** (2012), 71–90.
- [6] J. C. Díaz-Ramos, M. Domínguez-Vázquez & A. Kollross, Polar actions on complex hyperbolic spaces. *preprint*. arXiv:1208.2823v2.
- [7] T. Hashinaga, A. Kubo & H. Tamaru, Some topics of homogeneous submanifolds in complex hyperbolic spaces. In: Proceedings of the workshop on Differential Geometry of Submanifolds and its related topics, 230–244. *World Sci. Publ., Hackensack, NJ*, 2014.
- [8] T. Hashinaga, A. Kubo & H. Tamaru, Homogeneous Ricci soliton hypersurfaces in the complex hyperbolic spaces. *preprint*. arXiv:1305.6128v1.
- [9] A. Kubo, Geometry of homogeneous polar foliations of complex hyperbolic spaces. *Hiroshima Mathematical Journal*, to appear.
- [10] A. Kubo & H. Tamaru, A sufficient condition for congruency of orbits of Lie groups and some applications. *Geom. Dedicata* **167** (2013), 233–238.