『比較論理学研究』第6号
広島大学比較論理学プロジェクト研究センター
研究成果報告書 (2008)

因の三相説の非古典的モデル
—ディグナーガとウッドヨータカラの論理学を中心に—

岡崎康浩

0. はじめに

因の三相説は、論証ないしは推理における妥当な理由の満たすべき条件を明示したものとして、初期インド論理学の一つの到達点である。ディグナーガは因の三相説を定式化すると同時に、この因の三相説に基づく理由の分類表とも言うべき九句因の表を示した。一方、ウッドヨータカラはディグナーガの因の三相説をさらに展開させ、その一つの成果として九句因を包括する十六句因の表を完成させた。彼らの因の三相説の定式化とその定式化への限定辞 *eva* の導入が後にインド論理学最大のテーマの一つである遍充概念 (*vyāpti*) にもつながっていったと考えられている。

因の三相説については Randle, Tucchi, 宇井などによる優れた先駆的研究があるが、北川 [1965] によってディグナーガ論理学の文献学的紹介が本格的になされて以来、記号論理学的な解釈も様々なものが試みられてきた。それらの研究を通じて、彼らの論理学がいわゆる古典論理の枠組みでは説明できないことも明らかにされた[1]。その中で、Hayes による induction domain の概念を導入しての記号化[2]や Glasshoff による Carrol-frame を用いての記号化[3]など、九句因や十六句因の分類を合理的に説明しようとする試みもなされており、筆者自身も Hayes の induction domain の概念を用いてウッドヨータカラが発展させた妥当な理由の条件を検討した[4]。

本論で試みようとするものは、因の三相説に基づく論理学を一つの導出体系と見立て、因の三相論にできるだけ忠実に基づいて一つの導出体系を構築した場合、どのような導出体系、つまり論理計算の体系が可能なのか。そしてその体系の中で何が言え、何が言えないのかをディグナーガなり、ウッドヨータカラの記述と照らし合わせながら見ていこうとするある種の思考実験である。したがって、本論で言及する非古典論理とは、直観主義述語論理をはじめとする古典述語論理以外の導出体系を示すのであって、多値論理や様相論理まで含んで考えるものではない。また、論理計算の便宜上 Gentzen 流のシークエント計算の手法を用いることとする[5]。

まず、因の三相説の定義を見ながら、それが古典述語論理の枠組みでは説明できないことを示しておきたい。

[1]特に、山下 [1970] の指摘は重要である。
[2]Hayes[1988], p. 112ff
[3]Glashoff[1999]
[4]Okazaki[2003]
[5]Gentzen による古典論理の形式体系 LK や直観主義論理の形式体系 LJ では、三段論法消去の定理が成立するため、構成的な証明図を描くことができ、ある論理式が証明可能であるかどうかがわかりやすい。

1．因の三相説の記号化および体系化

因の三相の代表的定義として、まず、ディグナーガによる定式化を見ておこう。ディグナーガは主著プラマーナサムッチャヤの中で次のように因の三相を定義している。

anumeye 'tha tattulye sadbhāvo nāstitāsati (PS II. 5cd)

この定義は、もちろん以下のような3つの要素から成り立っている。

第1相 *anumeye sadbhāvaḥ* (推論対象に存在する)

第2相 *tattulye sadbhāvaḥ* (その同類に存在する)

第3相 *nāstitāsati* (その同類が存在しないものには存在しない)

こうした3相の条件を次のように記号化し、その解釈を示してみる。

第1相 Hp (主題 p に H 理由となる *dharma* が存在する)

第2相 $\exists x(Hx \,\&\, Sx)$ (S 推論対象となる *dharma* を持つもので H 理由となる *dharma* をもつもの x がある)

第3相 $\neg\exists x(Hx \,\&\, \neg Sx)$ ($\neg S$ 推論対象となる *dharma* を持たないもので H 理由となる *dharma* を持つものはない)

この中で、特に第2相に関しては、上記の記号化に異論があるかもしれない。第2相を条件命題と考えることもできよう。ただ、条件命題と解釈した場合、その論理式はなんらかの存在を主張するわけではない。これは、この第2相が何らかの同類例の存在を前提としていることと抵触するように思われる。もちろんこうした問題を回避するためにさらに精緻な記号化が可能かもしれない。しかしそうした試みは、いたずらに議論を複雑にするように思われ、本論が目指す導出体系としての因の三相説の性格を探るという試みには、大きな阻害となると思われる。しかも、上記の記号化を括弧内のように解釈するならば、九句因などの因の三相説に基づく理由において、妥当な理由の条件もうまく説明でき、ディグナーガなり、同様な定式化をする当時のインド論理学者の意図から大きく外れるとは思われないのである。

こうした記号化に一定の妥当性があると仮定すると、因の三相説による推論なり論証は以下のように表せる。($\Delta \vdash F$ は、条件列 Δ から F が導けるの意味)

$$\exists x(Hx \,\&\, Sx), \neg\exists x(Hx \,\&\, \neg Sx), Hp \vdash Sp$$

この論証は次のように変形することができる。

$$(\exists x(Hx \,\&\, Sx) \,\&\, (\neg\exists x(Hx \,\&\, \neg Sx)) \supset (Hp \supset Sp)$$

もしくは、

$$(\exists x(Hx \,\&\, Sx) \,\&\, (\neg\exists x(Hx \,\&\, \neg Sx)) \supset \forall x(Hx \supset Sx) \qquad (1)$$

である。この場合、古典述語論理にしたがえば、$\neg\exists x(Hx \,\&\, \neg Sx)$ のみから $\forall x(Hx \supset Sx)$ を導くことができ、$\exists x(Hx \,\&\, Sx)$ は前提となる必要がない。つまり、古典述語論理の導出規則に従うならば、因の第3相のみでその論証なり、推論の妥当性は保証されているのであって、第2相を言及する必要はないのである。このことは、ディグナーガらが述べていることとは抵触するように思われる。かれらは、限定辞 *eva* を導入することで、第2相に第3相の意味を読み込むことが可能であるとは述べているが、第3相のみで第2相が不要であるとは述べていない。しかも、具体的同類例の提示をほぼ必ず行っている。つまり、H であって S である何らかの実在 $Ha \,\&\, Sa$ なる a を示すことが、彼らの論証・推理にとって本質的な意味を持っていたことの証左である。

一方、$\neg\exists x(Hx \,\&\, \neg Sx)$ から $\forall x(Hx \supset Sx)$ を導くことが一般的に許されていない直観主義述語論理の場合を考えてみると、この場合は、前提に $\exists x(Hx \,\&\, Sx)$ を加えたとしても、$\forall x(Hx \supset Sx)$ を導くことができない。したがって、(1) が成立するような導出体系とは、直観主義述語論理よりも強く、かつ、古典述語論理よりも弱い体系ということになる。

そうした論理体系を考えていくために、古典述語論理の形式体系である LK の上で三段論法のない (cut-free) 構成的な (1) の証明図を書いてみることとする。

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{Ha \rightarrow Ha}{Hb, Ha \rightarrow Ha}}{Hb, Ha \rightarrow Sa, Ha}\,(*)}{Hb \,\&\, Sb, Ha \rightarrow Sa, Ha} \qquad \dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{Sa \rightarrow Sa}{Ha, Sa \rightarrow Sa}}{Sb, Ha, Sa \rightarrow Sa}}{Sb, Ha \rightarrow Sa, \neg Sa}\,(\dagger)}{Hb \,\&\, Sb, Ha \rightarrow Sa, \neg Sa}}{Hb \,\&\, Sb, Ha \rightarrow Sa, Ha \,\&\, \neg Sa}$$

$$\vdots \; \exists - I_r, \exists - I_l, \neg - I_l$$

$$\dfrac{\exists x(Hx \,\&\, Sx), \neg\exists x(Hx \,\&\, \neg Sx), Ha \rightarrow Sa}{}$$

$$\vdots \; \supset - I_r, \forall - I_r, \& - I_l, \supset - I_r$$

$$\rightarrow (\exists x(Hx \,\&\, Sx) \,\&\, (\neg\exists x(Hx \,\&\, \neg Sx)) \supset \forall x(Hx \supset Sx)$$

この中で、(†) を除くと、直観主義述語論理の形式体系である LJ' の導出規則にしたがっている[6]。そこで、(†) の推論を可能とするために、次のような推論規則を LJ' に付け加えてみる[7]。

(¬-Introduction-Right = CNIR)

$$\dfrac{\Gamma_1, \Gamma_2, Fa \rightarrow \Delta}{\Gamma_1, Fb, \Gamma_2 \rightarrow \Delta, \neg Fa} \; b \neq a, b\, is\, proper\, variable$$

または

(¬-Introduction-Right = CNIR')

$$\dfrac{\Gamma_1, \Gamma_2, Fa \rightarrow \Delta}{\Gamma_1, \exists x Fx, \Gamma_2 \rightarrow \Delta, \neg Fa}$$

[6]通常、直観主義論理の形式体系としては、Gentzen の LJ を用いることが多いが、$\supset$ の右入れ、$\forall$ の右入れ、$\neg$ の右入れのみを LJ の規則にしたがい、残りの規則について LK と同じとしても、LJ と同じ証明能力を持つことが知られている。これが LJ' と呼ばれる。この証明図で、LJ' の規則にはしたがうが、LJ の規則を逸脱する推論は、(*) の部分だけである。

[7]推論規則の定式化に当たっては、北陸先端科学技術大学院大学特別招聘教授である小野寛晰先生の助けをお借りした。

である。このLJ'+CNIRもしくはLJ'+CNIR'は、直観主義述語論理に以下の公理を加えた中間論理の形式体系となる[8]。

$$\exists x Fx \supset \forall x(Fx \vee \neg Fx) \qquad \text{CEM(Conditional Excluded Middle)}$$

この暫定的排中律とでもいうべき公理は、ある述語 A について Aa となるなんらかの個物 a が存在すれば、その述語 A についての排中律が成立するといった内容を持つものである。つまり、現実に存在する個物の属性であれば、その属性についての排中律を主張できるとも解釈できるものであり、実念論の立場に立つ場合はもちろん、その意味論においてヴァイシェーシカ的な範疇論を持つディグナーガらの立場からも比較的容易に受け入れられるものであろう。

この先、このLCEM(直観主義述語論理+CEM、その形式体系、LJ' + CNIR)を用いて、ディグナーガやウッドヨータカラの言明を九句因、十六句因を中心に検討していきたい。

2．ディグナーガ

2．1　九句因

ディグナーガの九句因の体系は明瞭な構造になっている。世界を、立証すべき属性を持つ、もしくは立証すべき属性のある領域である同類(*sapakṣa*)と、立証すべき属性を持たないないしはそれがない領域である異類(*vipakṣa*)の二つに分け、それぞれに理由となる属性が存在しない・一部にだけ存在する・偏在するという3つの場合に分けて全部で9つの場合分けを行っている。

		異類		
		全部に存在	存在しない	一部に存在
同類	全部に存在	第1句	第2句	第3句
	存在しない	第4句	第5句	第6句
	一部に存在	第7句	第8句	第9句

この表に現れる理由はすべて因の第1相を満足するものとして規定されており、因の第2相と第3相のみが問題とされる。ディグナーガがこの表の中で正しい理由とするものは、立証対象の同類に偏在し異類に存在しないという第2句と、立証対象の同類の一部に存在し異類に存在しないという第8句である。

これを記号化すると次のようになる。

$$(2nd) \qquad \exists x(Hx \,\&\, Sx), \neg\exists x(\neg Hx \,\&\, Sx), \neg\exists x(Hx \,\&\, \neg Sx), Hp \vdash Sp$$

$$(8th) \qquad \exists x(Hx \,\&\, Sx), \exists x(\neg Hx \,\&\, Sx), \neg\exists x(Hx \,\&\, \neg Sx), Hp \vdash Sp$$

これらがLCEMにおいて立証可能であることはLCEMの構成から自明であろう。

一方、古典述語論理で証明可能となるものがこの九句因の表にはもう一つ含まれている。それは、第5句となる立証対象の同類にも異類にも存在しないという理由である。これを記号化すると、

[8] CNIRもしくはCNIR'とCEMの論理的等価性および中間論理+CEMが中間論理(「論理」であるためには三段論法と代入に関して閉じているという条件を満たさなければならない。そうでない有限ないしは無限の公理の集合は「理論(theory)」と呼ばれる)となることは小野先生の証明にしたがっている。なお、小野先生が筆者に示された証明のメモをまとめたものを付録として付けた。

$$(5th) \qquad \neg\exists x(Hx \,\&\, Sx), \neg\exists x(Hx \,\&\, \neg Sx), Hp \vdash Sp$$

となるが、これはLCEMでは証明できない。ただ、ここでいくつかのことが暗黙の前提になりうることを考えておかなくてはならない。まず、異類例、つまり H を持たず、S も持たない例が存在するということである。実際にディグナーガは、Hetucakraḍamaru のなかで「[主張] 音声は恒常である。[理由] 聞こえるものであるから」という第5句の例に対し、「[同類例] 虚空のように。[異類例] つぼのように」と例示を示すが、この異類例となる「つぼ」は、$\neg Ha \,\&\, \neg Sa$ の a となる。したがって、$\exists x(\neg Hx \,\&\, \neg Sx)$ が主張できるわけである。さらに、同類例の「虚空」は通常の同類例とは異なるが、「恒常」であって「聞こえるもの」でないものであり、$\exists x(\neg Hx \,\&\, Sx)$ が主張できる。この場合、問題となるのは後者である。つまり、LCEMでは、

$$(5th') \qquad \exists x(\neg Hx \,\&\, Sx), \neg\exists x(Hx \,\&\, \neg Sx), Hp \vdash Sp$$

は成立するのである。では、LCEMで不共不確定な疑似理由とされる第5句は妥当な理由なのであろうか。5th' の前件の中で、$\neg\exists x(Hx \,\&\, \neg Sx)$ を $\neg\exists x(Hx \,\&\, Sx)$ で置き換えることで、後件が $\neg Sp$ となる次の論証式も、LCEMで可能なのである。

$$(5th'') \qquad \exists x(\neg Hx \,\&\, Sx), \neg\exists x(Hx \,\&\, Sx), Hp \vdash \neg Sp$$

これはまさに第5句のような理由が不確定因と呼ばれる理由となる。この同類例が存在しないという不共因が不確定因と呼ばれる理由は、論証能力が高すぎる、つまり矛盾までも論証してしまうことにある。ディグナーガは、なぜこの第5句が不確定因、疑惑因となるのかという問いに対して、

> 立証対象の属性である不共因は、ありとあらゆる分類に関してすべてを包摂しそこでの疑いの原因となる。(PSV on PS III 24cd, K 訳 133a2 - 3; V 訳 D47a2 - 4; P50a6-7)

と述べているが、今まで論じてきたようなこの理由の性格を述べたものだと考えるのは容易であろう。

ただ、この不共不確定因の問題は、古典述語論理においても説明できる。古典述語論理の場合も、

$$\neg\exists x(Hx \,\&\, \neg Sx), Hp \vdash Sp$$

および

$$\neg\exists x(Hx \,\&\, Sx), Hp \vdash \neg Sp$$

がともに成立し、$\neg\exists x(Hx \,\&\, \neg Sx)$ も、$\neg\exists x(Hx \,\&\, Sx)$ もともに満たす証因は、矛盾をも導出するものなのである。したがって、しばしば問題とされてきた不共不確定因の疑似理由としての論理的性質については、LCEMを仮定する必要もなく、古典述語論理においても説明可能な性質なのである。ただ、直観主義述語論理では、S も $\neg S$ いずれも論証できないので、こうした議論は成り立たない。

2．2　例示(肯定的必然関係・否定的必然関係)

一方で、その論理的解釈からしばしば問題にされてきた同類例示と異類例示の並置が必然というディグナーガの主張はどうであろうか[9]。ディグナーガは、

> （もし、同類例示・異類例示のうちの）一方、もしくは両方が述べられなくてもよいとするならば、共通不確定因・不共不確定因・矛盾因も正しい理由ということになってしまう。(PS IV 5)

とまとめており、これがディグナーガの結論であることには間違いがない。しかし、この結論に至るディグナーガの議論は、北川が指摘するようにさほど明快であるとはいえない[10]。ここで、同類例示のみというのが共通不確定因、異類例示のみというのが不共不確定因、いずれも述べていないというのが矛盾因に相当することは、これに続くPSVの中で述べられている。ここで、同類例示＝第2相、異類例示＝第3相と考え、それが、(1)に述べられた形に形式化できるとするならば、彼の述べていることは、概ね正しいことになる。しかし、北川の指摘のように同類例示＝第2相、異類例示＝第3相という図式が正しいかどうか、また、同類例示が $\exists x(Hx \,\&\, Sx)$ として、異類例示が $\neg\exists x(Hx \,\&\, \neg Sx)$ として理解できるかということについては大いに疑問がある。

ディグナーガは、同類例示、異類例示というものを次のように定義している。

> 理由が立証されるべき(属性)に随伴されているということと、立証されるべき(属性)がないところに存在しないということを述べている例示が同類(例)と異類(例)である。(PS IV 2)

ここで、この頌に続くPSVで「随伴 (*rjes su 'gro ba* = *anvaya*)」を「あらゆる場で伴うこと (*thams cad du 'gro ba*)」と説明し、さらに、同類例示として、

> 意志的努力から生じたものは無常であると経験される。例えば壷のようにと。(*gang rtsol ba las byung ba de ni mi rtag par mthong ste dper na bum pa bzhin zhes bya ba*)

を挙げ、異類例示として

> 恒常なものは意志的努力から生じたものではないと経験される。虚空のようにと。(*rtag pa ni rtsol ba las byung ba ma yin par mthong ste nam mkha' bzhin zhes bya ba sta bu'o*)

を挙げる。

ここから見ると、異類例示に関しては、第3相の $\neg\exists x(Hx \& \neg Sx)$ に $\exists x(\neg Hx \& \neg Sx)$ をつけ加えたものであると見なすことが可能であるとしても、同類例示に関しては、単に第2相の $\exists x(Hx \& Sx)$ と見ることはできず、ここに $\forall x(Hx \supset Sx)$ といった要素があることは否定できない。もちろん、ディグナーガや当時の論理学者の用いた論証式に見られる「AはBであると経験される(*dṛṣṭa*)」といった経験主義的な表現も軽視することはできず、「a も H であって S である」「b も H であっ

[9]ディグナーガが示す、同類例示 (*sādharmya-dṛṣṭānta*)、異類例示 (*vaidharmya-dṛṣṭānta*) は、ともに条件を満たす具体例と三段論法の大前提のようなものの提示であるが、具体例の提示から歴史的に発展してきたものと考えられ、例示・喩例 (*dṛṣṭānta*) という用語を用いている。ここでも特に断りのない限りこの用語を用いる。

[10]北川 [1965], pp. 262 - 267

て S である」「c も H であって S である」といった経験の先に「H であるものは S である」としているといった議論が成り立ちうるであろう。しかし、それを記号化するには、$\forall x(Hx \supset Sx)$ といった形を用いざるを得ないのである。

では、$\forall x(Hx \supset Sx)$ といった形で同類例示が表されるとするならば、因の第2相との関係はどうなのだろうか。夙に桂の指摘があるように、PSV の PSII.5 に対する説明にしたがって、因の第2相の定義に対して限定辞「*eva*」を「他との結びつきの排除 (*anyayogavyavaccheda*)」の意味で導入することで第3相とほぼ同じ意味となる[11]。つまり

tattulya <u>eva</u> sadbhāvaḥ(その同類にのみ (理由となる属性が) 存在する)

という形を仮定すると、$\exists x(Hx \,\&\, Sx)$ というだけではなく、「他との結びつきの排除」ということから $\neg\exists x(Hx \,\&\, \neg Sx)$ の意味を読み取ることが可能なのである。直観主義述語論理のような弱い論理では無理としても、少なくともここで話題としてるような LCEM といった導出体系を仮定するならば、$\exists x(Hx \,\&\, Sx)$ と $\neg\exists x(Hx \,\&\, \neg Sx)$ から $\forall x(Hx \supset Sx)$ を導くことは可能であり、$\forall x(Hx \supset Sx)$ と $Ha \,\&\, Sa$ なる a があるということから、$\neg\exists x(Hx \,\&\, \neg Sx)$ を導くこともまた可能である。これはあくまでも思考実験かもしれないが、LCEM が因の三相説に基づく導出過程を前提として構成されたことを思えば、あながち無意味な議論ではないだろう。

一方、異類例示についてはどうだろうか。まず、ディグナーガは異類例示について必ずしも具体的な $\neg Ha \& \neg Sa$ なる a を示す必要がないと述べている (PSV on PS IV 4)[12]ので、ここで $\exists x(\neg Hx \& \neg Sx)$ を取り立てて問題にすることはない。とすると、問題となるのは、$\neg\exists x(Hx \& \neg Sx)$ だけであるが、異類例示の場合も条件命題として $\forall x(\neg Sx \supset \neg Hx)$ と表せる可能性がある。もし、$\forall x(\neg Sx \supset \neg Hx)$ とすれば、ここから、$\neg\exists x(Hx \,\&\, \neg Sx)$ を導くことは、直観主義述語論理のような弱い論理でも可能である。このことは、ディグナーガが、「(異類例示が述べるのは) その理由が立証されるべきものが存在しないところに存在しないということだ (PSV V 訳 D60a6; P64a3[13])。」と述べていることと呼応しているようにさえ見える。

ここで、同類例示を $\forall x(Hx \supset Sx)$ に $\exists x(Hx \,\&\, Sx)$ を加えたもの、異類例示を $\forall x(\neg Sx \supset \neg Hx)$ とすると、それらと因の第2相、第3相との関係は、LCEM で考えた場合次のようになる[14]。

1. 因の第2相 $\exists x(Hx \,\&\, Sx)$ に *eva* を導入し $\neg\exists x(Hx \,\&\, \neg Sx)$ の意味を持たせた場合、$\forall x(Hx \supset Sx)$ が導出できる。

2. $\forall x(Hx \supset Sx)$ と $(Ha \,\&\, Sa)$ から因の第2相に $\neg\exists x(Hx \,\&\, \neg Sx)$ を加えたものが導出できる

3. $\forall x(\neg Sx \supset \neg Hx)$ から因の第3相 $\neg\exists x(Hx \,\&\, \neg Sx)$ は導出でき、両者は論理的に同値である。

4. 因の第3相 $\neg\exists x(Hx \,\&\, \neg Sx)$ から $\forall x(Hx \supset Sx)$ は導出できない。

---

[11] Katsura[1983]。なお *eva* の導入については PST 写本の読みに基づく H. Lasic 博士の研究があり興味深い指摘を行っている。

[12] 北川 [1965] pp. 242 - 3

[13] K 訳には見られない

[14] ただし、成り立つということについては証明図を示せばよいだけなので簡単であるが、成り立たないということについては、現在その証明図が見つからない、見つかりそうにないという意味に理解していただきたい。成り立たないことを厳密に示すには、LCEM に対応するクリプキフレームに対してある論理式が成り立たないようなクリプキモデルを構成してみせることが一般的である。しかし、現在 LCEM に対応するクリプキフレームはまだ見つかっていない。詳しくは、小野 [1994] などを参照のこと。

5. 異類例示 $\forall x(\neg Sx \supset \neg Hx)$ と $\exists x(Hx \,\&\, Sx)$ から $\forall x(Hx \supset Sx)$ を導出できるが、異類例示のみからは導出できない。

これらの結果とディグナーガの記述とを照らし合わせてみると、まず、ディグナーガは異類例示のみで同類例示を必要としないという考えを認めない。彼は、不共不確定因の場合を提示して、異類例示だけではこうした疑似理由を排除できないとするのである[15]。たしかに、異類例示から $\neg\exists x(Hx \,\&\, \neg Sx)$ を導くことができても、$\neg\exists x(Hx \,\&\, Sx)$ でないという保証を得ることはできないであろう。そのかぎりでは、特にLCEMを仮定しなくても古典論理の範囲の中でもディグナーガの議論は成立する。ただ、$\forall x(\neg Sx \supset \neg Hx)$ から $\forall x(Hx \supset Sx)$ を導くことができないというLCEMの性格とも重なる点があるように思われるのである。

さらに、反論者は不共不確定因でない異類例示では、文脈によって[16]$\forall x(Hx \supset Sx)$ という理解が得られるが、不共不確定因の場合そういった理解が得られないという議論を展開するが[17]、形式上から考えると、両者の区別は見られず、$\exists x(Hx \,\&\, Sx)$ を仮定しての「文脈によって」理解されると述べているに過ぎないように思われる。実際LCEMでも $\exists x(Hx \,\&\, Sx)$ を暗黙の前提とするならば、$\forall x(\neg Sx \supset \neg Hx)$ から $\forall x(Hx \supset Sx)$ を導くことも可能である。ディグナーガの答論も「文脈によろうが何によろうが同類・異類例示の並置が必要だ」ということで論を締めくくっている[18]。彼の異類例示だけでは不十分であるという論は、単に彼の体系の中だけということではなく、論理学一般としても一定の合理性が認められるように思われる。

一方、同類例示だけで異類例示が必要ないという説に対し、ディグナーガの答論ははなはだ精彩を欠いている。彼は随伴関係が同類例示によって述べられている場合、立証されるべきものがないところに理由が存在しないということを間接的に示していると述べ、同類例示と異類例示の両方が示されている場合には、遍充関係 (*khyab pa = vyāpti*) が異類例示によって示されると述べている[19]。北川は、ディグナーガ自身同類例示だけで十分という論を承認しているようにも見え、それに続く部分でも有効な再批判を提示していないとする。もし、同類例示を $\forall x(Hx \supset Sx)$ と理解するならば、$\neg\exists x(Hx \,\&\, \neg Sx)$ でも $\forall x(\neg Sx \supset \neg Hx)$ でもLCEMだけでなく直観主義述語論理といったより弱い論理でもそこから導出可能であり。PS IV 5の主張とは抵触するが、きわめて特殊な文脈で考えない限り北川の指摘がそのまま当てはまるといわざるを得ない。

3．ウッドヨータカラ

3．1　十六句因

ウッドヨータカラの十六句因説は、ディグナーガの九句因に同類・異類が存在しない場合を考慮に入れて拡張したものであり、ディグナーガの九句因の不備を補って、それを完全にしたものとして早くから注目されてきていた。この十六句因の中で、ウッドヨータカラが加えたものは、以下の7つである[20]。それは、

[15] K 訳: 149a7, 北川 [1965], p. 252, この間 V 訳相当部分はなし。

[16] 用いられているチベット訳は、*shugs gyis*。ここでは原語として *sāmarthyena* を想定した。

[17] K 訳 149a8 V 訳はなし。

[18] K 訳: 149b1, 北川 [1965] p. 253 - 4

[19] PSV K 訳: 149b4 - 5; V 訳: D60b6 - 7; P64b3 - 5; 北川 [1965] p. 255 - 6

[20] ウッドヨータカラは、ディグナーガの九句因の一部で順序を変えている。したがって、ディグナーガの第1句から第9句までがそのままウッドヨータカラのそれに当てはまるものではないが、ここでは特に問題とはならないので言及していない。

第 10 句 同類に偏在し、異類が存在しない。

第 11 句 同類の一部に存在し、異類が存在しない。

第 12 句 同類に存在せず、異類が存在しない。

第 13 句 同類が存在せず、異類に偏在する。

第 14 句 同類が存在せず、異類の一部に存在する。

第 15 句 同類が存在せず、異類に存在しない。

第 16 句 同類も異類も存在しない。

である[21]。この中で、ウッドヨータカラが正しい理由とするものは、第 10 句、第 11 句、第 15 句である。

これらのうち、第 15 句はしばらく置くとして、第 10 句、第 11 句については、それぞれディグナーガの九句因の第 2 句、第 8 句に $\neg\exists x(\neg Hx \,\&\, \neg Sx)$ を条件として加えたものであり、LCEM や古典論理で証明可能な理由であると同時に、そうした論理で、$\neg Sp$ といった矛盾する帰結を導き出す理由でもない。

一方、彼が新たに表の中に加えた疑似理由である第 12，第 13，第 14，第 16 句についてはどうであろうか。第 13，第 14 句については、同類が存在しないというだけでなく、異類の全部または一部に存在するということから妥当な帰結を導く理由ではないと断定してもよい。問題は第 12, 16 句である。これらは、$\neg\exists x(Hx \,\&\, \neg Sx)$ だけでなく、$\neg\exists x(Hx \,\&\, \neg Sx)$ も同時に満足している。したがって、古典論理の立場に立てば、これらは Sp と $\neg Sp$ をともに導出する、つまり矛盾を導出する理由ということになる。これは不共不確定因の性質そのものである。

ただ、このように考えた場合、ウッドヨータカラが正しい理由とする第 15 句が問題となる。ウッドヨータカラが *vyatirekin* と呼ぶこの理由は、以下のような条件を満たすものである。

$$\neg\exists x(Hx \,\&\, \neg Sx), \neg\exists x(\neg Hx \,\&\, Sx), \neg\exists x(Hx \,\&\, Sx) \qquad (2)$$

この理由を古典述語論理の立場で考えれば、明らかに不共不確定因ということになる。$\neg Sp$ を導出するからである。では、LCEM で考えてみるとどうなるであろうか。まず、先ほど問題にした第 12・16 句とディグナーガの不共不確定因の場合と比較してみることにしよう。

	第 15 句 (*vyatirekin*)	第 12 句	第 16 句	不共不確定因
(1)	$\neg\exists x(Hx \,\&\, Sx)$	○	○	○
(2)	$\neg\exists x(Hx \,\&\, \neg Sx)$	○	○	○
(3)	$\neg\exists x(\neg Hx \,\&\, Sx)$	×	○	×
(4)	$\exists x(\neg Hx \,\&\, \neg Sx)$	×	×	○

このうち、LCEM では、第 15 句が持つ 4 つの条件のうち、(1) と、(3) の否定つまり $\exists x(\neg Hx \& Sx)$ から、$\forall x(Hx \supset \neg Sx)$ を導くことができる。したがって不共不確定因やウッドヨータカラの第 12

[21] NV on NS 1. 2. 4 pp.364 - 5, 岡崎 [2005] pp. 384 - 90

句が矛盾を導くものであるという点については、古典論理のみならずLCEMにおいても承認される。

これに対し、(3) を条件とする第15句、第16句に関しては、古典論理の場合と違いLCEMでは $\forall x(Hx \supset \neg Sx)$ を導くことはできず、不共不確定因と同列に扱うわけにいかない。しかし、一方でLCEMでは条件 (1)～(4) を用いて $\forall x(Hx \supset Sx)$ もまた導くわけにはいかないように思える[22]。

このことは、ウッドヨータカラの十六句因説の第15句 *vyatirekin* を承認するためには、LCEMよりもより強い体系が必要であることを示しているのであろうし、LCEMがウッドヨータカラの論理体系、導出体系としての論理体系を表現するには不完全であることをも示しているのかもしれない。ただ、LCEMが因の三相説の論理体系を忠実に反映しているとするならば、ウッドヨータカラの論理体系が因の三相説の枠組みを逸脱していたことを記号論理学の立場から立証するものかもしれない。

3．2　否定的関係による理由 (*vyatirekin*)

前節まで論じてきたところで、LCEMでは、肯定的具体例、つまり $Ha \,\&\, Sa$ なる a が存在するという条件の下でなければ、$\forall x(Hx \supset Sx)$ が導けないことを見てきた。では、ウッドヨータカラが導入しようとした否定的関係による理由 (*vyatirekin, avīta*) を正当化する方法は因の三相説においては見られないのであろうか。

ウッドヨータカラは、この否定的論法を導入するに当たり、不共不確定因や第16句のような同類も異類もない場合との違いを次のように述べている

> [反論] もし共通ではない属性が理由であるとするならば、「(主張) 地は恒常である。(理由) 臭いを持っているから[23]。」なども理由ということになる。[答論] そうではない。理由の意味を理解していないからである。否定的関係による理由が共通ではないということはその通りである。しかし、否定的関係による理由は逸脱 (*vyabhicāra*)[24]するものではない。「臭いを持っていること」(という不共不確定因) は、恒常と無常とに逸脱するのである。・・・[反論] では、主題にだけ存在し、その同類も異類も存在しない共通ではない属性はどうして理由とならないのか。例えば、「(主張) すべては恒常である。(理由) 存在するものだから」というような。[答論] これが共通ではないことはその通りだ。しかし、排除され (*vyāvṛtta*) ていない。排除されていないので理由ではない。(NV on NS 1. 1. 35, p. 294)

ここで、不共不確定因の問題点は、ディグナーガの九句因でも論じたように Sp も $\neg Sp$ も同時に論証するということであり、上記の「恒常と無常に逸脱する」ということがそれに対応することは明らかであろう。また、「否定的関係」=「排除」が一定の経験的領域において確認されなければならないことも理解される。

しかし、これだけから論証形式を想定することは難しい。幸いなことに、ウッドヨータカラは、この「臭いを持つから」という例を用いて別の説明も行っている。

[22] 脚注14に述べた理由で厳密な証明を与えることが現在できない。

[23] ウッドヨータカラらが前提とするヴァイシェーシカの存在論で、臭いという特質を持つのは、地という実体だけということになっている。

[24]「逸脱」と訳したが、原語の意味は、Aにいったり Bに行ったりするということ、文学作品などでは「浮気」の意味になったりもする。

[反論] もし君が肯定的関係なしに否定的関係による理由が成り立つと考えるならば、地などが恒常であることを立証する場合の臭いを持つといった（属性）がどうして（正しい）理由とならないのか。[答論] 理由とはならない。両者から排除されているからである。なぜなら、臭いを持つと行った（属性）は恒常からも無常からも排除されているからである (NV on 3. 1. 3, p. 716)

Okazaki[2003] における十六句因の解釈は、これらの記述に基づき、$\exists(Hx\&Sx)$ と $\neg\exists x(Hx\&\neg Sx)$ の連言を $H \Rightarrow S$ とするところに出発点がある。その上で、否定的関係に基づく理由が満たすべき条件を $\neg S \Rightarrow \neg H$ が成り立つが、$S \Rightarrow \neg H$ が成り立たないことであるとした。

しかし、その解釈はウッドヨータカラの論証における中心概念である肯定的関係における不逸脱と否定的関係における不逸脱の対称性、論理的統一性という点で問題を残している。さらに、ドゥモルガンの法則と分配律にしたがって *vyatireka-avyabhicāra* として提案した条件を選言命題として分解した場合、一方が *anvaya-avyabhicāra* として提案した条件を含んでおり、完全に独立した条件とはいえないことがわかった[25]。ここでは、標準的な含意概念を用いての形式化を考えてみたい。

その場合、「臭いを持つ」という H が無常性という $\neg S$ から排除されるというのは、通常の $\forall x(Hx \supset Sx)$ の対偶と考えてもよい。したがって、これを $\forall x(\neg Sx \supset \neg Hx)$ としてみる。すると、自動的に「臭いを持つ」が恒常性から排除されるというのは、$\forall x(Sx \supset \neg Hx)$ ということになる。

古典論理で考えた場合には、$\forall x(\neg Sx \supset \neg Hx)$ からは $\forall x(Hx \supset Sx)$ が、$\forall x(Sx \supset \neg Hx)$ からは $\forall x(Hx \supset \neg Sx)$ が導かれ、H は矛盾を導く理由ということになろう。また、LCEM でも恒常な何か、無常な何かが存在する以上は、同様な結果となる。

一方、否定的関係による理由は、$\forall x(\neg Sx \supset \neg Hx)$ が成り立って、$\forall x(Sx \supset \neg Hx)$ が成り立たないというのであるから、後者を否定しなければならない。しかし、$\neg\forall x(Sx \supset \neg Hx)$ と単純に否定することは、この場合ふさわしい解釈とはいえないだろう。立証対象の存在領域で理由となる属性を排除するようなものが許されないと理解するならば、$\forall x\neg(Sx \supset \neg Hx)$ かもしくは $\neg\exists x(Sx \supset \neg Hx)$ となるのが妥当であろう。

この場合、古典論理で考えるならば、$\forall x(\neg Sx \supset \neg Hx)$ だけから $\forall x(Hx \supset Sx)$ が導けるはずであり、$\forall x\neg(Sx \supset \neg Hx)$ は言及する必要がない。一方、LCEM の場合、この両者からだけでは $\forall x(Hx \supset Sx)$ を導くことができない。ただ、以下の論証は成り立つ。

$$\exists x(\neg Hx \,\&\, \neg Sx), \forall x(\neg Sx \supset \neg Hx), \forall x\neg(Sx \supset \neg Hx) \vdash \forall x(Hx \supset Sx) \tag{3}$$

この論証式の大きな特徴は、前提に立証されるべき属性を持つ何らかのもの、つまり同類例の存在が入っておらず、代わりに異類例が入っているということである。つまり、ウッドヨータカラの主張するような、異類例しかない場合も論証可能な形態があるということが、因の三相説に基づいて構成された LCEM の上でもいえるということになる。しかし、これがウッドヨータカラの意図するものかどうかということについては、形式論理の面、文献学の面からさらなる研究が

[25] 岡崎 [2005] p. 87 - 8

必要ということになるだろう。

4．まとめ

以上の議論をまとめると、ディグナーガの述べる不共不確定因の不当性は、古典論理においてもLCEMにおいても説明可能であり、それは彼の述べる問題点とも一致しているように思われる。ディグナーガの述べる同類例示・異類例示併記論において、同類例示があれば異類例示が必要ないとする論に対する彼の再批判ははなはだ精彩を欠く、もしくはそういった論に一定の承認を与えているように見えることは、それぞれの例示を条件命題と考えた場合、LCEMにおいても同類例示から異類例示を導くことができるという事実と呼応しているように見える。逆に、異類例示だけで同類例示が必要ないとする論に対する反論が一定の妥当性を持っているように見えるのは、先の不共不確定因の不当性との関係が指摘できることと、また、LCEMにおいて異類例示から同類例示を導くことができないという事実とも呼応しているように見える。

ウッドヨータカラにおいて、因の十六句因説のうち、同類例のない第15句を除く例は、LCEMの中で妥当な理由とすることができるが、第15句については、古典論理におけるように矛盾を導く理由とすることもできない代わりに、論証能力も認められない。このことは、LCEMがウッドヨータカラの論理学を説明するには不十分な導出体系であることを示すと同時に、彼の述べる同類例のない正しい理由というものが、因の三相説を逸脱していた証左を示す可能性もある。一方、ウッドヨータカラの記述にしたがい、別の形で否定的関係による理由を形式化する場合、同類例を持たない理由をLCEMのなかで論証能力を持つものと認めることができる。したがって、因の三相説の枠組みで、ウッドヨータカラのいうような否定的関係による理由を認める可能性も認めることができるのである。

以上、因の三相説を一つの導出体系に見立て、それと同等な形式体系を作ってみる（結果としては中間論理ということになる）ことで、どういったことがいえるのか思考実験を重ねてきたわけだが、こうした思考実験の一つの特徴は、既成の論理体系ではなく彼らの論理的思考に合わせて（但し、高度な抽象化がどうしても必要となるが）論理体系を構築してみるということにある。ただ、こうした論理体系構築の試みは、今回たまたまLCEMと筆者が呼ぶ比較的性質のよい中間述語論理が見つかったことによるところが大であり、どういったものでもうまくいくというわけではない。ただ、こうした試みを通じて新たな論理体系の発見もあり得るということは、現代論理学の立場からも銘記しておいてよいかもしれない。

略号および参考文献

NV Nyāyavārttika, Nyāyadarśana with Vātsyāyana's Bhāṣya, Uddyotakara's Vārttika, Vācaspati Miśra's Tātparyaṭīkā and Viśvanātha's Vṛtti, ed. by Taranatha Nyāya-Tarkatīrtha and Amarendramohan Tarkatīrtha , Calcutta Skt. Sr. 1936 - 44

PS *Pramāṇasamuccaya* PSVを見よ。

PSV *Pramāṇasamuccayavṛtti*, V(asudhararakṣita)訳: Sde-dge ed.(D), Tohoku No. 4204; Peking ed.(P), No. 5701, K(anakavarman)訳: Peking. ed., No. 5072

Gentzen[1935] Gentzen, Gerhard: "Ubersuchunge über das logische Schliesen" Mathematische Zeitschrift 39, pp 176 – 210, English translation included in *The collected papers of Gerhard Gentzen*, ed and trans. by Me, E. Szabo, Amsterdam 1969

Glashoff[1999] Glashoff, Klaus: "Das Rad der Gründe - Der Hetucakradamaru von Dignaga", Mitt. Math . Ges Hamburg 18, pp. 1 - 30

Hayes[1988] Hayes, Richard P. *Diṅnāga on the Interpretation of Signs*, Studies of Classical India vol. 9 Dordrcht 1988

Katsura[1983] Ḳatsura, Shyoryu, "Dignāga on Trairūpya," Journal of Indian and Buddhist Studies vol. 31 No. 1 p. 538 - 544

Okazaki[2003] Okazaki, Yasuhiro: "Asādhāraṇahetvābhāsa and Uddyotakara's Vyatirekin," Saṃbhāṣā vol. 23, pp. 39 - 52

岡崎 [2005] 岡崎康浩, 『ウッドヨータカラの論理学』, 平楽寺書店, 京都

小野 [1994] 小野寛晰, 『情報科学における論理』, 日本評論社, 東京

北川 [1965] 北川秀則, 『インド古典論理学の研究』, 鈴木学術財団, 東京 第2版 1975

山下 [1970] 山下政男、「北川秀則著『インド古典論理学の研究』を読んで」, 『哲学研究』vol. 514

A　因の三相説と中間論理

この補遺は、小野寛晰教授とのやりとりを著者がまとめたものであり、主な結果の証明は小野教授によるものである。

A．1　導出体系としての因の三相説

因の三相説に基づく導出を以下のように表すものとする ($\Gamma \vdash F$ は命題 F が前提となる命題列 Γ から導出されることを意味する)

$$\exists x(Hx \,\&\, Sx), \neg\exists x(Hx \,\&\, \neg Sx), Hp \vdash Sp$$

上記の図式は以下のように変形される。

$$(\exists x(Hx \,\&\, Sx) \,\&\, (\neg\exists x(Hx \,\&\, \neg Sx)) \supset (Hp \supset Sp)$$

もしくは、

$$(\exists x(Hx \,\&\, Sx) \,\&\, (\neg\exists x(Hx \,\&\, \neg Sx)) \supset \forall x(Hx \supset Sx) \tag{4}$$

上記の論理式 (4) を因の三相説の推論と呼ぶことにしよう。上記の論理式は古典論理では成り立つが直観主義論理では成り立たない。一方、論理式 $\exists x(Hx \,\&\, Sx)$ は古典論理では冗長である。以下の論理式も成り立つからである。

$$\neg\exists x(Hx \,\&\, \neg Sx) \supset \forall x(Hx \supset Sx) \tag{5}$$

ここで目指すものは (4) が成り立つが (5) が成り立たないような論理体系を発見することである。そこで LJ' に次のような推論規則を付け加えてみよう。

(¬-Right Introduction = CNRI)

$$\frac{\Gamma_1, Fb, \Gamma_2, Fa \quad\rightarrow\quad \Delta}{\Gamma_1, Fb, \Gamma_2 \quad\rightarrow\quad \Delta, \neg Fa}\; b \neq a, b\, is\, proper\, variable\, in\, this\, schema$$

または

(¬-Right Introduction = CNRI')

$$\frac{\Gamma_1, \Gamma_2, Fa \quad\rightarrow\quad \Delta}{\Gamma_1, \exists xFx, \Gamma_2 \quad\rightarrow\quad \Delta, \neg Fa}$$

CNRI と CNRI' は論理的に等価である。CNRI ⇒ CNRI' は以下のように示される。

$$\cfrac{\cfrac{\cfrac{\Gamma_1, \Gamma_2, Fa \quad\rightarrow\quad \Delta}{\Gamma_1, Fb, \Gamma_2, Fa \quad\rightarrow\quad \Delta}\; Left-weakening}{\Gamma_1, Fb, \Gamma_2 \quad\rightarrow\quad \Delta, \neg Fa}\; CNRI}{\Gamma_1, \exists xFx, \Gamma_2 \quad\rightarrow\quad \Delta, \neg Fa}\; \exists - I_l$$

上記の図式の左 weakening で、論理式 F の変数 b は下式のどの論理式にも自由な出現を持たないもの、つまり固有変数の変数条件を満たすものであり、この場合に限って、∃の左導入を行えるものとする。

CNRI ⇐ CNRI' は以下のように示される。

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{Fb \;\rightarrow\; Fb}{Fb \;\rightarrow\; \exists x Fx}\;\exists - I_l \qquad \dfrac{\Gamma_1, Fb, \Gamma_2, \Gamma_3, Fa \;\rightarrow\; \Delta}{\Gamma_1, Fb, \Gamma_2, \exists x Fx, \Gamma_3 \;\rightarrow\; \Delta, \neg Fa}\;CNRI'}{\Gamma_1, Fb, Fb, \Gamma_2, \Gamma_3 \;\rightarrow\; \Delta, \neg Fa}\;cut\,and\,exchange}{\Gamma_1, Fb, \Gamma_2, \Gamma_3 \;\rightarrow\; \Delta, \neg Fa}\;contraction$$

ここで、因の三相説の推論、(4) の LJ'+ CNRI' における証明は以下のように行われる。

(a)

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{Sa \;\rightarrow\; Sa}{Ha \,\&\, Sa \;\rightarrow\; Sa}}{Ha \,\&\, Sa \;\rightarrow\; \exists x Sx}\;\exists - I_r}{\exists x(Hx \,\&\, Sx) \;\rightarrow\; \exists x Sx}\;\exists - I_l \qquad \dfrac{\dfrac{Sa \;\rightarrow\; Sa}{Ha, Sa \;\rightarrow\; Sa}}{\exists x Sx, Ha \;\rightarrow\; Sa, \neg Sa}\;CNRI'}{\exists x(Hx \,\&\, Sx), Ha \;\rightarrow\; Sa, \neg Sa}\;cut$$

(b)

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{Ha \;\rightarrow\; Ha}{\vdots}}{Sb, Ha \;\rightarrow\; Sa, Ha}}{Hb \,\&\, Sb, Ha \;\rightarrow\; Sa, Ha}\;\& - I_l}{\exists x(Hx \,\&\, Sx), Ha \;\rightarrow\; Sa, Ha}\;\exists - I_l$$

(a) と (b) から以下のような証明図が得られる。

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\begin{matrix}(a)\\ \vdots\\ \exists x(Hx \,\&\, Sx), Ha \;\rightarrow\; Sa, \neg Sa\end{matrix} \quad \begin{matrix}(b)\\ \vdots\\ \exists x(Hx \,\&\, Sx), Ha \;\rightarrow\; Sa, Ha\end{matrix}}{\exists x(Hx \,\&\, Sx), Ha \;\rightarrow\; Sa, Ha \,\&\, \neg Sa}\;\& - I_r}{\exists x(Hx \,\&\, Sx), Ha \;\rightarrow\; Sa, \exists x(Hx \,\&\, \neg Sx)}}{\exists x(Hx \,\&\, Sx), \neg\exists x(Hx \,\&\, \neg Sx), Ha \;\rightarrow\; Sa}\;\neg - I_l}{\exists x(Hx \,\&\, Sx), \neg\exists x(Hx \,\&\, \neg Sx) \;\rightarrow\; Ha \supset Sa}\;\supset - I_r}{\exists x(Hx \,\&\, Sx), \neg\exists x(Hx \,\&\, \neg Sx) \;\rightarrow\; \forall x(Hx \supset Sx)}\;\forall - I_r$$

A．2　導出体系としての因の三相説

CNRI もしくは CNRI' は、以下の公理と論理的に等価である。

$$\exists x Fx \supset \forall x(Fx \vee \neg Fx) \qquad \text{CEM(Conditional Excluded Middle)}$$

CNRI' ⇒ CEM は次のように示される。

$$
\dfrac{Fa \;\rightarrow\; Fa}{\exists xFx \;\rightarrow\; Fa, \neg Fa}\,CNRI'
$$

$$
\vdots\;\; \vee - I_r, twice
$$

$$
\dfrac{\dfrac{\dfrac{\exists xFx \;\rightarrow\; Fa \vee \neg Fa, Fa \vee \neg Fa}{\exists xFx \;\rightarrow\; Fa \vee \neg Fa}\,contraction}{\exists xFx \;\rightarrow\; \forall x(Fx \vee \neg Fx)}}{\rightarrow\; \exists xFx \supset \forall x(Fx \vee \neg Fx)}
$$

CNRI' ⇐ CEM は次のように示される。

(A)

$$
\dfrac{\rightarrow\; \exists xFx \supset \forall x(Fx \vee \neg Fx) \qquad \dfrac{\exists xFx \;\rightarrow\; \exists xFx \qquad \dfrac{\dfrac{Fa \;\rightarrow\; Fa \quad \neg Fa \;\rightarrow\; \neg Fa}{Fa \vee \neg Fa \;\rightarrow\; Fa, \neg Fa}\,\vee - I_l}{\forall x(Fx \vee \neg Fx) \;\rightarrow\; Fa, \neg Fa}\,\forall - I_l}{\exists xFx, \exists xFx \supset \forall x(Fx \vee \neg Fx) \;\rightarrow\; Fa, \neg Fa}\,\supset - I_l}{\exists xFx \;\rightarrow\; Fa, \neg Fa}\,exchange\,cut
$$

(A) と CNRI' の上式から CNRI' の下式を得ることができる。

$$
\dfrac{\begin{array}{c}(A)\\ \vdots \\ \exists xFx \;\rightarrow\; Fa, \neg Fa\end{array} \quad \Gamma, Fa \;\rightarrow\; \Delta}{\Gamma_1, \exists xFx, \Gamma_2 \;\rightarrow\; \Delta, \neg Fa}\,exchange\,cut
$$

直観主義述語論理+CEM が中間述語論理となるのであろうか。次のこの問題について論じてみる。

もし直観主義述語論理の公理と CEM の公理が三段論法 (cut) と代入に関して閉じているとすれば、上記の疑問に対して肯定的な答を与えることができる。ここで、まず三段論法に関しては、この論理が LJ' + CNRI もしくは CNRI' によって表されることから明らかである。実際、三段論法に関して閉じていることは次のような推論が成り立つことを証明すればよい。

もし以下のような証明列が成り立つならば、

$$
\Gamma \;\rightarrow\; A \quad and \quad \Delta, A \;\rightarrow\; B
$$

そのとき

$$
\Gamma, \Delta \;\rightarrow\; B
$$

もまたなりたつ。しかし、これは LJ' の三段論法の規則そのものである。

一方、代入に関してはさほど単純ではない。まず、代入を考慮に入れて CEM の一般化を行ってみる。

CEM の一般化された形は、固有変数の数に依存している。そこで、一般化された CEM(GCEM と呼ぶ) は、以下の公理図式 (固有変数の数を任意とした場合の公理の集合) の形で表される。ここで、F^{+} は、F に出現する自由変数のいくつかを互いに区別される固有変数で置き換えたもの、F^{*k} はその固有変数のうち k 個を束縛変数で置き換えたものとする。

$$\exists x_1 \exists x_2 \ldots \exists x_i F^* \supset \forall x_1 \forall x_2 \ldots \forall x_i (F^* \vee \neg F^*)$$

この場合、公理図式 GCEM は CEM で置き換えることができる。まず GCEM ⇒ CEM は明らかである。実際、CEM は GCEM の特殊な形である。一方、CEM ⇒ GCEM は次のようになる。

この証明で、次の関係が証明されれば十分である。なぜなら、これが示されたならば、固有変数に関する帰納法を用いることでその一般化が可能だからである。

$$\exists x F^{*1} \supset \forall x (F^{*1} \vee \neg F^{*1}) \quad \Rightarrow \quad \exists x \exists y F^{*2} \supset \forall x \forall y (F^{*2} \vee \neg F^{*2}) \tag{6}$$

上記の式について、記方上の便宜から、F^+ と F^{*2} をそれぞれ Fab および Fxy と表す。a、b はそれぞれ Fxy に出現しない互いに区別された自由変数である。この記方を用いて、(6) を書き換えると以下のようになる。

$$\exists x Fxb \supset \forall x (Fxb \vee \neg Fxb) \quad \Rightarrow \quad \exists xy Fxy \supset \forall xy (Fxy \vee \neg Fxy) \tag{7}$$

(7) を証明するためには以下のことが証明できれば十分である。

$$\exists x Fxb \supset (Fab \vee \neg Fab) \quad \Rightarrow \quad \exists xy Fxy \supset (Fab \vee \neg Fab) \tag{8}$$

(8) の左辺の Fab を $\exists y Fay$ で置き換えることによって、以下の式が得られる。

$$\exists x \exists y Fxy \supset (\exists y Fay \vee \neg \exists y Fay) \tag{9}$$

上記の式で、$\neg \exists y Fay$ は $\neg Fab$ で置き換えることができる。$Fab \supset \exists y Fay$ が直観主義論理で証明可能であり、その対偶である $\neg \exists y Fay \supset \neg Fab$ もまた証明可能だからである。この代入によって次の式を得ることができる。

$$\exists x \exists y Fxy \supset (\exists y Fay \vee \neg Fab) \tag{10}$$

一方、(8) の左辺の別の形として次のものがある。

$$\exists y Fay \supset (Fab \vee \neg Fab) \tag{11}$$

(10) の $\exists y Fay$ を $Fab \vee \neg Fab$ で置き換えることによって次の式が得られる。

$$\exists x \exists y Fxy \supset (Fab \vee \neg Fab \vee \neg Fab) \tag{12}$$

(12) から (8) が得られる。存在量化記号の数に関する帰納法によって GCEM ⇔ CEM が証明できる。したがって、LJ'+CNRI もしくは CNRI' は中間論理 IL+CEM の形式体系である。

B 付録： *Vyatirekin* についての証明図

vyatirekin の推論を本文に述べたように次の形で表せるものとする

$$\exists x(\neg Hx \mathbin{\&} \neg Sx), \forall x(\neg Sx \supset \neg Hx), \forall x \neg(Sx \supset \neg Hx) \vdash \forall x(Hx \supset Sx) \tag{13}$$

上記の式は LCEM で証明可能であり、その証明図は以下のものである。

$$
\begin{prooftree}
\AxiomC{A}
\noLine
\UnaryInfC{$\vdots$}
\noLine
\UnaryInfC{$\neg Hb \mathbin{\&} \neg Sb \rightarrow Sa, Sb \supset \neg Hb, \neg Sa$}
\AxiomC{$Ha \rightarrow Ha$}
\RightLabel{$\neg - I_l$}
\UnaryInfC{$\neg Ha, Ha \rightarrow$}
\RightLabel{$\supset - I_l$}
\BinaryInfC{$\neg Hb \mathbin{\&} \neg Sb, \neg Sa \supset \neg Ha, , Ha \rightarrow Sa, Sb \supset \neg Hb$}
\RightLabel{$\neg - I_l$}
\UnaryInfC{$\neg Hb \mathbin{\&} \neg Sb, \neg Sa \supset \neg Ha, \neg(Sb \supset \neg Hb), Ha \rightarrow Sa$}
\RightLabel{$\forall - I_l$}
\UnaryInfC{$\neg Hb \mathbin{\&} \neg Sb, \forall x(\neg Sx \supset \neg Hx), \neg(Sb \supset \neg Hb), Ha \rightarrow Sa$}
\RightLabel{$\forall - I_l$}
\UnaryInfC{$\neg Hb \mathbin{\&} \neg Sb, \forall x(\neg Sx \supset \neg Hx), \forall x \neg(Sx \supset \neg Hx), Ha \rightarrow Sa$}
\RightLabel{$\supset - I_r$}
\UnaryInfC{$\neg Hb \mathbin{\&} \neg Sb, \forall x(\neg Sx \supset \neg Hx), \forall x \neg(Sx \supset \neg Hx) \rightarrow Ha \supset Sa$}
\RightLabel{$\exists - I_l$}
\UnaryInfC{$\exists x(\neg Hx \mathbin{\&} \neg Sx), \forall x(\neg Sx \supset \neg Hx), \forall x \neg(Sx \supset \neg Hx) \rightarrow Ha \supset Sa$}
\RightLabel{$\forall - I_r$}
\UnaryInfC{$\exists x(\neg Hx \mathbin{\&} \neg Sx), \forall x(\neg Sx \supset \neg Hx), \forall x \neg(Sx \supset \neg Hx) \rightarrow \forall x(Hx \supset Sx)$}
\end{prooftree}
$$

(A)

$$
\begin{prooftree}
\AxiomC{$\neg Hb \rightarrow \neg Hb$}
\RightLabel{$weakening \quad twice$}
\UnaryInfC{$\neg Hb, \neg Sb, Sb \rightarrow \neg Hb$}
\RightLabel{$\& - I_l$}
\UnaryInfC{$\neg Hb \mathbin{\&} \neg Sb, Sb \rightarrow \neg Hb$}
\RightLabel{$\supset - I_r$}
\UnaryInfC{$\neg Hb \mathbin{\&} \neg Sb \rightarrow Sb \supset \neg Hb$}
\RightLabel{$weakening$}
\UnaryInfC{$\neg Hb \mathbin{\&} \neg Sb \rightarrow Sb \supset \neg Hb, Sb$}
\AxiomC{$Sa \rightarrow Sa$}
\RightLabel{$CNRI$}
\UnaryInfC{$Sb \rightarrow Sa, \neg Sa$}
\RightLabel{cut}
\BinaryInfC{$\neg Hb \mathbin{\&} \neg Sb \rightarrow Sa, Sb \supset \neg Hb, \neg Sa$}
\end{prooftree}
$$

(おかざき　やすひろ，三次青陵高等学校)