共和分ランク決定のためのJohansen手法の有限標本特性について
—EViewsでのモンテカルロ実験による分析—

李　　　　　民

1．はじめに

マクロ経済データの多くが強いトレンド成分を持つことは古くから知られた問題である。これらのトレンドはこれまで伝統的に計量分析の一つの障壁として捉えられ、しばしばtime trendに回帰してその残差間で分析を行うとか、階差をとって分析を行うといった対応がとられてきた。しかし、こうした対応をとった場合には、トレンドについての情報を一切捨ててしまっている危険性があり、事実そうした分析ではモデルの当てはまりが芳しくないケースが多い。

一方で、複数のマクロデータを比較・観察すると、極めて似通った動きが認められる場合や、あるいはある変数の全く逆のパターンを示す変数が観察される、という場合が多い。このような場合には、各変数が背後に抱えているトレンド成分は共通のものである考えられる。近年実証分析で頻繁に用いられるようになった共和分（cointegration）（その定義については、Engle and Granger（1987）、あるいはBanerjee et al.（1993）を参考せよ）によるアプローチは、こうした共通のトレンド成分の情報を取り入れてモデルの説明能力を向上させようとするやり方である。

本論文では、共和分ランク検出のためのJohansenの尤度比検定（likelihood ratio test、以下JohansenのLR検定あるいは単にLR検定、Johansenの検定と略記する）の問題が論じられる。共和分ランクとはベクトル時系列システムにおける独立な共和分関係の数のことであり、このJohansenのLR検定の目標は、非定常変数による多変量自己回帰モデル（vector autoregression model、以下VARと略記する）から出発して、変数間に何通りの共和分の関係が認められるかを検出しようとするものである。それらは、他方、VARモデルやそれと同値なベクトル誤差修正モデル（vector error correction model、以下VECMと略記する）の最尤推定法という側面も持ち合わせる。

一般的枠組みでの共和分ランクの検出は、Johansen（1988）において初めて確立された。そこでは、定数項を考慮しない（定数項を0とする）VARあるいはVECMを想定して、尤度比に基く検定手法が提案された。そして、帰無仮説の下での検定統計量の極限分布や対立仮説の下での漸近的性質（一致性）が考察された。

本論文ではOdaki（2011）に準じて、システム次元が4の場合について、モンテカルロ実験を行う、システム次元が4であるいくつかの事例において、モンテカルロ実験を通して、有限標本での性能が考察される。

本論文のモンテカルロ実験はすべてEViewsに基づいて実行された。EViewsは、計量経済モデルの分析に世界的に広く使用されているソフトであり、基礎的なものから最新のものまで多くの手法を含み、ほとんどの分析がこれによって可能となっている。

EViewsは実証分析（特に、経済時系列データの経済時系列分析についての）においては定評

があるが、モンテカルロ実験ではほとんど用いられいてないし、Gauss等と違って、モンテカルロ実験のために利用可能なプログラム（コード）もほとんど公表されていない。

EViewsは利用可能な行列配列計算のためのコマンドも多くなく、従って、本論文で実行したような共和分ランク検出のためのモンテカルロ実験についても、他の文献で見い出すことは困難である。モンテカルロ実験において確かに不利な点は否定できない。

本論文の目的の一つはEViewsを通してこの様な共和分ランク検出のためのモンテカルロ実験が可能なことを示すことにある。上述いた様に、実験を実行するためって数々の不利な点を持つEViewsであるが、実証での利用頻度の多さを考慮するとき、実証と連同させてある種のシミュレーションやモンテカルロ実験を同一ソフトウェア（この場合、EViews）上で行いたいことがあるものと思われる。本論文の試みはその様な動向に先がけ、且つその様な動きを加速させるものとなるかもしれない。実験に用いられたEViewsプログラムは本論文の最後の附録部分に掲載されている。

２．Johansenの共和分検定

一般論として、Johansen（1988）の方法は次のようなk次のVARから出発する。

$$Y_t = \Pi_1 Y_{t-1} + \cdots + \Pi_k Y_{t-k} + \mu + \varepsilon_t, \qquad t = 1, \cdots, T \qquad (1)$$

ここで、Y_tはp変量の確率変数ベクトルであり、μはp次元の定数（項）ベクトルであり、誤差項ε_tは平均０、分散行列Λの独立同一正規分布に従うとする。

Y_tの各要素が全て$I(1)$であれば、次の$p \times p$行列$\Pi = I_p - \Pi_1 - \cdots - \Pi_k$のランクは$p$より小さくなければならない。このことは、次のようにVARのVECM表現を考えれば直ちに判ることである。

$$\Delta Y_t = F_1 \Delta Y_{t-1} + \cdots + F_{k-1} \Delta Y_{t-k+1} + \Pi Y_{t-1} + \mu + \varepsilon_t \qquad (2)$$

ここで

$$F_i = -I + \Pi_1 + \cdots + \Pi_i \, (i = 1, \cdots, k-1)$$
$$\Pi = I - \Pi_1 - \cdots - \Pi_k$$

である。Πの階数によって、プロセスは以下の３通りに分類される。

１．$rank\Pi = p$ (full rank)：Y_tの成分は全て定常
２．$rank\Pi = r$ $(0 < r < p)$：r個の共和分ベクトルが存在する
３．$rank\Pi = 0$：Y_tの成分は「独立」な$I(1)$変数

前節での２変数の例と全く同様、Y_tの各成分が$I(1)$という仮定の下では、(2) 式のΠはフルランクではあり得ない。そこで、Y_tの要素が共和分関係にある（換言すれば$0 < r = rank\Pi < p$という仮説は、Πが$\Pi = \alpha\beta'$と分解可能であることに対応する。ここでα、βは$p \times r$行列である（以上、

Grangerの表現定理）。$\beta' Y_{t-k}$は本論に解説したような意味での ‘error’ であり、β'の行ベクトルを共和分ベクトル（cointegration vector）と呼ぶ。本論でも述べたように、αの行ベクトルは ‘error’ をシステムに送り出すという意味で送出ベクトル（loading vector）と呼ばれている。JohansenのLR検定とは、行列Πのランクを逐次的に検定することで共和分の個数を決める方法である。

（2）式をVECMとみなしたときの行列α、β'の持つ意味は全く前節と同様である。このときβ'のr個の行ベクトルは、Y_tに対する共和分ベクトルになっている。つまり、線形結合$\beta' Y_t$が$I(0)$であり、これは共和分の関係そのものである。行列αの第i行ベクトル（$i=1,\cdots,p$）は、r個の共和分関係（あるいは誤差修正項）の、第i方程式における重みである。

EViewsでは6のバージョンまではデフォルトの共和分検定として、より先進的なJohansenの共和分検定のみをサポートしている。Johansenの共和分検定の利点は、単に共和分の有無の検証のみならず、複数の独立な共和分ベクトルを識別できることにある。すなわちJohansenの共和分検定では、単に共和分の有無を検定するだけでなく、共和分ランクの値によって定式化される共和分のタイプ（例えば①～③）を識別することができる。だが、Johansenの共和分検定を統計理論として理解することはかなり難しい。

Johansen（1988）のLR検定とは、Π行列のランクがいくつであるかを検定で決め、同時に未知パラメターの最尤推定量を求める方法である。（2）式において、Πの最尤推定は次のような手順で行われる。最初の目標は、$F_1,\cdots,F_{k-1}$を既知母数として扱い、Π（あるいはβ）に関する集約対数尤度を構成することである。まずΔY_tとY_{t-k}を$\Delta Y_{t-1},\cdots,\Delta Y_{t-k-1}$に回帰し、それぞれ残差ベクトル$R_{0t}$と$R_{1t}$を得る。

$$Z_{0t} = \Delta Y_t$$

$$Z_{1t} = Y_{t-1}$$

$$Z_{2t} = \left(\Delta Y'_{t-1},\cdots,\Delta Y'_{t-k+1}\right)' \text{かあるいは}$$

$$Z_{2t} = \left(\Delta Y'_{t-1},\cdots,\Delta Y'_{t-k+1},1\right)'$$

とし、さらにZ_{2t}に対応するパラメターをひとまとめにした$p\times\{p(k-1)+1\}$行列をFとする。これで（2）式は一気に簡明に表されて、

$$Z_{0t} = \Pi Z_{1t} + FZ_{2t} + \varepsilon_t, (t=1,\cdots,T) \qquad (3)$$

となる。

Πを固定すれば、Fの最小二乗推定量はε_tが正規分布という仮定の下、$Z_{0t}-\Pi Z_{kt}$をZ_{1t}に回帰することで得られ、次の正規方程式を得る。

$$\sum_{t=k+1}^{T} Z_{0t}Z'_{1t} = \Pi\sum_{t=k+1}^{T} Z_{1t}Z'_{1t} + F\sum_{t=k+1}^{T} Z_{2t}Z'_{1t} \qquad (4)$$

ここで簡略化のため積率行列を

$$M_{ij}=\frac{1}{T}\sum_{t=k+1}^{T}Z_{it}Z'_{jt},(i,j=0,1,2)\qquad(5)$$

と書く。これより正規方程式（4）は次のように書き直すことができる。

$$M_{01}=\Pi M_{12}+F_{22}$$

これをFについて解けば

$$\hat{F}=M_{02}M_{22}^{-1}-\Pi M_{12}M_{22}^{-1}\qquad(6)$$

次に、ΔY_tを$\Delta Y_{t-1}, \Delta Y_{t-2},\cdots, \Delta Y_{t-k+1}$か$\Delta Y_{t-1}, \Delta Y_{t-2},\cdots, \Delta Y_{t-k+1}, 1$に回帰したときの残差ベクトルを$R_{0t}$、$Y_{t-k}$を$\Delta Y_{t-1}, \Delta Y_{t-2},\cdots, \Delta Y_{t-k+1}$か$\Delta Y_{t-1}, \Delta Y_{t-2},\cdots, \Delta Y_{t-k+1}, 1$に回帰したときの残差ベクトルを$R_{kt}$と定義しよう。但し$\Delta Y_{t-1}, \Delta Y_{t-2},\cdots, \Delta Y_{t-k+1}$への回帰は、（1）あるいは（2）において$\mu=0$で、且つそのことが既知である場合おいてなされるものとする。以下では$\mu=0$の場合として議論を進める。これより

$$\hat{Z}_{0t}=\left(\sum_{t=k+1}^{T}Z_{0t}Z'_{2t}\right)\left(\sum_{t=k+1}^{T}Z_{2t}Z'_{2t}\right)^{-1}\cdot Z_{2t}=M_{02}M_{22}^{-1}Z_{2t}$$

となり

$$R_{0t}=Z_{ot}-M_{02}M_{22}^{-1}Z_{2t}\qquad(7)$$

同様に

$$R_{1t}=Z_{0t}-M_{12}M_{22}^{-1}Z_{2t}\qquad(8)$$

以上の議論から、Πを固定したとき、最終的に（4）式は

$$Z_{0t}-\hat{F}Z_{2t}-\Pi Z_{1t}=R_{0t}-\Pi R_{1t}$$

と表され、誤差項独立同一正規分布の仮定の下、Π、Λの尤度関数は

$$|\Lambda|^{-T/2}\exp\left\{-\sum_{t=k+1}^{T}\left(R_{0t}-\Pi R_{1t}\right)'\Lambda^{-1}\times\left(R_{0t}-\Pi R_{1t}\right)/2\right\}$$

となる。これは$M_{ij}=\left(1/T\right)\sum_{t=k+1}^{T}R_{it}R'_{jt}(i,j=0,k)$

$$S_{ij}=M_{ij}-M_{i2}M_{22}^{-1}M_{2j}(i,j=0,1)\qquad(9)$$

に等しい。この２本の補助回帰から残差に関する積率行列を$S_{ij}=T^{-1}\sum_{t=k+1}^{T}R_{it}R'_{jt}$（$i,j=0,1$）で定義す

る。

これを用いてΠ、Λの最尤推定量は

$$\hat{\Pi} = S_{01}S_{11}^{-1}$$
$$\hat{\Lambda} = S_{00} - S_{01}S_{11}^{-1}S_{10}$$

と明示的に書ける。$\hat{F}$については、$\hat{\Pi}$を（12）式に代入すればよい。このとき集約対数尤度は、次の回帰モデルに対応している。

$$R_{0t} = -\alpha\beta' R_{kt} + \mu_t$$

βを一旦固定して考えれば、（15）式はR_{0t}を$-\beta' R_{kt}$に回帰して、β所与の形で$\hat{\alpha}$、$\hat{\Lambda}$を求めることができる。すなわち、

$$\hat{\alpha}(\beta) = -S_{0k}\beta(\beta' S_{kk}\beta)^{-1}$$

$$\hat{\Lambda}(\beta) = S_{00} - S_{0k}\beta(\beta' S_{kk}\beta)^{-1}\beta' S_{k0}$$

を得る。また、Johansen（1988）は、尤度関数の最大化は$\left|\hat{\Lambda}(\beta)\right|$の$\beta$に関する最小化と同値であることを示した。さらに$\hat{\beta}$は固有値問題

$$\left|\lambda S_{kk} - S_{k0}S_{00}^{-1}S_{0k}\right| = 0$$

の解であるp個の固有値$\hat{\lambda}_1 > \cdots > \hat{\lambda}_p > 0$に対応する固有ベクトルを$\hat{V}' S_{kk}\hat{V} = I$に従って基準化した$\hat{V} = [\hat{v}_1, \cdots, \hat{v}_p]$ より得られる。ここまでで未知パラメターの推定は終わっており、次の段階では$\hat{v}_1$から$\hat{v}_p$までのうち、何個までが共和分ベクトルなのかを検定する。もし共和分階数がrなら、$\hat{\lambda}_1$から$\hat{\lambda}_r$までの対応するr個のベクトルを並べて$\hat{\beta}$とする。

これらは、（7）のパラメータの最尤推定に関する事項であるが、共和分ベクトルの数r（換言すれば行列Πのランク；共和分ランク）を検出するに当たって、Johansenはこのp個の固有値に基づく方法を提唱した。これは高々rの共和分ベクトルが存在するという仮説を、残りの$p-r$個の固有値$\lambda_{r+1}, \cdots, \lambda_p$がゼロという仮説検定で置き換えるというものである。

Johansenの記法に従い、（高々r個の共和分ベクトルが存在する）という仮説を$H_0(r)$ と書こう。$H_0(r)$ 対H_1（無制約）の検定は、LR統計量

$$-T\sum_{i=r+1}^{p}\ln(1-\hat{\lambda}_i)$$

に基づいて行われる。$0 \le r < p$であるから、帰無仮説の下、rの値として可能性があるのは$r = 0, 1, \cdots, p-1$であり、それぞれのrの値に対して個別にLRが行われる。

Johansen（1988, Theorem 3）によれば、LR統計量（17）の$H_0(r)$ の下での極限分布は、

$$tr\left\{\int dBB'\left[\int BB'du\right]^{-1}\int BdB'\right\}$$

である。ここで$B(u)$は$p-r$次元ブラウン運動であり、分散行列はI_{p-r}である。ここで述べてきた検定手法を、極限分布の形からトレース検定と呼ぶ。

さらに、$H_0(r)$対$H_0(r+1)(r=0,\cdots,p-1)$の検定も同様に構成できる。これは共和分を追加的にもう１個考慮するモデルの冗長性の検定であり、トレース検定の場合から容易に類推されるように、この際の検定統計量は$-T\ln(1-\hat{\lambda}_{r+1})$である。その極限分布は上の行列の最大固有値であることから、この検定は最大固有値検定と呼ばれる。

Johansenは、検定で常識的に用いられるパーセント点に対し、$p-r=1,2,3,4,5$のケースでシミュレーションで行って、極限分布の数表を作成している（Johansen（1988）のTable1)。極限分布は共和分の個数にしか依存しないことに注意しよう。また、利用可能な数表の都合上pは高々５までである。

Johansenの共和分ランク決定の手続き検定は、rの小さな値、すなわち、０をH_0の値とする出発して、最大$p-1$回の検定を行う、各検定において、H_0が採択されればrの値はそれによって決定され、H_0が棄却されれば、次の検定に進む。すなわち、j番目の検定

$$H_0 : r = j-1 \qquad H_1 : r \geq j$$

において、H_0が採択されれば$r=j-1$と判定し、H_0が棄却されれば次の$j+1$番目の検定

$$H_0 : r = j \qquad H_1 ; r \geq j+1$$

に進む（ただし、$j=1,2,\cdots,p-2$)。$p-1$番目の検定が行われるとき、それは

$$H_0 : r = p-2 \qquad H_1 : r = p-1$$

とみなされるので、H_0の採択や棄却に関わらず、rの値についての結論が得られる。

以上見てきた様に、$\mu\neq 0$である場合（あるいは$\mu=0$が仮定できない場合）の検定統計量は、データ系列（すなわち）そのものの積和行列ではなくて、平均からの偏差としてのデータ系列（すなわち）を用いて近似的に構築されるものとみなすことができる。$\mu\neq 0$である場合に用いられる検定統計量の構築は、以下の様に修正される必要がある。すなわち、$\mu=0$である場合のM_{ij}の構築に用いられたZ_{it}が$Z_{it}-\bar{Z}_i$に置き換えられる。$\mu\neq 0$である場合のM_{ij}は

$$M_{ij} = \sum T^{-1} Z_{it} Z'_{jt} - \left(\frac{T}{T-k-1}\right) \bar{Z}_i \bar{Z}'_j$$

$$\approx \sum \left(Z_{it} - \bar{Z}_i\right)\left(Z_{jt} - \bar{Z}_j\right)'$$

である。$(T-k-1)/T$あるいは$T/(T-k-1)$はTが大きいときほぼ１とみなせることに注意せよ。但し$\bar{Z}_i = T^{-1}\sum Z_i$。後は$\mu=0$である場合の検定統計量と同様の手続きに従へばよい。LR統計量の$H_0(r)$の下での極限分布も同様に導出できる。但しこの場合にはμが$\Pi=\alpha\beta'$を満たすαの１次結合として表される場合（すなわち、$\mu=\alpha\eta$となる様なηが存在する場合）とそうでない場合のそれぞれで異なるものとなってくる。（詳細については、Johansen（1996）やMackinnon et al.（1999）を参照）

3．モンテカルロ実験

この章では、共和分ランクを決定するためのJohansenの手法が有限標本数の下で、どのような性能を示すかを考察するために、(7）あるいは（8）の特殊ケースとしてのVECMに基づいて、モンテカルロ実験を行う。

実験において（ベクトル時系列システムの次元である）pは4に決められる。また、VECMのランク次数kについては4とする。また、ε_tについては、$N(0, 1)$であるものとし、EViewsの正規乱数として生成される。

実験は以下の24個のVECMのモデルそれぞれに対して実行される。それらのVECMは、

$$Y_t = A_1 Y_{t-1} + A_2 Y_{t-2} + A_3 Y_{t-3} + A_4 Y_{t-4} + \mu + \varepsilon_t \qquad (10)$$

と表される、その中のF_i, α, β, μに具体的数値を与える。

モデル１—VECM1-1、このモデルは、(10）式中の

$$A_1 = \begin{bmatrix} 0.5 & 0 & 0 & 0 \\ -0.2 & 0.8 & 0 & 0 \\ -0.5 & 0 & -0.5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.5 \end{bmatrix} \quad A_2 = \begin{bmatrix} 0 & -0.5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -0.5 & 0 \\ 0 & -0.2 & 0 & -0.2 \\ 0 & 0 & -0.5 & 0 \end{bmatrix}$$

$$A_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -0.5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -0.5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -0.5 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad A_4 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & -0.5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -0.5 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \mu = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

ここで

$$\alpha\beta' = A_1 + A_2 + A_3 + A_4 - I = \begin{pmatrix} -0.2 \\ -0.2 \\ -0.2 \\ -0.2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\det\left(I_4 - A_1 Z - A_2 Z^2 - A_3 Z^3 - A_4 Z^4\right) = 0 \qquad (11)$$

を求める。(11）式をMathematinaで計算すると、下のように入力して

```
a0 = {{1,0,0,0},{0,1,0,0},{0,0,1,0},{0,0,0,1}};
a1 = {{0.8,0,0,0},{-0.2,0.8,0,0},{-0.2,0,0.8,0},{0,0,0,0.8}};
a2 = {{0,-0.2,0,0},{0,0,-0.2,0},{0,-0.2,0,-0.2},{0,0,-0.2,0}};
a3 = {{0,0,-0.2,0},{0,0,0,-0.2},{0,0,0,0},{0,-0.2,0,0}};
a4 = {{0,0,0,-0.2},{0,0,0,0},{0,0,0,0},{-0.2,0,0,0}};
bco = {1,1,1,1};
abco = {-0.2,-0.2,-0.2,-0.2};
Print["-(a0-a1-a3-a4)=",-(a0-a1-a2-a3-a4)];
ab[x]=a0-x*a1-(x^2)*a2-(x^3)*a3-(x^4)*a4;
Print["NSolve[Det[ab[x]]==0,x]=",NSolve[Det[ab[x]]□0,x]];
```

その結果、満たすZは、
$(-1.70183;\ -1.07879 \pm 1.48656i;\ 0.389748 \pm 1.59387i;\ 0.919951 \pm 0.878076i;\ 1;\ 1;\ 1)$
となる。ここでiは虚数を表す、このことはZが１か$|Z|>1$となることを意味する。さらに、それはY_tが（18）式であることの要件を満たし且つ$r=1$であることを意味している。

モデル２—VECM1-2、このモデルには、（10）式中の

$$A_1 = \begin{bmatrix} 0.5 & 0 & 0 & 0 \\ -0.2 & 0.8 & 0 & 0 \\ -0.5 & 0 & -0.5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.8 \end{bmatrix} \quad A_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0.5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -0.2 & 0 \\ 0 & -0.5 & 0 & -0.5 \\ 0 & 0 & -0.2 & 0 \end{bmatrix}$$

$$A_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -0.5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -0.2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -0.2 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad A_4 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & -0.5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -0.2 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \mu = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\alpha\beta' = A_1 + A_2 + A_3 + A_4 - I = \begin{pmatrix} -0.5 \\ -0.2 \\ -0.5 \\ -0.2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

同様に、Msthematicaで（11）式を求めると

```
a0 = {{1,0,0,0},{0,1,0,0},{0,0,1,0},{0,0,0,1}};
a1 = {{0.5,0,0,0},{-0.2,0.8,0,0},{-0.5,0,0.5,0},{0,0,0,0.8}};
a2 = {{0,-0.5,0,0},{0,0,-0.2,0},{0,-0.5,0,-0.5},{0,0,-0.2,0}};
a3 = {{0,0,-0.5,0},{0,0,0,-0.2},{0,0,0,0},{0,-0.2,0,0}};
a4 = {{0,0,0,-0.5},{0,0,0,0},{0,0,0,0},{-0.2,0,0,0}};
```

```
bco = {1,1,1,1};
abco = {-0.5,-0.2,-0.5,-0.2};
Print["-(a0-a1-a3-a4)=",-(a0-a1-a2-a3-a4)];
ab[x]=a0-x*a1-(x^2)*a2-(x^3)*a3-(x^4)*a4;
Print["NSolve[Det[ab[x]]==0,x]=",NSolve[Det[ab[x]]□0,x]];
```

その結果満たすZは、

（$-1.34106; -1.0297\pm1.22406i; 0.278615\pm1.16902i; 0.771611\pm1.19272i; 1; 1; 1$）

となる。モデル１の同じに、$r=1$であることを意味している。

モデル３―VECM1-3、このモデルには、(10) 式中の

$$A_1=\begin{bmatrix}0.5 & 0 & 0 & 0\\ -0.2 & 0.8 & 0 & 0\\ -0.5 & 0 & -0.5 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0.8\end{bmatrix}\quad A_2=\begin{bmatrix}0 & -0.5 & 0 & 0\\ 0 & 0 & -0.2 & 0\\ 0 & -0.5 & 0 & -0.5\\ 0 & 0 & -0.2 & 0\end{bmatrix}$$

$$A_3=\begin{bmatrix}0 & 0 & -0.5 & 0\\ 0 & 0 & 0 & -0.2\\ 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & -0.2 & 0 & 0\end{bmatrix}\quad A_4=\begin{bmatrix}0 & 0 & 0 & -0.5\\ 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\\ -0.2 & 0 & 0 & 0\end{bmatrix}\quad \mu=\begin{pmatrix}0\\0\\0\\0\end{pmatrix}$$

$$\alpha\beta'=A_1+A_2+A_3+A_4-I=\begin{pmatrix}-0.5\\-0.2\\-0.5\\-0.5\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 1 & 1 & 1\end{pmatrix}$$

同様に、Msthematicaで（11）式を求めると

```
a0 = {{1,0,0,0},{0,1,0,0},{0,0,1,0},{0,0,0,1}};
a1 = {{0.5,0,0,0},{-0.2,0.8,0,0},{-0.5,0,0.5,0},{0,0,0,0.5}};
a2 = {{0,-0.5,0,0},{0,0,-0.2,0},{0,-0.5,0,-0.5},{0,0,-0.5,0}};
a3 = {{0,0,-0.5,0},{0,0,0,-0.2},{0,0,0,0},{0,-0.5,0,0}};
a4 = {{0,0,0,-0.5},{0,0,0,0},{0,0,0,0},{-0.5,0,0,0}};
bco = {1,1,1,1};
abco = {-0.5,-0.2,-0.5,-0.5};
Print["-(a0-a1-a3-a4)=",-(a0-a1-a2-a3-a4)];
ab[x]=a0-x*a1-(x^2)*a2-(x^3)*a3-(x^4)*a4;
Print["NSolve[Det[ab[x]]==0,x]=",NSolve[Det[ab[x]]□0,x]];
```

その結果満たすZは、
（$-1.14814; -0870606 \pm 1.03802i; 0.213071 \pm 1.1403i; 0.581607 \pm 1.06639i; 1; 1; 1$）
となる。以上のモデルと同じ、$r = 1$であることを意味している。

モデル 4 ―VECM1-4、このモデルには、（10）式中の

$$A_1 = \begin{bmatrix} 0.5 & 0 & 0 & 0 \\ -0.5 & 0.5 & 0 & 0 \\ -0.5 & 0 & -0.5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.5 \end{bmatrix} \quad A_2 = \begin{bmatrix} 0 & -0.5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -0.5 & 0 \\ 0 & -0.5 & 0 & -0.5 \\ 0 & 0 & -0.5 & 0 \end{bmatrix}$$

$$A_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -0.5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -0.5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -0.5 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad A_4 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & -0.5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -0.5 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \mu = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\alpha\beta' = A_1 + A_2 + A_3 + A_4 - I = \begin{pmatrix} -0.5 \\ -0.5 \\ -0.5 \\ -0.5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

同様に、Msthematicaで（11）式を求めると

```
a0 = {{1,0,0,0},{0,1,0,0},{0,0,1,0},{0,0,0,1}};
a1 = {{0.5,0,0,0},{-0.5,0.5,0,0},{-0.5,0,0.5,0},{0,0,0,0.5}};
a2 = {{0,-0.5,0,0},{0,0,-0.5,0},{0,-0.5,0,-0.5},{0,0,-0.5,0}};
a3 = {{0,0,-0.5,0},{0,0,0,-0.5},{0,0,0,0},{0,-0.5,0,0}};
a4 = {{0,0,0,-0.5},{0,0,0,0},{0,0,0,0},{-0.5,0,0,0}};
bco = {1,1,1,1};
abco = {-0.5,-0.5,-0.5,-0.5};
Print["-(a0-a1-a3-a4)=",-(a0-a1-a2-a3-a4)];
ab[x]=a0-x*a1-(x^2)*a2-(x^3)*a3-(x^4)*a4;
Print["NSolve[Det[ab[x]]==0,x]=",NSolve[Det[ab[x]]□0,x]];
```

その結果、満たすZは、
（$-1.09527; -0.830336 \pm 1.09665i; 0.165736 \pm 1.296i; 0.337236 \pm 1.00843i; 1; 1; 1$）
となる。以上のモデルと同じ、$r = 1$であることを意味している。

モデル 5 ―VECM2-1、このモデルには、（10）式中の

$$A_1=\begin{bmatrix}0.8 & -0.2 & 0 & 0\\ -0.2 & 0.8 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0.4 & 0.6\\ 0 & -2 & -0.2 & 0.7\end{bmatrix}\quad A_2=\begin{bmatrix}0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\\ -1 & 3 & 0.2 & 0.3\end{bmatrix}$$

$$A_3=\begin{bmatrix}0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\\ -0.5 & 0 & 0 & 0\\ 1 & -1 & 0 & 0\end{bmatrix}\quad A_4=\begin{bmatrix}0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\\ 0.25 & -0.25 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{bmatrix}\quad \mu=\begin{pmatrix}0\\0\\0\\0\end{pmatrix}$$

$$\alpha\beta'=A_1+A_2+A_3+A_4-I=\begin{pmatrix}-0.2 & 0\\ -0.2 & 0\\ 0 & -0.1\\ 0 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 1 & 0 & 0\\ 2.5 & 2.5 & 6 & -6\end{pmatrix}$$

同様に、Mathematicaで（11）式を求めると

```
a0 = {{1,0,0,0},{0,1,0,0},{0,0,1,0},{0,0,0,1}};
a1 = {{0.8,-0.2,0,0},{-0.2,0.8,0,0},{0,0,0.4,0.6},{0,-2,-0.2,0.7}};
a2 = {{0,0,0,0},{0,0,0,0},{0,0,0,0},{-1,3,0.2,0.3}};
a3 = {{0,0,0,0},{0,0,0,0},{-0.5,0,0,0},{1,-1,0,0}};
a4 = {{0,0,0,0},{0,0,0,0},{0.25,-0.25,0,0},{0,0,0,0}};
ab[x]=a0-x*a1-(x^2)*a2-(x^3)*a3-(x^4)*a4;
Print["-(a0-a1-a3-a4)=",-(a0-a1-a2-a3-a4)];
Print["NSolve[Det[ab[x]]==0,x]=",NSolve[Det[ab[x]]□0,x]];
```

結果によって、満たすZは、(1; 1; 1.666667; 10）となる。それは$r=2$であることを意味している。

モデル6―VECM2-2、このモデルには、(10）式中の

$$A_1=\begin{bmatrix}0.5 & 0.5 & 0 & 0\\ 0.5 & 0.5 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0.4 & 0.6\\ 0 & -2 & -0.2 & 0.7\end{bmatrix}\quad A_2=\begin{bmatrix}0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\\ -1 & 3 & 0.2 & 0.3\end{bmatrix}$$

$$A_3=\begin{bmatrix}0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\\ -0.5 & 0 & 0 & 0\\ 1 & -1 & 0 & 0\end{bmatrix}\quad A_4=\begin{bmatrix}0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\\ 0.25 & -0.25 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{bmatrix}\quad \mu=\begin{pmatrix}0\\0\\0\\0\end{pmatrix}$$

$$\alpha\beta' = A_1 + A_2 + A_3 + A_4 - I = \begin{pmatrix} -0.5 & 0 \\ 0.5 & 0 \\ 0 & -0.1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 2.5 & 2.5 & 6 & -6 \end{pmatrix}$$

同様に、Mathematicaで（11）式を求めると

```
a0 = {{1,0,0,0},{0,1,0,0},{0,0,1,0},{0,0,0,1}};
a1 = {{0.5,0.5,0,0},{0.5,0.5,0,0},{0,0,0.4,0.6},{0,-2,-0.2,0.7}};
a2 = {{0,0,0,0},{0,0,0,0},{0,0,0,0},{-1,3,0.2,0.3}};
a3 = {{0,0,0,0},{0,0,0,0},{-0.5,0,0,0},{1,-1,0,0}};
a4 = {{0,0,0,0},{0,0,0,0},{0.25,-0.25,0,0},{0,0,0,0}};
ab[x]=a0-x*a1-(x^2)*a2-(x^3)*a3-(x^4)*a4;
Print["-(a0-a1-a3-a4)=",-(a0-a1-a2-a3-a4)];
Print["NSolve[Det[ab[x]]==0,x]=",NSolve[Det[ab[x]]□0,x]];
```

結果によって、満たすZは（1; 1; 10）となる。それも$r=2$であることを意味している。

モデル７—VECM2-3、このモデルには、（10）式中の

$$A_1 = \begin{bmatrix} 0.8 & 0.2 & 0 & 0 \\ 0.2 & 0.8 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.4 & 0.6 \\ 0 & -2 & -0.2 & 0.7 \end{bmatrix} \quad A_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 3 & 0.2 & 0.3 \end{bmatrix}$$

$$A_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -0.5 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad A_4 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0.25 & -0.25 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \mu = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\alpha\beta' = A_1 + A_2 + A_3 + A_4 - I = \begin{pmatrix} -0.2 & 0 \\ 0.2 & 0 \\ 0 & -0.1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 2.5 & 2.5 & 6 & -6 \end{pmatrix}$$

同様に、Mathematicaで（11）式を求めると

```
a0 = {{1,0,0,0},{0,1,0,0},{0,0,1,0},{0,0,0,1}};
a1 = {{0.8,0.2,0,0},{0.2,0.8,0,0},{0,0,0.4,0.6},{0,-2,-0.2,0.7}};
a2 = {{0,0,0,0},{0,0,0,0},{0,0,0,0},{-1,3,0.2,0.3}};
```

```
a3 = {{0,0,0,0},{0,0,0,0},{-0.5,0,0,0},{1,-1,0,0}};
a4 = {{0,0,0,0},{0,0,0,0},{0.25,-0.25,0,0},{0,0,0,0}};
ab[x]=a0-x*a1-(x^2)*a2-(x^3)*a3-(x^4)*a4;
Print["-(a0-a1-a3-a4)=",-(a0-a1-a2-a3-a4)];
Print["NSolve[Det[ab[x]]==0,x]=",NSolve[Det[ab[x]]□0,x]];
```

結果によって、満たすZは、(1; 1; 1.66667; 10）となる。それも$r=2$であることを意味している。

モデル８―VECM2-4、このモデルには、(10）式中の

$$A_1=\begin{bmatrix}0.6 & -0.4 & 0 & 0\\ -0.4 & 0.6 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0.4 & 0.6\\ 0 & -2 & -0.2 & 0.7\end{bmatrix}\quad A_2=\begin{bmatrix}0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\\ -1 & 3 & 0.2 & 0.3\end{bmatrix}$$

$$A_3=\begin{bmatrix}0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\\ -0.5 & 0 & 0 & 0\\ 1 & -1 & 0 & 0\end{bmatrix}\quad A_4=\begin{bmatrix}0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\\ 0.25 & -0.25 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{bmatrix}\quad \mu=\begin{pmatrix}0\\0\\0\\0\end{pmatrix}$$

$$\alpha\beta'=A_1+A_2+A_3+A_4-I=\begin{pmatrix}-0.4 & 0\\ 0.4 & 0\\ 0 & -0.1\\ 0 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 1 & 0 & 0\\ 2.5 & 2.5 & 6 & -6\end{pmatrix}$$

同様に、Mathematicaで（11）式を求めると

```
a0 = {{1,0,0,0},{0,1,0,0},{0,0,1,0},{0,0,0,1}};
a1 = {{0.6,-0.4,0,0},{-0.4,0.6,0,0},{0,0,0.4,0.6},{0,-2,-0.2,0.7}};
a2 = {{0,0,0,0},{0,0,0,0},{0,0,0,0},{-1,3,0.2,0.3}};
a3 = {{0,0,0,0},{0,0,0,0},{-0.5,0,0,0},{1,-1,0,0}};
a4 = {{0,0,0,0},{0,0,0,0},{0.25,-0.25,0,0},{0,0,0,0}};
ab[x] = a0-x*a1-(x^2)*a2-(x^3)*a3-(x^4)*a4;
Print["-(a0-a1-a3-a4)=",-(a0-a1-a2-a3-a4)];
Print["NSolve[Det[ab[x]]==0,x]=",NSolve[Det[ab[x]]□0,x]];
```

結果によって、満たすZは、(1; 1; 5; 10）となる。それも$r=2$であることをいみしている。

上記のすべてのモデルにおいて

$$\det(I-\sum_{j=1}^{4}A_jZ^j)=0$$

を満たすZは$Z=1$か$|Z|>1$を満たしている。$Z=1$となる根はVECM1－iにおいて３重根、VECM2－iにおいて２重根となっている。

以上のVECM1-1からVECM2-4までは、$\mu=0$であり、検定統計量として使われる。次に、$\mu\neq 0$且つ$\mu=\alpha\eta$と表されるモデルを紹介する。ここでηは非ゼロのr次元ベクトルである。これらのモデルでは、よく知られているように、$\mu\neq 0$ではあるがY_tの要素には確定的トレンドは現れない。また、各モデルは、$\mu=0$のケースに対応するように設定される。すなわち、以下のモデルVECM3-iはVECM1-iとA_i, α, βを持つ（もちろん、μは異なっている）。同様に、以下のモデルVECM4-iのA_i, α, βはVECM2-iのそれらの同じものとなっている。（ここでi＝1, 2, 3, 4）

モデル９―VECM3-1、VECM1-1の同じA_i, α, βを持つ。だが

$$\mu=\begin{pmatrix}0.4\\0.4\\0.4\\0.4\end{pmatrix}=-2\begin{pmatrix}-0.2\\-0.2\\-0.2\\-0.2\end{pmatrix}=-2\alpha$$

である。(19) によって、結果も同じである。$r=1$であることを意味している。

モデル10―VECM3-2、VECM1-2の同じA_i, α, βを持っている。

$$\mu=\begin{pmatrix}1.0\\0.4\\1.0\\0.4\end{pmatrix}=-2\begin{pmatrix}-0.5\\-0.2\\-0.5\\-0.2\end{pmatrix}=-2\alpha$$

$r=1$であることを意味している。

モデル11―VECM3-3、VECM1-3の同じA_i, α, βを持っている。

$$\mu=\begin{pmatrix}1.0\\0.4\\1.0\\1.0\end{pmatrix}=-2\begin{pmatrix}-0.5\\-0.2\\-0.5\\-0.5\end{pmatrix}=-2\alpha$$

$r=1$であることを意味している。

モデル12―VECM3-4、VECM1-4の同じA_i, α, βを持っている。

$$\mu = \begin{pmatrix} 1.0 \\ 1.0 \\ 1.0 \\ 1.0 \end{pmatrix} = -2\begin{pmatrix} -0.5 \\ -0.5 \\ -0.5 \\ -0.5 \end{pmatrix} = -2\alpha$$

$r = 1$であることを意味している。

モデル13—VECM4-1、VECM2-1の同じA_i, α, βを持っている。

$$\mu = \begin{pmatrix} 1.0 \\ 1.0 \\ 0.2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -0.2 & 0 \\ -0.2 & 0 \\ 0 & 0.1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -5 \\ -2 \end{pmatrix} = \alpha\begin{pmatrix} -5 \\ -2 \end{pmatrix}$$

もちろん、VECM2-1の同じに、$r = 2$であることを意味している。

モデル14—VECM4-2、VECM2-2の同じA_i, α, βを持っている。

$$\mu = \begin{pmatrix} 1.0 \\ 1.0 \\ 0.2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -0.5 & 0 \\ 0.5 & 0 \\ 0 & -0.1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 \\ -2 \end{pmatrix} = \alpha\begin{pmatrix} 2 \\ -2 \end{pmatrix}$$

$r = 2$であることを意味している。

モデル15—VECM4-3、VECM2-3の同じA_i, α, βを持っている。

$$\mu = \begin{pmatrix} -1.0 \\ 1.0 \\ 0.2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -0.2 & 0 \\ 0.2 & 0 \\ 0 & -0.1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 5 \\ -2 \end{pmatrix} = \alpha\begin{pmatrix} 5 \\ -2 \end{pmatrix}$$

$r = 2$であることを意味している。

モデル16—VECM4-4、VECM2-4の同じA_i, α, βを持っている。

$$\mu = \begin{pmatrix} 1.0 \\ 1.0 \\ 0.2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.4 & 0 \\ 0.4 & 0 \\ 0 & -0.1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -2.5 \\ -2 \end{pmatrix} = \alpha\begin{pmatrix} -2.5 \\ -2 \end{pmatrix}$$

$r=2$であることを意味している。

第３のモデル群としてのVECM5-1からVECM6-4まででは$\mu\neq 0$且つμはαの１次結合として表されないものとなっている。これらのモデルは、よく知られているように、Y_tの要素（の少なくとも１つ）に非ゼロの確定的トレンドが現れる。また、各モデルは、$\mu=0$のケースや$\mu\neq 0$且つ$\mu=\alpha\eta$のケースに対応するように設定される。すなわち、以下のモデルVECM5-iはVECM1-iやVECM3-iと同一のA_i, α, βを持つ。同様に、以下のVECM6-iのA_i, α, βはVECM2-iやVECM4-iのそれらと同じものになっている。（ここでi = 1, 2, 34）

モデル17―VECM5-1、VECM1-1とVECM3-1の同じA_i, α, βを持っている。だが

$$\mu = (0.8 \quad 0 \quad 0.6 \quad 1.4)'$$

なる。

モデル18―VECM5-2、VECM1-2とVECM3-2の同じA_i, α, βを持っている。

$$\mu = (0.8 \quad 0 \quad 0.6 \quad 1.4)'$$

なる

モデル19―VECM5-3、VECM1-3とVECM3-3の同じA_i, α, βを持っている。

$$\mu = (0.8 \quad 0 \quad 0.6 \quad 1.4)'$$

なる

モデル20―VECM5-4、VECM1-4とVECM3-4の同じA_i, α, βを持っている。

$$\mu = (0.8 \quad 0 \quad 0.6 \quad 1.4)'$$

なる

モデル21―VECM6-1、VECM2-1とVECM4-1の同じA_i, α, βを持っている。

$$\mu = (0.8 \quad 0 \quad 0.6 \quad 1.4)'$$

なる

モデル22―VECM6-2、VECM2-2とVECM4-2の同じA_i, α, βを持っている。

$\mu = (0.8 \quad 0 \quad 0.6 \quad 1.4)'$

なる

モデル23―VECM6-3、VECM2-3とVECM4-3の同じA_i, α, βを持っている。

$\mu = (0.8 \quad 0 \quad 0.6 \quad 1.4)'$

なる

モデル24―VECM6-4、VECM2-4とVECM4-4の同じA_i, α, βを持っている。

$\mu = (0.8 \quad 0 \quad 0.6 \quad 1.4)'$

なる

以上のモデルのそれぞれにおいて、$T = 100$及び$T = 200$において、Johansenの手法によるrの決定が、5000回の実験により実行された、以下の表1から表6は、各モデルの5000回実験中での（rとして決定された）それぞれの値（0, 1, 2, 3）の相対度数（確率）を記録したものである。計算はすべてEViews（Ver6）で実行された。(7) 式のε_tのそれぞれの要素は系列的にも要素間的にも独立な標準正規分布をする確率変数として、EViewsの標準正規疑似乱数を用いて生成される。また、各LR検定（トレース検定）は5％有意水準に基づいてなされ、臨界点はEViewsのJohansen検定で用いられているもの（基本的にはMacKinnon et al, (1999) による）に従った。

表1　γ＝1が真のモデル　　μ＝0ケース

モデル	標本数	γ ＝ 0	γ ＝ 1	γ ＝ 2	γ ＝ 3
VECM　1 － 1	T = 100	0.035400	0.892400	0.068000	0.004200
	T = 200	0.000000	0.957200	0.039800	0.003000
VECM　1 － 2	T = 100	0.001000	0.942800	0.054600	0.001600
	T = 200	0.000000	0.964800	0.034200	0.001000
VECM　1 － 3	T = 100	0.000000	0.959400	0.039400	0.001200
	T = 200	0.000000	0.967600	0.030400	0.002000
VECM　1 － 4	T = 100	0.000000	0.956800	0.041400	0.001800
	T = 200	0.000000	0.971600	0.027200	0.001200

表２　γ＝２が真のモデル　　μ＝０ケース

モデル	標本数	γ＝0	γ＝1	γ＝2	γ＝3
VECM　2－1	T＝100	0.008400	0.731600	0.241200	0.018800
	T＝200	0.000000	0.225200	0.742400	0.032400
VECM　2－2	T＝100	0.000400	0.311200	0.660000	0.028400
	T＝200	0.000000	0.003600	0.970000	0.026400
VECM　2－3	T＝100	0.004800	0.602800	0.370200	0.022200
	T＝200	0.000000	0.101600	0.873200	0.025200
VECM　2－4	T＝100	0.002000	0.534800	0.432400	0.030800
	T＝200	0.000000	0.029400	0.939600	0.031000

表３　γ＝１が真のモデル　　μ＝αηケース

モデル	標本数	γ＝0	γ＝1	γ＝2	γ＝3
VECM　3－1	T＝100	0.006000	0.973000	0.020600	0.000400
	T＝200	0.000000	0.985400	0.014600	0.000000
VECM　3－2	T＝100	0.000200	0.982000	0.017800	0.000000
	T＝200	0.000000	0.992400	0.007400	0.000200
VECM　3－3	T＝100	0.000400	0.983600	0.016000	0.000000
	T＝200	0.000000	0.993800	0.006200	0.000000
VECM　3－4	T＝100	0.105400	0.870400	0.023600	0.000600
	T＝200	0.000200	0.988200	0.011400	0.000200

表４　γ＝２が真のモデル　　μ＝αηケース

モデル	標本数	γ＝0	γ＝1	γ＝2	γ＝3
VECM　4－1	T＝100	0.016200	0.753200	0.221800	0.008800
	T＝200	0.000000	0.330200	0.657000	0.012800
VECM　4－2	T＝100	0.005400	0.496800	0.490400	0.007400
	T＝200	0.000000	0.020200	0.971200	0.008600
VECM　4－3	T＝100	0.011200	0.649200	0.333000	0.006600
	T＝200	0.000000	0.159600	0.834200	0.006200
VECM　4－4	T＝100	0.013800	0.685600	0.290800	0.009800
	T＝200	0.000000	0.120800	0.866800	0.012400

表５　$\gamma=1$ が真のモデル　　$\mu\neq\alpha\eta$ ケース

モデル	標本数	$\gamma=0$	$\gamma=1$	$\gamma=2$	$\gamma=3$
VECM　５－１	T＝100	0.001600	0.949600	0.047000	0.001800
	T＝200	0.000000	0.969600	0.028800	0.001600
VECM　５－２	T＝100	0.000000	0.954200	0.043800	0.002000
	T＝200	0.000000	0.971400	0.028000	0.000600
VECM　５－３	T＝100	0.000000	0.960000	0.038000	0.002000
	T＝200	0.000000	0.973800	0.025000	0.002800
VECM　５－４	T＝100	0.031600	0.910600	0.053200	0.004600
	T＝200	0.000000	0.957200	0.040000	0.002800

表６　$\gamma=2$ が真のモデル　　$\mu\neq\alpha\eta$ ケース

モデル	標本数	$\gamma=0$	$\gamma=1$	$\gamma=2$	$\gamma=3$
VECM　６－１	T＝100	0.013000	0.730200	0.237200	0.019600
	T＝200	0.000000	0.293400	0.677400	0.029200
VECM　６－２	T＝100	0.001200	0.367800	0.605600	0.025400
	T＝200	0.000000	0.007400	0.969400	0.023200
VECM　６－３	T＝100	0.006600	0.627800	0.349600	0.016000
	T＝200	0.000000	0.137200	0.842400	0.020400
VECM　６－４	T＝100	0.006600	0.596200	0.371200	0.026000
	T＝200	0.000000	0.068000	0.901800	0.030200

共和分ランクrを検出するためにのJohansenの手法は、既に述べたように、Johansen検定をいくつか組み合わせて、rの正しい値を検出しようとするものである。全体として、JohansenのLR検定は高い確率で正しい共和分ランクの値（このケースでは１）を決定している。標本数100の場合と200の場合の結果の差はほとんど認められない。共和分ランクの検出において、標本数100においてさえ非常に望ましい結果が得られている。VECM1-1、VECM3-1及びVECM5-1のモデル（これのモデルは既に説明したように定数項部分を除けば、同じものとなっている）においては、少し適中率が下がっている。また、標本数が100から200に増えると、相当に結果が改善されてくる。真の共和分ランクが１のモデルの場合に比べて、全体としてJohansen手法の適中率が相当に低くなっている。VECM2-4、VECM4-2及びVECM6-2のモデルでは標本数200の場合ですら、適中率は70％前後でしかなかった。また、標本数100の場合の結果は大変悪くなっており。どのモデルにおいても標本数200になるとことで著しく結果が改善されている。モデルにおける定数項ベクトルμの存在はJohansen手法の適中率（の良し悪し）にあまり影響を与えていない。すなわち､μの部分を除いて同一となる。３つのモデル（例えば､VECM1-1､VECM3-1及びVECM5-1とか）において、適中率の結果に本質的な差は認められないように思える。

４．まとめ

本稿での（モンテカルロ実験）を通して、見出されることとしては、定数項の存在が共和分ランクの検出の良し悪しにあまり影響を与えていないという事項が挙げられる。定数項がゼロであろうが共和分行列を構成する行列αの一次結合として表されようが表されないものであろうが、真の共和分ランクの値を適中させる確率に本質的な違い認められなかった。また、本稿でのモンテカルロ実験を通して、顕著に観察できるもう一つの事項は、真の共和分ランクの適中率は、そのランクの値が大きくなるほど悪くなってきているということである。このことは、真の共和分ランク値が大きくなるにつれて、実施しなければならない（あるいは、棄却されなければならない）Johansen検定の数が増大していくということである程度説明できるかもしれない。つまり、数多の検定を経ることで、各検定での誤差（誤った判断をする確率）が集積されていって、結果的により大きな誤差（引き起こす確率）を生み出すかもしれないということである。また、Johansen検定は、小標本において相当パワーが低くなっているということも予想される。パワーが低いので、各検定において間違って採択という判定を下してしまう、確率が高くなっているものと思われる。

次に、JohansenのLR検定を実行する際に生じる問題点を指摘しておこう。１つはJohansenのLR検定の前提条件に関することであり、もう１つは検定それ自体に伴う問題点である。

JohansenのLR検定を実行するには、全変数が$I(1)$であることが前提である。しかし、経済変数が真に$I(1)$プロセスであるかどうかは議論の分かれるところであろう。これまで提案されてきた確率過程の非定常性についての検定法の多くは、帰無仮説に非定常をとるので、JohansenのLR検定には有利な形式といえるかもしれない。しかし、多くの実証論たって確率的トレンド（stochastic trend）を持つとは結論できないようである（例えばTakeuchi（1991）を参照）。Johansenの手法自体の問題ではないが、経済変数をどういったプロセスで特徴でけたらよいかは、難しい問題である。さらに、単位根を単根しか考慮しないことや、文中に指摘されているように、構造変化を考慮に入れれば、必ずしもサンプル期間全てにわ常にVARというシステム的アプローチをとらねばならないことなども制約的に感じられるかもしれない。特にVARという定式化がデータの記述に不適当な場合には、Johansen流のECMを考えることは誤った結論を導く可能性が多きいといえよう。

漸近理論に基づく検定である以上、（本論文で扱われたもの）より小標本でのパフォーマンスが問題とされることもあるであろう。この点を論じたものとしてPodivinsky（1990）がある。彼は標本数が50と100の２つの場合でシミュレーションを行い、Johansen（1988）を作成した有意点について調べている。これによるとJohansenのトレース検定では、仮説$r=0$（つまり共和分が存在しない）は概して棄却されやすく、$r \leq 1, r \leq 2, \cdots$は受容されやすい傾向にあり、小標本においては検定のサイズが合わないことが指摘されている。

有限標本でのサイズ不一致については、実証分析におけるJohansenのLR検定の使用頻度を考えれば、今後さらに多くの研究がなされてしかるべきであると思われる。

参考文献

Banerjee, A., Dolado, J. J., Galbraith, J. W. and Hendry, D. F. (1993) *Co-Integration, Error-Correction and the Econometric Analysis of Non-stationary Data*, Oxford: Oxford University Press.

Engle, R. F. and Granger, C. W. J. (1987) Co-integration and error-correction: Representation, estimation and testing, *Econometrica*, 55, 251-76.

EViews 5 User's Guide (2004), Irvine CA: Quantitative Micro Software.

Johansen, S., (1988) Statistical analysis of cointegration vectors, *Journal of Economic Dynamics and Control*, 12, 231-54.

畠中道雄『計量経済学の方法』、創文社、1991年

Hargreaves, C. P. (1994) "A Review of Methods of Estimating Cointegrating Relationships," in Hargreaves, C. P. (ed.), *Non-stationary Time Series Analysis and Coitegration*, pp. 87-131, Oxford University Press, Oxford.

Johansen, S., (1991) Estimation and hypothesis testing of cointegration vectors in Gaussian vector autoregressive models, *Econometrica*, 59, 1551-1580.

Johansen, S. (1992) Determination of cointegration rank in the presence of a linear trend, *Oxford Bulletin of Economics and Statistics*, 54, 383-397.

Johansen, S.(1996) *Likelihood-based Inference in Cointegrated Vector Autoregressive Models*, Oxford: Oxford University Press (2nd printing).

川崎能典（1992）『Johansenの共和分検定について』『金融研究』（日本銀行） 第２号

MacKinnon, J. G., Haug, A. A., and Michelis, L.(1999) Numerical distribution function of likelihood ratio tests for cointegration, *Journal of Applied Econometrics*, 14, 563-577.

蓑谷千凰彦（2003）『計量経済学』（第２版），多賀出版.

森棟公夫（1999）『計量経済学（プログレッシブ経済学シリーズ）』，東洋経済新報社.

Odaki, M. (2011) Finite lag order vector autoregressions and cointegrating rank detection, *The Hiroshima Economic Review*, forthcoming,（広島大学経済論叢，第32巻，第３号）

Podivinsky, J. M., "Testing Misspecified Cointegrating Relationships," Working Paper No. 19/90, Department of Econometrics, Faculty of Economics Commerce & Management, Monash University,(1990).

Saikkonen, P.(1992) Estimation and testing of cointegrated systems by an autoregressive approximation, *Econometric Theory*, 9, 1-27.

Saikkonen, P. and R. Luukkonen (1997) Testing cointegration in infinite order vector autoregressive processes, *Journal of Econometrics*, 81, 93-126.

Takeuchi, Y. "Trends and Structural Changes in Macroeconomic Time Series," *Journal of Japan Statistical Society* 21, 1991, pp. 13-25

Toda, H.Y. (1994) Finite sample properties of likelihood ratio tests for cointegrating ranks when linear trends are present, *Review of Economics and Statistics*, 76, 66-79.

Toda, H. Y. (1995) Finite sample performance of likelihood ratio tests for cointegrating ranks in vector autoregressions, *Econometric* Theory, 11, 1015-1032.

附録

```
This is to calculate Critical Values for Johansen Test
' for the cases in which there are no deterministic trends
'and the system dimension = 4 and the cointegrating rank = 1

wfcreate(wf="f:¥economic time series analysis¥vectm-4-200-1-2")   q 1950q 1  1999q4

!tab0= 0
!tab1= 0
!tab2= 0
!tab3= 0

!ttab0= 0
!ttab1= 0
!ttab2= 0
!ttab3= 0

scalar ee11
scalar ee22
scalar ee33
scalar ee44
scalar tc

!a= 1
vector(4) v
scalar n=200
scalar nr=5000
scalar v0
scalar v1
scalar v2
scalar v3

vector(4) vv
scalar vv0
scalar vv1
scalar vv2
scalar vv3

scalar nni
nni=n/(n-4)

while   !a <=  nr

sym(4,4) r00
sym(4,4) r11
matrix(4,4) r01
matrix(4,4) r10
matrix(4,12) r02
matrix(12,4) r20
matrix(4,12) r12
matrix(12,4) r21
sym(12,12) r22
sym(12,12) r22inv
sym(4,4) s00
sym(4,4) s00inv
matrix(4,4) s01
matrix(4,4) s10
sym(4,4) s11
sym(4,4) s11inv
vector(4) s00a
matrix(4,4) s00v
matrix(4,4) s00vt
sym(4) s00d
sym(4) s00h
sym(4) sbase
vector(4) s00a
vector(4) sbasea
scalar sb1
scalar sb2
scalar sb3
scalar sb4
scalar test0
scalar test1
scalar test2
```

```
sym(4,4) rr00
sym(4,4) rr11
matrix(4,4) rr01
matrix(4,4) rr10
matrix(4,12) rr02
matrix(12,4) rr20
matrix(4,12) rr12
matrix(12,4) rr21
sym(12,12) rr22
sym(12,12) rr22inv
sym(4,4) ss00
sym(4,4) ss00inv
matrix(4,4) ss01
matrix(4,4) ss10
sym(4,4) ss11
sym(4,4) ss11inv
vector(4) ss00a
matrix(4,4) ss00v
matrix(4,4) ss00vt
sym(4) ss00d
sym(4) ss00h
sym(4) ssbase
vector(4) ss00a
vector(4) ssbasea
scalar ssb1
scalar ssb2
scalar ssb3
scalar ssb4
scalar ttest0
scalar ttest1
scalar ttest2

vector(4) ea0t
vector(4)  y0t
vector(4)  y1t
vector(4)  y2t
vector(4)  y3t
vector(4)  y4t

vector(4)  dy0t
vector(4)  dy1t
vector(4)  dy2t
vector(4)  dy3t

vector(12)  dz1t

rowvector(4) dy0
rowvector(4) y1
rowvector(12) dz1

vector(4)   ay1t
vector(4)   ady0t
vector(12)  adz1t

rowvector(4) ay1
rowvector(4) ady0
rowvector(12) adz1

y4t=@filledvector(4,0)
y3t=@filledvector(4,0)
y2t=@filledvector(4,0)
y1t=@filledvector(4,0)
y0t=@filledvector(4,0)
dy3t=@filledvector(4,0)
dy2t=@filledvector(4,0)
dy1t=@filledvector(4,0)
dy0t=@filledvector(4,0)
dz1t=@filledvector(12,0)

ay1t=@filledvector(4,0)
ady0t=@filledvector(4,0)
adz1t=@filledvector(12,0)

matrix(4,4) a1
matrix(4,4) a2
matrix(4,4) a3
matrix(4,4) a4
matrix(4,4) a1t
matrix(4,4) a2t
matrix(4,4) a3t
```

```
matrix(4,4) a4t

a1=@filledmatrix(4,4,0)
a2=@filledmatrix(4,4,0)
a3=@filledmatrix(4,4,0)
a4=@filledmatrix(4,4,0)

 a1(1,1)=0.5
a1(2,1)=-0.2
a1(2,2)=0.8
a1(3,1)=-0.5
a1(3,3)=0.5
a1(4,4)=0.5

a2(1,2)=-0.5
a2(2,3)=-0.2
a2(3,2)=-0.5
a2(3,4)=-0.5
a2(4,3)=-0.5

a3(1,3)=-0.5
a3(2,4)=-0.2
a3(4,2)=-0.5

a4(1,4)=-0.5
a4(4,1)=-0.5

r00=@filledmatrix(4,4,0)
r01=@filledmatrix(4,4,0)
r11=@filledmatrix(4,4,0)
r22=@filledmatrix(12,12,0)
r20=@filledmatrix(12,4,0)
r21=@filledmatrix(12,4,0)

scalar s00a 1
scalar s00a 2
scalar s00a 3
scalar s00a 4

for !t= 5  to n
y4t=y3t
y3t=y2t
y2t=y1t
y1t=y0t
dy3t=dy2t
dy2t=dy1t
dy1t=dy0t

 ee11=@nrnd
 ee22=@nrnd
 ee33=@nrnd
 ee44=@nrnd
 ea0t.fill ee11, ee22, ee33, ee44

 y0t=a1*y1t+a2*y2t+a3*y3t+a4*y4t+ea0t
 dy0t=y0t-y1t

 matplace(dz1t,dy1t,1,1)
 matplace(dz1t,dy2t,5,1)
 matplace(dz1t,dy3t,9,1)

 dy0=@transpose(dy0t)
 y1=@transpose(y1t)
 dz1=@transpose(dz1t)

r00=r00+(dy0t*dy0)/n
r01=r01+(dy0t*y1)/n
r11=r11+(y1t*y1)/n
r22=r22+(dz1t*dz1)/n
r20=r20+(dz1t*dy0)/n
r21=r21+(dz1t*y1)/n

ay1t=ay1t+y1t/n
ady0t=ady0t+dy0t/n
adz1t=adz1t+dz1t/n

 next

r12=@transpose(r21)
```

```
r02=@transpose(r20)
r22inv=@inverse(r22)

s00=r00-r02*r22inv*r20
s01=r01-r02*r22inv*r21
s11=r11-r12*r22inv*r21
s10=@transpose(s01)
s00inv=@inverse(s00)
s11inv=@inverse(s11)
s00a=@eigenvalues(s00)
s00a 1 =s00a(1)
s00a 2 =s00a(2)
s00a 3 =s00a(3)
s00a 4 =s00a(4)
s00d(1,1)=1/sqr(abs(s00a 1 ))
s00d(1,2)= 0
s00d(1,3)= 0
s00d(1,4)= 0
s00d(2,2)=1/sqr(abs(s00a 2 ))
s00d(2,3)= 0
s00d(2,4)= 0
s00d(3,3)=1/sqr(abs(s00a 3 ))
s00d(3,4)= 0
s00d(4,4)=1/sqr(abs(s00a 4 ))
s00v=@eigenvectors(s00)
s00vt=@transpose(s00v)
s00h=s00vt*s00d*s00v
sbase=s00h*s01*s11inv*s10*s00h
sbasea=@eigenvalues(sbase)
sb1=sbasea(1)
sb2=sbasea(2)
sb3=sbasea(3)
sb4=sbasea(4)

!test0=n*(sb1+sb2+sb3+sb4)
!test1=n*(sb1+sb2+sb3)
!test2=n*(sb1+sb2)

if  !test0  <  40.17493  then
!tab0= !tab0+ 1
else
if  !test1  <  24.27596  then
!tab1= !tab1+ 1
else
if  !test2  < 12.3209 then
!tab2= !tab2+ 1
else
!tab3= !tab3+ 1
endif
endif
endif

ay1=@transpose(ay1t)
ady0=@transpose(ady0t)
adz1=@transpose(adz1t)


rr00=r00-nni*(ady0t*ady0)
rr01=r01-nni*(ady0t*ay1)
rr11=r11-nni*(ay1t*ay1)
rr22=r22-nni*(adz1t*adz1)
rr20=r20-nni*(adz1t*ady0)
rr21=r21-nni*(adz1t*ay1)

r r12=@transpose(rr21)
rr02=@transpose(rr20)
rr22inv=@inverse(rr22)

ss00=rr00-rr02*rr22inv*rr20
ss01=rr01-rr02*rr22inv*rr21
ss11=rr11-rr12*rr22inv*rr21
ss10=@transpose(ss01)
ss00inv=@inverse(ss00)
ss11inv=@inverse(ss11)
ss00a=@eigenvalues(ss00)
s00a 1 =ss00a(1)
s00a 2 =ss00a(2)
s00a 3 =ss00a(3)
s00a 4 =ss00a(4)
ss00d(1,1)=1/sqr(abs(s00a 1 ))
```

```
ss00d(1,2)= 0
ss00d(1,3)= 0
ss00d(1,4)= 0
ss00d(2,2)=1/sqr(abs(s00a 2 ))
ss00d(2,3)= 0
ss00d(2,4)= 0
ss00d(3,3)=1/sqr(abs(s00a 3 ))
ss00d(3,4)= 0
ss00d(4,4)=1/sqr(abs(s00a 4 ))
ss00v=@eigenvectors(ss00)
ss00vt=@transpose(ss00v)
ss00h=ss00vt*ss00d*ss00v
ssbase=ss00h*s01*ss11inv*ss10*ss00h
ssbasea=@eigenvalues(ssbase)
ssb1=ssbasea(1)
ssb2=ssbasea(2)
ssb3=ssbasea(3)
ssb4=ssbasea(4)

!ttest0=n*(ssb1+ssb2+ssb3+ssb4)
!ttest1=n*(ssb1+ssb2+ssb3)
!ttest2=n*(ssb1+ssb2)

if  !ttest0  <  54.07904  then
!ttab0= !ttab0+ 1
else
if  !ttest1  <  35.19275  then
!ttab1= !ttab1+ 1
else
if  !ttest2  < 20.26184 then
!ttab2= !ttab2+ 1
else
!ttab3= !ttab3+ 1
endif
endif
endif

!a=!a+ 1
wend
v0=!tab0/nr
v1= !tab1/nr
v2= !tab2/nr
v3=!tab3/nr
v(1)=!tab0/nr
v(2)=!tab1/nr
v(3)=!tab2/nr
v(4)=!tab3/nr
show v

vv0=!ttab0/nr
vv1=!ttab1/nr
vv2=!ttab2/nr
vv3=!ttab3/nr
vv(1)=!ttab0/nr
vv(2)=!ttab1/nr
vv(3)=!ttab2/nr
vv(4)=!ttab3/nr
show vv

 table(4,2) CVA

 setcell(CVA,1,1,"LR* Johansen test for
  cointegrating rank = 0; the probability that  the
  null is accepted")
 setcell(CVA,1,2,v0)
 setcell(CVA,2,1,"LR* Johansen test for
  cointegrating rank = 1; the probability  that  the
  null is accepted")
 setcell(CVA,2,2,v1)
 setcell(CVA,3,1,"LR* Johansen test for
  cointegrating rank = 2; the probability  that  the
  null is accepted")
 setcell(CVA,3,2,v2)
 setcell(CVA,4,1,"LR* Johansen test for
  cointegrating rank = 2; the probability  that  the
  null is rejected")
 setcell(CVA,4,2,v3)

 table(4,2) CCVA
```

```
setcell(CCVA,1,1,"LR+ Johansen test for
 cointegrating rank = 0; the probability that  the
 null is accepted")
setcell(CCVA,1,2,vv0)
setcell(CCVA,2,1,"LR+ Johansen test for
 cointegrating rank = 1; the probability  that  the
 null is accepted")
setcell(CCVA,2,2,vv1)
setcell(CCVA,3,1,"LR+ Johansen test for
 cointegrating rank = 2; the probability  that  the
 null is accepted")
setcell(CCVA,3,2,vv2)
setcell(CCVA,4,1,"LR+ Johansen test for
 cointegrating rank = 2; the probability  that  the
 null is rejected")
setcell(CCVA,4,2,vv3)
```