広島大学大学院教育学研究科紀要　第二部　第63号　2014　29－37

コンピュータを活用した数学的モデリング（Ⅲ）

― ラプラス方程式を教材として ―

下村　哲・伊藤雅明[1]・平岡賢治[2]
（2014年10月２日受理）

Mathematical Modelling by Using Computer（Ⅲ）
― Using Laplace equation ―

Tetsu Shimomura, Masaaki Ito and Kenji Hiraoka

Abstract: The purpose of a series of our studies is to discuss effective method of mathematical modelling by using computer. In this paper, activities for mathematical exploration by using computer are focused. For this purpose, we treated Laplace equation and studied some basic properties of harmonic functions, Poisson integrals, and the Dirichlet problem for the unit disk. A feature of the method is to provide situations in which students make mathematical models. And another feature is to give students enough time to get the numerical calculation and make conjectures on some results by using computer. The practice shows that some students had difficulty in making and solving mathematical models by using computer, but gradually felt interested in considering about some phenomenon.

Key words: mathematical modelling, computer
キーワード：数学的モデリング，コンピュータ

１．はじめに

本研究は，数学教育におけるコンピュータの活用に関する研究（高橋 , 1992；飯島他 , 1995；佐伯他 , 1997；下村・今岡・向谷，2002；下村・今岡，2014等）や数学的モデリングに関する研究（三輪，1983;下村・伊藤 , 2004, 2005, 2008;下村・平岡 , 2005;西村 , 2012等）を踏まえ，将来の数学教師を目指す大学生による数式処理ソフト（Wolfram Research 社の Mathematica）を活用した数学的モデリングとその意義を考察することを目的とするものである。本研究の論文（下村・伊藤 , 2005）では，将来数学教師を目指す大学生を対象に，1種類，2種類及び3種類の生物の個体数の変化を調べるという現実問題について数学的モデル（差分方程式，微分方程式）を作り，コンピュータを活用してシミュレーションを行う授業を試み，大学生に対する数学的モデリングの意義とその方法について考察を行った。本研究（Ⅱ）では，感染症流行モデル（W. O. Kermack, A. G. McKendrick, 1927）について，数学的モデル（微分方程式）を作り，コンピュータを活用したシミュレーションを行いながら，現実問題の数学化，シミュレーションの観察，予想，検証という一連の過程を経験させる授業展開を試みた（下村・伊藤 , 2008）。

また，著者達は，熱伝導現象を記述するラプラス方程式を教材として扱い，教師，友人とともに現実問題の考察から数学的問題を，さらに数学的モデル（偏微分方程式）を作り，コンピュータを活用したシミュレーション結果を視覚的に観察して，数学的問題を解決することを試みた（下村・伊藤・山田 , 2005）。しかし，この実践においては，解析学においてよく知られた古

[1]広島大学大学院工学研究院
[2]長崎大学教育学部

典的で興味深い，単位円板におけるディリクレ問題を扱えなかった。ここで，ディリクレ問題とは，Ωを有界領域，fをΩの境界$\partial\Omega$上の関数とするとき，Ωでラプラス方程式を満足し，$u(y)=f(y)$（$y\in\partial\Omega$）となるuを求める問題のことをいう。また，十分なシミュレーションを行っての考察が出来ず，コンピュータの有用性を伝えるのに少し不十分さが残った。ラプラス方程式の解の研究については，例えば，文献（S. Axler et al., 1992）を参照してほしい。

本稿では，再度，シミュレーションの有用性を理解させるためにラプラス方程式を教材として扱うこととし，教師，友人とともに数学的モデル（偏微分方程式）を作り，コンピュータを活用したシミュレーションを行い，数学化，シミュレーション，観察，現実問題の解釈という一連の過程を経験させる授業展開を試みた。前回のラプラス方程式を教材とした実践との違いは，単位円板におけるディリクレ問題を解決するための差分スキームを作りシミュレーションを行い，シミュレーション結果を視覚的に観察させる授業内容を加えた点である。さらに，ポアソンの積分公式やポアソン核の基本的性質を確認した上で，単位円板におけるディリクレ問題を解き，数値解と厳密解を比較する授業内容も加えた。

２．コンピュータを活用した数学的モデリング

本稿では，数学的モデリングを，本研究の論文（下村・伊藤，2005）のように捉える（三輪，1983；Burghes-Borrie，1990；小山，1990等を参照）。

近年，数学教育において数学的モデリングの研究，特に数学的モデリング過程に関する研究が行われ，さらに数学的モデリングを遂行する上で必要な考え方や能力を育成できる教師教育が重要になってきている（西村，2012）。そこで，著者の一人が，平成18年11月から平成19年1月にかけて，所属する教育学部における数理の授業（選択授業）の中で，主に，数学教育における数式処理ソフトMathematicaの利用を念頭に置いて行った数学的モデリングの5回の授業に関する考察を行う。以下に示すのは，講義に常時出席した大学4年生4名を対象にしたものである。

学生は，1年次に偏微分法を学習し，2年次にコンピュータ基礎演習の授業において，高校数学，微分法，積分法の簡単な計算を行うためのMathematicaの基本的操作を学習している。学生は，Mathematicaを活用して簡単な微分方程式や連立微分方程式の解曲線を描いたり，生物の個体数の変化について数学的モデルを作り，コンピュータを活用してシミュレーションしたりすることも経験している。

ラプラス方程式を教材として選んだのは，3年次に，熱伝導を記述する方程式として学習をしており，学生にとって身近な現象として捉えることができるものと考えたからである。また，2次元ラプラス方程式の解である調和関数は3年次に学習する正則関数と関係があるので，学生にとって興味深い学習内容になると考えたからでもある。

(I) 問題とねらい

平成18年11月27日に，次の現実問題をもとにして授業を行った。その現実問題，ねらいは次のとおりである。

現実問題．断面が正方形の十分に長い柱状の（熱伝導のよい）物体を氷水（0℃）の中に入れ，上部を室温（25℃）にさらしたときの物体内部の温度分布を調べよ。

ねらい：

１．将来，生徒に数学的モデリングの指導ができるための経験をする
２．現実問題を数学的問題とする数学化の過程を通して，数学的活動を実際に経験し，その有用性を理解する
３．予想をたてたり，発展的な考え方をする上で，コンピュータの有効性を理解する
４．具体的な事例を通して，偏微分方程式や差分方程式の必要性を理解する
５．具体的な事例を通して，テイラー展開や関数論の必要性を理解する

これらの設定において，次のような，これまでの本研究との違いを出した。

ねらい２に関連して

数学化の過程は，近年その重要性が指摘されている。既習の内容を現実問題に適用させることを通して理想化や抽象化を経験させることをねらいとした。

ねらい３に関連して

これまでの本研究と異なり，大学生になって学習する偏微分方程式を扱うことにより，学生が身近な熱伝導現象をコンピュータ活用により解析する機会を設けることをねらいとした。

ねらい５に関連して

これまでの本研究と異なり，大学生になって学習す

る関数論と関係がある偏微分方程式を扱うことにより，学生にとって興味深い学習内容である関数論における古典的な結果の美しさや応用性に触れる機会を設けることをねらいとした。

(II) 数学的モデリングの授業実践

（1）授業の展開

扱う数学的問題の難易度が易から難へとなることを考えて，次の①②の２つの数学的問題を扱う授業を展開した。

①断面が正方形の十分に長い柱状の熱伝導のよい物体を扱う。
・数学的モデル（ラプラス方程式）の設定
第１時（平成18年11月27日），
第２時（平成18年12月4日）
・差分スキームとシミュレーション，観察，現実問題の解釈，数値解と厳密解の比較
第２時（平成18年12月4日），
第３時（平成18年12月11日）

②断面が円板の十分に長い柱状の熱伝導のよい物体を扱う。
・差分スキームとシミュレーション，観察，現実問題の解釈
第３時（平成18年12月11日），
第４時（平成18年12月18日）
・調和関数の基本的性質，数値解と厳密解の比較
第５時（平成19年1月15日）

（2）ラプラス方程式

まず，現実問題を把握するために，現実問題の状況をノートに記述させる活動を行った。多くの学生は，柱状の物体が縦に氷水に入っている状態を記述していた。そこで，今回は長い柱状の物体を考えることとして，柱状の物体が横に氷水に入っている状態を考えることを確認した。次に，授業者は，「温度の変化を，変数を用いて考えてみよう」とか，「どのような仮定のもとで温度の変化をとらえようか」と発問し，現実問題を数学的問題にするために各自で８分程度考えさせたところ，学生から，次のような意見が出た。

・時刻を t とする。
・熱量を考えると，数学的モデルを作れそう。
・物体の内部の高さ x における温度を y とする。
・物体上部の温度を x_1，氷水に浸かっている部分の温度を x_2とする。
・物体内部の体積を a，氷水に浸かっている部分の体積を b とする。
・熱の伝わり方を考える。
・側面からの距離を考える。
・左右，前後，上下からの影響をそれぞれ式で表す。
・断面の横の長さ x，断面の縦の長さ y を考える。
・物体の氷水へ熱が奪われる熱量の関数を考える。

これらをまとめると，変数としての時刻，位置，温度，初期条件としての物体の表面，内部，外部の温度，定数としての熱の伝導率，比熱などを考えていることがわかる。これらは学生のいわゆる既習内容として考えてよい。

次に，授業者はこれらの意見をもとに，現実問題を数学的問題にするために，柱状の物体の断面図を示し，温度の状態を色つきで加えた。さらに，数学的モデルを考えるために，外部の温度を一定にすることや内部の温度分布を考えることを提案し，氷水を0℃，室温を25℃の一定温度にして考察することとした。

また，現実問題の「“十分に長い”を仮定していますが，この仮定によりどのようなことがわかるだろうか」とか，「もう少し具体的に数学的モデルに表すためにどのようなものを文字で表すとよいだろうか」と発問し，友人と協議する場を設けた。協議の場を設けたのは，学生が自分の考えを整理すると同時に，数学的な視点から現実問題を考えることを期待したことによる。その後，学生からは次のような意見が出た。

・位置を (x, y), 時刻を t とする。
・x, y, t の関数を考えればよい。
・十分に長い柱状を仮定しているので，断面において左右，上下４つの面からの熱の出入りを考えればよいのではないか。

これらの意見をもとに，物体の切断面を考えることとし，その位置を (x, y), 時刻 t における温度を $u(x, y, t)$ とすること，また，考察するために必要な定数として，熱伝導率 k，密度 ρ，比熱 c を考えることを，教師が総括して，次の数学的問題を全員で考えることとした。

数学的問題１． 位置 (x, y)，時刻 t における温度を $u(x, y, t)$，熱伝導率 k，密度 ρ，比熱 c として，断面が正方形の十分に長い均一な柱状の熱伝導のよい物体を氷水（0℃）の中に入れ，上部を室温（25℃）にさらしたときの物体内部の温度分布 $u(x, y, t)$ を調べよ。

この数学的問題１を理解するために，断面が十分に

小さい十分に長い均一な針金の（１次元）熱伝導について考察を行った。そのため，上記の条件を考えて，位置 x，時刻 t における温度を $u\ (x,t)$ として，針金の温度分布 $u\ (x,t)$ を調べることを理解させた。

さて，フーリエの熱伝導の法則に従って，熱伝導率 k の針金の微小部分ΔxにΔt時間に流入する正味の熱量は，テイラー展開を利用して，

$$\Delta t\left\{k\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_{x+\Delta x}-k\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_{x}\right\}\fallingdotseq k\Delta t\,\Delta x\,\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

となり，これが，微小部分ΔxのΔt時間あたりの熱量の変化量

$$\rho\Delta x\, c\{u(x,t+\Delta t)-u(x,t)\}\fallingdotseq \rho c\Delta x\,\Delta t\,\frac{\partial u}{\partial t}$$

と等しいので，次のように整理できる：

$$\frac{\partial u}{\partial t}=a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2},\qquad a=\sqrt{\frac{k}{\rho c}}.$$

これは，１次元熱伝導方程式と呼ばれる。ここではテイラー展開を利用することのよさを強調した。さらに，１次元熱伝導方程式の導出の証明をもとに，次の２次元熱伝導方程式を導出することを課題として本時を終えた。

$$\frac{\partial u}{\partial t}=a^2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right)$$

平成18年12月4日，前時の復習をした。[12] と同様，２次元の熱伝導の問題において，時間が十分に経過して，温度分布が時間的に変化しない状態（熱平衡状態）に達している場合を考えることとした。このとき，u は t に依存しなくなり$\partial u/\partial t=0$なので，

$$\Delta u=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0$$

を得ることができた。これは，ラプラス方程式と呼ばれる。以後，u は，位置 (x,y) の関数とする。さらに，ラプラス方程式の解を調和関数と呼ぶことを確認した。３年次に正則関数を学習している学生が興味・関心をもてるように，調和関数と正則関数には関係があることや，p- ラプラス方程式などの一般化された方程式がいろいろと議論されていることなど，数学的広がりについて伝えた。

（３）ラプラス方程式の差分スキーム１

数学的問題１の解決のために，次の境界値問題（A）

境界値問題（A）

$$\Delta u=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0,\qquad 0<x<1,\qquad 0<y<1$$

$$u(x,0)=0,\qquad u(x,1)=25,\qquad 0<x<1$$

$$u(0,y)=0,\qquad u(1,y)=0,\qquad 0\leqq y\leqq 1.$$

を考え，この問題を Mathematica を活用して数値計算することとした。そのために，ラプラス方程式の差分スキームを考えた。

x 方向及び y 方向の格子間隔を，それぞれ $\Delta x=h,\Delta y=k$として，長方形に分割することとした。代表格子点 P の座標 (x,y) を$x=ih, y=jk$（i,j は整数）とする。点 P における u の値を $u_P=u(ih,jk)=u_{i,j}$と記すことにする。テイラー展開を利用して，偏微分方程式を差分方程式で近似する。

$$u(x+h,y)=u(x,y)+hu_x(x,y)+\frac{h^2}{2}u_{xx}(x,y)+\frac{h^3}{3!}u_{xxx}(x,y)+O(h^4)$$

$$u(x-h,y)=u(x,y)-hu_x(x,y)+\frac{h^2}{2}u_{xx}(x,y)-\frac{h^3}{3!}u_{xxx}(x,y)+O(h^4)$$

これらの２つの式を加えることにより

$$\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)_P=\frac{1}{h^2}\left(u_{i+1,j}-2u_{i,j}+u_{i-1,j}\right)+O(h^2)$$

を得る。同様に，

$$\left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right)_P=\frac{1}{k^2}\left(u_{i,j+1}-2u_{i,j}+u_{i,j-1}\right)+O(k^2)$$

を得る。ここで，$\Delta x=\Delta y=h$（h が十分に小さい）とすると，ラプラス方程式は，

$$u_{i+1,j}+u_{i-1,j}+u_{i,j+1}+u_{i,j-1}-4u_{i,j}=0\qquad(1)$$

と近似される。

(1) を，

$$\frac{u_{i+1,j}+u_{i-1,j}+u_{i,j+1}+u_{i,j-1}}{4}-u_{i,j}=0$$

と変形すると，ラプラス作用素は，平均値からのずれを表す演算子であることがわかる。このことから，調和関数の平均値の定理や最大最小値原理などのよく知られた事実を容易に説明することができるので，このようなラプラス作用素の意味について注意を促した。

また，１年次に学習したテイラー展開の差分方程式への応用の有効性も確認した。

境界値問題（A）を解くプログラムを考える。x 及び y の領域を n 分割するとして，$h=1/n$ とする。境界条件は，

$$u_{0,j}=0, \qquad j=0,1,\cdots,n$$
$$u_{i,0}=0, \qquad i=1,\cdots,n-1$$
$$u_{i,n}=25, \qquad i=1,\cdots,n-1$$
$$u_{n,j}=0, \qquad j=0,1,\cdots,n.$$

従って，境界条件のもとで，(1) を満たす $u_{i,j}(i,j=1,2,\cdots,n-1)$ を求めればよい。つまり，$(n-1)^2$ 元連立１次方程式を解けばよいことになる。

Mathematica を活用して解く前に，温度分布を予想させ，配布した紙に解曲面を描かせた。学生が描いた解曲面には，図１のようなもの，図１よりも境界の近くに関しては0℃の場所が多いものや0℃の境界の情報を十分に考慮していないものなどがあった。

次に，配布資料をもとに，Mathematica のプログラムを簡単に説明した上で，数値的に解いた解曲面を描かせた（図１）。多くの学生が，１０分から１５分程度で解曲面を描くことができた。予想よりも円滑にプログラムの入力を終え，大学2年次のコンピュータ基礎演習の授業における Mathematica の基本的操作の習得の様子が窺えた。

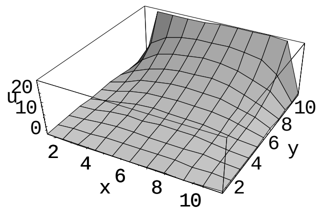

図１　数学的問題１の解曲面

図１をもとに，境界条件の必要性を確認させた。境界値問題（A）では，境界上の２点で不連続な関数を扱った。次時では，境界上の連続関数を扱うこととし，柱状の上に正弦関数で熱源を与えた状況を考えることを予告した。

平成18年12月11日，予告していた問題を説明した上で，温度分布を予想させ，配布した紙に解曲面を描かせた。シミュレーションの結果との比較が楽しみなのか全員が熱心に温度分布を予想して描いていた。次に，前時の Mathematica のプログラムを修正して，グラフを描かせた。

課題１.

$$\Delta u=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0, \qquad 0<x<1, \qquad 0<y<1$$
$$u(x,0)=0, \qquad u(x,1)=\sin\pi x, \qquad 0\leqq x\leqq 1$$
$$u(0,y)=0, \qquad u(1,y)=0, \qquad 0\leqq y\leqq 1.$$

課題１を解くプログラムを考える。x 及び y の領域を n 分割するとして，$h=1/n$ とする。境界条件を次のように修正すればよいことに気付かせることで，多くの学生が修正でき，解曲面を得ることができた。

$$u_{0,j}=0, \qquad j=0,1,\cdots,n$$
$$u_{i,0}=0, \qquad i=1,\cdots,n-1$$
$$u_{i,n}=\sin\frac{\pi i}{n}, \qquad i=1,\cdots,n-1 \qquad (2)$$
$$u_{n,j}=0, \qquad j=0,1,\cdots,n.$$

今度は，数学的問題１での経験があるので，数学的問題１のときよりも得られた解曲面と似たような解曲面を描いていた。

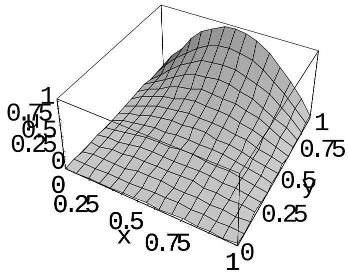

図２　課題１の解曲面

課題１の厳密解を得るために，少し一般的な設定でのラプラス方程式の境界値問題の解を紹介した上で，課題の場合の境界値問題の解を求めさせた。多くの学生が計算に手間取ったが，「和積の公式や倍角の公式を思い出しなさい」とか，「場合分けが必要ですね」といった言葉がけによりほとんどの学生が次の解

$$u(x,y)=\frac{1}{\sinh\pi}\sin\pi x\ \sinh\pi y \qquad (3)$$

を得ることができた。

次に，「(3) の厳密解と，(2) のもとで得られた数値解との誤差を評価するためにはどうすればよいのか」と発問した。「グラフの差を考えればよい」といった意見がでたのを踏まえ，Mathematica で各格子点上における u の値の差を評価し，この評価により，考えた

差分スキームの精度を確認した。このような誤差評価をすることは，今回のプログラムによる数値解のよさを確認する上で効果的であったと思われる。

（４）ラプラス方程式の差分スキーム２

授業の最後に，「次にどのような状況を考えてみようか」と発問した。「断面が円板の場合は？」といった意見がでたのを踏まえ，次の数学的問題を考えることにした。

数学的問題２． 位置 (x, y)，時刻 t における温度を $u\ (x, y, t)$，熱伝導率 k，密度 ρ，比熱 c として，断面が円板の十分に長い均一な柱状の熱伝導のよい物体を氷水（0℃）の中に入れ, 上部を室温（25℃）にさらしたときの物体内部の温度分布 $u\ (x, y, t)$ を調べよ。

ステップ１．解くべき領域を格子状に分割する。r 方向及びθ方向の格子間隔を，それぞれ$\Delta r = h,\ \Delta\theta = \delta$として，分割することとした。代表格子点Ｐの座標$(r, \theta)$を$r = ih,\ \theta = j\delta$とする。$i, j$ は非負整数とする。点Ｐにおける u の値を$u_P = u(ih, j\delta) = u_{i,j}$と記すことにする。

ステップ２．テイラー展開を利用して，偏微分方程式を差分方程式で近似する。

偏微分の計算の復習として，ラプラス作用素が次の (4) 式の左辺となることを次時までの課題とした。 さらに，数学的問題１の場合を参考にして，次の２つの (5) 式を利用して，偏微分方程式を差分方程式で近似することも次時までの課題とした。

課題２． ラプラス作用素が

$$\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} = 0 \tag{4}$$

の左辺となることを確認せよ。

さらに，次の２つの式を利用して，偏微分方程式 (4) を差分方程式で近似せよ。

$$u_{i+1,j} = u(r+h, \theta)$$
$$= u(r,\theta) + hu_r(r,\theta) + \frac{h^2}{2}u_{rr}(r,\theta) + \frac{h^3}{3!}u_{rrr}(r,\theta) + O(h^4)$$

$$u_{i-1,j} = u(r-h, \theta)$$
$$= u(r,\theta) - hu_r(r,\theta) + \frac{h^2}{2}u_{rr}(r,\theta) - \frac{h^3}{3!}u_{rrr}(r,\theta) + O(h^4) \tag{5}$$

ここで課題２を提示したのは，大学低学年の微積分学のテイラー展開，偏微分の計算などの基礎的内容を省みる機会を設けるためであった。このような課題を出すことは，各自が今回の数学的モデリングの学習内容を振り返ることができる点で有効であったと思われる。

平成18年12月18日，前時の課題２を集め，学生の出来をみた上で，ラプラス方程式の差分スキームの資料を配付して次のように説明した。

(5) の２つの式から次が得られる。

$$\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} = \frac{1}{h^2}\left(u_{i+1,j} - 2\,u_{i,j} + u_{i-1,j}\right)$$

$$\frac{\partial u}{\partial r} = \frac{1}{2h}\left(u_{i+1,j} - u_{i-1,j}\right)$$

これらを (4) に代入して，

$$\frac{1}{h^2}\left(u_{i+1,j} - 2u_{i,j} + u_{i-1,j}\right) + \frac{1}{ih}\frac{1}{2h}\left(u_{i+1,j} - u_{i-1,j}\right) + \frac{1}{(ih)^2}\frac{1}{\delta^2}\left(u_{i,j+1} - 2\,u_{i,j} + u_{i,j-1}\right) = 0$$

を得る。この式を整理すると次が得られる。

$$\left(1 + \frac{1}{2i}\right)u_{i+1,j} + \left(1 - \frac{1}{2i}\right)u_{i-1,j} - 2\left(1 + \frac{1}{(i\delta)^2}\right)u_{i,j} + \frac{1}{(i\delta)^2}\left(u_{i,j+1} + u_{i,j-1}\right) = 0 \tag{6}$$

ステップ３．連立１次方程式を解く。半径１の円板を r 方向に n 分割，θ方向に m 分割するとして，$h = 1/n,\ \delta = 2\pi/m$とすると，境界条件は，

$u_{n,j} = 25$ （境界の上半分），0（境界の下半分）
$u_{0,j} = u_{0,0}$，$j = 1, \cdots, m-1$,
$u_{i,m} = u_{i,0}$，$i = 1, \cdots, n$
$u_{i,-1} = u_{i,m-1}$，$i = 0, 1, \cdots, n.$

さらに，原点での値 $u_{0,0}$を次のように考える：

$$u_{0,0} = \frac{1}{m}\sum_{i=0}^{m-1} u_{1,i}$$

従って，境界条件のもとで，(6)を満たす $u_{i,j}$ $(i=1,2,\cdots,n-1,\ j=0,1,\cdots m-1)$ 及び $u_{0,0}$ を求めればよい。つまり，$(n-1)m+1$ 元連立１次方程式を解けばよいことになる。

これまでと同様に，Mathematica を活用して解く前に，温度分布を予想させ，配布した紙に解曲面を描かせた。次に，配布資料をもとに，Mathematica のプログラムを簡単に説明した上で，数値的に解いた解曲面を描かせた（図３）。

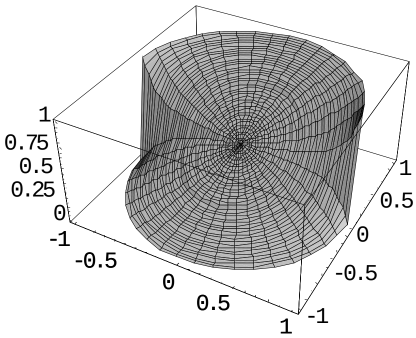

図３　数学的問題２の数値解の解曲面

（５）調和関数の基本的性質

平成18年1月15日，学生は３年次に正則関数の基本的性質を学習しているので，正則関数の一致の定理や最大最小値の原理を復習し対比させながら，調和関数の一致の定理，最大最小値の原理，平均値の定理などの興味深い基本的性質，調和関数と正則関数の関係，ポアソンの積分公式，単位円板でのディリクレ問題について説明した。

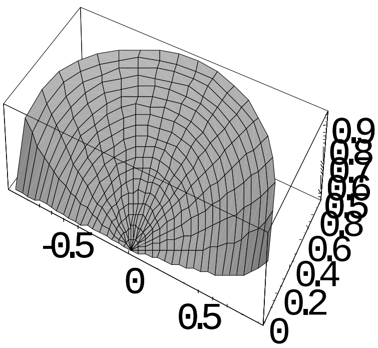

図４　数学的問題２の厳密解の解曲面

最後に，プログラムをのせたプリント資料をもとに，「厳密解（図４）と，(6)で得られた数値解（図３）との誤差を評価しよう」と発問し，Mathematica を活用して評価させた。この評価により，考えた差分スキームの精度を確認した。このような誤差評価をすることは，今回のプログラムによる数値解のよさを確認する上で効果的であったと思われる。

４．学生による感想

Mathematica を活用した数学的モデリングに関する授業の感想を，アンケートを通して調べた。（紙面の都合上，文章を短くしている部分がある）

数学化，シミュレーション，観察，現実問題の解釈という一連の過程を経験した感想

・現実問題からアプローチすることにより，数学のよさが感じられた。
・現実問題の解決に数学が活用できることがよくわかった。
・現実的なことをシミュレーションと理解の２つの攻め方で考えることができたので，取り組みやすかった。
・数学の知識と日常生活での経験との差でわからない点などがシミュレーションで理解できた。

Mathematica を活用した数学的モデリングの学習後に，調和関数の基本的性質について学習したことについての感想

・調和関数の重要性が分かり，学習意欲がわいた。
・モデリングと調和関数の学習のつながりが難しかった。
・調和関数の重要さをより感じた。
・実際に誤差をコンピュータでプロットし，差がないことがわかり，Mathematica も厳密であることがわかった。

正方形領域と円板領域の２つの場合についてプログラムを考えシミュレーションしたことについての感想

・極座標を用いることにより円板領域でも考えることができた。正方形領域だけでないことによさを感じた。
・ディリクレ問題を理解するのが難しかった。
・さまざまな補題が必要なことに驚いた。
・正方形とほぼ同じような考え方だったが，円板では極座標が大切だと思った。

円板領域の場合に，ディリクレ問題を解いたことについての感想

・違いを確認できた。正方形→円板と考え方を広める

ことができた。
・問題を発展させて考えるのがおもしろかった。
・「正方形→円板」という流れがあってよかった。
・正方形の応用として，円板を考えて，考えやすかった。自分でもある程度までは考えれた。

Mathematica を活用して数学を考えることをどう思いましたか。
・普段学校の教科書等で学習するときは，手計算で解決できるが，実際に社会で直面するような問題には，コンピュータを活用しないと解決できない問題が多いということが分かった。
・複雑な計算等を処理してくれて有用ではあるが，Mathematica の操作に集中してしまい，本質的な内容が薄くなってしまう。
・Mathematica は非常に便利だと感じた。
・見やすくてよいと思うが，多少の誤差があるので，その所を考えなくてはならないと思う。

5．おわりに

本稿では，将来数学教師を目指す学生による数学的モデリングにコンピュータの利点を生かす試みの授業について考察した。その結果，本研究（下村・伊藤，2004, 2005, 2008）で指摘した以外に，次のようなことが指摘できる。

（1）数学的活動は現行の中学校・高等学校の学習指導要領に取り入れられたが，新学習指導要領では「数学学習にかかわる目的意識をもった主体的な活動」（文部科学省，2009）と定義され，その内容は現行よりもより重視されている。筆者達は今回の数学的モデリングの授業を大学の授業として数学的活動を具現化したものとして位置付けている。熱伝導に関する現実問題を既習内容を用いて数学的問題１・２として数学化，さらにコンピュータを活用した境界値問題の考察，また正方形板の問題から円板の問題へと発展的内容の考察を行った。前節の学生による感想から，将来数学教師を目指す学生にとって，この授業は数学的内容の広がりを経験させることができたと考えている。

（2）ラプラス方程式を教材とした数学的モデリングにおけるコンピュータの活用は，将来教師を目指す大学生にとって，数学的モデルを作成し，シミュレーション，観察，現実問題を解釈する中でのコンピュータ活用の有効性を経験する上で，よい機会となる。

（3）シミュレーション，観察の場面で，コンピュータを活用して各自の予想とコンピュータの解との関係に取り組む学生の態度には，通常の授業では見られなかった探究的な学習活動が見られた。その活動の中に，学生が主体的に学習し，自ら探究する態度が期待される。

（4）ラプラス方程式を教材とした数学的モデリングの授業を行う場合，正方形領域におけるディリクレ問題から単位円板におけるディリクレ問題へと授業展開することが学生の興味・関心をひく授業展開の一つであることがわかった。教材を針金で考察し，正方形領域に適応させ，さらに単位円板に広げる過程で，それぞれに応じた座標を考えること，さらに，テイラー展開や極座標を用いてのラプラス作用素の表現を復習しながら，２つの場合についてプログラムを考えシミュレーションすることが効果的であった。

（5）熱伝導現象は，学生にとって身近な現象として捉えることができ，また，作成した数学的モデル（偏微分方程式）の扱いは３年次に学習した正則関数と関係があるので，学生にとって興味深い学習内容になったのではと思われる。しかし，単位円板におけるディリクレ問題を数学的に解くところは，正則関数の基本的性質の十分な理解がないとやや難しいと感じる箇所もあるので，授業の工夫が必要である。

今後は，さらに，教育学部での数学の授業における，コンピュータを活用した数学的モデリングの意義とその方法に関する考察をしたい。

【引用・参考文献】

１）S. Axler, P. Bourdon and W. Ramey, Harmonic function theory, Springer-Verlag, 1992.
２）D.N.Burghes, M.S. Borrie, “Modelling with Differential Equations”, Ellis Horwood, 1981,（垣田高夫・大町比佐栄訳（1990），『微分方程式で数学モデルを作ろう』, 日本評論社）.
３）W. O. Kermack, A. G. McKendrick, A contribution to the mathematical theory of epidemics, Proc. Roy. Soc. London. A 115, (1927), pp.700-721.
４）飯島康之･礒田正美･大久保和義編者,『コンピュータで数学授業をかえよう』, 明治図書, 1995.
５）小山正孝,「第12章　数学的モデル」, 岩合一男編『算数・数学教育学　教職科学講座　第20巻』, 福村出版，1990年, pp.202-216.

6）佐伯昭彦･磯田正美･清水克彦編者,『テクノロジーを活用した新しい数学教育』, 明治図書, 1997.
7）下村哲・今岡光範・向谷博明,「コンピュータを活用した問題作り（I）―大学における実践を通して―」,『全国数学教育学会誌, 数学教育学研究』, 2002年, 第8巻, pp.235-242.
8）下村哲・今岡光範,「コンピュータを活用した数学の問題作り（Ⅶ）―問題の作成過程に関するインタビュー調査を通して―」,『全国数学教育学会誌, 数学教育学研究』, 2014年, 第20巻, pp.11-25.
9）下村哲・伊藤雅明, コンピュータを活用した数学的モデリングに関する研究―探求活動を中心として―,『日本数学教育学会高専・大学部会論文誌』, 2004年, 第11巻, pp.29-40.
10）下村哲・伊藤雅明, コンピュータを活用した数学的モデリング―大学における実践を通して―,『全国数学教育学会誌, 数学教育学研究』, 2005年, 第11巻, pp.269-279.
11）下村哲・伊藤雅明, コンピュータを活用した数学的モデリング（II）―感染症流行モデルを教材として―,『全国数学教育学会誌, 数学教育学研究』, 2008年6月, 第14巻, pp.119-128.
12）下村哲・伊藤雅明・山田雅博, コンピュータを活用した数学的モデリングの授業実践―ラプラス方程式を題材として―,『日本数学教育学会高専・大学部会論文誌』, 2005年, 第12巻, pp.1-14.
13）下村哲・平岡賢治, 高等学校における数学的モデリングの指導に関する一考察―生物の個体数の変化を素材として―,『第３８回日本数学教育学会論文発表集』, 2005年, pp. 133-138.
14）高橋正,「数学教育におけるコンピュータ利用の理念」,『西日本数学教育学会誌, 数学教育学研究紀要』, 1992年, 第18号, pp.111-116.
15）西村圭一,『数学的モデル化を遂行する力を育成する教材開発とその実践に関する研究』, 東洋館出版社, 2012.
16）三輪辰郎,「数学教育におけるモデル化についての一考察」,『筑波数学教育研究』, 1983年, 第2号, pp.117-125.
17）文部科学省,「高等学校学習指導要領解説数学編理数編」, 2009年, pp.16.