学 位 論 文 要 旨

確率概念の形成におけるミスコンセプションの研究

大 滝　孝 治

目　次

1. 本研究の目的：小数の法則への教授学的近接

数学教育研究において，確率単元についての先行研究は，代数領域や図形領域，関数領域のそれに比べて決して多くないが(cf. Shaughnessy, 1992; Jones, Langrall, & Mooney, 2007)，進められてきた先行研究では興味深い事実が明らかになっている。それは，多くの人々が確率に関する「同じ誤り」をおかす，ということである。例えば，「大数の法則 *law of large numbers*」は，試行回数が多くなれば相対度数が確率の理論値に近づくことを示す法則であるが，それにも関わらず，多くの人々は少数回の試行にすら，その法則の蓋然性を誤って敷衍する。極端な場合，公平なコイン投げにおいて，表の次は裏が出やすいと容易に推論してしまう。ここで興味深いのは，この誤解は子どもだけのものではなく程度の差こそあれ大人にもみられるため，発達心理学的な視点(e.g., 岡部, 2006)のみでは説明しきれない，ということである。例えば，心理学者は研究の際に標本サイズを小さく見積りすぎている，という報告がある(Tversky & Kahneman, 1971)。こうしたミスコンセプションを認知心理学者ダニエル・カーネマン(Daniel Kahneman)らは「小数の法則 *law of small numbers*」と呼び(Tversky & Kahneman, 1971)，その詳細を代表性ヒューリスティックによって説明してきた(e.g., Tversky & Kahneman, 1974)。ヒューリスティックとは意思決定の方法であり，代表性ヒューリスティックとは類似性を判断基準にするものである。標本が母集団に似ている可能性が高いと考えるのである。

心理学研究とは異なり，数学教育研究はこのミスコンセプションの克服を図る実践的デザインもその射程に収めるが，効果的な授業提案がなされたという話は聞かない。実は，全国学力・学習状況調査において，確率の意味理解を測る問題の正答率は，依然として低い(e.g., 国立教育政策研究所, 2012, pp. 283-286; 2013, pp. 84-85)。先行する認知心理学的な確率研究は，確率について人間が「どのように間違えるか」をヒューリスティックの観点から示しているが(Tversky & Kahneman, 1974; 松浦, 2009)，「なぜ誤るのか」への明確な回答は与えていない。先行研究はヒューリスティックを人間の本性として理解することでこの問いを回避してきたとも解釈できる(cf. Kahneman, 2011)。心理学的にはそれで十分なのかもしれないが，数学教育研究はミスコンセプションを記述し説明するだけではなく，その克服のための手段をデザインし実践することも主要な研究プロセスとするのだから(cf. Wittmann, 1995; 岩崎, 2007)，小数の法則の頻発という確率教育の課題を，対処療法的にではなく根本的に解決するために，「なぜ誤るのか」を解明することが必要になる。「なぜ」に答えるということは，子どもの認識状態を知るのみならず，その状態が作り上げられた仕組みを明らかにすることである。「なぜ」に答えるためには「どのような指導が小数の法則を生じさせているのか」ということが考察されなければならないのではないか。寡聞にしてこの課題を設定する研究はほとんどない。以上の議論を踏まえて，

本論文は以下を研究の目的として設定する。

ミスコンセプション「小数の法則」の教授学的要因を明らかにする

2. 本研究の方法:ディスコース分析

ミスコンセプション論は「発生的認識論」や「問題解決学習論」と共に構成主義のルーツを形成することからもわかるように(Confrey & Kazak, 2006)，豊かな研究の歴史をもっているが，それ故に様々な批判的・反省的な考察の対象にもなっている。例えば，アンナ・スファード(Anna Sfard)はミスコンセプション研究の限界を示唆するために，以下のような疑問を投げかけている：

> 《教師や教科書から数学的概念を学んだ子どもが，規則正しい方法でその概念について「誤る」という事実を，我々はどのように説明できるだろうか。》(Sfard, 2008, p. 267)

これは，「教師」や「教科書」という教授学的な研究対象と「ミスコンセプション」という心理学的な研究対象との関係性が，これまでのミスコンセプション研究の展望に欠けていたことを的確に指摘した一文である。

このような視点に立つとき，思考や表記をコミュニケーションの一形態として捉えるコモグニション論の発想は示唆的である。それは，認知とコミュニケーションと表記の統一的把握が，心理学的対象（認知）と教授学的対象（教科書や授業）の関連性を明確にしてくれると期待されるからである。コモグニション論はこうした一元論的考察をディスコースという枠組みを用いて展開する。本研究でもミスコンセプション「小数の法則」の教授学的要因をディスコース分析という方法を用いて明らかにしていく。このような作業により，従来では認知現象でしかなかったミスコンセプションの要因を，心的現象にとどめず，教科書内の記述や教室内のコミュニケーションの中にも見出すことが可能になり，確率概念の形成におけるミスコンセプション（以下「確率ミスコンセプション」と略記する）の議論を心理学的な次元から教授学的な次元へと移すことが可能になる。このような転換の後に初めて，心理学の知見を用いた生産的な指導改善のための研究が行われ得ると考える。

3. 本研究の成果：各章の概要

3.1　第１章 確率概念の形成におけるミスコンセプションの記号論的モデル化

ミスコンセプションという心理学的現象について，教科書や授業という教授学的な対象と明確に関係づけて議論するためには，それなりの工夫が必要である。少なくとも心理学の側から

教授学へと接近する方向性と，教授学から心理学へと近接する方向性の二つは必要となると考える。第 1 章は前者の作業に取り組むものであり，記号論の視点からミスコンセプションやその克服プロセスをモデル化するという手法をもって，心理学の側から教授学への通路を確保した。

第 1 節は小数の法則のモデル化をねらいとする節であった。第 1.1 節では小数の法則のモデル化のための理論的基盤であるシュタインブリングの認識論的三角形(e.g., Steinbring, 2006)と溝口の C(C,N,E)モデル(e.g., 溝口, 1995)について概観し，それらに対する批判的考察を行った。批判の内容を要約すれば，両モデルともにミスコンセプションの記述を意図しているわけではないため，本研究の観点からみればモデルの構成要素に課題がある，ということである。この課題は両モデルを総合することによって解消でき，それに取り組んだのが第 1.2 節である。ここで，小数の法則のモデル化の基盤となる「コンセプションの静態の四面体モデル」が構築された。このモデルは認識論的三角形を準拠枠にしながら，そこに C(C,N,E)モデルの「確信」という発想を加えたものである。確信を考慮することによって,「内知識の脆さ」や「ミスコンセプションの弾性」といった，現象は認められつつも原因を説明されてこなかった事実を解釈することが可能になった。勿論，コンセプションの静態の四面体モデルは小数の法則をモデル化することも可能であり，それは「〈対象〉: 小標本」,「〈記号〉: 確率」,「〈概念〉: 大数の法則」,「〈確信〉: 決定論」として記号論的な枠組みのもとに記述される。対象と記号の間接的連携という記号論的な形式は，ミスコンセプションを記述する際にも有効であることがこの節より明らかになった。この考えは第 3 章においてディスコースの視点からさらに発展させられることになる。

第 2 節は小数の法則の克服過程のモデル化を目指したものである。その際の基本的な方針は，コンセプションの静態の四面体モデルを並べていく，というものであるが，問題はその並べ方である。この点については, 記号の分析から数学的認識の展開の様相を明らかにしようとする，スファードの 20 世紀末の理論である認知具象化理論(e.g., Sfard, 1991)に注目した。具体的にはまず，第 2.1 節では認知具象化理論や真野によるその概念変容論的解釈を要約し，認知具象化がコンセプションの質に決定的な変化をもたらす認知過程であることが明らかになった。次に第 2.2 節では，認知具象化理論の記述性をコンセプションの静態の四面体モデルによって強化し，最後に第 2.3 節において，確率史を手掛かりに，確率概念の形成過程をモデル化した。小数の法則の克服には決定論から非決定論への〈確信〉の転換が鍵になり，このプロセスは認知具象化として特徴づけられる。認知具象化の困難性はミスコンセプションの心理学的要因の一つであるから，この点もミスコンセプション研究の教授学的展開を考える上での検討課題とな

る。

3.2　第 2 章 コンセプション研究のディスコース論的展開

第 1 章では心理学の側から教授学へと迫ったが，第 2 章はその逆の取り組みということができる。第 1 章でも言及したスファードは数学的認識に関する心理学的な研究で著名であるが，近年では新たに言語学・記号学的な視座から，数学的認識の展開を新たに捉え直す試みを行っている。コモグニション論と呼ばれるその新理論は，個人の認知，個人間のコミュニケーション，教科書の表記（そして情意まで）を同じ現象の異なる現れとみなすものであるため，教科書や授業を明確にミスコンセプションと関連づけることを目的とする本研究の強力な理論的基盤となる。

第 1 節ではコモグニション論を概観した。特に第 1.1 節ではコモグニション論の研究方法観について，分析単位であるディスコースに注目して要約した。コモグニション論において，ディスコースとはコミュニケーションの型のことであり，この型を使ってコミュニケーションを分析していくことがコモグニション研究の主な作業となる。この場合のコミュニケーションの捉え方は独特のものであり，ここに本理論がコモグニション論と呼ばれる所以がある。コモグニション論は，認知も表記も対話もすべてコミュニケーションの生じている場所が異なるだけの同一現象であると捉え，このことを強調するためにコミュニケーションをあえてコモグニションといいかえる。この点に関しては第 1.2 節において，コモグニション論の数学観や学習観とともに概説した。コモグニション論において，数学とは一つのディスコースであり，学習とはディスコースの変容として捉えられる。この学習の定義にみられるように，スファードの新理論は，心理学的な用語を排除したり操作的に再規定したりする点にも特徴がある。

第 2 節ではコモグニション論を用いる利点について四つの観点から考察した。第 2.1 節では他のディスコース論との比較を通してコモグニション論の価値を明らかにした。ディスコース研究は流行の兆しをみせているが，新興勢力であるが故に共通基盤が見出されていなかったり，様々な暗黙の前提が無反省のまま放置されたりしている状況である。コモグニション論は研究用語や研究方法や研究哲学を明確に提示するものであるため，研究の相互理解や研究成果の蓄積という面だけでみても，他のディスコース研究よりも優れている。第 2.2 節ではコモグニション論の表記論的可能性について述べた。上述のようにコモグニション論はそもそも表記をもディスコースと捉える研究枠組みであるが，実際にこの点を有効に活用した研究は僅かである。表記への着想は，我が国の先行する数学教育研究が研究の方向性に関して導き出した一つの答えであろうから，この課題意識にコモグニション論を載せることで，我が国独自のコモグニシ

ョン研究が展開できるかもしれない。第 2.3 節ではヴィットマンの主張する数学教育学の核心(Wittmann, 1995)とコモグニション論の関係性について考察した。コモグニション論はそもそも人間の活動すべてを分析の射程に収めるものであるから，一見すると数学教育学の核心とはほど遠いものにみえるかもしれない。しかし，ヴィットマンは数学教育学の固有性を強調することのみで核心を提示したわけではなく，関連諸学との関係をもって初めて自律できるという，ある種の矛盾を孕むような状態を常態とする学問として数学教育学を描いており，この点に注目するとき，コモグニション論の数学教育学的価値が浮かび上がってくる。コモグニション論は言語学や記号学と密接に結びついており，数学教育研究が関連諸学と適切に連関することを可能にする理論である。第 2.4 節では研究倫理という視点からコモグニション論を使用する利点を明らかにした。研究倫理は自身の研究への徹底した反省をベースにするだろうが，その反省のための枠組みは必ずしも明確ではない。コモグニション論は上述のようにすべての人間活動を分析対象にするから，数学教育研究も分析の対象とできる。つまり研究者の自己点検の道具としてもコモグニション論は使用可能であり，この点はコモグニション論の意義の一つといえるのではないか。

3.3　第 3 章 教科書ディスコースに内在する小数の法則の領域普遍的要因：ディスコースの規則の視座から

コモグニション論の視点に立てば，ミスコンセプションもコミュニケーションの一形態ということになるのだから，コモグニション論の概念をもって適切に定式化されれば，ミスコンセプションは単なる認知現象ではなく，個人間コミュニケーションにも教科書表記にもみられるコモグニション現象として同定され得る。第 1 章 1 節と第 2 章の基礎的な考察を受けて，第 1.1 節では，コンセプションの静態の四面体モデルをディスコースのコモグニション論的三角形として改訂し，認知のモデルをコモグニションのモデルとして拡張した。結果として，コンセプションの静態の四面体モデルの四項目によってモデル化されていたミスコンセプションを，ディスコースとしてより操作的に記述しようとする際には，二つのディスコース間の葛藤としてそれを表現するために，六項目を要することになった。この六項目を示したのが，第 1.1 節において構築されたコモグニション葛藤の二重三角形であり，第 1.2 節ではこれを用いて小数の法則が新たにモデル化された。このモデル化において特に注目すべきものは，小数の法則の要因となるメタ規則である「補正規則」と「一般化規則」である。これらは第 1 章において「〈確信〉: 決定論」として語られていたものであり，コモグニション論の力によってより明確なものとなっている。

第 2 節では特に補正規則に焦点をあて，中学校数学教科書内におけるその優勢を,「＝」に着目した量的分析によって示した。メタ規則はその特性上，明示的に教科書の表記やコミュニケーション上の表現として現れづらいため，その同定作業においては研究者の解釈が入らざるを得ない。コモグニション論は研究用語の操作的定義を重んじるから，一見すると「解釈」には否定的なようにみえるかもしれないが，そうではない。それではコモグニション主義の批判する行動主義に逆戻りである。むしろ，個別具体の文脈に依存した研究者の解釈の価値を積極的に認めている(cf. Sfard, 2008, pp. 278-280)。コモグニション論が用語の定義にこだわるのは, 様々な解釈を共有し，それらについて議論し，研究を発展させるための共通言語を準備するためなのである。

第 3 節では数学教育随一の難教材である論証との比較を通して, 小数の法則の要因に迫った。論証学習と確率学習に共通する困難性は，考察の対象と考察の方法のある種のギャップに起因する。確率という学習対象は抽象的であるためそれについて考えるための方法は経験的というよりも論理的になるのが普通である。そのため圧倒規則よりも補正規則や一般規則といったメタ規則が確率的場面でも学習者に受け入れ易くなっていると考えられる。

3.4　第 4 章 教科書ディスコースに内在する小数の法則の領域固有的要因：概念形成の視座から

第 3 章は数学学習全般の結果として小数の法則が生じることを示しており，小数の法則の領域普遍的な要因に関する考察であった。このように前章を特徴づけるとき，第 4 章は領域固有性の視点から小数の法則の要因を明らかにするものである，ということができる。領域固有性の一端はその領域の対象の特徴に現れるだろうから，本研究ではコモグニション論における対象構成を枠組みとして，中学校と高等学校の教科書における確率単元を分析した。対象構成には記号具象化が含まれていることに端的に現れているように，対象構成法に着目することは第 1 章 2 節が問題にした認知具象化を教授学的に探究することに繋がる。

中学校確率単元の分析（第 2 節）が明らかにしたことは，教科書確率単元が四段階の記号具象化のプロセスによって構造化されており，最初の三段階は圧倒規則に関わる統計的確率を構成するものである一方，第四の記号具象化は圧倒規則を必要としない数学的確率へ向かうものである，ということである。これは圧倒規則の個体化(individualization)が困難であるにも関わらず，中学校確率学習の最終段階で結局それが不要になることを意味している。また高等学校確率単元の分析（第 3 節）が明らかにしたことは，教科書確率単元が五段階の記号具象化のプロセスによって構造化されており，このプロセスはすべて数学的確率に関わるものである，ということである。これは高等学校確率単元において, 圧倒規則が不要になることを意味している。

以上より，学校数学における数学的確率の優勢が明らかになるが，確率の応用を考えるとき，統計的確率の考え方はなくてはならない。したがって，数学的確率としての確率概念の形成を意図するにせよ,「確率」という言葉をもって数学的確率と統計的確率の両者を意味していることを適切に強調しなければ，圧倒規則の存在価値は減ることはあっても増すことはない。しかし現行の教科書において，そのような配慮は僅かである（第 4 節)。

3.5　第 5 章 授業ディスコースに内在する小数の法則の要因：相補的視座から

第 3 章と第 4 章では，意図されたカリキュラムにおける小数の法則の要因を実証的に示したが，その要因が実施されたカリキュラムのレベルで現れるとは必ずしもいえない。そこで第 5 章では，高等学校の確率単元の授業（第一時）を対象に，第 3 章の示した補正規則の優勢や第 4 章の示した圧倒規則の劣勢を確認した。教科書と同様の事態は授業内でも生じており，成功的な学習の結果として小数の法則という事態は，実施されたカリキュラムにおいても生じているということが明らかになった。

4. 今後に残された課題

本研究はミスコンセプションの教授学的要因を明らかにすることを目的としており，数学科の内容の中にその要因を求めてきた。しかしこうした内容レベルの議論を越えて，学習の困難性をより広い社会的なものと関連づける理論も存在する。「教授の人間学理論 *anthropological theory of the didactic*」と呼ばれるこの理論は，図 1 のような広い射程から学習に作用する制約について議論をする(cf. Bosch & Gascón, 2006)。

本研究が明らかにしてきたことは，決定レベルに沿っていえば「問い」レベルから「教科」レベルまでの話であろう。したがって，今後に残された課題として，より上層の決定レベルの視点から小数の法則の要因や確率学習の困難性の要因に関する考察を行うことがあげられよう。実際，こうした議論はコモグニション研究においても行われてい

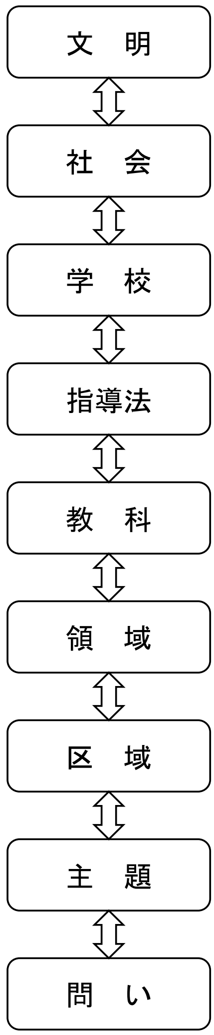

図 1. 決定レベルの段階
（Bosch & Gascón, 2006, p. 61）

る。例えば Kim, Ferrini-Mundy, & Sfard (2012)は，韓国人大学生とイギリス人大学生の無限に関するディスコースの比較を行い, 言語の相違が理解の仕方に差を与えていることを示している。言語は決定レベルでいえば「文明」や「社会」に位置づくものであろう。我が国が西洋数学を受容した際に(cf. 伊達, 2013)，様々な教授学的制約が日本語における確率論のディスコースに意図されず仕掛けられたと予想される。この制約を紐解く作業はコモグニション論的にも人間学理論的にも，興味深い課題である。

<u>主要な引用・参考文献</u>

岩崎秀樹(2007).『数学教育学の成立と展望』. 京都：ミネルヴァ書房.

岡部恭幸(2006).『確率概念の認識における水準とそれに基づくカリキュラムに関する研究』. 未公刊博士学位論文，神戸大学.

国立教育政策研究所(2012).『平成 24 年度全国学力・学習状況調査【中学校】報告書』. http://www.nier.go.jp/index.html.

国立教育政策研究所(2013).『平成 25 年度全国学力・学習状況調査報告書中学校数学』. http://www.nier.go.jp/index.html.

伊達文治(2013).『日本数学教育の形成』. 広島：溪水社.

松浦武人(2009).「初等教育における児童の確率概念の発達を促す学習材の開発研究：確率判断におけるヒューリスティックスの改善に焦点をあてて」. 数学教育学会誌『数学教育学論究』, *91*，3-13.

溝口達也(1995).「認識論的障害の克服過程の記述カテゴリーによる特徴づけ：極限概念を事例として」. 日本数学教育学会誌『数学教育学論究』, *63-64*，27-48.

Bosch, M. & Gascón, J. (2006). Twenty-five years of the didactic transposition. *ICMI Bulletin*, *58*, 51-65.

Confrey, J. & Kazak, S. (2006). A thirty-year reflection on constructivism in mathematics education in PME. In A. Gutiérrez & P. Boero (eds.), *Handbook of research on the psychology of mathematics education: Past, present and future* (pp. 305-345). Rotterdam, The Netherlands: Sense Publishers.

Jones, G. A., Langrall, C. W., & Mooney, E. S. (2007). Research in probability: Responding to classroom realities. In F. K. Lester, Jr. (ed.), *Second handbook of research on mathematics teaching and learning: A project of the National Council of Teachers of Mathematics* (pp. 909-955). Charlotte, USA: Information Age Publishing.

Kahneman, D. (2011). *Thinking, fast and slow*. New York, USA: Farrar, Straus and Giroux.

Kim, D., Ferrini-Mundy, J, & Sfard, A. (2012). How does language impact the learning of mathematics? Comparison of English and Korean speaking university students' discourses on infinity. *International Journal of Educational Research*, *51-52*, 86-108.

Sfard, A. (1991). On the dual nature of mathematics conceptions: Reflections on processes and objects as different sides of the same coin. *Educational Studies in Mathematics*, *22*(1), 1-36.

Sfard, A. (2008). *Thinking as communicating: Human development, the growth of discourses, and mathematizing*. Cambridge, UK: Cambridge University Press.

Shaughnessy, J. M. (1992). Research in probability and statistics: Reflections and directions. In D. A. Grouws (ed.), *Handbook of research on mathematics teaching and learning: A project of the National Council of Teachers of Mathematics* (pp. 465-494). New York, USA: Macmillan Publishing Company.

Steinbring, H. (2006). What makes a sign a *mathematical sign*? An epistemological perspective on mathematical interaction. *Educational Studies in Mathematics*, *61*(1-2), 49-92.

Tversky, A., & Kahneman, D. (1971). The belief in the law of small numbers. *Psychological Bulletin*, *76*, 105-110.

Tversky, A., & Kahneman, D. (1974). Judgment under uncertainty: Heuristics and biases. *Science*, *185*, 1124-1131.

Wittmann, E. Ch. (1995). Mathematics education as a 'design science', *Educational Studies in Mathematics*, *29*(4), 355-374.