学 位 論 文

確率概念の形成におけるミスコンセプションの研究

大 滝　孝 治

本論文を親愛なる両親に捧ぐ

目　次

目　次

目　次

目　次

目　次

序章：先行研究の課題と本研究のねらい

通常，序章の役割は論文の目的と方法を簡潔に提示することであろうが，数学教育学という複合新領域の場合，論文の目的や方法を示すのみならず，それらが「数学教育学的」である理由を様々な角度から論証する必要があると考える。本章ではこの課題に取り組む。

1. 本研究の目的と方法

1.1 本研究の課題意識

数学教育研究において「理解」を研究対象とするものは数多く見られるが(cf. 小山, 2010)，それらはいずれも，いわば「正しい理解」の研究であって，「誤った理解」のそれではない。理科に比べれば数学の場合，後者は驚くほど少ない。数学学習の理解研究では，数学的認識や数学的概念そして問題解決が，その研究対象に置かれるが，そこには暗黙のうちに認識や概念や方法の変容が仮定されている。つまりある時間に「正しい」ことは決して固定されておらず，学習のある限り，常に開かれ，認識は更新される。本研究では「誤った理解」に焦点をあてる「ミスコンセプション *misconception*」という理論的視座に注目する。というのは，よりよい理解には程度の差こそあれ「誤った理解」が時間的に含意されており，この角度から認識の変容や概念の形成をみるとき，むしろ数学

学習のダイナミズムがより鮮明になると考えるからである。

　ミスコンセプションについて考察する上で，本研究では確率概念の形成に焦点化する。今日の社会は「知識基盤」や「生涯学習」といった言葉で形容され，それに伴って教育目標も「学力」から「能力」へと拡張されてきている(cf. 石井, 2010)。例えば，新学校教育法（最終改正：平成二三年六月三日法律第六一号, http://www.e-gov.go.jp）によって「思考力・判断力・表現力の育成」が教師の法的義務となった。これは，能力育成をねらう学校教育では「知識の応用」に重点が置かれることを示していよう。算数・数学科において，こうした応用に最も開かれている領域は，現実との接合点の多さから考えても，確率・統計領域であろう。しかしそれだけに，数学的に克服されなければならないミスコンセプションの宝庫ともいえる。以上のように，本研究は数学の応用という視座から確率・統計に注目するが，それは応用の過度な強調を意図しているわけではない。むしろ数学の構造と応用の適切な協調が必要であると考える。そこで本研究では，確率が数学（構造）と統計（応用）を架橋するという理解から，確率に焦点をあてる。

1.2　先行する確率研究の課題と本研究の目的：小数の法則への教授学的近接

　数学教育研究において，確率単元についての先行研究は，代数領域や図形領域，関数領域のそれに比べて決して多くないが(cf. Shaughnessy, 1992; Jones, Langrall, & Mooney, 2007)，進められてきた先行研究では興味深い事実が明らかになっている。それは，多くの人々が確率に関する「同じ誤り」をおかす，と

いうことである。例えば，「大数の法則 *law of large numbers*」は，試行回数が多くなれば相対度数が確率の理論値に近づくことを示す法則であるが，それにも関わらず，多くの人々は少数回の試行にすら，その法則の蓋然性を誤って敷衍する。極端な場合，公平なコイン投げにおいて，表の次は裏が出やすいと容易に推論してしまう。ここで興味深いのは，この誤解は子どもだけのものではなく程度の差こそあれ大人にもみられるため，発達心理学的な視点(e.g., 岡部, 2006)のみでは説明しきれない，ということである。例えば，心理学者は研究の際に標本サイズを小さく見積りすぎている，という報告がある(Tversky & Kahneman, 1971)。こうしたミスコンセプションを認知心理学者ダニエル・カーネマン(Daniel Kahneman)らは「小数の法則」と呼び(Tversky & Kahneman, 1971), その詳細を代表性ヒューリスティックによって説明してきた(e.g., Tversky & Kahneman, 1974)。ヒューリスティックとは意思決定の方法であり，代表性ヒューリスティックとは類似性を判断基準にするものである。標本が母集団に似ている可能性が高いと考えるのである。

小数の法則という現象の報告以来，確率の誤りに関わる様々な認知心理学的研究が展開された(cf. Shaughnessy, 1992; Kahneman, 2011, pp. 109-265)。また小数の法則の発見は，確率に関する認知心理学的な研究を駆動しただけでなく，数学教育研究にも作用し，その影響を今日の我々まで届かせている。例えば，ジョーンズ(G. Jones)らは確率教育研究の今日的課題の一つとして「子どもの数学的確率と統計的確率の間の関係理解」(cf. Jones, Langrall, & Mooney, 2007, pp. 946-947)という，小数の法則の克服に関連するテーマを掲げている。

心理学研究とは異なり，数学教育研究はこのミスコンセプションの克服を図る実践的デザインもその射程に収めるが，効果的な授業提案がなされたという話は聞かない。実は，全国学力・学習状況調査において，確率の意味理解を測る問題の正答率は，依然として低い(e.g., 国立教育政策研究所, 2012, pp. 283-286; 2013, pp. 84-85)。先行する認知心理学的な確率研究は，確率について人間が「どのように間違えるか」をヒューリスティックの観点から示しているが(Tversky & Kahneman, 1974; 松浦, 2009),「なぜ誤るのか」への明確な回答は与えていない。先行研究はヒューリスティックを人間の本性として理解することでこの問いを回避してきたとも解釈できる(cf. Kahneman, 2011)。心理学的にはそれで十分なのかもしれないが，数学教育研究はミスコンセプションを記述し説明するだけではなく，その克服のための手段をデザインし実践することも主要な研究プロセスとするのだから(Wittmann, 1995)，小数の法則の頻発という確率教育の課題を，対処療法的にではなく根本的に解決するために,「なぜ誤るのか」を解明することが必要になる。「なぜ」に答えるということは，子どもの認識状態を知るのみならず，その状態が作り上げられた仕組みを明らかにすることである。「なぜ」に答えるためには「どのような指導が小数の法則を生じさせているのか」ということが考察されなければならないのではないか。寡聞にしてこの課題を設定する研究はほとんどない。以上の議論を踏まえて，本論文は以下を研究の目的として設定する。

$\boxed{\text{ミスコンセプション「小数の法則」の教授学的要因を明らかにする}}$

1.3　先行するミスコンセプション研究の課題と本研究の方法：ディスコース分析

ミスコンセプション研究の優れた総説として，コンフレー(J. Confrey)の論文(Confrey, 1987, 1990)をあげることができる。Confrey (1987)はミスコンセプション研究を三つの段階に区別している。第一期は，ミスコンセプションの実体把握の段階であり，様々なミスコンセプションが報告された。例えば，アールワンガー(S. H. Erlwanger)の研究は，数学教育における代表的な取り組みである。Erlwanger (1973/2004)は，一人の子どものもつ分数と小数に関する具体的なミスコンセプションを明らかにし，質的研究の可能性を示した。第一期の研究者の達見は，ミスコンセプションを「『子どもなりの論理に基づく』誤った考え」として捉えたことであり，この解釈は第三期において構成主義として結晶することになる。第二期は，第一期で発見され議論されたミスコンセプションを，他の理論との関係によって探究する段階である。例えば，理解論(e.g., 藤井, 1992, 小山, 2010)，認識論的障害論(e.g., 溝口, 1995a)，メタ認知論(e.g., 岩崎, 2007; 清水, 2007)，概念変容論(e.g., 真野, 2010)が，ミスコンセプション研究と関連のある研究領域である。第三期は構成主義への展開の段階であり，Confrey (1987)の時点では今後の展望という位置づけである。ミスコンセプション論は，「発生的認識論」や「問題解決学習論」と共に構成主義のルーツを形成する(Confrey & Kazak, 2006)。したがって，20 世紀末の様々な構成主義の台頭(cf. Ernest, 2010)が，この相に該当するといえよう。

以上のようにミスコンセプション研究は豊かな歴史をもっているが，それ故に様々な批判的・反省的な考察の対象にもなっている。例えば，アンナ・スフ

ァード(Anna Sfard)はミスコンセプション研究の限界を示唆するために，以下のような疑問を投げかけている：

《教師や教科書から数学的概念を学んだ子どもが，規則正しい方法でその概念について「誤る」という事実を，我々はどのように説明できるだろうか。》(Sfard, 2008, p. 267)

これは，「教師」や「教科書」という教授学的な研究対象と「ミスコンセプション」という心理学的な研究対象との関係性が，これまでのミスコンセプション研究の展望に欠けていたことを的確に指摘した一文である。

このような視点に立つとき，思考や表記をコミュニケーションの一形態として捉えるコモグニション論の発想は示唆的である。それは，認知とコミュニケーションと表記の統一的把握が，心理学的対象（認知）と教授学的対象（教科書や授業）の関連性を明確してくれると期待されるからである。コモグニション論はこうした一元論的考察をディスコースという枠組みを用いて展開する。本研究でもミスコンセプション「小数の法則」の教授学的要因をディスコース分析という方法を用いて明らかにしていく。このような作業により，従来では認知現象でしかなかったミスコンセプションの要因を，心的現象にとどめず，教科書内の記述や教室内のコミュニケーションの中にも見出すことが可能になり，確率概念の形成におけるミスコンセプション（以下,「確率ミスコンセプション」と略記する）の議論を心理学的な次元から教授学的な次元へと移すことが可能になる。このような転換の後に初めて，心理学の知見を用いた生産的な指導改善のための研究が行われ得ると考える。

2. 本研究の内容と論文の構造

心理学的な現象である「ミスコンセプション」の要因について，教授学的な視座から教科書や授業に着目して研究するためには，それなりの工夫が必要である。まずは考察対象であるミスコンセプションを，表記研究やコミュニケーション研究へと展開可能な形で定式化しなければならない。第 1 章はこの作業に記号論的モデル化という視点から取り組む。その際，ハインツ・シュタインブリング(Heinz Steinbring)の「認識論的三角形 *epistemological triangle*」(e.g., Steinbring, 1997, 2005/2009, 2006)やアンナ・スファードの「認知具象化理論 *theory of reification*」[1] (e.g., Sfard, 1991; Sfard & Linchevski, 1994)が理論的な準拠枠となる。この選択の理由は，これらの理論的枠組みが数学的認識やその展開に記号論的な角度から光をあてているからである。

第 1 章がミスコンセプションの教授学的要因の解明のために研究対象を整理する章だとすれば，第 2 章の目標は研究方法の整備になる。具体的には，スファードのコモグニション論(e.g., Sfard, , 2007, 2008, 2012, 2013b)に着目し, その概要と価値を示す。語句「コモグニション *commognition*」は女史の造語であり，コミュニケーション(communication)とコグニション(cognition)を組み合わせた鞄語である。ミスコンセプション研究に限らず認知研究は，様々な問題点を抱え

[1] スファードは 2000 年前後を境に，自身の理論を一変させている。「具象化 *reification*」は転換前の理論(e.g., Sfard, 1991)にも転換後の理論(e.g., Sfard, 2008)にもキーワードとして登場するが，その意味は大きく異なる。したがって，本研究では理論転換前における“reification”を「認知具象化」，転換後のそれを「記号具象化」と翻訳し，議論の明確化を図る。

ている。先述のスファードの認知具象化理論はコンセプションの理論であるが，女史は自身の議論も含めて認知研究の傾向を批判し，研究対象をコミュニケーションへと移しながら，コモグニション論として自らの理論を一新させた。コモグニション論はその特性上，表記研究やコミュニケーション研究と認知研究の総合を可能にするため，ミスコンセプションの教授学的要因の解明のための有効な研究枠組みとなる。

第 1 章・第 2 章の準備作業を経て，第 3 章・第 4 章では確率ミスコンセプション「小数の法則」の教授学的要因が，教科書のレベルで明らかにされる。しかし，そもそもコモグニション論は人間の認識や活動を探究するための大局的な理論として提案されているため，ミスコンセプションの教授学的要因について教科書を多角的に検討するための局所的な枠組みを十分には備えていない。したがって，教科書分析を行う前に理論的な検討も行うことになる。第 3 章では，第 1 章で提案されるコンセプションの記号論的モデル化の発想を用いてミスコンセプションをコモグニション論的に取り扱うための理論的枠組みが構築され，そこから得られる示唆に基づいて中学校の教科書全体に対してディスコースの規則の視点からの分析が行われる。また第 4 章では，確率単元それ自体に議論を焦点化し，第 1 章の考察より示唆される確率概念の形成過程に潜む小数の法則の要因を，対象構成という枠組みを用いて中学校と高等学校の教科書中に具体的に指摘する。

最後に第 5 章では，第 3 章と第 4 章の考察の結果を踏まえて，実際の授業の中に小数の法則の要因を見出す作業が行われる。第 3 章，第 4 章で用いられる

枠組みは教科書分析を目指したものであるが，コモグニション論の前提に立てば，それを授業分析に用いることに問題はない。第 1 章と第 2 章は本論文の理論パートとすれば，第 3 章，第 4 章，第 5 章は実証パートとして位置づく。こうした一連の論の展開によって，「学習の帰結としてのミスコンセプション」という皮肉を明確にすることが，本研究の目的である。本論文の構造は図 0-1 にようになる。

序章：先行研究の課題と本研究のねらい

第１章
確率概念の形成におけるミスコンセプションの記号論的モデル化

第２章
コンセプション研究のディスコース論的展開

第３章
教科書ディスコースに内在する小数の法則の領域普遍的要因：ディスコースの規則の視座から

第４章
教科書ディスコースに内在する小数の法則の領域固有的要因：概念形成の視座から

第５章
授業ディスコースに内在する小数の法則の要因：相補的視座から

終章：本研究の成果と今後に残された課題

図 0-1. 本論文の構造

3. 本研究の前提

本節では，数学教育学の今日的課題としての研究主題の適切性について検討する。そのために以下では，「数学教育学の核心」(Wittmann, 1995; 岩崎, 2007)や「今日的リテラシー」(岩崎・他, 2008; 岩崎・他, 2012; 阿部, 2010)と本研究との関連について述べる。

3.1 数学教育学の核心と本研究

数学教育を「学」として意図的に展開する試みは，必ずしも多くはない(岩崎, 2007, p. 1)。エリッヒ・ヴィットマン(Erich Ch. Wittmann)の「『デザイン科学 *design science*』としての数学教育学」(Wittmann, 1995)はその中でも特筆すべきものであり，数学教育学をデザイン科学として発展させようというものである。Wittmann (1995)は，関連諸学に依存しつつも独自のアイデンティティをもつという，「数学教育学の相対的自律性(relative autonomy)」(Wittmann, 1995, p. 355)を示すために，図 0-2 のような組織的枠組みを与えている。

氏は，この図に具体的な説明は与えていないが，次の引用はその解釈のために役立つと考える：

《他教科の教授学と同様に，数学教育学は学際性を必要とし，数学，一般教授学，教育学，社会学，心理学，科学史などを含む多様な領域の結果や方法に依存している。しかし，数学の指導に関する科学的知識は，これらの領域の成果の単純な組み合わせでは獲得され得ない；むしろそれは，一

貫していて包括的な数学の指導と学習の像へ様々な側面を「統合し」，それを構成的な方法で実践利用へ変換する，「固有の」教授学的アプローチを前提としている。》(Wittmann, 1995, p. 356)

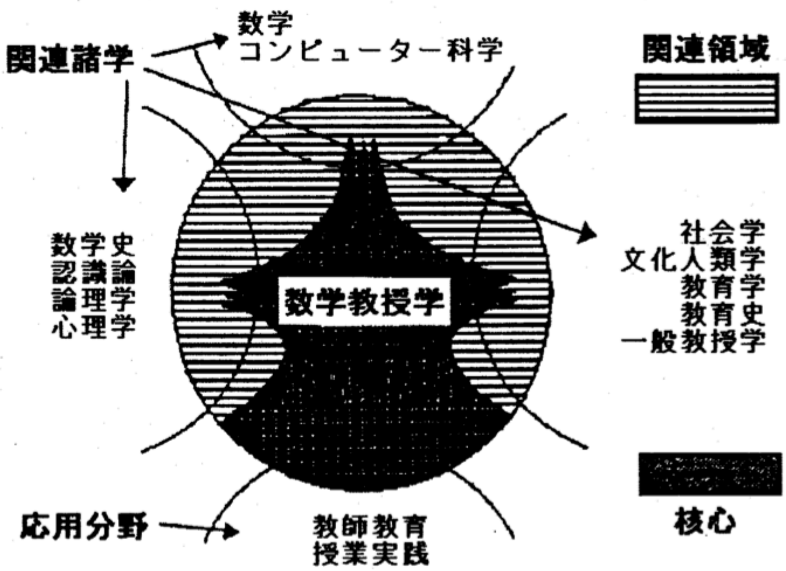


図 0-2 数学教育学の核心と関連領域，関連諸学とのそれらの関連，応用領域 (Wittmann, 1995, p. 357) [2]

要するに，数学，数学史，社会学などの「関連諸学 *related disciplines*」の必要性を主張しながらも，それらを有機的に関連させたり，教師教育などの「応用分野 *fields of application*」へ適用したりすることにこそ数学教育学のアイデンティティがあるとして，それを「核心 *core*」と表現している。

さらに，Wittmann (1995)は図 0-2 と関連して，核心の構成要素を以下のように列挙している（項目番号は筆者）：

---

[2] 翻訳は岩崎・中野(2006, p. 6)と岩崎(2007, p. 19)に従い，図それ自体は岩崎・中野(2006)のものを使用している。

《①　数学的活動と数学的思考の分析

②　局所的理論の展開（例えば，数学化に関する理論，問題解決に関する理論，証明に関する理論，実践技能に関する理論）

③　学習者を接近可能にすることに焦点を当てた相応しい内容の探究

④　数学指導の一般的目標からみた内容の批判的検討と正当化

⑤　学習の前提条件と指導／学習プロセスに関する研究

⑥　本質的指導単元，指導単元群，カリキュラムの開発と評価

⑦　授業を計画，実施，観察，分析するための方法の開発

⑧　数学教育史の包含》(pp. 356-357)

これらは数学教育学研究の課題群といえよう。ヴィットマンは，デザイン科学を準拠枠に，これら八つの項目が数学教育学の核心に位置づくことを主張している。

それでは， Wittmann (1995)の数学教育学の核心に，本研究の主題である「確率概念の形成におけるミスコンセプション」はどのように位置づくだろうか。まずは，核心の八項目と「ミスコンセプション」の関連性を考えてみよう。①はミスコンセプション研究そのものといえよう。「コンセプション」とは「考え方」であり，学習者の誤った考え方を分析することは，本研究の主要な研究作業の一つである。また「確率概念の形成」に焦点化してミスコンセプションに関する議論を進める点は，②や⑤の作業を本研究が含んでいることを示唆している。さらに本研究は子どもの誤りや数学的認識の展開を分析するための枠組みを構築するため，⑦とも関連しているといえる。

以上のように，本研究の主題はヴィットマンの構想するデザイン科学としての数学教育学の核心に位置づけることができる。

3.2　今日的リテラシーと本研究

リテラシーのもともとの意味は，「聖書」と「自然」を読み解くためのごく限られた大人の「教養」であり，そのリテラシーが「読み・書き・計算」という「識字」に変化し，子どもをも守備範囲に収めるようになるのは，近代になってからのことである。したがって，「リテラシー」という言葉には近代になって新たな語義を組み込まれたといえるが，ポストモダン社会の様々な特徴を反映し，学校教育の目標が学力主義から能力主義へとシフトしつつある今日において，リテラシー概念の更なる重層化が求められている(cf. 阿部, 2010; 岩崎・他, 2008; 岩崎・他, 2012)。その時，2009 年にフロイデンタール賞を受賞したイヴ・シュバラール(Yves Chevallard)の「潜在的数学 *implicit mathematics*」に関する議論(Chevallard, 1989/2007)は示唆に富んでいる(cf. 岩崎・他, 2012)。

Chevallard (1989/2007)は，数学をその「現れ方 *mode of presence*」から二つに分類する。一つは「顕在的数学 *explicit mathematics*」であり，教科書に記されている「数学」を想定すればよいだろう。もう一つは，潜在的数学であり，これは事物を製作・生産し物流などのシステムを維持し金融･保険などの制度を設計し管理するために使われるすべての数学をイメージすればよいだろう。Chevallard (1989/2007)の論旨を要約すれば，現在，世界的に行われている顕在的数学の数学教育は，数学化の進んだ現代社会において個人は数学なしに不自由なく生き

ていくことができるので，もはや正当化できるものではなく，潜在的数学への「文化的手ほどき *cultural initiation*」として数学教育は解釈され直さなければならない，ということである。

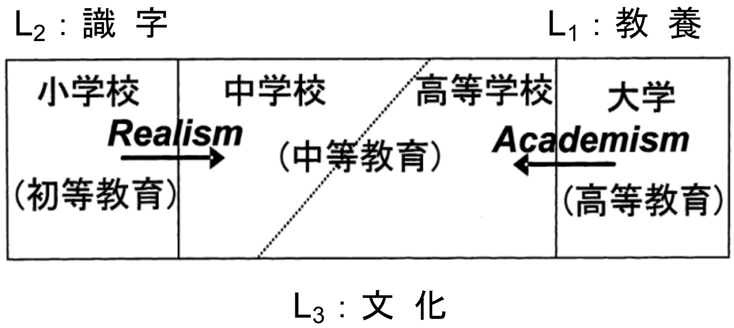


図 0-3. 教育システムとリテラシー［岩崎・他(2012, p. 28)をもとに作成］

平林(1986)や Iwasaki & Ueda (1999)や岩崎・服部(2010)を参照しながら，先に述べたリテラシーの史的展開を今日の教育システムに対応させれば, 図 0-3 のようになる。教養としてのリテラシーはアカデミズムの名の下で学問として高度化･精緻化を果たし，高等教育に位置づく。一方，識字としてのリテラシーはリアリズムの名の下で初等教育に位置づき，近代化を推進した。そのため第三のリテラシーは，初等教育の理念と高等教育のそれとを接続すべく中等段階に位置づき,「文化的手ほどき」としての教育を通して公共性の一翼を担う市民育成のために，その意味と機能を新たにすると考える(cf. 岩崎・他, 2012)。

ここでいう「文化」の獲得は，シュバラールの議論に従って数学教育の文脈でいえば,「潜在的数学を知る」ということである。このように考えるとき，数学と社会を仲介するものとして，応用数学の重要性がクローズアップされることになろう。実際，シュバラールは後年，次のように述べている：

《何世紀もの間，文化的制度としての数学は，二つの自己表現をまとって繁栄してきた。つまり数学は，「純粋」数学と「混合 *mixed*」数学から成り立つものとして理解されてきており，この普及したエートスは微かな帝国主義的なタッチを伴っている。ここ数十年の間，純粋数学（初等的ではあるが）という前者のパートは古の「帝国」を象徴化し維持しようとしてきた一方，後に「応用」数学と呼ばれるようになる「混合」パートは学校において着実に衰えていった。私の見方では，この時代は今終わろうとしている。数学は我々人類のためのものであり，問題ではなく解決のために存在するというアイデアを生き返らせなければならない，という政治的・文化的意思をもちながら，どのような文化的傲慢にも陥ることなく，今こそ我々は応用数学(mixed mathematics)の魂を取り戻さなければならない。》

(Chevallard, 2012, p. 877; 下線は筆者加筆)

したがって，今日的リテラシーの視点からみて，数学教育の実践や研究が確率・統計領域に着目するのは必然的なことであり，こうした前提に立つとき，確率に焦点をあてる本研究のテーマ設定の今日的な数学教育研究として適切性は正当化され得ると考える。

引用・参考文献：序章

阿部好貴(2010).『数学教育におけるリテラシーの育成に関する研究』. 未公刊博士学位論文，広島大学.

石井英真(2010).「学力議論の現在：ポスト近代社会における学力の論じ方」. 松下佳代［編著］『〈新しい能力〉は教育を変えるか：学力・リテラシー・コンピテンシー』(pp. 141-178). 京都：ミネルヴァ書房.

岩崎秀樹(2007).『数学教育学の成立と展望』. 京都：ミネルヴァ書房.

岩崎秀樹・阿部好貴・山口武志(2008).「知識基盤社会における数学的リテラシーの課題と展望」. 日本科学教育学会誌『科学教育研究』, *32*(4), 366-377.

岩崎秀樹・大滝孝治・新居広平(2012).「数学教育における目的・目標論再考」. 日本数学教育学会誌『数学教育』, *94*(11), 26-29.

岩崎秀樹・中野俊幸(2006).「学としての数学教育研究の展開」. 日本数学教育学会誌『数学教育学論究』, *85*, 3-21.

岩崎秀樹・服部裕一郎(2010).「数学的リテラシーの提起する課題と展望：中等数学教育における一つの試み」. 日本数学教育学会『第 43 回数学教育論文発表会「課題別分科会」発表収録』(pp. 13-18). 宮崎：宮崎大学.

岡部恭幸(2006).『確率概念の認識における水準とそれに基づくカリキュラムに関する研究』. 未公刊博士学位論文，神戸大学.

国立教育政策研究所(2012).『平成 24 年度全国学力・学習状況調査【中学校】報告書』. http://www.nier.go.jp/index.html.

国立教育政策研究所(2013).『平成 25 年度全国学力・学習状況調査報告書中学校数学』. http://www.nier.go.jp/index.html.

小山正孝(2010).『算数教育における数学的理解の過程モデルの研究』. 東京：聖文新社.

清水美憲(2007). 『算数・数学教育における思考指導の方法』. 東京：東洋館出版社.

真野祐輔(2010).『算数・数学学習における概念変容に関する基礎的研究：「数」領域の展開を中心に』. 未公刊博士学位論文，広島大学.

平林一栄(1986).「数学教育の有効性のために」.『奈良教育大学紀要』, *35*(2), 1-17.

藤井斉亮(1992). 「児童・生徒の文字の理解とミスコンセプションに関するインタビュー調査」，日本数学教育学会誌『数学教育学論究』，*58*，3-27.

松浦武人(2009). 「初等教育における児童の確率概念の発達を促す学習材の開発研究：確率判断におけるヒューリスティックスの改善に焦点をあてて」. 数学教育学会誌『数学教育学論究』，*91*，3-13.

溝口達也(1995a). 「認識論的障害の克服過程の記述カテゴリーによる特徴づけ：極限概念を事例として」. 日本数学教育学会誌『数学教育学論究』，*63-64*，27-48.

Chevallard, Y. (1989/2007). Implicit mathematics: Their impact on societal needs and demands. In U. Gellert & E. Jablonka (eds.), *Mathematisation and demathematisation: Social, philosophical and educational ramifications* (pp. 57-65). Boston, USA: Sense Publisher.

Chevallard, Y. (2012), Teaching mathematics in tomorrow’s society: A case for an oncoming counterparadigm. *Pre-proceedings of the 12th International Congress on Mathematical Education*, *Regular Lecture 4-11*, 865-877. Seoul, Korea: International Commission on Mathematical Instruction.

Confrey, J. (1987). ‘Misconceptions’ across subject matters: Science, mathematics and programming. In J. D. Novak (ed.), *Proceedings of the second international seminar: Misconceptions and educational strategies in science and mathematics*, *1*, 81-106. New York, USA: Cornell University, Department of Education.

Confrey, J. (1990). A review of the research on the student conceptions in mathematics, science, and programming. In C. B. Cazden, (ed.), *Review of research in education* (16, pp. 3-56). Washington, DC, USA: Academic Educational Research Association.

Confrey, J. & Kazak, S. (2006). A thirty-year reflection on constructivism in mathematics education in PME. In A. Gutiérrez & P. Boero (eds.), *Handbook of research on the psychology of mathematics education: Past, present and future* (pp. 305-345). Rotterdam, The Netherlands: Sense Publishers.

Erlwanger, S. H. (1973/2004). Benny's conception of rules and answers in IPI mathematics. In T. P. Carpenter, J. A. Dossey & J. L. Koehler (eds.), *Classics in mathematics education research* (pp. 48-58). Virginia, USA: The National Council of Teachers of Mathematics, Inc.

Ernest, P. (2010). Reflections on theories of learning. In B. Sriraman & L. English (eds.), *Theories of mathematics education: Seeking new frontiers* (pp. 39-47). Heidelberg, Germany: Springer.

Iwasaki, H. & Ueda, A. (1999). Development of mathematics education in Japan from Meiji era to present time: Forcusing on the change of realism and academism. *International Journal of Curriculum Development and Practice*, *1*(1). 103-112.

Jones, G. A., Langrall, C. W., & Mooney, E. S. (2007). Research in probability: Responding to classroom realities. In F. K. Lester, Jr. (ed.), *Second handbook of research on mathematics teaching and learning: A project of the National Council of Teachers of Mathematics* (pp. 909-955). Charlotte, USA: Information Age Publishing.

Kahneman, D. (2011). *Thinking, fast and slow*. New York, USA: Farrar, Straus and Giroux.

Sfard, A. (1991). On the dual nature of mathematics conceptions: Reflections on processes and objects as different sides of the same coin. *Educational Studies in Mathematics*, *22*(1), 1-36.

Sfard, A. (2007). When the rules of discourse change, but nobody tells you: Making sense of mathematics learning from a commoginitive standpoint. *The Journal of the Learning Sciences*, *16*(4), 567-615.

Sfard, A. (2008). *Thinking as communicating: Human development, the growth of discourses, and mathematizing*. Cambridge, UK: Cambridge University Press.

Sfard, A. (2012). Introduction: Developing mathematical discourse - Some insights from communicational research. *International Journal of Educational Research*, *51-52*, 1-9.

Sfard, A. (2013b). Not just so stories: Practising discursive research for benefit of educational practice. In V. Farnsworth & Y. Solomon (eds.), *Reframing educational research: Resisting the 'what works' agenda* (pp. 139-150). New York, USA: Routledge.

Sfard, A. & Linchevski, L. (1994). The gains and pitfalls of reification: The case of algebra. *Educational Studies in Mathematics*, *26*, 191-228.

Shaughnessy, J. M. (1992). Research in probability and statistics: Reflections and directions. In D. A. Grouws (ed.), *Handbook of research on mathematics teaching and learning: A project of the National Council of Teachers of Mathematics* (pp. 465-494). New York, USA: Macmillan Publishing Company.

Steinbring, H. (1997). Epistemological investigation of classroom interaction in elementary mathematics teaching. *Educational Studies in Mathematics*, *32*(1), 49-92.

Steinbring, H. (2005/2009). *The construction of new mathematical knowledge in classroom interaction: An epistemological perspective*. Berlin, Germany: Springer.

Steinbring, H. (2006). What makes a sign a *mathematical sign*? An epistemological perspective on mathematical interaction. *Educational Studies in Mathematics*, *61*(1-2), 49-92.

Tversky, A., & Kahneman, D. (1971). The belief in the law of small numbers. *Psychological Bulletin*, *76*, 105-110.

Tversky, A., & Kahneman, D. (1974). Judgment under uncertainty: Heuristics and biases. *Science*, *185*, 1124-1131.

Wittmann, E. Ch. (1995). Mathematics education as a ‘design science’, *Educational Studies in Mathematics*, *29*(4), 355-374.

第　1　章

確率概念の形成におけるミスコンセプションの記号論的モデル化

「確率概念の形成におけるミスコンセプション」は，数学教育研究を席巻してきた認知心理学的研究の典型的なテーマである。本研究の目的は，この心理学的な研究対象を教授学的なレンズを通してみることで，認知の問題を教科書表記や授業内コミュニケーションのそれとして指摘することである。そのためにこの第 1 章では，確率概念の形成におけるミスコンセプションについて，記号論的に考察することで，第 2 章以降の議論への通路を確保しておく必要がある。

1.　小数の法則の記号論的モデル化

第 1 節の目標は，ミスコンセプションの教授学的要因を教科書や授業の視点から明らかするための準備として，確率ミスコンセプション「小数の法則」を記号論的に定式化することである。そのために，本節では記号論的な視座から数学的認識をモデル化する，シュタインブリングの認識論的三角形(e.g., Steinbring, 2005/2009)に着目する。しかし，認識論的三角形はミスコンセプションの記述を意図して構築されているわけではないので，そのままでは本節の目的のために使用することはできない。そこで認識論的三角形をコンセプション

論的に補完するために, 本研究は溝口のコンセプションモデル（C(C,N,E)モデル）(e.g., 溝口，1995a)にも着目する[1]。なお術語「コンセプション」は，ある瞬間の認識の状態とその変容プロセスという二つの意味を含意している。この点を強調する必要がある場合，それぞれについて「コンセプションの静態」と「コンセプションの動態」という言葉によって区別するが，基本的には本研究は，コンセプションという言葉でその静態について言及する。

1.1　コンセプションの静態モデルの理論的基盤

本研究では，コンセプションの静態をモデル化するための理論的な基盤として，認識論的三角形と C(C,N,E)モデルを選択する。これらはいずれも代表的な数学的認識のモデルといえよう。二つのモデルに共通する特徴は，子どもの認識を三つの構成要素に分節し，それらの関係性を構造化している点である。こうした視点は，ミスコンセプションをモデル化しようとするときに重要になる。本研究がこれら二つのモデルを基盤とするのは，このためである。

1.1.1　シュタインブリングの認識論的三角形

シュタインブリングは，教室における数学的知識の構成を分析するために，「対象／指示の文脈 *object/reference context*」，「記号／象徴 *sign/symbol*」，「概念

[1] 溝口は，ブルソーによる障害の起源の分類(Brousseau, 1997, pp. 86-87)に基づいて，認識論的障害とミスコンセプションとの明確な区別を主張している(溝口, 1995a, p.30)。しかし，本研究は認識論的な意識性をもってミスコンセプションに取り組むものであり，ミスコンセプション研究と認識論的障害研究との積集合部分に位置する取り組みといえる。したがって，溝口理論の援用は研究方法論として矛盾を孕むものではない。

concept」から成る認識論的三角形という図 1-1 のような枠組みを用いている(e.g., Steinbring, 1997, 2005/2009, 2006; cf. 岩崎, 1998)。これは，オグデン＆リチャーズ(1967/2001)やフレーゲ(1986)の記号論的な三項枠組みを，数学教育的に修正したものである(cf., Steinbring, 1997, 2005/2009)。以下では，オグデン＆リチャーズ(1967/2001)の「意味の三角形」（図 1-2）を手掛かりに，シュタインブリングの創意について概観してみよう。

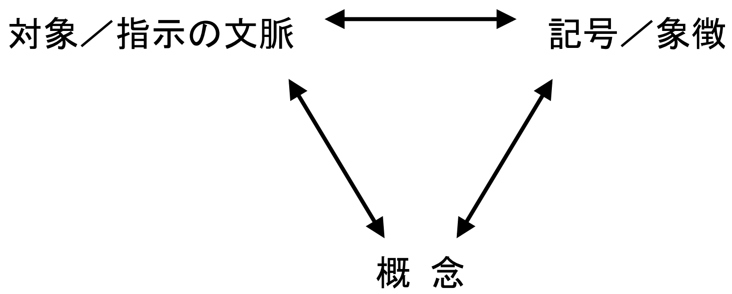


図 1-1. 認識論的三角形(Steinbring, 2006, p. 135)

オグデン＆リチャーズ(1967/2001)の成果は，「直接的関係の間接化」(山元, 1965)として要約できる。つまり,「指示物」と「象徴」は直接的に結びついているのではなく,「思想あるいは指示」を介して，想定された関係として間接的に関連しているにすぎないということである。換言すれば，指示物と象徴は理論負荷的(cf. 内井, 1995, pp. 124-125)に接続されているということであり，これが指示物と思想, そして象徴と思想の関係が因果である所以であろう。例えば,「具体的な対象としてのイヌ」(ここでは記号でしか表現できないが) を表す言葉は,「犬」でも「dog」でも「chien」でも「כלב」でもよく，それらは「イヌ」と直接的には繋がっていない。我々の場合，日本の文化の中で形成された「イヌ」

に関する知識によって，「イヌ」と「犬」は結びつけられている。

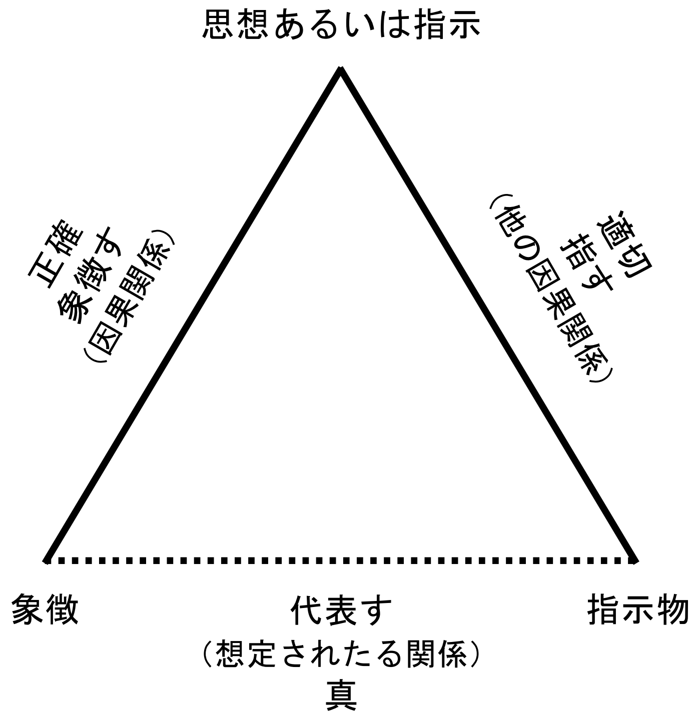


図 1-2. 意味の三角形(オグデン＆リチャーズ, 1967/2001, p.56)

しかし，意味の三角形においては，対象と記号との関係がただ一つに規定されている。シュタインブリングはこの点を批判的に捉え，「対象／指示の文脈」と「記号／象徴」は相互作用しながら，「概念」を通して相対的に変容し，概念それ自身も変化していく，という旨の主張を行っている(e.g., Steinbring, 1997, p. 52; Steinbring, 2005/2009, p. 24)。したがって，認識論的三角形には，双方向矢印によって三つの頂点の変容のプロセスが内包されている。つまり，そこにはある種の時間が仮定されている。この点に関してシュタインブリングは，確率概念を例にしながら，図 1-3 のような図式を用いて度々説明している (e.g., Steinbring, 1997, pp. 52-53; Steinbring, 2005/2009, pp. 24-25; Steinbring, 2006, p. 138)：

《初等確率論は，数学的知識の基礎的な認識論的問題の分析のための典型例である。[…]歴史的初期の確率概念に関しては，記号体系の具体例として「はしたの数 *fraction numerals*」を，そしてそれに対応する指示の文脈として「理想的なサイコロ」を，それぞれ考えることができる。

後に，指示の文脈は「統計的コレクティブ」に変化し，記号体系は数式によって「相対度数の極限」を記述するようになる（例えば，かなり多くの試行 n に対して，$hn(\mathrm{E}) \approx \mathrm{p}(\mathrm{E})$のように）。さらに後には，指示の文脈は「確率論的な独立構造や従属構造」から構成されるようになり，対応する記号体系は「間接的に定義された公理」を表現する数学的言明のリストとなった。》(Steinbring, 2006, p. 138)

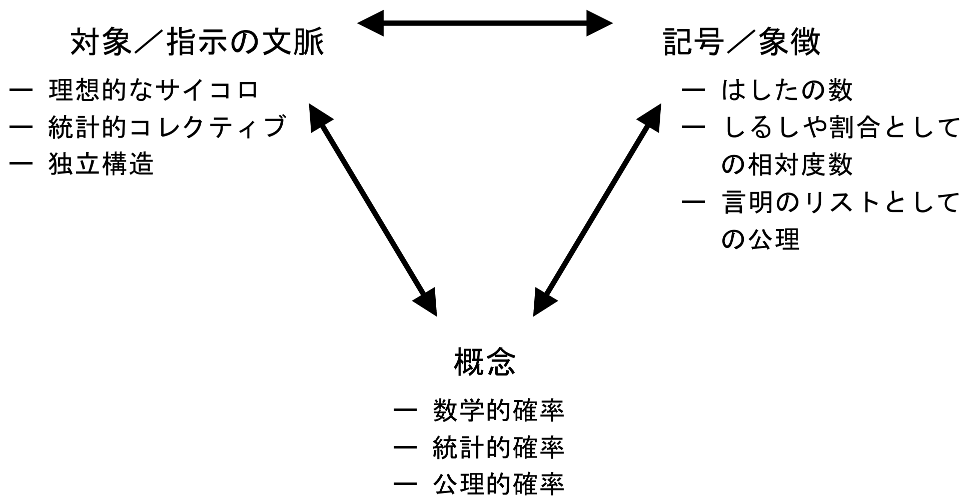


図 1-3. 認識論的三角形：確率概念(Steinbring, 2006, p. 138)

認識論的三角形を用いてミスコンセプションを定式化するならば，「『概念』

に対する『対象／指示の文脈』と『記号／象徴』の不適切な連繫」として表現できよう。しかし認識論的三角形には，この「不適切な連繫」を説明するための機能までは備えられていない。したがって，ミスコンセプションのモデル化を念頭におく場合，溝口理論の《確信》のような，メタ的な要素を考慮する必要がある。

また認識論的三角形の主張は，「概念」が「対象／指示の文脈」と「記号／象徴」の相互作用によって発展する，ということであるが，ここで重要であると思われることは，オグデン＆リチャーズ(1967/2001)が主張しているように，「対象／指示の文脈」と「記号／象徴」との間には直接的な関係はない，ということである。これを踏まえると，それらは「概念」を通して間接的に結びついており，相互作用も「概念」を通して間接的に行われていると解釈する方が適切であろう。むしろ，「概念」を通して相互作用が展開するからこそ，シュタインブリングの主張するような「概念」の発展がおこるとさえいえる。そこで本研究では，「対象／指示の文脈」と「記号／象徴」を結ぶ実線矢印を，破線矢印に変更することを提案する。これは，形式的にはささいな変化でしかないかもしれないが，オグデン＆リチャーズ(1967/2001)による間接化と同様に，意味的には重要であると考える。

1.1.2　溝口のＣ（Ｃ, Ｎ, Ｅ）モデル

シュタインブリングは記号論的な相互作用という視点から，知識構成に切り込むが，溝口は「認識論的障害 *epistemological obstacle*」という視座からそれに

アプローチする(e.g., 溝口, 1995a, 1995b, 2004; Mizoguchi, 1993)。認識論的障害は，フランスの科学認識論者ガストン・バシュラール(Gaston Bachelard)によって提唱された概念であり(cf. バシュラール, 2012, pp. 23-40)，フランスの数学教授学者ギ・ブルソー(Guy Brousseau; e.g., Brousseau, 1997, pp. 79-116)によって数学教育研究へと持ち込まれた(Schubring, 2011, p. 90)。認識論的障害とは学習の障害となる認識のことであるが，ここで重要なのは，この認識はその学習以前には有効に機能していた，という点である。認識論的障害論は，この点に数学学習の本質的な問題を見出すのである。溝口は認識論的障害の克服過程を記述するために，次の三つのカテゴリーを準備している：

《《概念 *notion*》：子どもの漠然としたアイデア，イメージ，また心的モデル等を含む。

《事象 *event*》：《事象》は《概念》が用いられる範囲や《概念》が適合する事柄を意味する。単に与えられた問題等の事柄自体が《事象》ではなく，子どもの《概念》が負荷された対象を《事象》とする。

《確信 *conviction*》：上記２つのカテゴリーによって記述されるものは，実際に観察される子どもの行動にあたるものである。《確信》は，なぜ子どもがそのような行動を示すのかということを説明する子どもの包括的な価値基準にあたるものとして用意される。すなわち，《確信》とは，子どもの数学，あるいは数学的知識に対する態度を意味する。ここで言う態度とは，「振る舞い」としての意味ではなく，行動への準備状態あるいは論理的要請として解釈されるもので

ある。》(溝口, 2004, p. 35)

そして，これら三つのカテゴリーは，図 1-4 のような関係として，子どものコンセプションのモデルを構成する。

このモデルの特徴は，子どものもつ《概念》だけでなく，その背景にある価値基準である《確信》や，《概念》が負荷された《事象》をコンセプションの構成要素として捉えている点である。確率の例でいえば，その《概念》のみを確率のコンセプションと捉えるのではなく，《概念》の背景にある《確信》（例えば，非決定論）や《概念》が負荷された事象（例えば，理想的なサイコロ）を含めて，確率のコンセプションとみなす，ということになろう。「子どもの思考」を研究対象とする従来の研究の多くは，ともすれば《概念》の部分にしか焦点をあてていなかったように思われる。しかし，それでは，子どものなかでなぜその《概念》が選択され，その結果として考察対象がどのようにみえているか（《事象》）ということを説明できない。つまり本モデルは，《事象》や《確信》をコンセプションに含めることによって，高い記述力を獲得しているといえよう。

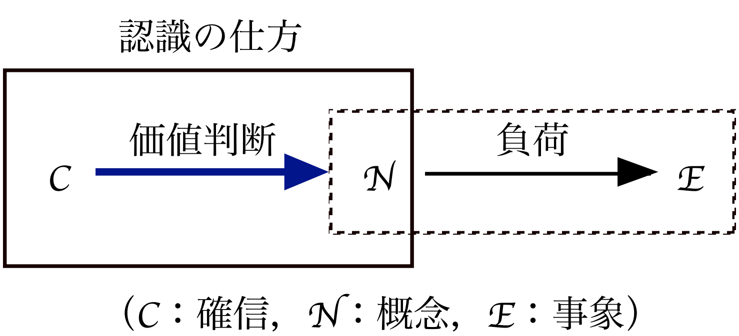


図 1-4. C(C,N,E)モデル(溝口, 2004, p. 35)

C(C,N,E)モデルは《概念》だけでなく，その背景的要素である《確信》と前景的要素である《事象》をコンセプションに含めて考察しているところに，その特徴がある。しかし，意味の三角形や認識論的三角形を視座としてこのモデルを眺めると，更なる発展の可能性があるように思われる。

溝口(2004)は，「80×2.5 によるかけ算の意味の拡張場面」における《事象》を，《80＋80＋40 はこれまでの考え［同数累加］ではうまく（１つの）かけ算の式で表せない(80×2＋40)》(p. 39; 括弧[ ]内は筆者加筆)と《80＋80＋40＝80×2.5(80×0.5＝40)》(p. 39)と表現している。認識論的三角形の視座からみれば，前者は「対象／指示の文脈」であり，後者は「記号／象徴」であろう。こうした分析の視点を加えることで，モデルの記述力の向上が期待できる。

1.2　コンセプションの静態の四面体モデルの構築

上述の議論を踏まえて，本研究ではコンセプションの静態を，「コンセプションの静態の四面体モデル」として，図 1-5 のようにモデル化してみたい。まず，四面体モデルに用いられている用語について確認しておく。本研究では，溝口の定義を踏襲しながら，〈確信〉，〈対象／指示の文脈〉，〈記号／象徴〉，〈概念〉を次のように規定する[2]：

[2] 代表的なコンセプションモデルにバラシェフ(N. Balacheff)の C(P,R,L,∑)モデルがある(e.g., Balacheff, 2000)。氏の炯眼は，コンセプションを四つの構成要素によって説明したことに現れている。数学教育研究において概念や認識を関係論的にモデル化しようとする場合，三つの要素によって行われることが多い(e.g., Vergnaud, 1988/2004; 溝口, 1995a; Steinbring, 2005/2009; 和田, 2008)。C(P,R,L,∑)モデルは，コンセプションをあえて従来よりも複雑に捉えることで，より高い精度でコンセプションを解釈することを可能にする。しかしバラシェフは，それら四つの要素間の関係を明示的には示していない。本研

〈確信 *conviction*〉：学習者が数学を行う上での暗黙的な前提であり，数学あるいは数学的知識に対する態度を意味する。

〈対象／指示の文脈 *object/reference context*〉:〈確信〉が用いられる指示の文脈や,〈確信〉が適合する対象を意味する。

〈記号／象徴 *sign/symbol*〉:〈確信〉が適合する記号／象徴を意味する。

〈概念 *notion*〉:〈確信〉が適合する，学習者のもつ概念(concept)，漠然としたアイデア，イメージ，また心的モデル等を意味する。

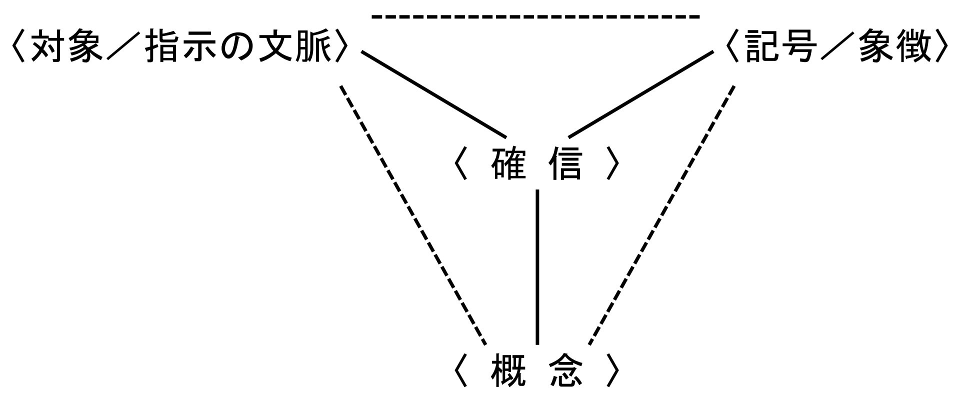


図 1-5. コンセプションの静態の四面体モデル

このモデルの重要な主張は,「〈対象／指示の文脈〉,〈記号／象徴〉,〈概念〉は〈確信〉を介して間接的に結びついているにすぎない」ということである。なお認識論的三角形は，数学的知識の成長の「プロセス」を含意したものであり，それが双方向矢印に象徴されているが，ここではコンセプションの「静態」を強調するために，矢印はあえて取り除いてある。したがって，オグデン＆リ

究の四面体モデルの構成要素は，おおよそ C(P,R,L,∑)モデルのそれと対応する：〈対象／指示の文脈〉－ P,〈記号／象徴〉－ L,〈概念〉－ R,〈確信〉－ ∑。その意味で四面体モデルは，C(P,R,L,∑)モデルに四面体という構造を与えたものといえる。

チャーズ(1967/2001)のような対象と記号の一義的な様子を表しているわけではなく，変容過程の一断面を切り取っていると理解して頂きたい。

シュタインブリングは，確率概念の史的展開を事例として認識論的三角形を説明している（図 1-3）。これに倣って，ここでも確率史の展開を用いて四面体モデルの使用例を示したい（図 1-6）。勿論，四面体モデルは数学史を解釈する道具ではないので，ここには議論の余地があるだろう。しかし，数学史を援用する数学教育研究は多く，そこには少なからず『精神発生と科学史』(ピアジェ＆ガルシア, 1996)の影響が見てとれる(e.g., Sfard & Linchevski, 1994; 岡崎・岩崎, 2003; 真野, 2010)。同書は，精神発生と数学史に共通する知識発展のメカニズムを指摘した。数学教育の視座からみて，これは数学史と数学教育の相互交渉の可能性や必要性を示すものである(岩崎, 2003, p. 181)。したがって，本研究もこの視点に立ち，数学史（系統発生）を手掛かりに，コンセプション（個体発生）を探究する。

数学的確率の概念が思想的な背景として必然性に焦点をあてる「決定論」をもち(ギリース, 2004, pp. 31-35)，統計的確率の概念の背景には偶然性に重きを置く「非決定論」の台頭があり(ハイデルベルガー, 1991, pp. 138-143)，公理的確率の概念の理論的な基盤が「測度論」であることを考慮すると(伊藤，1986，pp. 431-433)，認識論的三角形によって図 1-3 のように定式化された確率概念の史的展開は, コンセプションの静態の四面体によって図 1-6 のように再定式化されることになる。

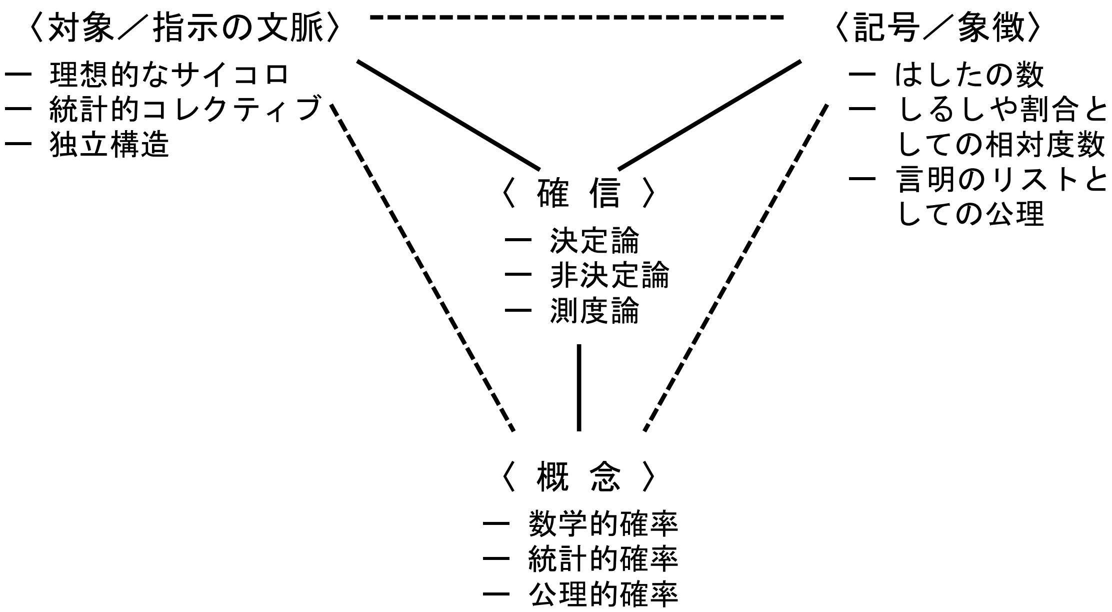


図 1-6. コンセプションの静態の四面体モデル：確率概念

四面体モデルによって確率史は上述のように解釈できるものの，〈概念〉よりも〈確信〉が〈対象／指示の文脈〉と〈記号／象徴〉に強く影響を及ぼすことを示すには至っていない。この点は，たびたび指摘されるミスコンセプションの「弾性 *resilience*」(cf. Confrey, 1987)によって説明できる。ミスコンセプションの弾性とは，学習指導によってミスコンセプションが一時的には克服されたようにみえても，時間が立つともとに戻ってしまう性質を指している。この弾性は，「〈対象／指示の文脈〉，〈記号／象徴〉，〈概念〉の間の繋がりの脆さ」として記号論的に定式化できる。しかもそれらは，ただ脆いのではなく，規則性をもって脆いのである（同じミスコンセプションが多くの子どもにみられる）。この脆さと規則性をもたらすものが〈確信〉という態度的要素であるというのが，四面体モデルの主張であり，態度がコンセプションの中で支配的であると

いうのは，例えば溝口理論が示している。〈確信〉は，一度は更新された〈対象／指示の文脈〉，〈記号／象徴〉，〈概念〉の間の接続を後退させるほどのものであるから，他三つの要素に対してかなりの影響力をもっているといえよう。こうしたミスコンセプションの弾性は，視点を変えれば平林(2007)の指摘する「内知識の脆さ *fragility*」であり，数学教育学における認識論的な研究対象の一つである。したがって，この弾性を解釈できる説明力は，四面体モデルの特徴の一つといえる。

1.3　小数の法則のモデル化

小数の法則においては，何らかの未転換のままである〈確信〉が，大数の法則の〈概念〉によって結びつけられるはずのない小標本と確率の数値を接続させている，と考えられる。この「何らかの〈確信〉」は，確率史の展開を踏まえると，決定論であると考えるのが妥当であろう。つまり，例えば「確率 1/2 なのだから表の次は裏が出る」と決定論的に推論してしまうのである。以上の議論から，ミスコンセプション「小数の法則」は，図 1-7 のようにモデル化される。

数学の社会性や文化性を重要視する近年の数学教育における認識論（例えば，社会的構成主義）を考慮すれば，何の前提にも依存しない絶対的な真理は考えづらい。したがって前提なしには，「ミス」コンセプションはありえないということになる。四面体モデルは，〈概念〉によって前提事項を表現する。つまり本モデルは，前提を記述する能力を持つため，ミスコンセプションを相対的に同定することができる。社会的構成主義に沿った形でミスコンセプションを取り

扱える記述力は，四面体モデルの特徴の一つである。

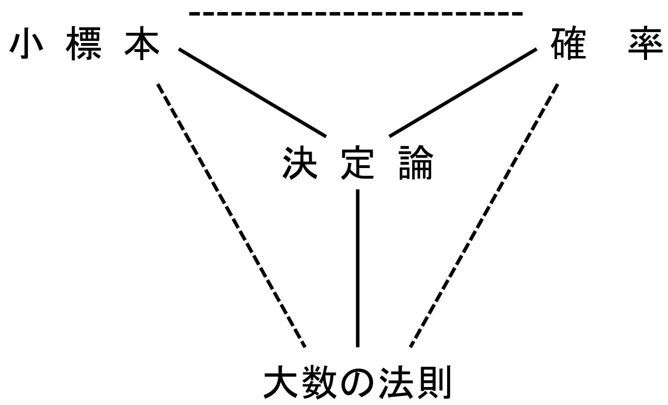


図 1-7. コンセプションの静態の四面体モデル:小数の法則

2.　確率概念の形成過程の記号論的モデル化

前節の内容は，象徴的に述べれば「確率概念の形成におけるミスコンセプション」という本研究の主題の後半部分「ミスコンセプション」に焦点化したものであるが，本節の論考の力点は前半部分「確率概念の形成」に置かれる。第 2 節は，本論文後半の教科書分析への展開に備えて，確率概念の形成の困難性つまり確率コンセプションの動態に内在するミスコンセプションの要因を，記号論的な視座から特徴づけることを目標とする。確率概念の形成過程に関する議論には，ピアジェ(J. Piaget)・フィッシュバイン(E. Fischbein)系とも特徴づけられる発達心理学的研究の系譜(cf. Shaughnessy, 1992; 岡部, 2006)があるが，これらは記号論的な関心をもっているものではない。また，小数の法則のような確率

ミスコンセプションは，子どもだけでなく，確率・統計を学んだ大人にもみられることから，発達水準の視点だけでは確率概念の形成の困難性は説明しきれない。そこで本節では，記号論的な切り口から数学的認識の展開の本性に迫る概念形成論であるスファードの認知具象化理論(e.g., Sfard, 1991; Sfard & Linchevski, 1994)の視点から，確率概念の形成過程について考察する。なお，以下の議論では前節で構築したコンセプションの静態の四面体モデルも用いられるが，その際，必要に応じて〈対象／指示の文脈〉を O,〈記号／象徴〉を S,〈概念〉を N,〈確信〉を C と略記する。

2.1　コンセプションの動態モデルの理論的基盤

数学の対象は本来抽象的であり，それ故に何らかの形式化を図らない限り，実体性(entity)を備えない。すなわち数学的概念の規定がこれにあたり，その規定の仕方を Sfard (1991)は「操作 *operational*」と「構造 *structural*」によって特徴づける。女史はこれを数学的概念の「二重性 *dual nature/duality*」としており，この発想に基づいて，数学史的な視座から，数学的認識の展開を「操作的コンセプション」から「構造的コンセプション」への移行として特徴づけている。また心理学的な視座から，その移行プロセスが「内面化 *interiorization*」→「凝縮化 *condensation*」→「認知具象化 *reification*」の順序で進むことを明らかにしている[3]。

---

[3] これは，Sfard (1991)において，数学史的論考と心理学的論考が完全に分離していることを意味しているわけではない。心理学的論考で提案される内面化，凝縮化，認知具象化の三分類は，数学史的論考の過程で主張された「前概念的段階 *preconceptual stage*」，

表 1-1. 操作と構造の概要(Sfard, 1991, p. 33)

	操作的コンセプション	構造的コンセプション
一般的特性	数学の実体性が，特定の過程の所産として考えられたり，過程それ自体と同一とみなされたりする。	数学の実体性が，まるでそれが実在的な対象であるかのように，静的な構造として考えられる。
内的表象	言葉による表象によって支えられている。	視覚的なイメージによって支えられている。
概念発達における位置	概念形成の最初の段階で発達する。	操作的コンセプションから進化する。
認知過程における役割	効果的な問題解決や学習において，必要ではあるが十分ではない。	すべての認知過程（学習，問題解決）を促進する。

操作的コンセプションとは，数学的概念を動的な過程として捉える段階であり，例えば，「＝」を左辺から右辺を導出する計算の命令記号と見なす「式」のコンセプションのことである。それに対し，構造的コンセプションは，数学的概念を静的な対象として扱うことを可能にするコンセプションのことで，「＝」

「長期にわたる操作優勢段階 *long period of predominantly operational approach*」,「構造的段階 *structural phase*」(Sfard, 1991, pp. 13-14)に基づいて主張されている(Sfard, 1991, p. 18)。

に関していえば，構造的な「式」コンセプションにおいて，それは左辺と右辺の相等関係を表す記号として理解される。それぞれのコンセプションのより一般的な特徴は表 1-1 の通りである。

内面化，凝縮化，認知具象化については真野が次のような簡潔な要約を与えている：

《
- 内面化：既に馴染みのある対象を用いて活動を遂行する
- 凝縮化：一連の操作をより処理のしやすい構成単位にチャンク化し全体として考察される
- 具象化：内面化・凝縮化に内在する数学的概念を実体をもった対象として意識化し，それを用いて新たな活動に取り組む》(真野, 2011, p. 14)

それぞれの具体例については，次節で述べることとするが，これらの三つのプロセスを繰り返しながら，数学的認識は展開する（図 1-8）。

おおよそ上述のように要約されるスファードの認知具象化理論の成果は，数学的認識の展開を「操作的コンセプション→構造的コンセプション」と「内面化→凝縮化→認知具象化」という二つの枠組みで特徴づけたことであるといえよう。前者は認識の展開の所産に，後者はその過程により焦点化されている。しかし，認知具象化理論を理解する上で重要であるこれら二つの枠組みの総合作業は，残念ながら明示的には行われていない。これに関して，例えば女史は次のように述べている：

《内面化や凝縮化が漸進的で，質的というよりも量的な変容であるのに対

し，認知具象化は瞬間的な飛躍である。つまり，過程は静的な構造である対象の中へと固定される。》(Sfard, 1991, p. 20)

こうした女史の主張を踏まえると，操作的コンセプションと構造的コンセプションの転換点は認知具象化であるとすることは妥当であろう。つまり，当該の概念に対して，認知具象化が達成されていればそれは構造的コンセプションであり，未達成であれば操作的コンセプションである。

このような認知具象化理論の二つの枠組みの総合を，「概念変容 *conceptual change*」という視座からより明確に考察したのが，真野(2011)である。真野(2011)は，平林表記論(e.g., 平林, 1987/ 2013)を準拠枠に，「式」のコンセプションの変容を大局的に「語用論→意味論→構文論」という水準移行として捉える。そして，同一水準内の推移を「水平的発達」，各水準間の推移を「垂直的変容」と特徴づけている。水平的発達は「内面化→凝縮化」に，そして「凝縮化→認知具象化」は垂直的変容にそれぞれ対応する（図 1-9）。このモデルは，「内面化→凝縮化→認知具象化」のプロセスを表現しているだけではなく，それらを階段状に布置することによって，「操作的コンセプション→構造的コンセプション」のプロセスをも記述している。なお図 1-9 は，真野(2011)内の表記に従って，“reification”を「具象化」と表記しているが，ここでの具象化は認知具象化を指す。

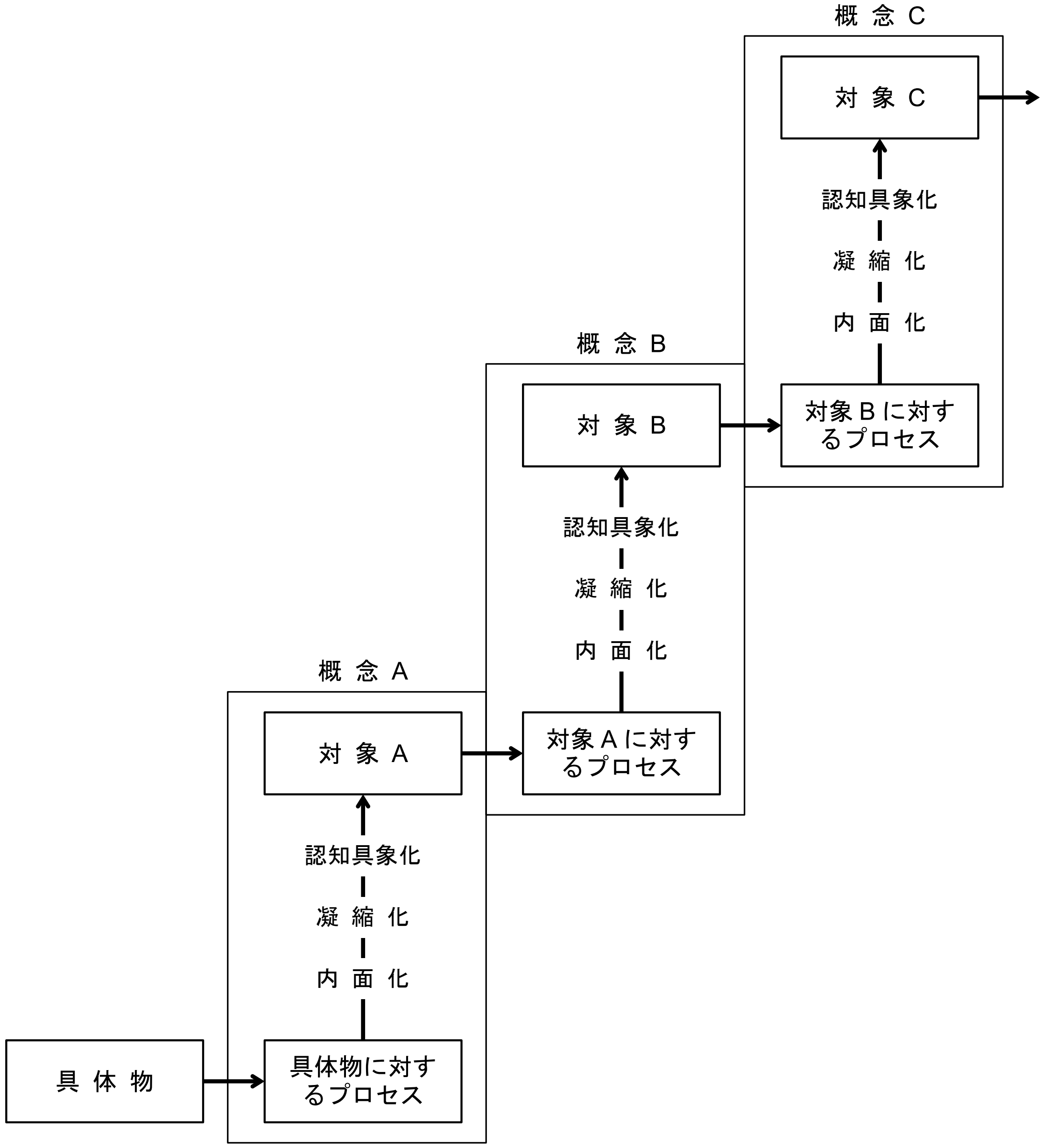


図 1-8. 概念形成の一般モデル（Sfard, 1991, p. 22）

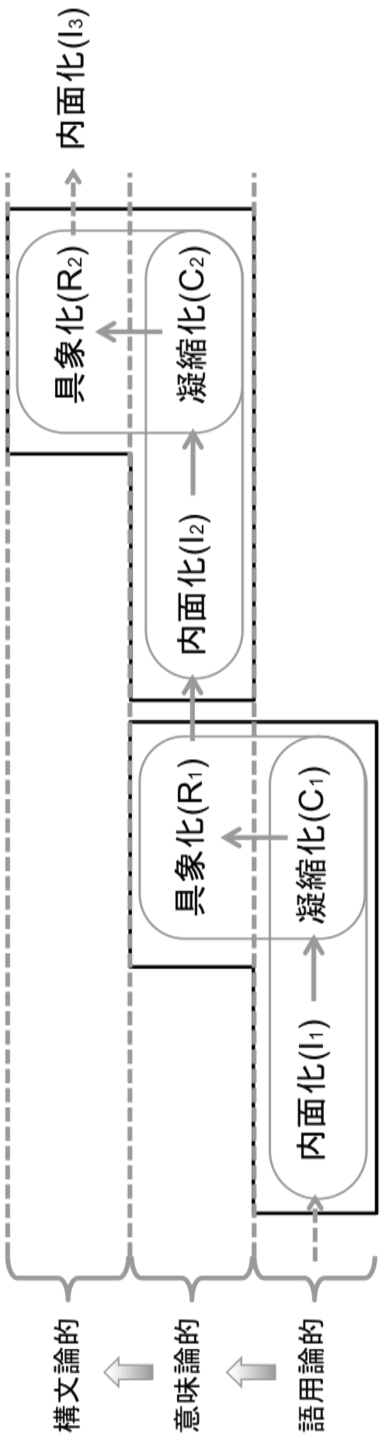


図 1-9.「式」のコンセプションの変容を捉える解釈的枠組み(真野, 2011, p. 24)

2.2　コンセプションの動態の階型モデルの構築

本小節では，コンセプションの静態の四面体モデルを用いて，スファードのいうコンセプションの変容過程を特徴づけてみたい。この作業を通して，数学的認識の展開とミスコンセプションとの関係性がより明確になる。

以下ではスファードが概念形成の事例として用いている「負の数」を参照しながら，認知具象化理論と四面体モデルとの対応について見ていこう。まず内面化は，既知の対象の操作に習熟する段階であり，したがって O_1 と S_1 を O_2, S_2 へ転換させる過程と捉えられる。「負の数」の場合，内面化は，ひき算への熟達のプロセスである(Sfard, 1991, p. 18)。ひき算学習の初期では例えば次のようなコンセプションが想定される：「O_1：3 - 2」,「S_1：1」,「N_1：ひき算」,「C_1：自然数」。ひき算に熟達するというのは，負の数の解になるものも含めて，十分に計算運用ができるということであろう。したがって，負の数の内面化は，例えば「O_2：2 - 3」,「S_2：-1」への〈対象／指示の文脈〉と〈記号／象徴〉の転換，として特徴づけることができる。こうした〈対象／指示の文脈〉と〈記号／象徴〉の同時的転換は，《記号／象徴と指示の文脈は時間的に同等であるか，あるいは同等な権利をもつのであって，一方が先んじているというわけではない》(Steinbring, 2006, p. 143)というシュタインブリングの主張とも整合的である。

次に凝縮化は, 内面化の作業をもとに《新しい概念を「公式に」生み出す》(Sfard, 1991 p. 19)段階であるため，　O_2 と S_2 から N_2 を導出する過程といえる。負の数の例で述べると，凝縮化を経た子どもは，負の数をたし算やかけ算といったひき算以外の演算の中で適切に用いることができるようになる(Sfard, 1991, p. 19)。

つまり「N_1：ひき算」を越えて負の数の使用に習熟する段階であるのだから，ここではじめて〈概念〉は「N_2：負の数」となるといえる。

最後に，認知具象化は認識の劇的な変容のプロセスであるので，C_1 の C_2 への〈確信〉の転換として定式化できる。負の数における認知具象化は，整数環の部分集合として負の数を見なせるようになることである(Sfard, 1991, p. 20)。四面体モデルを用いると，これは「C_1：自然数」から「C_2：整数」への〈確信〉の転換と特徴づけることができよう。

ここで，《認知具象化段階はより高次な概念の内面化のスタート地点である》(Sfard, 1991, p. 20)，ということを考慮することが重要である。要するに，認知具象化の後にも，コンセプションの変容は同様のメカニズムで繰り返されることになる。負の数の事例の場合，例えば初等整数論的な探究を認知具象化後のルートとして考えることができるだろう。

以上から本研究では数学的認識の展開を，「コンセプションの動態の階型モデル」として，図 1-10 のようにモデル化する。スファードの議論をみる限り，認知具象化によってコンセプションは操作から構造へとシフトする。これより，縦軸の観点を「操作的／構造的」とする。一方，横軸の観点はヒーバート(J. Hiebert)らの数学的知識の分類(Hiebert & Lefevre, 1986)を参考に設定されている。内面化は操作に熟達する段階であるため「より手続的」といえ，凝縮化は新しい概念を導出する段階であるので「より概念的」といえるであろう。

こうした数学的認識の展開において，ミスコンセプションは凝縮化と認知具象化の間に現れる。なぜならば前節において，ミスコンセプションを「〈確信〉

のみの未転換」と理論的に同定したからである。したがってミスコンセプションは，数学的認識の累積のキャップストーンとして不可避なものであると同時に，その飛躍のためのスプリングボードとして不可欠なものでもある。

ミスコンセプションの克服とコンセプションの変容は素朴には同義であろうが，溝口(1995b)はこの考えに異議申し立てを行う。その主張を簡潔に述べれば，「克服」は「変容」の真部分集合であり，目的・目標に対するポジティブな変容のみを意味する，ということであろう(pp. 46-48)。溝口は，「認識論的障害との関わり方」という視点から，コンセプションの変容を４つに分類している（表1-2）。この表において，「克服」の顕著な特徴は「『確信』の転換」である。

表 1-2. 子どもの認識論的障害との関わり方を示す観点(溝口, 1995b, p. 48)

	社会的文脈	反　省	「確信」の転換
固 執	×	―	―
適 用	△	×	―
意識化	○	○	×
克 服	○	○	○

コンセプションの静態の四面体モデルは，上述したように溝口のコンセプションモデルを基盤としており，「確信」というアイデアを継承している。そこで本研究においては，氏の議論に基づいて，ミスコンセプションの克服を〈確信〉の転換として捉える。

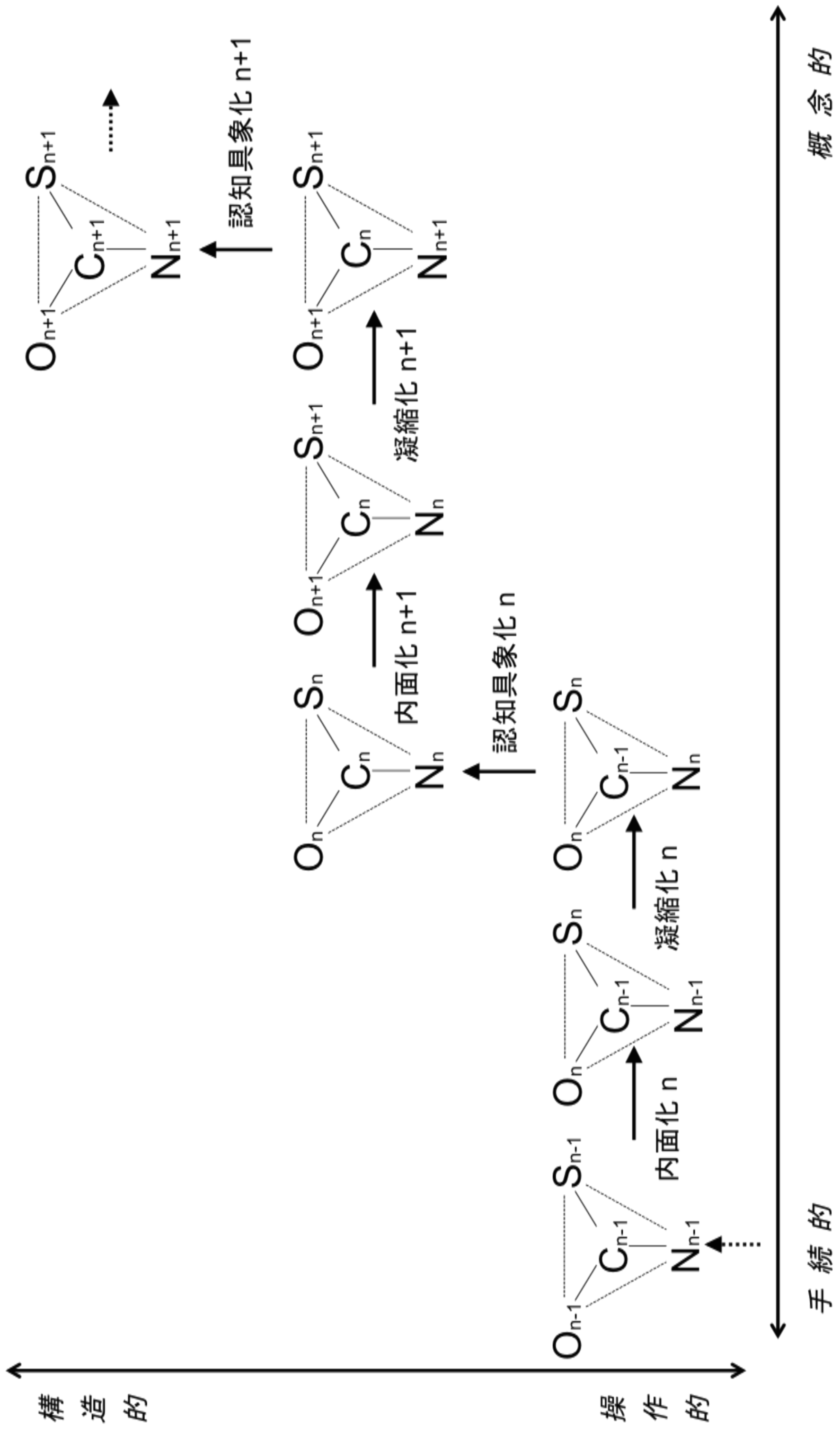


図 1-10. コンセプションの動態の階型モデル

2.3　確率概念の形成過程のモデル化

確率史を例に，確率概念の形成過程をモデル化してみよう。まず，確率概念の誕生する前の 17 世紀の数学（以下，〈数学〉と記す）の O は「O_1：数，図形など」であり，それを表す S は「S_1：数字，図的記号など」であった。また N は「N_1：〈数学〉の諸概念」であり，C は「C_1：決定論」である。こうした〈数学〉は，内面化を経て，その O と S を変化させる。つまり，先にも述べたように，O が「O_2：理想的なサイコロ」，S が「S_2：はしたの数」に変化する。そして，これらの O と S への考察（凝縮化）の結果として，「N_2：数学的確率」が誕生する。しかし，この数学的確率は，ラプラスの魔物に支えられているため，確率でありながら決定論であるという問題を孕んでいる。したがって，「C_2：非決定論」へ C を転換する認知具象化によって，数学的確率の概念形成は完了すると捉えられる。

ここで，認知具象化はより高次な段階における内面化のスタートでもある (Sfard, 1991, p. 20)，ということを考慮することが重要である。そこで，上述の数学的確率の構造的コンセプション（統計的確率の操作的コンセプション）から，統計的確率の構造的コンセプションが構成されるまでの過程もみておこう。O_2 と S_2 は，内面化を通して「O_3：統計的コレクティブ」，「S_3：相対度数」に変化する。そして，それらを「確率」として捉えるために，「N_3：統計的確率」が生まれる。 しかし，この段階では確率論の基盤は脆弱であるため，後に「C_3：測度論」によって数学的に整備されていくことになる。

第１章のまとめ

第 1 章では，もっぱら心理学の範疇で語られてきた「小数の法則」を，教授学的テーマとして適切に変換するための基礎的考察として，記号論的視座からのモデル化を試みた。それは，このような考察によって，認知現象でしかなかったミスコンセプションやその克服過程を，教科書表記や授業内コミュニケーションにおいても指摘され得る記号現象として再認識するための基盤が整備され，心理の問題を教授の問題へと展開するきっかけになると考えたからである。本章の結論とそこから得られる示唆は以下のようにまとめられる。

① 記号やその意味を三項関係によって記述するという方法は，ミスコンセプションを解釈する際にも有効であるが，「ミス」の説明に関しては課題が残る。

② シュタインブリングの認識論的三角形と溝口の C(C,N,E)モデルを手掛かりに，コンセプションの静態の四面体モデルを構築し，小数の法則を記号論的に定式化した。小数の法則の発生や弾性の要因は，〈確信〉としての決定論にある。

③ コンセプションの静態の四面体モデルとスファードの認知具象化理論を足がかりに，コンセプションの動態の階型モデルを構築し，小数の法則の克服を含む確率概念の形成過程を記述した。その結果として，小数の法則の克服を意味する〈確信〉としての決定論の非決定論への転換は，認知具象化として説明された。

④　小数の法則の克服のためには認知具象化が不可欠となるが，このプロセスは容易に達成されるものではないことを確率史は示している。

引用・参考文献：第１章

伊藤清(1986).「確率論の発展：Laplace の確率の解析的理論によせて」. ラプラス, P. S.［著］／伊藤清・樋口順四郎［訳・解説］『確率の解析的理論』(pp. 419-442). 東京：共立出版.

岩崎秀樹(2003).「磯田論文(2002)『数学史上の関数と極限の数学化過程』の『眺望』をめぐって」. 日本数学教育学会『第 36 回数学教育論文発表会「課題別分科会」発表集録 : 今後の我が国の数学教育研究』(pp.180-182). 北海道：札幌コンベンションセンター.

岩崎浩(1998).「『メタ知識』を視点とした授業改善へのアプローチ :『指示の文脈』と『記号体系』との間の相互作用」. 全国数学教育学会誌『数学教育学研究』, *4*, 83-103.

内井惣七(1995).『科学哲学入門 : 科学の方法・科学の目的』. 京都 : 世界思想社.

岡崎正和・岩崎秀樹(2003).「算数から数学への移行教材としての作図：経験的認識から論理的認識への転化を促す理論と実践」. 日本数学教育学会誌『数学教育学論究』, *80*, 3-27.

岡部恭幸(2006).『確率概念の認識における水準とそれに基づくカリキュラムに関する研究』. 未公刊博士学位論文, 神戸大学.

オグデン, C.＆リチャーズ, I. (1967/2001). 石橋幸太郎［訳］／外山滋比古［解説］『意味の意味』. 東京：新泉社. ［原著版：1923 年］

ギリース, D. (2004). 中村智香子［訳］『確率の哲学理論』. 東京：日本経済評論

社.［原著版：2000 年］

真野祐輔(2010).『算数・数学学習における概念変容に関する基礎的研究：「数」領域の展開を中心に』. 未公刊博士学位論文，広島大学.

真野祐輔(2011).「変数性に関する概念変容場面のデザインに向けた基礎研究（Ⅰ）:『式』のコンセプションの変容をどう捉えるべきか」. 全国数学教育学会誌『数学教育学研究』, *17*(2), 13-24.

ハイデルベルガー, M. (1991).「フェヒナーの非決定論 : 自由から偶然の法則へ」, R. クリューガー・L. ダーストン・M. ハイデルベルガー［編］／近昭夫・木村和範・長屋政勝・伊藤陽一・杉森滉一［訳］『確率革命：社会認識と確率』(pp. 96-157). 東京：梓出版社.［原著版：1987 年］

バシュラール, G. (2012). 及川馥［訳］『科学的精神の形成：対象認識の精神分析のために』. 東京：平凡社.［原著版：1938 年］

ピアジェ, J.＆ガルシア, R. (1996). 藤野邦夫・松原望［訳］『精神発生と科学史：知の形成と科学史の比較研究』. 東京：新評論.［原著版：1983 年］

平林一榮(1987/2013).『数学教育の活動主義的展開』. 東京：東洋館出版社.

平林一榮(2007).「数学教育学の居場所(niche)：新しい認識論の視座から」. 日本数学教育学会誌『数学教育学論究』, *88*, 39-47.

フレーゲ, G. (1986). 土屋俊［訳］「意義と意味について」. 坂本百代［大編］『現代哲学基本論文集Ⅰ：フレーゲ／ラッセル／ラムジー／ヘンペル／シュリック／ノイラート／カルナップ』(pp. 1-44). 東京：勁草書房.

溝口達也(1995a).「認識論的障害の克服過程の記述カテゴリーによる特徴づけ：

極限概念を事例として」．日本数学教育学会誌『数学教育学論究』，*63-64*，27-48．

溝口達也(1995b).「数学学習における認識論的障害の克服の意義：子どもの認識論的障害との関わり方に焦点を当てて」.『筑波大学教育学系論集』, *20*(1), 37-51.

溝口達也(2004).「学習指導における子どものコンセプションの変容に関する研究」. 鳥取大学教育地域科学部『教育実践総合センター研究年報』, *13*, 31-41.

山元一郎(1965).『コトバの哲学』．東京：岩波書店．

和田信哉(2008).「小数の乗法の意味に関する記号論的考察」．全国数学教育学会誌『数学教育学研究』，*14*，9-18．

Balacheff, N. (2000). A modelling challenge: untangling learner knowledge. In *Journées internationales d'Orsay sur les sciences cognitives: L'apprentissage* (JIOSC 2000, pp. 7-16).

Brousseau, G. (1997). *Theory of didactical situations in mathematics: Didactique des mathématiques, 1970-1990* (edited and translated by N. Balacheff, M. Cooper, R. Sutherland, V. Warfield). Dordrecht, The Netherlands: Kluwer Academic Publishers.

Confrey, J. (1987). 'Misconceptions' across subject matters: Science, mathematics and programming. In J. D. Novak (ed.), *Proceedings of the second international seminar: Misconceptions and educational strategies in science and mathematics*, *1*, 81-106. New York, USA: Cornell University, Department of Education.

Hiebert, J. & Lefevre, P. (1986). Conceptual and procedural knowledge in mathematics: an introductory analysis. In J. Hiebert (ed.), *Conceptual and procedural knowledge: The case of mathematics* (pp. 1-27). New Jersey, USA: Lawrence Erlbaum Associates.

Mizoguchi, T. (1993). On shifting conviction in conceptual evolution. In I. Hirabayashi, N. Nohda, K. Shigematsu & F. L. Lin (eds.), *Proceedings of the 17th Annual Meeting of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (I, pp. 260-267). Tsukuba, Japan.

Schubring, G. (2011). Conceptions for relating the evolution of mathematical concepts to mathematics learning: Epistemology, history, and semiotics interacting. *Educational Studies in Mathematics*, *77*(1), 79-104.

Sfard, A. (1991). On the dual nature of mathematics conceptions: Reflections on processes and objects as different sides of the same coin. *Educational Studies in Mathematics*, *22*(1), 1-36.

Sfard, A. & Linchevski, L. (1994). The gains and pitfalls of reification: The case of algebra. *Educational Studies in Mathematics*, *26*, 191-228.

Shaughnessy, J. M. (1992). Research in probability and statistics: Reflections and directions. In D. A. Grouws (ed.), *Handbook of research on mathematics teaching and learning: A project of the National Council of Teachers of Mathematics* (pp. 465-494). New York, USA: Macmillan Publishing Company.

Steinbring, H. (1997). Epistemological investigation of classroom interaction in elementary mathematics teaching. *Educational Studies in Mathematics*, *32*(1), 49-92.

Steinbring, H. (2005/2009). *The construction of new mathematical knowledge in classroom interaction: An epistemological perspective*. Berlin, Germany: Springer.

Steinbring, H. (2006). What makes a sign a *mathematical sign*? An epistemological perspective on mathematical interaction. *Educational Studies in Mathematics*, *61*(1-2), 49-92.

Vergnaud, G. (1988/2004). Multiplicative structures. In T. P. Carpenter, J. A. Dossey & J. L. Koehler (eds.), *Classics in mathematics education research* (pp. 84-96). Virginia, USA: The National Council of Teachers of Mathematics, Inc.

第 2 章
コンセプション研究のディスコース論的展開

前章 2 節で参照したスファードの認知具象化理論は，数学教育研究における特筆すべきコンセプションの理論である。しかし近年，スファードは強烈な自己否定とともにその理論を解体し，ディスコースの理論へと研究の舵をきった。本章ではスファードのコモグニション論の意味と意義を明らかにすることで，ミスコンセプション研究の教授学的展開への示唆を引き出したい。語句「コモグニション *commognition*」はスファードの造語であり，“communication”と“cognition”を組み合わせた鞄語である(e.g., Sfard, 2008, p. xvii)。「メタ認知」が情意を認知論の水準でより明確に扱うために生み出された概念であるとすれば，「コモグニション」は認知をコミュニケーション論の水準でより正確に語るための言葉であるといえよう[1]。

1. コモグニション論の要点

コモグニション論は, 後期ウィトゲンシュタイン(L. Wittgenstein)とヴィゴツキ

[1] コモグニション研究は，認知研究とコミュニケーション研究の統合のみならず，「アイデンティティ」や「人物化 *subjectification*」をキーワードとしながら情意研究への展開もみせており，「認知」，「社会」，「情意」という三つの大きな研究系譜を総合するような形でその研究領域を拡大しつつある(cf. Heyd-Metzuyanim & Sfard, 2012; Heyd-Metzuyanim, 2013)。

ー(L. S. Vygotsky)を思想的背景にもつコミュニケーションに関する理論であり(Sfard, 2008, p. i),『コミュニケーションとしての思考 *Thinking as communicating*』(Sfard, 2008)によって全体像が示された[2]。その貢献は数学教育研究(e.g., Jankvist, 2010; Kjeldsen & Blomhøj, 2012; Güçler, 2013; Heyd-Metzuyanim, 2013; Krummheuer, 2013; Xu & Clarke, 2013; cf. Sriraman & Nardi, 2012)だけに留まらず,『教育研究国際誌 *International Journal of Educational Research*』において特集号が組まれたり(cf. Forman, 2012),『教育研究の再構築 *Reframing educational research*』(Farnsworth & Solomon, 2013)において「コモグニション論入門」ともいえるような章が設けられたりするなど(Sfard, 2013b), 教育研究一般にも影響を与えつつある[3]。以下では,「研究方法観」,「研究対象観」,「研究目的」の三つの視点からコモグニション論を概観していくことにする。

---

2 ヴィゴツキーやヴィトゲンシュタインの考究とコモグニション論の関係について，スファードは例えば次のように述べている：《おそらく私の提案する概念構造(conceptualization)は，ヴィゴツキーによって明示されたこととヴィトゲンシュタインによって暗示されたことから得られる論理的帰結(entailment)であり，ヴィゴツキーやヴィトゲンシュタインが彼らの発想それ自体に対して残していった世襲財産(entailment)と捉えても差し支えないようなものである。》(Sfard, 2008, p. xvi)。アメリカの哲学者リチャード・ローティ(Richard Rorty)は哲学を体系的哲学と啓発的哲学の二つに分け，ウィトゲンシュタインの言語哲学を後者に含めるが(魚津, 2006, pp. 315-316; 丸山, 2007, p. 117)，スファードの近年の取り組みは，ヴィゴツキー理論を用いて後期ウィトゲンシュタイン哲学を体系的哲学として再構築するものとして要約できるかもしれない。あるいは逆に，ヴィゴツキー心理学の言語ゲーム論的展開とでも評価した方が適切であろうか。

3 我が国に関していえば，コモグニション論はほとんど普及していない。先行研究においても，スファードのコミュニケーション研究への注目はみられるものの(e.g., 真野, 2013; 金本, 2014)，それらは認知具象化理論からコモグニション論への移行期の研究に着目したものである。

1.1　コモグニション論の研究方法観

前章でもみてきたように，スファードは数学的コンセプションの研究(e.g., Sfard, 1991; Sfard & Linchevski, 1994)でも著名である。認知具象化理論と呼ばれるスファードのコンセプション論の成果は，数学的概念の分析を通して数学的コンセプションの本性を二重性（操作／構造）として特徴づけ，さらにその発達経路を数学史的・認知論的に明らかにしたことにある。

コンセプション研究においてまず議論になるのは，「コンセプションとは何か？」ということである(e.g., 溝口, 2004, p. 31; 真野, 2010, pp. 85-88)。認知具象化理論において，コンセプションは《人間の認識という内的・主観的な宇宙における概念の対応物》(Sfard,1991, p. 3)として規定される[4]。しかし，このようにコンセプションを規定したところで,「人間認識の内的宇宙」は観察できないので，研究は思弁的にならざるを得ない。勿論，初期スファードもこの点は十分に意識しており，可能な限り議論の客観性を保つために，数学的概念の定義や歴史の視点から数学的コンセプションに近接している。

しかし，それでもやはりコンセプションのような認知主義的な分析ツールを

[4] 後にスファードは，コンセプションに対して新しくコモグニション論的な定義を与えることになる(Sfard, 2010, p. 211)。これは，認知具象化理論からコモグニション論へのシフトに伴って生じる「概念 *concept*」の定義の変容と連動するものである。コモグニション論において,《概念とは記号とその使用である》(Sfard, 2008, p. 111)。そして，コモグニション論におけるコンセプションは Sfard (1991)の作法と同様に,「概念の個体版」(Sfard, 2010, p. 211)として解釈される。したがって，コンセプションという用語は,《特定の個体が対話の中でその言葉を採用する特別な方法に関連する》(Sfard, 2010, p. 211)。ここで重要なことは，この新しいコンセプションの規定は，認知具象化理論のそれよりも明確であるが，その意味内容（使用範囲）はかなり縮小されている，ということである。認知具象化理論におけるコンセプションは，むしろ「ディスコース」としてコモグニション論に引き継がれている。

使用する限り，研究の累積は困難であろう。例えば後に，スファードは「数的思考 *numerical thinking*」に関するピアジェ(J. Piaget)の主張にまつわる議論を事例として，認知主義的研究の非生産性を示している(Sfard, 2008, p. 38)。ピアジェによれば，数的思考は数の保存を認識するようになる五歳以降に可能になる。その一方，数的感覚は人間に「ハード的に組み込まれている *wired in*」もので，数的思考は赤ん坊から可能である，とピアジェの主張に異を唱える研究もある(ドゥアンヌ, 2010, pp. 79-119)。

いずれの研究も子どもの観察に基づきながら，「いつ」数的思考が始まるのかを明らかにしようとしているが，スファードが問題にするのは，「どのような種類の子どもの行動が数的思考を示すものとしてカウントされるのか？」ということがそもそも明確でないことである(Sfard, 2008, p. 38)。確かにこの点が明確でなければ，生産的で科学的な議論は蓄積できないだろうが，実際にピアジェとその批判者は数的思考を観察する手法を異にしているのである。

スファードは，この事例に認知主義的研究の限界をみて，より客観的に蓄積可能である数学的認識の展開の研究法をもとめて，認知主義や行動主義と対比する形で「コモグニション主義 *commognitivism*」を立ち上げるに至る(Sfard, 2008, pp. 275-281)。以下ではこの研究手法の思想を理解する上で重要である「分析単位 *unit of analysis*」について概観しておきたい。

コモグニション論の分析単位は「ディスコース *discourse*」であり，それは「コミュニケーションの型 *form/type of communication*」である(e.g., Sfard, 2008, pp. 90-91)。特に，言語コミュニケーションは「語彙 *word use*」，「視覚的媒介物 *visual* *mediator*」,「承認されるナラティブ *endorsed narrative*[5]」,「ルーチン *routine*」という形式によって分析される(e.g., Sfard, 2008, pp. 133-134)。例えば,「三角形」や「合同」などの語彙が用いられ，図「Δ」が現れ,「すべての三角形の内角の和は 180°である」というナラティブが承認され,「証明」の手続きがとられれば，その授業のディスコースは,「幾何のディスコース」と同定される。宮川は「事実」と「現象」の区別を以下のように主張しているが，コミュニケーションを事実の水準，ディスコースを現象の水準と理解すれば，日本語話者には捉えづらいコミュニケーションとディスコースのニュアンスの違いをより適切に理解できるように思う：

《なお，ここでは,「事実(fact)」と「現象(phenomenon)」を区別している。

その違いは，前者が経験的に認識される事象・出来事をさすのに対し，後

[5] コモグニション論において，語句「ナラティブ *narrative*」は以下のように定義される：《「ナラティブ」とは，ある種の対象の解説，対象間の関係の解説，対象の伴う過程の解説，対象による過程の解説としてまとめられる，あらゆる一連の発言(utterance)であり，ディスコースに固有な証明手続きに従って「承認」されたり拒否されたりする。》(Sfard, 2008, p. 134)。また発言について，スファードは以下のように述べている：《語句「発言」は，言語におけるコミュニケーション行為という広い意味で用いられ，話されたコミュニケーション行為だけでなく書かれたコミュニケーション行為も含んでいる，ということを私はここで強調しておきたい。》(Sfard, 2008, p. 102)。「ナラティブ」は，通常「命題」と呼ばれるものに近い概念であるが，命題という表現は，コモグニション論が人間認識の科学的な研究を追求するために棄却する,「内容 vs.形式」の二分法を前提にしたものである（この二分法を巡る問題については，本章の第 2.1.1 節を参照されたい)。例えば近藤・好並(1964)は次のように述べている：《われわれは同じ事柄を様々な文章で述べることができる。「太郎はノッポである」「太郎は背が高い」あるいは英語で“Taro is tall.”と言うこともできよう。文章は異なるが，すべてそれらは同じ事柄を言明し主張し，同一の共通の内容をもっている。<u>この内容が命題である。故に命題と文章は区別されなければならない。</u>》(p. 30; 下線は筆者加筆)。ここで近藤・好並(1964)のいう「文章」から「書かれたもの」というニュアンスを取り去ったもの，あるいは「文章」に「話されたもの」というニュアンスを加えたものが「ナラティブ」である。さらにいえば，ナラティブの承認の基準はディスコース毎に異なるため，論理学的には命題と呼べないようなものもナラティブに含まれることになる。

者は理論によって認められる，事実の背後にあるものをさす。つまり，現象は理論的構成物である。》(宮川, 2011, p. 42)

これより，コミュニケーションという経験的に認識できる事象を，その内容に関わる理論ではなく形式に関わる理論（例えば，言語ディスコースに関しては上述の「語彙／視覚的媒介物／承認されるナラティブ／ルーチン」）を通してみたものが，ディスコースである，ということができよう。

認知具象化理論における分析単位はコンセプションであったが，それは観察不可能であるため,「どのような種類の子どもの行動が特定のコンセプションを示すものとしてカウントされるのか？」という問いに答えるために役に立つような「操作的定義 *operational definition*[6]」が与えられない。したがって，認知具象化理論からコモグニション論へのシフトに際しては，いかに操作的に定義可能な分析単位を準備するか，ということが問題になる。素朴には，専門用語の操作性を求める場合，行動主義が示唆に富んでいそうである。しかし，スファードは認知主義的研究の重要性も熟知しているから，操作的定義を求めて行動主義に立ち返るような戦略はとらない。スファードは，できる限り客観性を保ちながらも，理論的に豊かであるような研究を求めたのであろう。

「理論的に豊かである」というのは，当該の客観的データに対して，理論的立場ごとに様々な主張が可能であり，そうした主張間で議論が成立し，更なる研究の展開が期待される，ということである。これは一見すると,「唯一の真理

[6] ここでいう「操作的」は，認知具象化理論における「操作的コンセプション」のそれとは基本的に異なる。この点をクリアにするために, Sfard (2008)においては,「構造的」と対になる言葉として「過程的 *processual*」という語がたびたび用いられる。

を目指す」という常識的な科学観からは，否定的な事態として捉えられよう。しかし，ローティを参照しながらコモグニション論が思想的基盤として選択するポストモダンの認識論においては，理論は世界の真理ではなく世界に関する合理的解釈を与えるものであるとみなすので，対話に開かれているということが理論として重要になる(cf. 魚津, 2006, pp. 310-333)。そして，対話に開かれるためには，操作的に取り扱える分析単位が必要になるのである。

かくして，分析単位はコンセプションからディスコースへと移行することになる。操作的に取り扱える分析単位としてディスコースが選択された大きな理由の一つとして，言語を人間の活動として徹底的に考究した後期ウィトゲンシュタインの哲学(e.g., ウィトゲンシュタイン, 1976; 永井, 1995; 鬼界, 2003)へのスファードの深い共感がある(cf. Sfard, 2008, pp. xiii-xix)[7]。なお，現代テクノロジーは容易な映像記録や音声記録を可能にしており，この点もスファードがディスコースを分析単位としたことに無関係ではない(e.g., Sfard, 2008, pp. xiv-xv)。

1.2　コモグニション論の研究対象観

以下ではコモグニション論の研究対象について，「コミュニケーション観」，「数学観」，「学習観」という三つの視点からみてみよう。

[7] コモグニション論の至る所に，『探究』(e.g., ウィトゲンシュタイン, 1976)のみに留まらない後期ウィトゲンシュタイン的な世界像が見て取れる。少なくとも，コモグニション論の研究手法には「心理主義批判」，分析単位には「意味に関する主張」，ルーチンの個体化に関する議論には「確実性に関する主張」の影響が伺える(cf. 鬼界, 2003)。

1.2.1　コモグニション論のコミュニケーション観

第 1.1 節で述べたように，コモグニション論はコミュニケーションの型であるディスコースを分析単位とするので，コモグニション論を概観する上で，本理論がコミュニケーションをどのように捉えているかを知ることは重要である。コモグニション論において，コミュニケーションは以下のように定義される：

《「コミュニケーション」とは，以下の二つの条件を満たすように，ある個体の行為Ａの後に他の個体の行為Ｂが続く，集団的に遂行されるパターン化された活動である。

1. 行為(action)Ａは，コミュニケーション上のものとして知られている，ある特定のうまく定義された行為のレパートリーに属する。
2. 行為Ｂは，行為Ａにフィットする反応(re-action)，つまり行為Ａとあわせてよく観察される行為，のレパートリーに属する。行為Ｂのレパートリーは，もっぱら行為Ａの関数というわけではなく，行為Ａの歴史（行為Ａの前に起こったこと）や，行為Ａと行為Ｂが遂行される状況や，行為者と反応者のアイデンティティ等，といったような要素にも依存している。》(Sfard, 2008, pp. 86-87)

いささか複雑な定義であるが，基本的にはわれわれがコミュニケーションを捉えるときの暗黙の前提を言語化しているだけである。したがって，コモグニション論におけるコミュニケーションを理解する上では，以下の三点を踏まえた上で，一般的なコミュニケーションを想起すればよいように思う。

一つ目は，コモグニション論がコミュニケーションを言語コミュニケーショ

ンに限っていない，ということである。例えば，キャッチボールもコモグニション論においてはコミュケーションであるし，人間だけでなく様々な生物もコミュニケーションを行っていることになる（例えば，鳴き声のやり取りや毛繕いなど)。

二つ目は,「コモグニションの存在論 *commoginitive ontology*」(Sfard, 2012, p. 7) と呼ばれるものであり，“thinking as communicating”（思考＝セルフ・コミュニケーション）という思考観である。コモグニション論において，思考は以下のように定義される：

《「思考」とは,（個体間）コミュニケーションの個体化版である。》(Sfard, 2008, p. 81)

このように「個体間」から「個体間＋個体内」へと拡張されたコミュニケーションを，スファードは「コモグニション」と名づけたのである。個体間の現象と個体内の現象を同様の分析単位で統一的に記述するという着想は，ヴィゴツキーの心理学理論(cf. ヴィゴツキー, 2001; 大谷, 2002; 柴田, 2006)から得られたものであろう(cf. Sfard, 2008, pp. xiii-xix)。大谷は，共通の分析単位（言葉の意味）をもちいて個人的な思考と社会的なコミュニケーションを分析する点を，ヴィゴツキー理論の本質的な特徴としている(大谷, 2002, pp. 203-204)。

三つ目は，コミュニケーションに「記述されたもの」も含まれるということである。実際，教科書分析にコモグニション論を援用した研究もみられる(e.g., Newton, 2012)。

1.2.2　コモグニション論の数学観

コモグニション論の採用する数学観は，「数学とはディスコースである」(e.g., Sfard, 2008, p. 129)というものである。つまり人間の行っているコミュニケーションの一つの型として数学を捉えるのである。例えば第 1.1 節において例示した幾何のディスコースは，より抽象的に述べれば数学（数学的ディスコース）である。

この数学観の優れたところは，コミュニケーションという活動の視座から数学を規定している点である。この数学観が数学の哲学としてどれほど批判に耐えるものであるかはわからない。しかし少なくとも，言語活動の充実が叫ばれる我が国の数学教育においては，「コミュニケーション活動の型としての数学」というコモグニション論の数学観は，数学教育における活動主義(平林, 1987/2013)の今日的展開として示唆的である。

ここで重要だと思われるのは，スファードは「数学とは言語である」という主張には批判的であるということである：

> 《「数学とはディスコースである」という主張は，頻繁に耳にされしばしば批判される「数学とは言語である」という主張と混同されるべきではない。「数学とは言語である」（あるいは「数学とは記号体系[register]である」）という主張は，数学の対象が「この世界にあり」，それらについての対話に先立って存在していることを含意しているからである。》(Sfard, 2008, p. 129)

おそらくこれは，「言語としての数学」という数学観が，第 1.1 節において言及

した現代プラグマティズム的な認識論が否定する「世界の真理を明らかにする」，という伝統的な理論観を前提にしているからであろう。

1.2.3　コモグニション論の学習観

コモグニション論は，学習を知識の獲得として捉える「獲得主義 *acquisitionism*」と，学習をコミュニケーションへの参加と捉える「参加主義 *participationism*」という二つの学習観を比較し，参加主義に立つ(e.g., Sfard, 2007, pp. 569-571)。そして学習を個体のディスコースの変容として定式化する(e.g., Sfard, 2007, p. 575)。スファードが参加主義に立つ理由の一つは，この立場が認知主義的研究の思弁性の克服を可能にするからである。獲得主義に立つ限り，「獲得された対象」を研究対象としなければならないが，それは観察不可能である。参加主義に立てば，学習は個体間のコミュニケーション活動の変化において観察可能になる。

ディスコースの変容として特徴づけられる学習は，二つに分類される。一つは対象レベルの学習（以下，対象学習）であり，もう一つはメタレベルの学習（以下，メタ学習）である(e.g., Sfard, 2008, pp. 255-256)。対象学習は，「承認されるナラティブ」や「ルーチン」の量や複雑性の増大として特徴づけられる。例えば，中学校の幾何において，使用できる図形の性質が増えていくのは，対象レベルの学習といえる。一方，メタ学習は，ディスコースのルーチンの質的変容によって特徴づけられる。したがって例えば，実測のディスコースから証明のディスコースへの変容は，メタレベルの学習といえる。

スファード自身は言及していないが，数学教育研究において参加主義的学習

観に先鞭をつけたのは，ギ・ブルソー(Guy Brousseau)とアラン・ビショップ(Alan J. Bishop)であろう。コモグニション論の視座からみれば，前者は参加されるディスコースに着目して教授学的状況の研究へと向かい(e.g., Brousseau, 1997)，後者はディスコースへの参加プロセスに注目して数学的文化化の研究へ取り組んだ(e.g., ビショップ, 2011)，と述べることができよう。

2. コモグニション論の意義

一般に価値は比較によって明らかになるが，当然，そこには共通のものさしが必要になる。認知研究とコモグニション研究の比較は，科学性という尺度こそ準備しているけれども，そこに刻まれている単位は理論の意義をあぶりだすにはいささか中途半端であるため，コモグニション論の特徴は明らかにするが，その価値は依然としてぼやけたままである。そこで本節では，よりミクロな尺度（「ディスコース研究的適切性」と「表記論的展開」）とマクロな尺度（「数学教育学の核心」と「数学教育学の第一哲学」）からコモグニション論へ迫ることで，その意義を明らかにする。

2.1 コモグニション論の局所的意義

2.1.1 他のディスコース研究との比較

前節ではコモグニション研究の意味を知るために，認知研究という遠隔領域

を間接照明として用いたが，コモグニション研究の意義を知るためには，むしろ近接領域である他のディスコース研究というフィルターを通すのがよいように思われる。「20 年のときを経て：言語と数学教育に関する研究の展開」(Sfard, 2013a)は，“*Educational Studies in Mathematics*”誌に掲載されたスファードによる『言語と数学教育』(Moschkovich, 2010)の書評である。本書評は直接的にスファードの研究に言及しているわけではないが，それを含むディスコース研究全体の価値について述べており，コモグニション論の意義を明確化する上で役に立つ。

Sfard (2013a)は，1992 年にカナダのケベックで開催された ICME7 の論文集の公刊本である『数学教室における言語とコミュニケーション』(Steinbring, Bartolini, Bussi, & Sierpinska, 1998)をディスコース研究流行の兆しとして，そして『言語と数学教育』をディスコース研究の最先端として捉えることで，ここ 20 年のディスコース研究の展開を要約している[8]。Sfard (2013a)の主張する今日的ディスコース研究の特徴は以下の三点に要約できる(pp. 334-337)。

① 社会や文化の重視

② 研究言語への配慮

③ 研究方法論の開発・洗練

①については，ピアジェ的・構成主義的な学習観からヴィゴツキー的・社会文化主義的な学習観へと，ディスコース論の思想的背景が明確にシフトしていることを指していよう。社会文化主義は，言葉や記号といったメディアを介し

[8] スファードは Sfard (2001)において前者の書評も行っている。

て社会や文化が個人の思考を規定していくと考えるので，上述のシフトは，言語学的・記号論的な視点からの研究へと研究者を駆り立てる。スファードの次の言及は，言語への着想が数学教育研究にもたらす影響を的確に捉えている：

《言語学的な研究手法の使用は，「意味」や「コンセプション」を知るための単なる窓として生徒の発言を捉える傾向にあった研究者が，それ自体の権利で最大限の配慮に値するものとして言語を考慮し始める，ということを含意している。》(Sfard, 2013a, p. 334)

かくいうスファードのコモグニション論も，上述したようにヴィゴツキー理論を背景にもち，この点については他のディスコース論と変わらない。コモグニション論の価値が現れるのは，②と③においてである。

今日的ディスコース研究の二つ目の特徴は，研究上の言葉づかいに関する関心が高まっていることである（②)。要するに，用語の定義の問題がクローズアップされてきたということである。しかし，それでもまだこの方面では二つの大きな問題が残されている，とスファードは述べる(Sfard, 2013a, pp. 336-337)。それらを簡潔に表現すれば次のようになる：

❶　ディスコース研究者間の共通言語の不在

❷　数学とディスコースの関係に関する研究スタンスの潜在

❶に関して，コモグニション論はそこに含まれる研究用語を，徹底的に操作性にこだわって定義することで，この問題を解消しようとしている。『コミュニケーションとしての思考』(Sfard, 2008)や『教育研究国際雑誌：コモグニション特集号』(cf. Sfard, 2012)の末尾に「コモグニション小辞典」が付けられているのも，

こうした意識からのことであろう。そして研究上の共通言語の問題を突き詰めていくと，❷の問題(Sfard, 2013a, pp. 336-337)へと行き着くことになる。数学教育におけるディスコース研究において数学とディスコースの関係をどのように捉えるかは,「ディスコースとしての数学」への収束傾向はみられるものの,「数学学習の手段としてのディスコース」と「数学学習の対象としてのディスコース」という立場を両極にして, 様々なバリエーションがある(Sfard, 2013a, p. 336)。そしてそれにも関わらず，多くの研究者は数学とディスコースの関係について直接的に言及しないし，場合によっては自覚的でない(Sfard, 2013a, p. 336)。その証拠に例えば,「ディスコースとしての数学」という一元論的存在論の採用を公言する研究者が,「内容 vs.形式」という二分法のもとに, 二元論的存在論から「意味」を研究対象にしようとすることがある(Sfard, 2013a, pp. 336-337)。この考え方は，意味は言葉によって伝達されるということであり,「ディスコースとしての数学」と「ディスコース vs.数学」という矛盾する二つの主張を抱え込んでいる。「ディスコースとしての数学」の立場をとるならば「意味」は，あえて「内容 vs.形式」の二分法的に特徴づけるならば,「内容」ではなく「形式」によって定式化されなければならない。これよりコモグニション論は,「意味」を後期ウィトゲンシュタインの作法に従って,「語の使用」という言語の形式面に着目した手法によって捉え,「能記」に「実体」を対応させ,「命題」を「ナラティブ」によって置き換える。したがって，コモグニション論は，思想的背景の明示化によって厳密な議論を可能にするという点で，他のディスコース論よりも優れている。

スファードによれば，ここ 10 年のディスコース研究の展開の中で最も重要な出来事は，研究方法論の発展である(Sfard, 2013a, p. 337)。これが③である。スファードはこの「方法論の発展」の実体については具体的に述べていないが，関口の指摘する研究方法論の多様化(関口, 2010, pp. 12-13; 関口, 2013, pp. 5-7)を指しているとみてよいであろう。スファードはこうした発展を評価しつつも，さらなる展開の必要性を示唆している：

> 《これまで行われてきたことは，分析基盤への更なる重大な投資なしに我々が行うことができる最も遠いところまで来ていると，私は考えている。確かに，たとえ暗黙的にであっても，すべての理論的枠組みはそれ自身の分析方法を必ず伴うし，反対に研究テクニックはその基礎的前提をあらわにする。したがって，ディスコース研究の効果や一貫性を確かなものにするために，我々はこれら二つの発展を調和させる必要がある。》(Sfard, 2013a, p. 337)

スファードは理論的枠組みと方法論の調和を意識的に行っている。コモグニション論がその中に研究方法論を明示的に包含していることは前節より明らかであろうが,「調和への意識」は Sfard (2008)の以下の四つの用語の使い分けにも現れている：

- コモグニション枠組み(commognitive framework)
- コモグニション主義(commognitivism)
- コモグニション論(commognitive theory)
- コモグニション研究(commognitive research)

これらはそれぞれ「命題群」（正確には「ナラティブ群」），「方法論」，「命題群と方法論を総合したもの」，「命題群と方法論を用いた活動」として用いられている。これより，コモグニション「論」を用いることは，命題群と方法論を調整することによってディスコース研究をより効果的でより一貫したものにすることを可能にするという意味で，価値がある。

ここで，本研究が特にことわることなく「〜（理）論」と「〜研究」を併用してきたことについて，一言述べておきたい。本研究では「コモグニション論」を除いて，「〜（理）論」という表現は慣例に従って「命題群」を，そして「〜研究」は「命題群と方法論を用いた活動」を，それぞれ指している。また「認知」という言葉に至っては「認知論」，「認知主義」，「認知研究」という三つの区別を行っているが，それぞれ「命題群」，「方法論」，「命題群と方法論を用いた活動」を強調している。

2.1.2　表記論としてのコモグニション論

コモグニション論の学習観に従えば，学習とは参加であるのだから，学習者の参加するディスコースを分析することは数学教育の重要な研究テーマとなる。この参加先ディスコースの候補は，少なくとも二つ考えられる。一つは教科書のディスコースであり，もう一つは授業のディスコースである。これらは意図されたカリキュラム(国立教育研究所, 1991, pp. 51-52)のディスコースと，実施されたカリキュラム(国立教育研究所, 1991, pp. 51-52)のディスコース，といいかえることもできる。

先行するコモグニション研究のほとんどは，後者の授業ディスコースの分析やより小規模なグループディスコースの分析を含みつつ，学習者のディスコースつまり達成されたカリキュラム(国立教育研究所, 1991, pp. 51-52)のディスコースに焦点をあててきた(e.g., Sfard, 2008)。しかし，実施されたカリキュラムのディスコースや達成されたカリキュラムのディスコースは，程度の差こそあれ意図されたカリキュラムのディスコースの影響を受ける。したがって，意図されたカリキュラムのディスコース分析もコモグニション研究のテーマとなってしかるべきである。例えば Newton (2012)は，有理数に関する教科書のディスコースと授業のディスコースを比較し，意図されたカリキュラムと実施されたカリキュラムの数学的同値性について検討している。しかし，コモグニション論が素朴なディスコース論とは異なり，表記をもディスコースとして取り扱うことを可能にしているにも関わらず，Newton (2012)のような表記研究的な取り組みは少ない。これは，そもそもスファードの課題意識が表記というよりも個体間の対話にあったからであると思われるが，実際，コモグニション論の概念の中には，表記論のそれと類似したものもみられる。例えば，「縮合」(平林・藤井, 1965)はコモグニション論において，第 4 章で詳しく述べる複合的ディスコース対象の構成法である「同一化 *saming*」,「カプセル化 *encapsulating*」,「記号具象化 *reifying*」によってより詳細に取り扱われている。こうした事実はコモグニション研究の表記論的展開の可能性を示唆していよう。

以上はコモグニション研究から表記研究へと近接する試みであったが，逆に表記研究からコモグニション論への接近も可能である。それは，そもそもにお

いて表記研究における「表記」が「記述されたもの」のみに制限されていないことに由来する。これに関して戸田は，以下のように述べている：

《表記といっても，音波による場合，光波による場合が主となっています。聴覚と視覚によるものです。その他，最近では種々の波長のものを利用して，これらを媒介として相互変換をはかっていますが，一応当面の問題として音波，光波に限定いたしますが，この二つについても，視覚に訴えるものが安定的であり，とりわけ数学は多分に視覚的であることに基づいて光による表現に限定して話を進めます。》(戸田, 1960/1989, p. 51; 下線は筆者加筆)

この一節は，表記研究がその展開において，個体間コミュニケーションをも射程に収め得るものであることを示唆している。その意味で，コモグニション研究は表記研究の発展型として理解することができる。

2.2　コモグニション論の大局的意義

2.2.1　数学教育学の核心とコモグニション論

序章において本研究の数学教育学的適切性について述べたが，それは「核心」との関連において行われたものである。しかし数学教育学の相対的自律性(Wittmann, 1995, p. 355)を考慮するとき，「関連領域」と本研究の関係性も明らかにされなければならない。これに関して，例えばヴィットマンは次のように述べている：

《核心における取り組みは，研究者の実践的問題への配慮や近接を必要と

するが，次のことには注意しておかなければならない。実践に向かう核心の方向性は，すぐに応用できることに焦点があてられ，おそらく逆効果になってしまう，狭い実用主義に簡単に陥ってしまう。関連諸学とのアイデア交換をもたらし，体系的な方法で核心の様々なルーツを調査することを可能にする種々の関連領域と，数学教育学の核心とを接続することによってのみ，この危険性は回避できる。》(Wittmann, 1995, p. 357)

コモグニション論それ自体は，人間活動のすべてを対象にしており，数学教育学の対象以外にも開かれているため，コモグニション論を用いた実践や研究をすれば，その活動がそのまま数学教育学の核心に位置づくということはない。むしろ，コモグニション論の意義の一つは，数学教育における実践や研究を，関連領域と接続することを可能にする点にある。

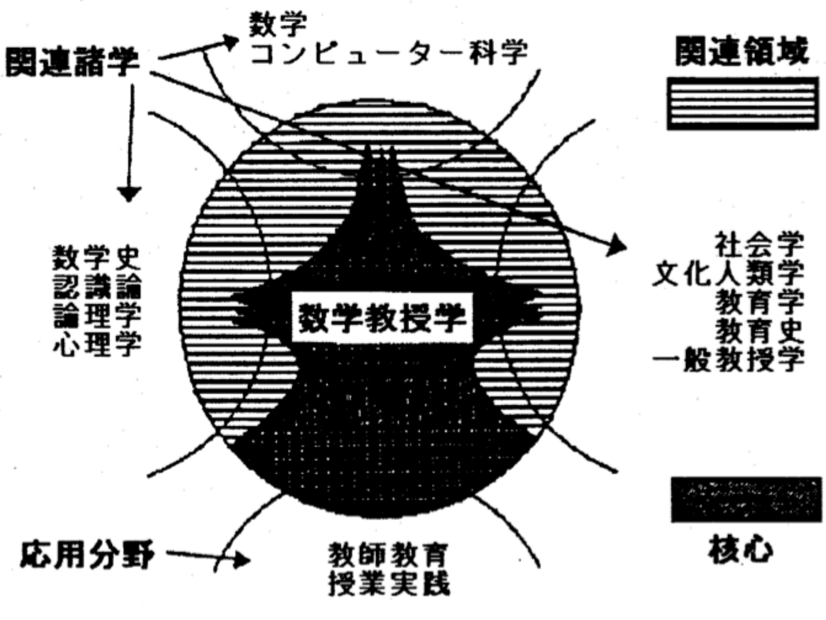


図 2-1【図 0-2 再掲】数学教育学の核心と関連領域，関連諸学とのそれらの関連，応用領域(Wittmann, 1995, p. 357)

コモグニション論の思想的背景は後期ウィトゲンシュタインとヴィゴツキーである。氏らの議論から得られる示唆の一つは，人間活動を研究する上で，記号へ着目しなければならないということである。記号への配慮は認知具象化理論期のスファードにも見られるが，その意識はむしろ潜在的であり，コモグニション論期において初めて顕在化される。換言すれば，認知具象化理論において，記号はコンセプションを知るための方法である一方，コモグニション論における記号は，それ自体が研究対象の一部となる。この移行はスファード論文の引用・参考文献リストの変化に如実に現れる。例えば，『コミュニケーションとしての思考』(Sfard, 2008)では，以前には言及されて来なかったような，パース(C. Peirce)やバフチン(M. Bakhtin)やハリデー(M. A. K. Halliday)やサピア(E. Sapir)といった言語学や記号論の論客たちの著作が多く並ぶようになる。したがって，言語学や記号論との密接な関係を保ちながら数学的活動を含めた人間活動のプロセスや所産を研究することを可能にするという意味で，コモグニション論には価値がある。

ここで逆に，コモグニション論の側からヴィットマンの数学教育学の図式を眺めてみると，言語学や記号論が関連諸学のリストに収まっていないことがわかる。しかし今日，コモグニション論のみならず，言語学的な枠組みや記号論的な枠組みを用いている数学教育研究は多数あるため(e.g., 平林, 1987/2013; 岩崎, 2007; cf. Radford, Schubring, Seeger, 2008a; 日野, 2011)，図 2-1 の中に，言語学や記号論を加える必要があるのではないか。

では言語学・記号論は図 2-1 のどこに位置づくのか。この点を考えるとき，岩

崎・中野(2006)や岩崎(2007)による図の解釈は示唆に富む：

《[...]関連諸学と応用分野の図に占める位置やまとまりは，次のように解釈されよう。上部にくる数学とコンピューター科学は数学教授学へ内容学的情報をインプットする源であり，下部にくる教師教育と授業実践は，数学教授学の成果がアウトプットされる応用分野といえる。[...]また左に位置する数学史から心理学は数学を学ぶ内的必然性を語る関連諸学であり，一方右に位置する社会学から一般教授学は数学を学ばせる外的必然性を語る関連諸学と考えられる。》(岩崎・中野, 2006, p. 6; 岩崎, 2007, pp. 19-20)

まず，応用領域として言語学や記号論が位置づかないということは，容易に承知されるであろう。また「言語としての数学」や「記号体系としての数学」というように数学を解釈すれば，言語学や記号論は図の上部に置かれる可能性もでてくるが，ここでいう「数学」はそのような特殊な解釈を伴うものではない。実際，ヴィットマンは“mathematics”に「活動としての数学」という特殊な意味を担わせる場合，数学を“MATHEMATICS”と大文字表記することで区別するくらい「数学」の意味に敏感であるから，特に説明のない図中の数学が素朴な意味での数学であると捉えることは妥当である。したがって，図の上下としての言語学・記号論というのは考えづらい。

次に図の左右についてであるが，ソシュールの言語学・記号論が，構造主義ムーブメントの引き金とのなり，テクスト分析や精神分析や社会分析や歴史分析などといった様々な分野に飛び火したことを踏まえると，言語学と記号論は図の左右の両方に関わりそうである。その証拠に例えば，『数学教育学における

記号論』(Radford, Schubring, & Seeger, 2008a)の前書き「記号の遍在性」の中では，この次のようなことが述べられている：

《マス・コミュニケーション，経済，政治，文学，芸術，歴史，認知，心理，教育などに関する今日的研究の中に，一貫した記号論的源泉をみつけることができたとしても，それは珍しいことではない。》(Radford, Schubring, & Seeger, 2008b, p. vii)

学習者や教師やカリキュラム開発者を含めた数学教育に関連するすべての個人や社会は記号を用いて数学教育へ関わっていくのだから，言語学や記号論が数学教育の内的必然性と外的必然性の両方に関わるのは当然のことである。こうした「図の右であり左である」という言語学・記号論の特性を強調したのが「コミュニケーションとしての思考」という考え方でありコモグニション論であるということもできるかもしれない。

2.2.2　数学教育学の第一哲学とコモグニション論

「現代化の失敗」を一つの契機として，「学」としての数学教育のアイデンティティへの自己言及が様々な形で行われてきた(cf. Wittmann, 1995; 岩崎・中野, 2006; 岩崎, 2007, pp. 15-47; 宮川, 2011)。学問にとって，アイデンティティの確立はその自律のために必須であるから，数学教育を学的に展開させようとする際にはこうした作業が不可欠になる。しかし，数学教育研究のような複合新領域の場合，そのアイデンティティと同時に，領域の自律を支えるための基盤もまた必要のように思われる。したがって，自らの足下を掘り下げるような作業

も数学教育研究の重要な課題となってしかるべきである。その意味で，ヴィットマンの「『デザイン科学』としての数学教育学」(Wittmann, 1995)は，「核心」によって数学教育学のアイデンティティを指摘しただけでなく，「デザイン科学」によってその基盤をも準備したという点で，数学教育学の自律を目指した優れた論考であるといえよう。

ヴィットマン以外で明示的に数学教育学の基盤へ着目した研究者に，ポール・アーネスト(Paul Ernest)がいる。アーネストは「数学教育学の第一哲学とは何か？」と問う(Ernest, 2009, 2012; cf. 真野・溝口, 2012)。氏の研究については，我が国では『数学教育の哲学』(Ernest, 1991)がよく引用される。本書は二部構成であり，前半は「数学の哲学」を問題にしており，よく引き合いに出されるのはここである。このパートは氏の主著『数学の哲学としての社会的構成主義』(Ernest, 1998)へと繋がっていく。『数学教育の哲学』の後半部分は，本書タイトルと同様の「数学教育の哲学」であり, その後の批判理論や批判的数学教育(cf. 馬場, 2003)に関する議論(e.g., Ernest, 2001)のベースはここにあると思われる。数学教育学の第一哲学への問いは，これらの論考の基盤をさらに掘り下げるために行われた企てといえよう。それは，数学の哲学も批判理論も，第一哲学の五つの候補の一つとしてあげられながらも，真っ先に否定されていることからもうかがえる。

では数学教育学の第一哲学とは何か。この問いに対してアーネストは，レヴィナス哲学(cf. 池上明哉, 1998)を引きながら，「倫理学」であると答える。レヴィナスの現象学や倫理学に関する立ち入った議論はできないが，身近な例を挙

げるだけでも，倫理学が数学教育学の第一哲学たる所以を垣間みることができるように思う。例えば研究倫理の問題がある。「巨人の肩の上に立つ」というが，これは「巨人」の倫理を前提にしなければできない。また「肩に乗る」当の本人の研究成果も，適切な倫理を通さなければ，様々なレベルで現実世界の害となる。こうした倫理的事例を，レヴィナスを通して組織化していくと，「数学教育学の第一哲学としての倫理学」が現れるのだろう。

研究倫理について，スファードは次のようなことを述べている：

> 《[...]「あらゆる」研究者，特に人間のコミュニケーションに関心のある研究者の倫理的義務として，次のことを強調しておきたい：研究者はその研究対象のディスコースと同様に，自らのコミュニケーションを謹聴しそれに配慮しなければならない。》(Sfard, 2013a, p. 338)

引用箇所を含む Sfard (2013a)は，『言語と数学教育』の書評であり，基本的にはコモグニション研究についての議論はない。しかし引用個所には，自身の研究の倫理性に対する確かな自信が，メタメッセージとして含まれているように思う。この確信はどこからくるのか。スファードの研究者資質からか，コモグニション論で使用される概念の操作性からか。勿論，それらも大いに関連しようが，最も大きな理由は，コモグニション論それ自体にあると考えられる。コモグニション論は，数学教育論文の中では数学を行う小グループや教室を分析するために用いられているが，基本的には人間活動のすべてを取り扱うことができるものである。当然，「数学教育研究」という活動も分析可能であり，実際，コモグニション論の発端はスファード自身のコンセプション研究(e.g., Sfard, 1991; Sfard & Linchevski, 1994)を含む認知主義的研究の批判にある(cf. Sfard, 2007, 2008)。自身が数学教育を研究するために使用する理論が，同時に研究の自己点検の装置となっているのである。コモグニションの研究者はその研究者資質に関係なく，自身の研究の理論的枠組みや方法論の適切性について自問を常に強いられる。コモグニション論はそのように構造化されている。コモグニション論のこの特徴は，数学教育学の第一哲学としての倫理学という視点から，重要であるように思われる。

第２章のまとめ

第 1 章では「確率概念の形成におけるミスコンセプション」という本研究の研究対象について考察を行った。対照的に本章では，研究方法の視点から，ミスコンセプション研究の教授学的展開への基盤整備を行った。研究対象と研究方法を適切に準備して初めて，心理学研究の成果を教授学の問題へと接続することが可能になると考える。本章の結論とそこから得られる示唆は以下のようにまとめられる。

① スファードのコモグニション論は，自身の初期の研究を含めた数学教育研究の認知主義的傾向への批判から起こったものであり，認知とコミュニケーションを同じ現象の異なる側面としてみなすものである。

② 認知とコミュニケーションを同一現象とみなすということは，ミスコンセプションという心理学的現象が，適切な特徴づけのもとで個人間のコミュニケーションや教科書の表記の中でも確認されることを意味している。したがって，いままで安易に関連づけられてきた心理の問題と教授の問題の関係性を明確に主張することを可能にするという点で，コモグニション論は，本研究が意図するミスコンセプション研究の教授学的展開の強力な方法論となる。

③ コモグニション論は約 300 ページを費やして主張される(Sfard, 2008)，ある種のグランドセオリーである。その成果を局所的にピックアップしても，理論としてのオリジナリティーが感じられないこともあるかもしれないが，

コモグニション論の真の成果は，数々の操作的定義を介した理論的な総合や組織化として理解されなければならない[9]。換言すれば，コモグニション論の価値は，これまで積み重ねられてきた数学教育研究の成果を一つの構造として提示しようとしていることにある。

[9] フロイデンタール(H. Freudenthal)は数学的定義について次のように述べているが，これは程度の差こそあれコモグニション論と先行研究の成果との関係についても当てはまるだろう：《数学における定義は，単に言葉の意味するところを人々に知らせるのみならず，演繹連鎖における連動装置(link)にもなっているため，その装置がどこにフィットすべきかを知ることなしにその装置を作ることは不可能なのである。［...］定義はそこから何かを引き出すための前提ではなく，しばしば分析の最終要素となるのであって，主題の組織化における仕上げといってよい。》(Freudenthal, 1971, pp. 423-424)。

引用・参考文献：第２章

池上明哉(1998).「レヴィナスにおける存在論から倫理への成り行き」. 慶応義塾大学『哲学』, *87*, 87-104.

岩崎秀樹(2007).『数学教育学の成立と展望』. 京都：ミネルヴァ書房.

岩崎秀樹・中野俊幸(2006).「学としての数学教育研究の展開」. 日本数学教育学会誌『数学教育学論究』, *85*, 3-21.

ヴィゴツキー, L. S. (2001). 柴田義松［訳］『思考と言語』(新訳版). 東京：新読書社. ［原著版：1956 年］

ウィトゲンシュタイン, L. (1976). 藤本隆志［訳］『ウィトゲンシュタイン全集８：哲学探究』. 東京：大修館書店. ［原著版：1953 年］

魚津郁夫(2006).『プラグマティズムの思想』. 東京：筑摩書房.

大谷実(2002).『学校数学の一斉授業における数学的活動の社会的構成』. 東京：風間書房.

金本良通(2014).『数学的コミュニケーションを展開する授業構成原理』. 東京：教育出版.

鬼界彰夫(2003). 『ウィトゲンシュタインはこう考えた：哲学的思考の全軌跡 1912-1951』. 東京：講談社.

国立教育研究所(1991). 『数学教育の国際比較：第２回国際数学教育調査最終報告』. 東京：第一法規.

近藤洋逸・好並英司(1964). 『論理学概論』. 東京：岩波書店.

柴田義松(2006). 『ヴィゴツキー入門』. 東京：子どもの未来社.

真野祐輔(2010).『算数・数学学習における概念変容に関する基礎的研究：「数」領域の展開を中心に』. 未公刊学位論文，広島大学.

真野祐輔(2013). 「平方根の加法の学習における記号論的連鎖と具象化の分析：A. Sfard の数学的ディスコース論の視座から」. 日本数学教育学会誌『数学教育学論究：臨時増刊 第 46 回秋期研究大会特集号』, *95*, 193-200.

真野祐輔・溝口達也(2012). 「数学教育学の『第一哲学』とは何か」. 『新しい算数研究』, *493*, 28-29.

関口靖広(2010). 「研究方法論」. 日本数学教育学会［編］『数学教育学研究ハンドブック』(pp. 9-15). 東京：東洋館出版社.

関口靖広(2013). 『教育研究のための質的研究法講座』. 京都：北大路書房.

戸田清(1960/1989). 「数学と表記」. 戸田清先生の米寿をお祝いする会［編］『米寿記念 戸田清先生論文集』(pp. 47-79). 広島：ニシキプリント.

ドゥアンヌ, S. (2010). 長谷川眞理子・小林哲生［訳］『数覚とは何か？心が数を創り，操る仕組み』. 東京：早川書房. ［原著版：1997 年］

永井均(1995). 『ウィトゲンシュタイン入門』. 東京：筑摩書房.

馬場卓也(2003).「数学教育と社会の関係性の考察：民族数学と批判的数学教育の視点より」. 全国数学教育学会誌『数学教育学研究』, *9*, 15-23.

ビショップ, A. J. (2011). 湊三郎［訳］『数学的文化化：算数・数学教育を文化の立場から眺望する』. 東京：教育出版. ［原著版：1991 年］

日野圭子(2011).「数学学習における記号論的視点の近年の動向と課題」. 日本数

学教育学会『第 44 回数学教育論文発表会論文集』, *1*, 11-20. 新潟：上越教育大学.

平林一榮(1987/2013).『数学教育の活動主義的展開』. 東京：東洋館出版社.

平林一栄・藤井昌興(1965).「数学教育における表記の問題（第４報）: 7.数学的表記の縮合について」. 日本数学教育学会誌『数学教育学論究』, *10*, 1-14.

丸山泰司(2007).「言語の呪縛と解放：ウィトゲンシュタインの哲学教育」. 教育哲学会誌『教育哲学研究』, *96*, 115-131.

溝口達也(2004).「学習指導における子どものコンセプションの変容に関する研究」. 鳥取大学教育地域科学部『教育実践総合センター研究年報』, *13*, 31-41.

宮川健(2011).「フランスを起源とする数学教授学の『学』としての性格：わが国における『学』としての数学教育研究をめざして」. 日本数学教育学会誌『数学教育学論究』, *94*, 37-68.

Brousseau, G. (1997). *Theory of didactical situations in mathematics: Didactique des mathématiques, 1970-1990* (edited and translated by N. Balacheff, M. Cooper, R. Sutherland, V. Warfield). Dordrecht, The Netherlands: Kluwer Academic Publishers.

Ernest, P. (1991). *The philosophy of mathematics education*. London, UK: The Falmer Press.

Ernest, P. (1998). *Social constructivism as a philosophy of mathematics*. New York, USA: State University of New York Press.

Ernest, P. (2001). Critical mathematics education, In P. Gates (ed.). *Issues in* *mathematics teaching* (pp. 277-293). London, UK: Routledge Falmer.

Ernest, P. (2009). What is 'first philosophy' in mathematics education? In M. Tzekaki, M. Kaldrimidou & H. Sakonidis (eds.). *Proceedings of the 33rd Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, *1*, 25-42.

Ernest, P. (2012). What is our first philosophy in mathematics education? *For the Learning of Mathematics*, *32*(3), 8-14.

Farnsworth, V. & Solomon, Y. (eds.) (2013). *Reframing educational research: Resisting the 'what works' agenda* (pp. 139-150). New York, USA: Routledge.

Forman, E. A. (2012). Commentary: Expanding and clarifying the commognitive framework. *International Journal of Educational Research*, *51-52*, 151-154.

Freudenthal, H. (1971). Geometry between the devil and the deep sea. *Educational Studies in Mathematics*, *82*(3-4), 413-435.

Güçler, B. (2013). Examining the discourse on the limit concept in a beginning-level calculus classroom. *Educational Studies in Mathematics*, *82*(3), 439-453.

Heyd-Metzuyanim, E. & Sfard, A. (2012). Identity struggles in the mathematics classroom: On learning mathematics as an interplay of mathematizing and identify. *International Journal of Educational Research*, *51-52*, 128-145.

Heyd-Metzuyanim, E. (2013). The co-construction of 'learning difficulties' in Mathematics: Teacher-student interactions and their role in the development of a 'disabled' mathematical identity. *Educational Studies in Mathematics, 82*(1), 341-368.

Jankvist, U. T. (2010). An empirical study of using history as a ‘goal’. *Educational Studies in Mathematics*, *74*(1), 53-74.

Kjeldsen, T. H. & Blomhøj, M. (2012). Beyond motivation: History as a method for learning meta-discursive rules in mathematics. *Educational Studies in Mathematics, 80*(3), 327-349.

Krummheuer, G. (2013). The relationship between diagrammatic argumentation and narrative argumentation in the context of the development of mathematical thinking in the early years. *Educational Studies in Mathematics*, *84*(2), 249-265.

Moschkovich, J. N. (ed.) (2010). *Language and mathematics education: Multiple perspectives and directions for research*. Charlotte, USA: Information Age Publishing.

Newton, J. A. (2012). Investigating the mathematical equivalence of written and enacted middle school *Standards*-based curricula: Focus on rational numbers. *International Journal of Educational Research*, *51-52*, 66-85.

Radford, L., Schubring, G., & Seeger, F. (eds.) (2008a). *Semiotics in mathematics education*. Rotterdam, The Netherlands: Sense Publishers.

Radford, L., Schubring, G., & Seeger, F. (2008b). The ubiquitousness of signs: By way of introduction. In L. Radford, G. Schubring, & F. Seeger (eds.), *Semiotics in mathematics education* (pp. vii-x). Rotterdam, The Netherlands: Sense Publishers.

Sfard, A. (1991). On the dual nature of mathematics conceptions: Reflections on processes and objects as different sides of the same coin. *Educational Studies in Mathematics*, *22*(1), 1-36.

Sfard, A. (2001). Communicating to learn or learning to communicate? Mathematics education in quest for new answers to old questions. *Zentralblatt für Didaktik Mathematik / International Reviews on Mathematical Education*, *33*(1), 17–25.

Sfard, A. (2007). When the rules of discourse change, but nobody tells you: Making sense of mathematics learning from a commognitive standpoint. *The Journal of the Learning Sciences*, *16*(4), 567-615.

Sfard, A. (2008). *Thinking as communicating: Human development, the growth of discourses, and mathematizing*. Cambridge, UK: Cambridge University Press.

Sfard, A. (2010). A theory bite on infinity: A companion to Falk. *Cognition and Instruction*, *28*(2), 210-218.

Sfard, A. (2012). Introduction: Developing mathematical discourse - Some insights from communicational research. *International Journal of Educational Research*, *51-52*, 1-9.

Sfard, A. (2013a). Almost 20 years after: Developments in research on language and mathematics. Review of J. N. Moschkovich (ed.) (2010) *Language and mathematics education: Multiple perspectives and directions for research*. *Educational Studies in Mathematics*, *82*(2), 331-339.

Sfard, A. (2013b). Not just so stories: Practising discursive research for benefit of educational practice. In V. Farnsworth & Y. Solomon (eds.), *Reframing* *educational research: Resisting the 'what works' agenda* (pp. 139-150). New York, USA: Routledge.

Sfard, A. & Linchevski, L. (1994). The gains and pitfalls of reification: The case of algebra. *Educational Studies in Mathematics*, *26*, 191-228.

Sriraman, B. & Nardi, E. (2012). Theories in mathematics education: Some developments and ways forward. In M. A. (Ken) Clements, A. J. Bishop, C. Keitel, J. Kilpatrick, & F. K. S. Leung (eds). *Third International Handbook of Mathematics education* (pp. 303-325). New York, USA: Springer Science+Business Media.

Steinbring, H., Bartolini Bussi, M. G., & Sierpinska, A. (eds.). (1998). *Language and communication in the mathematics classroom*. Virginia, USA: National Council of Teachers of Mathematics.

Wittmann, E. Ch. (1995). Mathematics education as a 'design science', *Educational Studies in Mathematics*, *29*(4), 355-374.

Xu, L. & Clarke, D. (2013). Meta-rules of discursive practice in mathematics classrooms from Seoul, Shanghai and Tokyo. *Zentralblatt für Didaktik Mathematik / International Reviews on Mathematical Education*, *45*(1), 61–72.

第 3 章
教科書ディスコースに内在する小数の法則の領域普遍的要因：
ディスコースの規則の視座から

第 1 章 1 節において，ミスコンセプションをモデル化する上で，ミスコンセプションそれ自体を単位と考えるのではなく，意味の三角形枠組みのように，ミスコンセプションの構成要素を考察する必要がある，ということが示された。本章ではこうした記号論的な発想を，第 2 章で概観したコモグニション論の枠組みの中で用いることで，小数の法則をディスコース間の葛藤として再定式化し，教科書内にその発生要因を確認する。このような作業により，小数の法則は心理学的対象から，明確に教授学的な対象へと変換されると考える。

1. 小数の法則のコモグニション論的特徴づけ：コモグニション葛藤

1.1 コモグニション葛藤の解釈枠組みの構築

コモグニション論の分析単位はディスコースであるが，より焦点を絞れば，そのディスコースを規定する「メタ規則 *metarule*」や「ルーチン」になる。「メタディスコース規則 *meta-discursive rule*」の略記であるメタ規則とは，ディスコースの参加者の活動のパターンに関する規則であり(Sfard, 2008, pp. 200-202)，そうしたメタ規則の集合がルーチンである(Sfard, 2008, pp. 208-216)。例えば「二桁のたし算」は数学のルーチンの一つであり，そこで用いられる結合法則や交換

法則は算数の文脈ではメタ規則である。

メタ規則と対になる言葉は「対象規則 *object-level rule*」であり，それはディスコースの対象の振る舞いに関する規則である。対象規則とメタ規則の関係は相対的なものである。例えば，メタ規則として例示した上述の結合法則や交換法則は，中学校以降の代数においては対象規則となる。このメタ規則の対象規則化は，平林によるファンヒーレ(P. van Hiele)の思考水準論の特徴づけである「方法の対象化」(平林, 1987/2013, p. 189)のコモグニション論的翻訳といえるかもしれない。なお，メタ規則とルーチンも相対的なものであると解釈できるため，以下では基本的にはメタ規則を用いる。

コモグニション論において子どもの誤りは,「コモグニション葛藤」(e.g., Sfard, 2008, pp. 255-258)という術語を用いながら，上述のメタ規則の視点から議論される。コモグニション葛藤とは，《異なるディスコースの参加者が異なるメタ規則に従って行動している状況》(Sfard, 2008, p. 256)である。ここで重要なことは，コミュニケーションのコモグニション論的定義からもわかるように，コモグニション葛藤は個体間だけでなく個体内でも生じる，ということである。

個体内における葛藤は従来「認知葛藤 *cognitive conflict*」として取り扱われてきた(e.g., 藤井, 1989)。しかし，コモグニション葛藤と認知葛藤では，様々な点で異なる視点から個体の葛藤を描こうとする。それらは表 3-1 のようにまとめられる。例えば,「かけ算は増やす」というミスコンセプション(cf. Confrey & Kazak, 2006) に関わる認知葛藤は，コモグニション葛藤として再解釈されるとき，自然数のディスコースと有理数のディスコースの間の葛藤としてシンプルに特徴づ

けられる。

表 3-1. 概念の比較：認知葛藤 vs.コモグニション葛藤(Sfard, 2008, p. 258)

	認知葛藤	コモグニション葛藤
葛藤場所	対話者と世界の間	通約不可能なディスコースの間
学習における役割	ミスコンセプションの克服のための選択肢の一つ	メタレベルの学習のためには実践的に不可避である
解決方法	学習者の合理的な努力	エキスパートのディスコース方法の受容と合理化（個体化）

コモグニション論において，言語ディスコースは「語彙／視覚的媒介物／承認されるナラティブ／ルーチン」によって同定されるものであるが，この枠組みはコモグニション葛藤の分析に最適化されているわけではない。より具体的にいえば，四つ組のディスコース枠組みは，特定の葛藤場面を記述するための枠組みとしては大局的すぎる。そこで本研究では，より局所的なディスコースを記述するためのディスコースモデルを開発し，コモグニション葛藤を解釈してみたい。

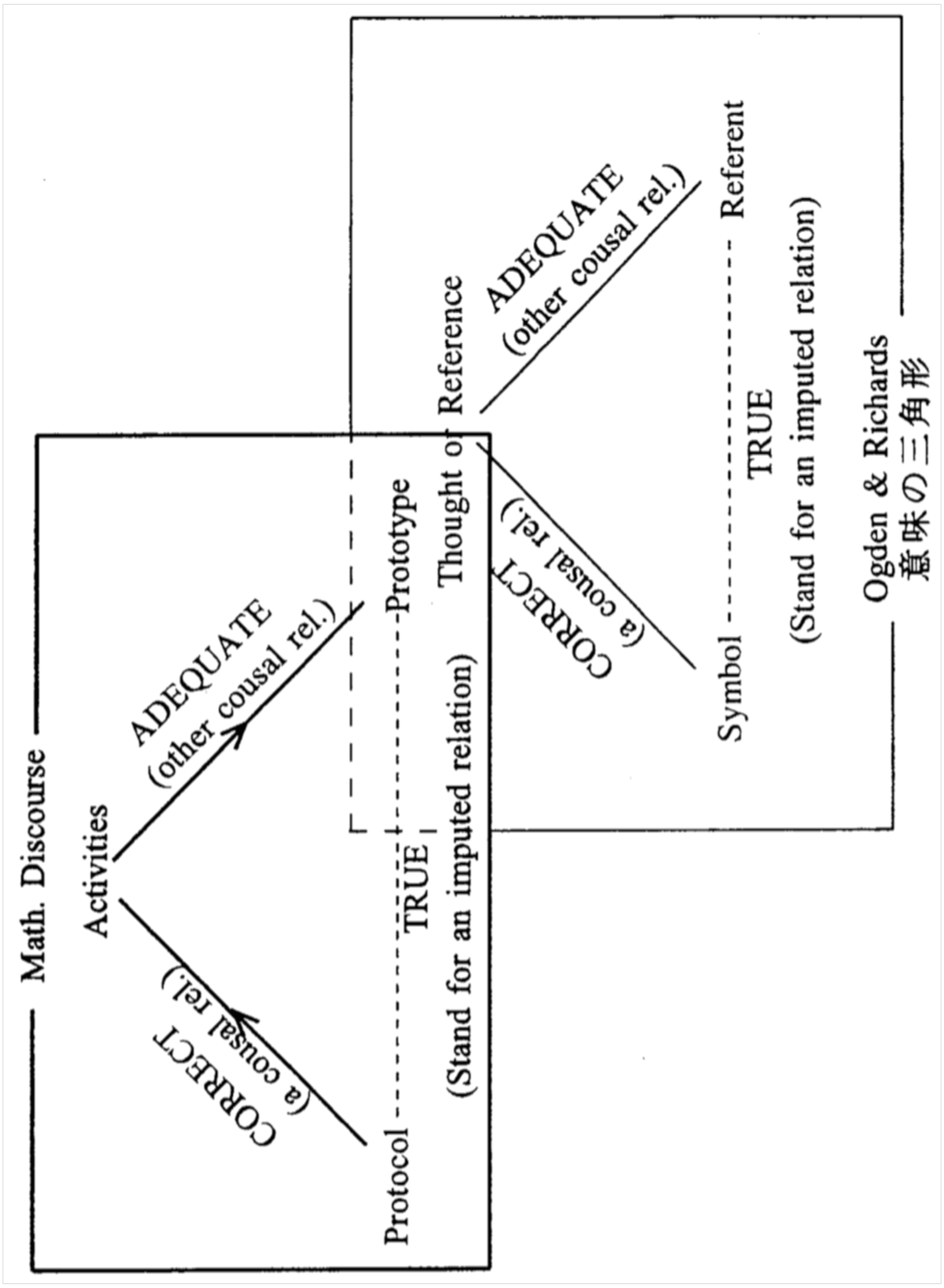


図 3-1. プロトタイプとプロトコルの関係(岩崎・山口, 2000, p. 4)

ディスコースをモデル化しようとするときに，岩崎によるデルフラー(W. Dörfler)の研究方法論に関する議論は示唆的である(岩崎, 2007, pp. 125-129; 岩崎・山口, 2000, pp. 3-5)。岩崎はデルフラーの論考を，「意味の三角形」(オグデン＆リチャーズ, 1967/2001, p. 56)を下絵にしながら，「プロトタイプ」，「プロトコル」，「活動」から構成される「数学的ディスコースの三角形」として要約している（図 3-1）。本章ではこの枠組みを準拠枠としながら，コモグニション論的に翻訳する。

数学的活動を誘発する実在であるプロトタイプと活動の数学的記録であるプロトコルは，実験心理学的な用語であるため，心理学批判から発したコモグニション研究の中でそのまま用いることはできない。しかし活動のスタートとゴールを記号の形式によって指摘するという部分はコモグニション論と通じるため，そうした性質に着目し，コモグニション論の用語である「実体 *realization*」と「能記 *signifier*」に置き換える(cf. Sfard, 2008, p. 154-160)。デルフラーは，認知に関する言及を意図的に避けていたようであるから(岩崎, 2007, p. 126)，この置換は，コモグニション論の概念によるそうした意識のさらなる徹底といえるかもしれない。

能記とは名詞的に使用される記号，実体とは能記の代わりとなりかつ能記よりも取扱いやすい記号である(Sfard, 2008, p. 154)。通常ならば能記と対になる語句は「所記 *signified*」であろうが(cf. ソシュール, 1972, pp. 95-97)，コモグニション論は概念や意味といった従来操作的に定義されてこなかった語彙を排除したり再規定したりする。そこで新たに能記と実体がペアになるわけである。「関

数 f」を能記とすれば，その実体の候補は代数式や表やグラフなどになる。また能記「54 + 26」の実体の一つは能記「80」である。能記と実体の関係は相対的なもので，能記を実体へと転換していくことで，数学的ディスコースは発達していく(Sfard, 2008, pp. 164-167)。これは岩崎が図 3-1 の矢印によって指摘していることと同様の事態である。

「活動」は実践的用語としての意味合いも強く，必ずしも研究的用語であるとはいい切れない。したがって，それを適切に研究の文脈にのせるためには，活動を説明するためのメタ言語を準備するのが望ましいと考える。コモグニション論の語法で活動を説明しようとする場合，それを最も直接的に表現することができるのは，活動の規則であるメタ規則やルーチンである。そこで本研究では，岩崎らの枠組みの活動を「メタ規則／ルーチン」で置き換える。

以上の議論は「ディスコースのコモグニション論的三角形」として，図 3-2 のようにまとめられる。

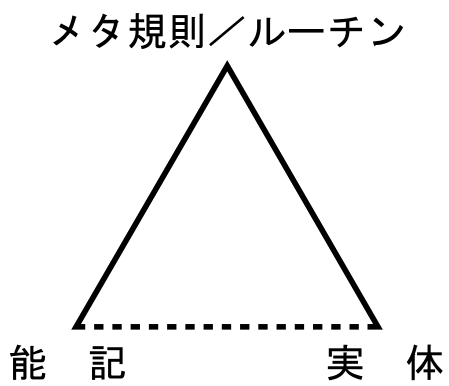


図 3-2. ディスコースのコモグニション論的三角形

コモグニション葛藤はディスコース間で生じるのであるから，それぞれのディスコースをコモグニション論的三角形でモデル化すれば，コモグニション葛藤を記述することができる。そこで本研究では，コモグニション葛藤の解釈枠組みを，図 3-3 のように設定し,「コモグニション葛藤の二重三角形」と呼びたい。添字 T の方のディスコースは当該の文脈において目標となるものであり，望ましいとされるものである。また添字 L の方のディスコースは，添字 T のディスコースの文脈では誤っていると判断されるものである。つまり，外側の三角形と内側の三角形はそれぞれ教師の視点と学習者の視点であり，二つの三角形の配置はこうした教師と学習者のディスコースの差異を図示したものである。学習者の三角形が内側になるのは，目標となる教師のディスコースを基準とした場合，学習者のディスコースが不十分であることを表現するためである。

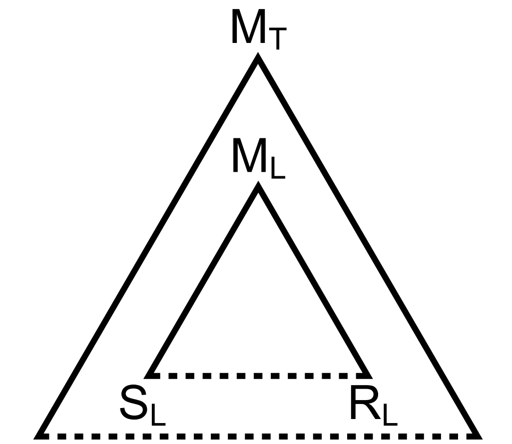


図 3-3. コモグニション葛藤の二重三角形

なお，コモグニション論において,「教師」という言葉は,「教員免許を有す

る大人」というような素朴な教師観に縛られない(cf. Sfard, 2008, p.284)。教室においては，新たな有益な視点をもった子どもが教師となることもある。つまり学習者の参加先ディスコースの使い手とみなされれば，生徒であろうと教師としてみなされる。さらにいえば，その条件を満たせば，教科書も教師ということになろう。

1.2　小数の法則への適用

確率ミスコンセプションの中でも，本研究では「小数の法則」に着目している。既に述べたように小数の法則は，確率ミスコンセプション研究の口火を切った論文「小数の法則という信念」(Tversky & Kahneman, 1971)の中で明らかにされた現象であり，確率に関する認知主義的研究における古典的なテーマである。それらの研究において，小数の法則はヒューリスティックの観点から説明されてきたが，それは人間の本性として理解される傾向にあり，ヒューリスティックそれ自体の源泉の追求はあまり行われない(Kahneman, 2011, pp. 109-195)。しかし数学教育研究は，「誤り」を記述し説明するだけではなく，その克服のための手段をデザインし実践することも主要な研究プロセスとするのだから，教授学的な観点からも「誤り」の本質に迫る必要がある。その意味で，小数の法則に対する新たなアプローチが必要であり，本研究はそれをコモグニション葛藤に求める。

小数の法則は，通常，大数の法則の小標本への過大的適用として特徴づけられる。しかしより詳細に分析すると，そこには二つの異なる誤りの形式がみて

とれる。一つは,「母集団や確率から小標本へ」という形式である（以下, LSN1）。典型的な例は，ギャンブラーの誤謬として知られている。不幸にも確率・統計的なリテラシーの乏しいギャンブラーは，フェアなコイン投げゲームにおいて，裏が立て続けに出た場合,「公平」（確率 1/2）を論拠に次は表が出やすいと判断してしまう。LSN1 を克服するには,《大数の法則は「補正 *compensation*」ではなく「圧倒 *swamping*」によって働くことを学習しなければならない》(Carvalho, 2012, p. 615)。補正とは基準にあわせて対象や操作を修正することであり，コイン投げの文脈では，公平という基準にあわせて「表が出たから次は裏が出る」と考えるのが補正の発想である。また，圧倒とは，対象や操作の数量が膨大になると，それらの局所的な変化が全体にほとんど影響を及ぼさなくなることであり，コイン投げの公平性から「コインを 1000 回投げようと 1001 回投げようと表の相対度数はほぼ 1/2 である」と考えるのが圧倒の発想である。確率学習において，古いメタ規則「対象や操作は補正される」（以下，補正規則）は，適切な場面で，新しいメタ規則「対象や操作は圧倒される」（以下，圧倒規則）に取って代わられなければならない。なお，補正規則は対称律として順序集合に関わる数学的ディスコースの対象規則となり，圧倒規則はベルヌーイの定理(cf. Steinbring, 1991a, pp. 148-149; Steinbring, 1991b, p. 505; コルモゴロフ・他, 2003, pp. 70-73)として相対度数に関わって定式化されることで確率論的ディスコースの対象規則になる。

ベルヌーイの定理 (Steinbring, 1991b, p. 505)

二つの結果 0 と 1 をもつ n 回の独立試行における 0 の相対度数を h_n とし，0 の確率を $p\in[0,1]$，1 の確率を $q = 1 - p$ とすると，次の命題が成立する：

$$\forall\varepsilon > 0,\ \forall\eta > 0,\ \exists n_0,\ \forall n \geq n_0\text{: } P(|h_n - p| < \varepsilon) \geq 1 - \eta$$

もう一つの小数の法則の形式は，「小標本から母集団や確率へ」という形式のものである(以下，LSN2)。このタイプの小数の法則は，小標本の分析結果から母集団の性質や確率を推論させる。コイン投げの文脈では，例えば「表が三回連続して出たからこのコインは表が出やすい」とするのが LSN2 である。これは早まった一般化と特徴づけられる。したがって，先の Carvalho (2012)のフレーズに倣えば，LSN2 を克服するためには，大数の法則が一般化ではなく圧倒によって働くことを学習しなければならない。換言すれば，確率学習において，古いメタ規則「対象や操作は一般化される」（以下，一般化規則）は，適切な場面で，圧倒規則に取って代わられる必要がある。なお一般化規則は，外延や内包といった概念を用いて定式化されることによって，論理学的ディスコースの対象規則となる(cf. 岩崎, 2007, p. 71)。

以上の議論は表 3-2 のようにまとめられる。そしてこの表 3-2 の項目を図 3-3 の枠組みに当てはめると，LSN1 と LSN2 のモデルになる。

補正規則や一般化規則は，心理学研究において報告されている「代表性ヒューリスティック」や「親近効果」や「標本サイズの無視」や「偶然性の誤解」などと関連するものである(cf. Tversky & Kahneman, 1974; Shaughnessy, 1992; 松

浦, 2009)。しかし，こうした認知心理学的な説明において，現象間の相互関係は明確でなく，それぞれの解釈が限られた各問題状況を記述するに留まっているきらいがある。少なくとも，上述の用語が確率や偶然に関わる認知現象の説明ツールであることは間違いない。しかし，ディスコースの視点から小数の法則をとらえ直すとき，補正規則も一般化規則もその対象規則化をみれば明らかなように数学全般に関わる規則であることから，このミスコンセプションの要因が人間の確率認識能力や偶然認識能力だけにあるわけではなく，非決定論的領域外における行動規則の影響を多分に受けているであろうということが示唆される。つまりミスコンセプションをディスコース論的に再解釈することによって，学校数学全体との関連の中で誤りをより体系的にとらえることが可能になるのである。

表 3-2. 小数の法則の二つの型

LSN 1	S_T	R_T	M_T
	母集団／確率	大標本	圧倒規則
	S_L	R_L	M_L
	母集団／確率	小標本	補正規則
LSN 2	S_T	R_T	M_T
	大標本	母集団／確率	圧倒規則
	S_L	R_L	M_L
	小標本	母集団／確率	一般化規則

ここで問題になるのは，補正規則と一般化規則がなぜ圧倒規則に従うべき場面において使用されるかということである。仮説として一ついえるのは，「補正

規則と一般化規則は算数・数学科全般で有効に機能している」ということである。もしそうであるならば，確率単元の圧倒規則が適用されるべき場面においても，他の箇所で有効に働いている規則である補正規則と一般化規則を適用してしまうということは説明できる。一般化規則が数学的活動の本質であることは広く認められると考えるので(cf. Dörfler, 1991; 岩崎, 2007; 早田, 2013)，以下では補正規則に絞って考察を進めることにする。

2. 教科書の分析

本節では，小数の法則の要因の一つである補正規則に着目し，中学校数学教科書のディスコース内におけるその優勢を示してみたい。このような作業によって，数学学習の結果として小数の法則が生じるというアイロニーの一端を実証的に示すことができると考える。

2.1 分析の対象

本節の分析対象は, 啓林館の中学校数学教科書『未来へひろがる数学』(*1-3*; 岡本・他, 2012a, b, c）の中の項目である「例」と「例題」（以下，一括して$\boxed{\text{例}}$）である（図 3-4)。$\boxed{\text{例}}$が分析対象となるのは，それが思考や問題解決のプロセスに関する項目であり，本章が研究対象としているメタ規則は，そのようなプロセスに関わる規則であるからである。以下の要領で，それぞれの規則が働く$\boxed{\text{例}}$の

相対度数が算出される。

2.2　分析の方法

等号「＝」の含まれる$\boxed{\text{例}}$の度数を，$\boxed{\text{例}}$全体の度数で割る。これは，補正はバランスを保つことであり，等式変形は左辺と右辺のバランスを保つ操作である，と解釈できるからである（図 3-5）。さらにいえば，前小節で述べたように，補正規則は対称律をメタ規則化して表現したものであり，対称律は「＝」に関する定理であることから(cf. 前原, 1967, pp. 137-138)，このような分析の手法をとる。これより，分析において不等号はカウントしないことにする。

例 **2**　　正の数×負の数

$$7\times(-5)=-(7\times5)$$
$$=-35$$

図 3-4. $\boxed{\text{例}}$の例(岡本・他, 2012a, p. 32)

x^2+4x+4　［フレーズ型の式として安定］

↓　センテンス型の式への変換

$x^2+4x+4=$　［センテンス型の式として不安定］

↓　補 正

$x^2+4x+4=(x+2)^2$　［センテンス型の式として安定］

図 3-5. 「x^2+4x+4」の因数分解プロセスにおける補正

2.3　分析の結果

量的分析の結果，237 個の$\boxed{\text{例}}$の内，205 個において等号の使用が確認された。したがって，本節の量的分析の前提に立てば，約 86%の$\boxed{\text{例}}$において補正規則が成功的に機能しているといえる。詳細は表 3-3 を参照されたい。なお MHS は『未来へひろがる数学』の略記である。数学全般で有効なメタ規則を確率・統計領域でも使用することは自然な行為であるから，この結果より，確率・統計領域における補正規則の使用によって小数の法則が生じることは，数学学習の帰結として理解できる[1]。

表 3-3. 分析結果：補正規則

	$\boxed{\text{例}}$の総数	該当$\boxed{\text{例}}$数	該当$\boxed{\text{例}}$数／$\boxed{\text{例}}$の総数
MHS1	94	75	約 80 %
MHS2	50	45	90 %
MHS3	93	85	約 91 %
合 計	237	205	約 86 %

[1] ちなみに，一般化規則について，「文字」（例えば，a，b，x，y）を含む$\boxed{\text{例}}$を補正規則と同様の方法で分析した場合，表 3-4 のような結果になる。文字に注目したのは，学校数学におけるそれがアラビア数字よりも広い外延と少ない内包をもち，一般性を意図して使用されているといえるからである。

表 3-4. 分析結果：一般化規則

	$\boxed{\text{例}}$の総数	該当$\boxed{\text{例}}$数	該当$\boxed{\text{例}}$数／$\boxed{\text{例}}$の総数
MHS1	94	57	約 61 %
MHS2	50	42	約 84 %
MHS3	93	60	約 65 %
合 計	237	159	約 67 %

3. 他の難教材との比較を通した総合的考察：論証と確率

第 2 節までで，小数の法則の発生要因が他の数学学習で有効に機能するメタ規則であることを指摘してきた。本節では，生徒にとってこうしたメタ規則の変容がどれほど困難かを示すために，難教材といわれる「論証」(cf. 岩崎・他, 2013)と比較しながら，小数の法則の克服し難さについて考察してみたい。語源学的にいえば，“probability”は“probe-able-ity”であり，“probe”（調べる）を遡るとラテン語の「ためす *probare*」になる。興味深いのは，“probare”は“prove”つまり“proof”の語源でもあるということである。

3.1 難教材としての論証

一般的に「論証を理解する中学生は 20%に満たない」といわれるが，例えば「平成 24 年度全国学力・学習状況調査：数学Ｂ」の論証に関わる設問の正答率，特に 1(2)や 6(3)の正答率(1(2) 11.8%，6(3) 25.4%；国立教育政策研究所, 2012, p. 27)をみれば，この主張が現在の中学生の論証認識の実態をある程度的確に表現しているということがわかる。我が国の数学教育史を手掛かりに，進学率が 20%を超えなかった戦前の旧制中学の教材が，戦後の新制中学の指導内容になったことから生じる論理的帰結といえばそれまでだが，もはや「戦後」とはいえない今日ですら，種々の学力調査が示す結果に変わりはない。義務教育にあって，こうした常識はむしろ非常識であり，その事態は指導法レベルの改善では到底打開できるものではないだろう(cf. 岩崎・他, 2013)。

3.2　メタ規則の視座からみた論証学習の困難性

論証学習は，実証から論証へとナラティブ（命題表現）の正当化の方法をシフトさせるためのものであり，メタ規則の質的変容を伴うメタ学習の数学教育的典型例ということができる。我が国では一般に幾何領域を巡って論証学習の問題点は浮き彫りになるが，Sfard (2007)は「(負の数）×（負の数)」の学習にそれをみている[2]。乗数や被乗数に正の数が入っている場合，おはじき（同数累加）やテープ図（比例）によって意味づけし実証することで，ナラティブ（例えば「2 × 3 = 6」）の正当化がなされる。しかし「(負の数）×（負の数)」の場面は，外挿法や数直線上のテクニカルな操作によって実証的に正当化できなくはないが，その後の代数的展開を考慮すれば，論証の作法への入門教材としての位置づけもあるから，ここに実証のディスコースと論証のディスコースとのコモグニション葛藤が起こるのである。この葛藤をスファードは表 3-5 のようにまとめている。表中の古いメタ規則から新しいメタ規則への移行の困難性が，すなわち論証学習のそれである。

[2] これに関連して，國宗は「図形の証明と文字式による証明の相違点」を次のように指摘している：《[...] 推論を進める上での両者の違いは，「文字式による証明」の場合，抽象的な文字記号を用いて式変形によって結論が導かれ，そのことは逆に論証が計算の中で潜在的になることを意味する一方，「図形の証明」の場合，描かれた図は変形されず，そのことは逆に推論における論理を明確にする，という点にみることができる。換言すれば，図は対象としてふるまうため方法が明示され，一方，文字式は方法としてふるまうため，方法を支え，したがって論証は潜在する。》(國宗, 2013, p. 43)

表 3-5. 定義の承認のための新旧のメタ規則(Sfard, 2007, p. 584)

古いメタ規則	新しいメタ規則
定義されている対象が従うべきである対象規則の集合は，具体的なモデルによって充たされなければならない。	定義されている対象が従うべきである対象規則の集合は，事前に決定されている，公理と呼ばれる他の対象規則の集合と整合しなければならない。

3.3　論証学習と確率学習に共通する困難性

確率学習は対象の学習である一方，論証学習は方法の学習であるから，素朴にはそれらは比較不能であろうが，メタ規則というチャンネルを準備するとき，論証学習の困難性と確率学習の困難性は，同じ問題の異なる二つの見え方として理解できる。「実証 vs.論証」という正当化の方法の二項対立は，「統計的確率 vs.数学的確率」という概念形成の対象の二項対立と対応するように思われる。つまり，中学校数学における確率の定義である統計的確率は，確率実験により正当化される一方，高等学校数学における確率の定義である数学的確率は，集合の発想と「同様に確からしい」というある種の公理とによって正当化される。

本章 2 節までの議論で明らかになったことは，統計的確率を正当化し理解し応用するためのメタ規則である圧倒規則が，補正規則や一般化規則によって脅かされているということである。これをより端的に述べれば，確率学習においては統計的確率の理解に困難性の一端がある，ということである。したがって，

論証学習の文脈では実証の理解よりも論証の理解に課題が生じるが，確率学習の場合では先行してより実証的に導入される統計的確率の方が，後に論証的に導入される数学的確率よりも理解し難いということになる。この現象をより分析的に捉えれば，論証学習においては，図形という具体的な対象に対して論証という論理的な方法を実行しなければならない一方，確率学習においては，確率という抽象的な対象[3]に対して確率実験という経験的な方法を適応しなければならないという点，つまり学習の対象と方法のアンバランスに学習の困難性の要因の一端があると考えられる。こうした対象と方法のアンバランスは，人間の行動や思考が慣行へと引き寄せられることを考えれば，論証の場合であれば，論証の文脈における実証的方法の使用へと繋がり，確率の場合であれば，確率実験の文脈における一般化規則や補正規則の使用へと至るであろう。その意味で小数の法則の克服は，数学科内における補正規則と一般化規則の優勢に加えて，確率（統計的確率）の定義それ自体の中に，それを認識する者が補正規則と一般化規則を容易に受け入れてしまうような構造が内包されているため，困難な企てであると指摘できる。

[3] 確率概念の抽象性については第 4 章において詳しく論じる。

第３章のまとめ

先行研究が示すように，小数の法則は子どもだけでなく，場合によっては専門的に確率・統計を学んだ大人にもみられるものである。こうした事実は，「数学学習の結果としての小数の法則」という仮説を提起させる。本章はこの仮説の正しさを，中学校数学教科書の分析という手法をもって立証しようとしたものである。第 3 章の成果は以下のようにまとめられる。

① 第 1 章で採用されたコンセプションの記号論的モデル化という視点と，コミュニケーションとしての思考というコモグニション論の発想を総合して，ディスコースのコモグニション論的三角形とコモグニション葛藤の二重三角形が構築された。これらのモデルによって，ミスコンセプションという心理学的対象と教科書や授業という教授学的対象の関連づけが可能になった。第 1 章の成果の一端は三角形モデルを四面体モデルにしたことであるから，第 3 章のディスコースの三角形モデル化は退化とみられるかもしれないが，そうではない。実際，ミスコンセプションをモデル化しようとしたときには，ディスコースモデルでは六項目必要になる。三項目によるディスコースの定式化が理論的前進といえるのは，第 1 章でモデルに加えられた〈確信〉が「メタ規則／ルーチン」としてより操作的な形で明確にディスコースモデルに残されているからである。減った項目はむしろ〈概念〉に相当するものである。これは，言語ゲーム論の作法に従って語の使用として概念を定義するコモグニション論において，コンセプションモデルに

おける〈概念〉は能記と実体の連携の仕方で規定されるものだからである。

② コモグニション葛藤の二重三角形を用いて小数の法則をディスコース間の葛藤としてモデル化したところ，補正規則と一般化規則というメタ規則が原因になっていることが理論的に明らかになった。大数の法則のディスコースへ適切に参加するためには，これらのメタ規則は圧倒規則へ転換される必要がある。

③ 一般化規則の数学科内での優勢はいうまでもないから，本章では補正規則に焦点をあてて，教科書分析を行った。メタ規則は明示的に記述されるものではないから分析に工夫が必要であるが，本章では例と例題中に含まれる「＝」を補正規則の目印として，相対度数を算出した。結果として約 86% の例と例題において補正規則が有効に機能していることが示された。この結果から，数学学習の結果として小数の法則が生じるのは当然のこととして理解される。

④ ディスコースの問題として再定式化されるとき，ミスコンセプションはメタ規則の過大適用と一般的に特徴づけることができる。数学教育を悩ます最大のメタ規則の過大適用の一つは，証明の文脈（論証のメタ規則）への実験・実測の手法（実証のメタ規則）の援用であろう。論証学習と確率学習には一見関連性はみられないが，学習の対象と方法のアンバランスという共通の特徴を指摘することができる。論証学習の場合，経験的に接近可能な図形という具体的な対象に，証明という論理的な方法を適用しなければならない。一方，確率学習の場合，論理的に接近せざるを得ない確率と

いう抽象的な対象に，確率実験という経験的な方法を適用しなければならない。具体的な対象には経験的な方法，抽象的な対象には論理的な方法というのが自然な対応づけであろうから，ここに確率学習と論証学習の共通の困難性を指摘できる。

引用・参考文献：第３章

岩崎秀樹(2007).『数学教育学の成立と展望』. 京都：ミネルヴァ書房.

岩崎秀樹・大滝孝治・杉野本勇気・岩知道秀樹(2013). 「数学教師を目指す教育学部初年次学生の論証認識に関する考察」. 日本科学教育学会誌『科学教育研究』, *37*(3), 226-234.

岩崎秀樹・山口武志(2000).「一般化の過程に関する認知論的・記号論的分析」. 日本数学教育学会誌『数学教育学論究』, *75*, 1-22.

岡本和夫・小関熙純・森杉馨・佐々木武・他 39 名(2012a). 『未来へひろがる数学１』. 東京：啓林館.

岡本和夫・小関熙純・森杉馨・佐々木武・他 39 名(2012b). 『未来へひろがる数学２』. 東京：啓林館.

岡本和夫・小関熙純・森杉馨・佐々木武・他 39 名(2012c). 『未来へひろがる数学３』. 東京：啓林館.

オグデン, C.＆リチャーズ, I. (1967/2001). 石橋幸太郎［訳］／外山滋比古［解説］『意味の意味』. 東京：新泉社. ［原著版：1923 年］

國宗進(2013).『数学教育における論証の理解と学習指導に関する研究』. 未公刊博士学位論文, 広島大学.

国立教育政策研究所(2012).『平成 24 年度全国学力・学習状況調査：評価結果のポイント』, http://www.nier.go.jp/12chousakekkahoukoku/index.htm.

コルモゴロフ, A. N., ジュルベンコ, I. G.＆プロホロフ, A. V. (2003). 丸山哲郎・

馬場良和［訳］『コルモゴロフの確率論入門』. 東京：森北出版株式会社.
［原著版：1995 年］

ソシュール, F. (1972). 小林英夫［訳］『一般言語学講義』. 東京：岩波書店. ［原著版：1949 年］

早田透(2013). 「数学教育における一般化とその妥当性判断に関する考察」. 全国数学教育学会誌『数学教育学研究』, *19*(1), 47-53.

平林一榮(1987/2013). 『数学教育の活動主義的展開』. 東京：東洋館出版社.

藤井斉亮(1989). 「認知的コンフリクトによる理解の分析と評価：方程式・不等式を具体的題材として」, 日本数学教育学会誌『数学教育学論究』, *53*, 3-31.

前原昭二(1967). 『記号論理入門』. 東京：日本評論社.

松浦武人(2009). 「初等教育における児童の確率概念の発達を促す学習材の開発研究：確率判断におけるヒューリスティックスの改善に焦点をあてて」. 数学教育学会誌『数学教育学論究』, *91*, 3-13.

Carvalho, P. C. P. (2012), Teaching probability in secondary school. *Pre-proceedings of the 12th International Congress on Mathematical Education*, *Regular Lecture 3-8*, 611-619. Seoul, Korea: International Commission on Mathematical Instruction.

Confrey, J. & Kazak, S. (2006). A thirty-year reflection on constructivism in mathematics education in PME. In A. Gutiérrez & P. Boero (eds.), *Handbook of research on the psychology of mathematics education: Past, present and future* (pp. 305-345). Rotterdam, The Netherlands: Sense Publishers.

Dörlfer, W. (1991). Forms and means of generalization in mathematics. In A. J. Bishop,

S. Mellin-Olsen, & J. van Dormolen (eds.). *Mathematical knowledge: Its growth through teaching* (pp. 63-85). Dordrecht, The Netherlands: Kluwer Academic Publishers.

Kahneman, D. (2011). *Thinking, fast and slow*. New York, USA: Farrar, Straus and Giroux.

Sfard, A. (2007). When the rules of discourse change, but nobody tells you: Making sense of mathematics learning from a commognitive standpoint. *The Journal of the Learning Sciences*, *16*(4), 567-615.

Sfard, A. (2008). *Thinking as communicating: Human development, the growth of discourses, and mathematizing*. Cambridge, UK: Cambridge University Press.

Shaughnessy, J. M. (1992). Research in probability and statistics: Reflections and directions. In D. A. Grouws (ed.), *Handbook of research on mathematics teaching and learning: A project of the National Council of Teachers of Mathematics* (pp. 465-494). New York, USA: Macmillan Publishing Company.

Steinbring, H. (1991a). The theoretical nature of probability in the classroom. In R. Kapadia & M. Borovcnik (eds.), *Chance encounters: Probability in education* (pp. 135-167). Dordrecht, the Netherlands: Kluwer Academic Publishers.

Steinbring, H. (1991b). The concept of chance in everyday teaching: Aspects of a social epistemology of mathematical knowledge. *Educational Studies in Mathematics*, *22*(6), 503-522.

Tversky, A., & Kahneman, D. (1971). The belief in the law of small numbers.

Psychological Bulletin, *76*, 105-110.

Tversky, A., & Kahneman, D. (1974). Judgment under uncertainty: Heuristics and biases. *Science*, *185*, 1124-1131.

第 4 章
教科書ディスコースに内在する小数の法則の領域固有的要因：概念形成の視座から

確率概念の形成過程に焦点をあてた第 1 章 2 節が明らかにしたのは，小数の法則の克服に関わる重要な認識方法として，「認知具象化」が指摘できるということである。本章ではそれを，コモグニション論の概念を用いて教科書のディスコースの中に見出す。その際，“reification”という言葉が有力な手掛かりとなる。それは，この概念が認知具象化理論とコモグニション論の両者に見出されるからである。コモグニション論において“reification”（以下，記号具象化と訳出する）は，対象構成法の一つである。

1. コモグニション論における概念形成：対象構成

コモグニション論において，概念形成は「対象構成 *object construction*」という言葉で取り扱われる。そこで本章では，対象構成の視点から確率学習の困難性について検討してみたい。

コモグニション論において，「対象」は「初源対象 *primary object*」と「ディスコース対象 *discursive object*」の二つに分類される。初源対象とは物理的な物（例えば，椅子）のことである。ディスコース対象は，実体を伴う能記として定義

される(Sfard, 2008, p. 166)。実体と能記の定義については，第 3 章を参照されたい。なお以下では，当該の記号が能記であり，指示されている対象ではないことを強調する場合，その記号に下線を引くこととする。

コモグニション論において，対象構成はディスコース対象を構成することを指し，構成は命名として特徴づけられる。この命名方法の差異によって，ディスコース対象はさらに「単一的ディスコース対象 *simple discursive object*」と「複合的ディスコース対象 *compound discursive object*」の二つに分類される。単一的ディスコース対象は，能記と単一の初源対象の順序対（例えば，〈ポチ，現実の犬〉）をつくる「洗礼 *baptizing*」によって構成されるものである(Sfard, 2008, pp. 169-170)。複合的ディスコース対象は以下の方法で構成されるディスコース対象である：

《「複合的ディスコース対象」は，現存しているディスコース対象や初源対象に対して，以下の方法の一つを用いて名詞や代名詞を与えることによって生じる：

・「同一化 *saming*」：これまでどのような方法でも「同じ」とはみなされてこなかったけれども，ある特定の閉じた物語の集合[1]において相互に取り替え可能である多くの事物に，一つの能記を割り当てること（一つの名

[1] Sfard (2008)は「閉じたナラティブの集合」について次のように述べている：《もしあるナラティブの集合が，すでにその集合内にあるナラティブから論理的に導出され得るすべてのナラティブを含んでいるならば，そのナラティブの集合は閉じていると主張される。》(p. 170)。我が国の学校数学から事例をあげれば，負の数導入後の中学校数学において，整数に関するナラティブの集合は閉じているが，小学校算数の文脈ではこのナラティブの集合は閉じていない。なお「ナラティブ」については第 2 章 1.1 節の脚註を参照されたい。

前を与えること）

・「カプセル化 *encapsulating*」：ある一つの集合に一つの能記を割り当て，まとめられているすべての集合のメンバーの性質に言及する際に単数形でこの能記を用いること

・「記号具象化 *reifying*」：いくつかの対象に関する過程についての物語が，対象間の関係に関する「時間の落ちた *timeless*」物語として今度は語られ得る，ということの助けを借りて，一つの名詞や代名詞を導入すること》(註１は筆者加筆; Sfard, 2008, p. 170)

洗礼によって構成されるディスコース対象の順序対による定式化（対象 O =〈能記 S, 実体 R〉）に倣うと，同一化によって構成されるディスコース対象は〈名前, 対象の集合の複数の要素〉，カプセル化によって構成されるディスコース対象は〈名前, 対象の集合それ自体〉，そして記号具象化によって構成されるディスコース対象は〈名前, 対象に関する過程〉として，それぞれ特徴づけられる。

同一化の事例としては，*a/b*（*a*，*b* はともに数字の列）の形式で記述できるすべての表記に一つの能記「分数」を割り当てることがあげられる(Sfard, 2008, p. 170)。また関数が式，グラフ，表によって表現され得ることは，これら三つの対象の同一化として関数が構成されていることを意味している(Sfard, 2008, p. 170)。

同一化においては，*a/b* の形式をもつ数の集合の要素に共通する名前として分数が用いられるが，分数の性質について述べるとき，集合自体の名前としても分数は用いられることもあり，この場合の命名はカプセル化として特徴づけら

れる[2]。また対象「$f(x) = x^2$ で定義される関数 f」は，その式と表とグラフの同一化によって構成される場合もあれば，(1, 1)，(2, 4)，(3, 9)といった順序対のカプセル化によって構成される場合もある(Sfard, 2008, p. 171)。

最後に記号具象化であるが，そもそも分数は「分ける」や「割る」といった操作を a/b の形式としてタイムレスに定式化したものであると捉えられる。例えば「半分に分ける」を「1/2」と呼ぶのである。この動詞から名詞へのシフトに記号具象化を指摘できる。また対象「$f(x) = x^2$ で定義される関数 f」に関しても，(1, 1)，(2, 4)，(3, 9)といった順序対の集合のカプセル化を行う前に，例えば 2 を

[2] 普遍名詞と集合名詞を区別しない日本語において，同一化とカプセル化の差異を明確にすることは容易ではない。しかし抽象の数学的定式化とコモグニション論における対象構成を比較してみると，この点は多少明確になるように思われる。数学的には「対象からの抽象」(平林, 1970, pp. 86-87)のプロセスは，同値関係による集合の類別と各同値類の要素化によって特徴づけられる(岩崎, 1990, pp. 112-114; 岩崎, 2007, pp. 59-60; 那須, 1985, pp. 87-90)。これを図示すると図 4-1 のようになる。まず対象の集合 Ω に同値関係 R が入ることで，直和分割 $\overline{\Omega}$ ができる。次に $\overline{\Omega}$ は各同値類の要素化によって，R による Ω の商集合 Ω/R になる。このとき，Ω から Ω/R への標準的全射 π を R の定める抽象という。ここで，図 4-1 において，$\overline{\Omega}$ の各同値類に命名すること（R による類別）が同一化に，そして Ω/R の要素に命名すること（要素化）がカプセル化に，それぞれ相当するように思われる。なお記号具象化に関しては，その定義からして，対象からの抽象というよりも，「操作からの抽象」(平林, 1970, pp. 86-87)と対応する用語とみるのが妥当であろう。すなわち，操作への命名が記号具象化であると考えられる。

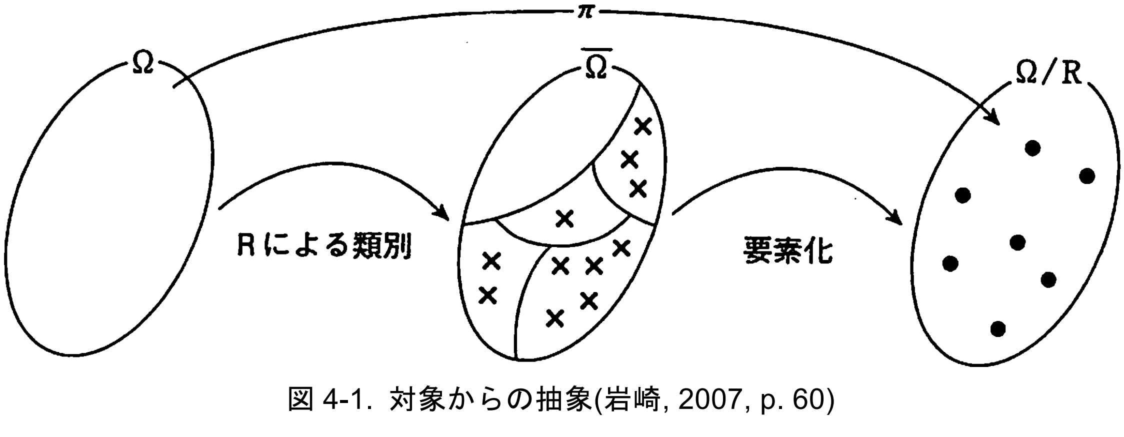


図 4-1. 対象からの抽象(岩崎, 2007, p. 60)

二乗し４を得る操作から，順序対「(2, 4)」を導出する過程が必要である。この過程は計算という操作を順序対の能記に置き換えているので記号具象化である。

2. 中学校数学教科書における確率単元の対象構成の分析

2.1 分析の方法

本節の分析で使用される教科書は，啓林館の中学校数学教科書『未来へひろがる数学２』(岡本・他, 2012b）である。また，本節は中学校教科書の確率単元を分析するが，生徒が構成した学習対象を応用する場面として捉えられる「問題」や「例題」は，本節の関心上，研究対象から除外する。

本節の分析では，学習対象「$p = a/n$」が構成されるまでの確率単元中の能記と実体の関係，そして能記と実体の接続方法について検討する。能記と実体の関係の特定，つまり能記とそれに連なる実体の特定は，表現様式の変容を手掛かりに行う。例えば，ある日常言語的な表記が代数的な表記に変換されている場合，前者が実体，後者が能記として同定される。なお，一つの能記に対して実体は一つである必要はなく，複数の実体が連結されている場合もある。能記と実体の関係の特定においては，各対象構成の定義に従えば，表現体系の変容ではなく，新しい名詞の導入に注目するのが素朴な分析方略であろう。しかし教科書には様々な名詞が登場し，その中には当然，確率単元の構造には直接的に影響しない物もある（例えば名詞「ケーキ」)。つまり，「新しい名詞の導入」

という視点は単元の構造を捉えるためには微視的すぎる。そこで本節では，表現体系の変容というより巨視的な観点から単元を分析し，確率単元の構造に迫りたい。このようにアプローチをとることで，真に分析すべき名詞も明らかになるとも期待される。

能記と実体の接続方法については同一化，カプセル化，記号具象化という三つの対象構成の定義に従って分析し，洗礼については基本的に検討しない。それは，洗礼という対象構成は最も素朴な名づけ行為であり，確率学習の困難性の要因とは考えられないからである。

2.2　中学校数学教科書における確率単元の対象構成

確率の導入段階である中学校確率単元は，「ケーキを食べる決め方としてのコイン投げ」という現実的な場面からスタートする（図 4-2，4-3）。次に，コイン投げの実験の二段階の過程が示される（図 4-4）。そして，実験の結果が表として提示される（図 4-5）。ここまでの教科書の展開で，われわれは一つの確率単元の対象構成を指摘することができる。つまり，図 4-5 を能記，図 4-2～4-4 を実体として，「実験結果としての表」という対象が構成されているといえる。図 4-5 は，コイン投げの実験過程をその実体として含んでいるので (図 4-4 の（１）と（２）)，対象〈図 4-5, 図 4-2～4-4〉の構成過程は，各対象構成の定義から，記号具象化として特徴づけられる。第 1 節の記号具象化の定義によれば，記号具象化の終点となる能記は名詞か代名詞である。図 4-5 には洗礼によって「次の表」という名詞が与えられているため(岡本・他, 2012b, p. 138)，図 4-5 を記号具

象化の結果と考えることに問題はない。

> 同じケーキが食べたいけいたさんと妹は，どちらがそのケーキを食べるか，決めようとしています。
>
> けいたさんは少し考えて，次のような提案をしました。
>
> **決め方**
>
> 10 円硬貨を 2 枚投げて，
>
> ・同じ面が出れば，けいたさんが食べる
>
> ・違う面が出れば，妹が食べる

図 4-2. 問題状況(岡本・他, 2012b, p. 136)

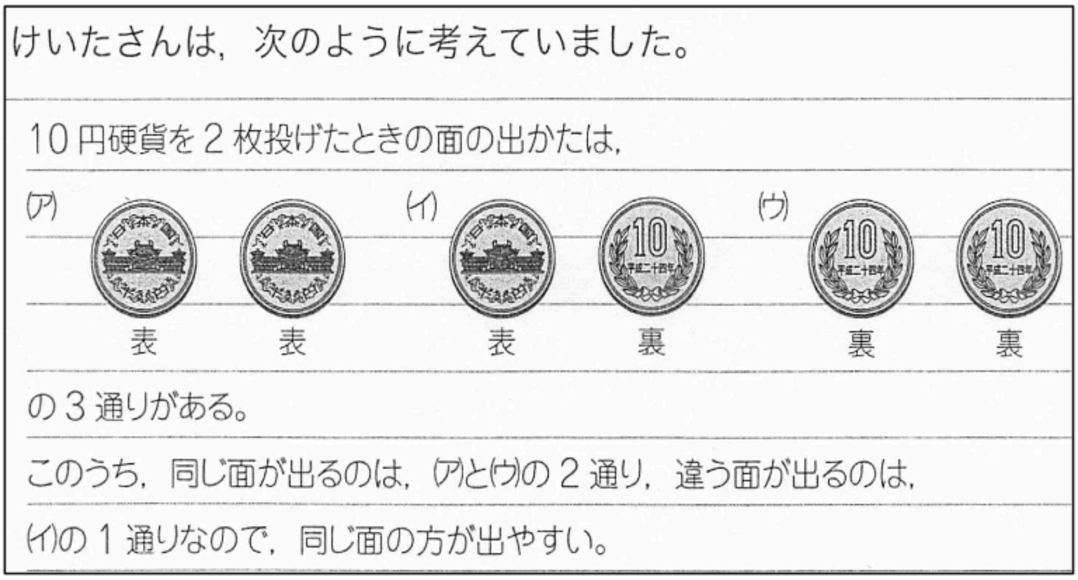


図 4-3 コイン図(岡本・他, 2012b, p. 136)

次にここまでで作成した表から各試行回数における（イ）の相対度数を求め，グラフ表記に変換する段階がくる。つまり，以前に構成された対象〈図 4-5, 図

4-2～4-4〉の能記である図 4-5 の表は，能記のままであるわけではなく，図 4-6 とともに図 4-7 のグラフの実体となる。ここで図 4-6 の表記は，図 4-5 を図 4-7 に変換する過程に関する記述であるから，対象〈図 4-7, 図 4-5・4-6〉は記号具象化によって構成されているといえる。図 4-7 も図 4-5 と同様に名詞でも代名詞でもないが，洗礼により「上のグラフ」という名詞を与えられているため(岡本・他, 2012b, p. 138)，この対象構成が記号具象化であるという解釈は定義に沿っている。

実験　(1)　２枚の硬貨を同時に投げて，そのときの表裏の出かた(ア)，(イ)，(ウ)を記録する。

(ア)　２枚とも表
(イ)　１枚は表で１枚は裏
(ウ)　２枚とも裏

(2)　上の(1)をくり返しおこなって，硬貨を投げる回数を増やしていき，(ア)，(イ)，(ウ)の出た回数を，それぞれ下の表に記録する。

図 4-4. 実験手順(岡本・他, 2012b, p. 137)

前段階までで図 4-5 の表の特徴の記述として構成された図 4-7 のグラフは，今度はそこから相対度数の収束傾向を読み取るための記号となる。つまり図 4-7 は，図 4-8 の表記とともに「確率」の実体となる。図 4-8 はグラフ表現を読み取る行程を箇条書きで表現しており，過程に関する記述である。したがってこの

段階における対象構成は記号具象化である。

回数	10	20	30	40	50	60	70	80	90	100	150	200	300	400	500	600	700	800	900	1000
(ア)	3	6	7	13	14	18	21	26	28	29	40	56	81	101	135	150	176	200	226	251
(イ)	6	10	16	18	21	24	29	33	39	46	74	94	145	198	248	302	348	395	451	497
(ウ)	1	4	7	9	15	18	20	21	23	25	36	50	74	101	117	148	176	205	223	252

図 4-5. 実験結果の表(岡本・他, 2012b, p. 138)

上の表から，(イ)の場合が(ア)，(ウ)の場合よりも起こりやすいことがわかります。

(イ)の場合について，さらにくわしく調べましょう。

表の結果から，

$$(イ)の出た相対度数 = \frac{(イ)の出た回数}{投げた回数}$$

を求め，それをグラフに表すと，次のようになります。

図 4-6. 表のグラフ化手順(岡本・他, 2012b, p. 138)

『未来へひろがる数学２』において，ここまでは「確率の意味」という節の内容であり，次には「確率の求め方」という節が続く。「確率の意味」の節にお

いて最終的な能記となる確率は，「確率の求め方」の節において，サイコロに関する状況の記述（図 4-9）と具体的な計算過程の記述（図 4-10）とともに，確率の求め方である「$p = a/n$」(岡本・他, 2012b, p. 142)の実体として機能している。図 4-10 は計算過程の記述であるから，ここでの対象構成も定義に従い，記号具象化ということができる。

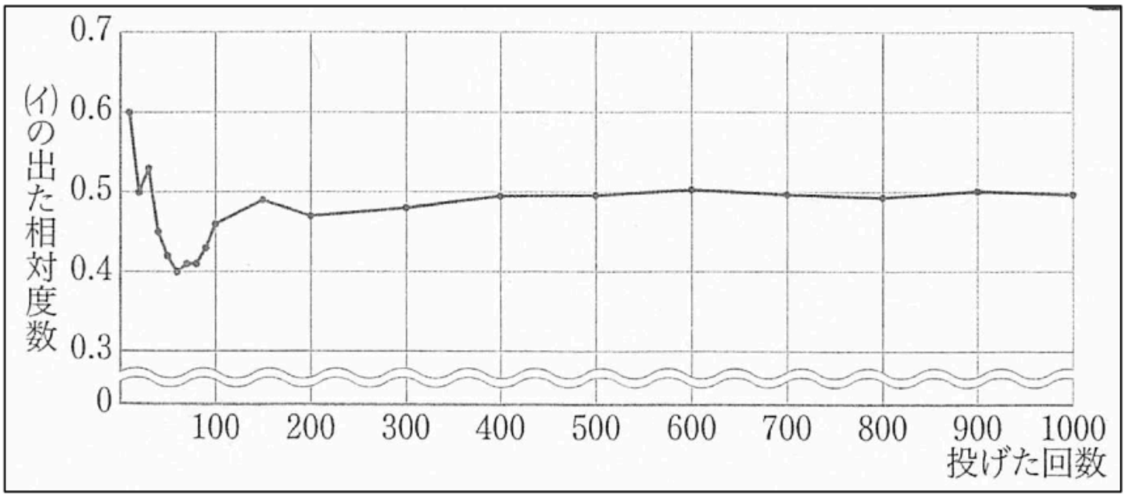


図 4-7. 実験結果のグラフ(岡本・他, 2012b, p. 138)

- 投げた回数が少ないうちは，(イ)の出た相対度数のばらつきは大きいが，回数が多くなると，そのばらつきは小さくなる。
- 投げた回数が多くなるにつれて，(イ)の出た相対度数は，0.5 に近い値になる。

この 0.5 は，(イ)のことがらが起こることが期待される程度を表していると考えられます。

図 4-8. グラフ解釈(岡本・他, 2012b, p. 139)

ひろげよう　どうなるかな

1つのさいころを投げるとき，
1の目が出る確率は，どうなる
でしょうか。

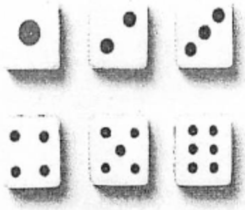


図 4-9. サイコロ図(岡本・他, 2012b, p. 142)

上ので，実験をしてみると，1の目が出る確率は $\frac{1}{6}$ に近い値になることがわかります。

この確率については，次のように考えることもできます。

(ア)　目の出かたは，1，2，3，4，5，6の6通りである。

(イ)　どの目が出ることも同じ程度に期待される。

(ウ)　1の目が出る場合は，1通りである。

このとき，1の目が出る確率は，

$$\frac{(ウ)の場合の数}{(ア)の場合の数}=\frac{1}{6}$$

となります。これは，実験の結果と一致（いっち）しています。

上の(イ)のようなとき，どの目が出ることも **同様に確からしい** といいます。

同様に確からしいときには，場合の数の割合として確率を求めることができます。

図 4-10. 確率計算手順(岡本・他, 2012b, p. 142)

中学校数学教科書『未来へひろがる数学２』の確率単元を対象構成という視点から分析したところ, 図 4-11 のようになった[3]。本研究ではこれを「構成の木」と呼ぶことにする。図 4-11 より明らかになる確率単元の特徴は，それが記号具象化の連続で構造化されている，ということである。

コモグニション論において，記号具象化は「抽象的ディスコース対象 *abstract d-object*」の構成方法として特徴づけられる(Sfard, 2008, pp. 172-173)。対象を分類する場合，具体と抽象の視点から行うのは常識的な手段であろうが，コモグニション論において,「具体的対象 *concrete object*」と「抽象的対象 *abstract object*」は，初源対象が具体であるということは別にして，構成方法によって規定される。すなわち，記号具象化と関連せず同一化やカプセル化によってのみ構成されるディスコース対象は「具体的ディスコース対象 *concrete d-object*」であり,記号具象化によって構成されるディスコース対象は抽象的ディスコース対象である，と主張される（図 4-12）。この議論に従えば，記号具象化はディスコース対象の抽象度を上昇させる構成方法として特徴づけることができる。なお図 4-12 において，洗礼は同一化の特殊型（実体が一つ）として取り扱われている

[3] スファードは「実体化の木 *realization tree*」という枠組みを用いて問題解決場面をモデル化している(Sfard, 2008, pp. 164-167)。本研究では概念形成場面を同様の発想で記述するという意識から，この枠組みを「構成の木 *construction tree*」と命名する。これは，スファードが“realization”を日本語でいえば「実体」と「実体化」の二つの意味で用いており，その対義語として前者には「能記」，後者には「構成」を割り当てていると考えられるからである。また, スファードが他の記号論者と異なり「連鎖」(e.g., 佐々木, 2004; Presmeg, 2006)ではなく「木」という表現を好むのは,「連鎖」が線形性を含意しており, 複雑な階層構造を表現するには「木」の方が適切であるという解釈をするからである(Sfard, 2008, p. 166)。なお記号論的連鎖や実体化の木という発想の起源の一つは，その難解さで有名な『エクリ I 』(ラカン, 1972)のようである(cf. Gravemeijer, 2002, pp. 16-17; Presmeg, 2006, pp. 165-166; Sfard, 2008, 165-166)。

と思われる。

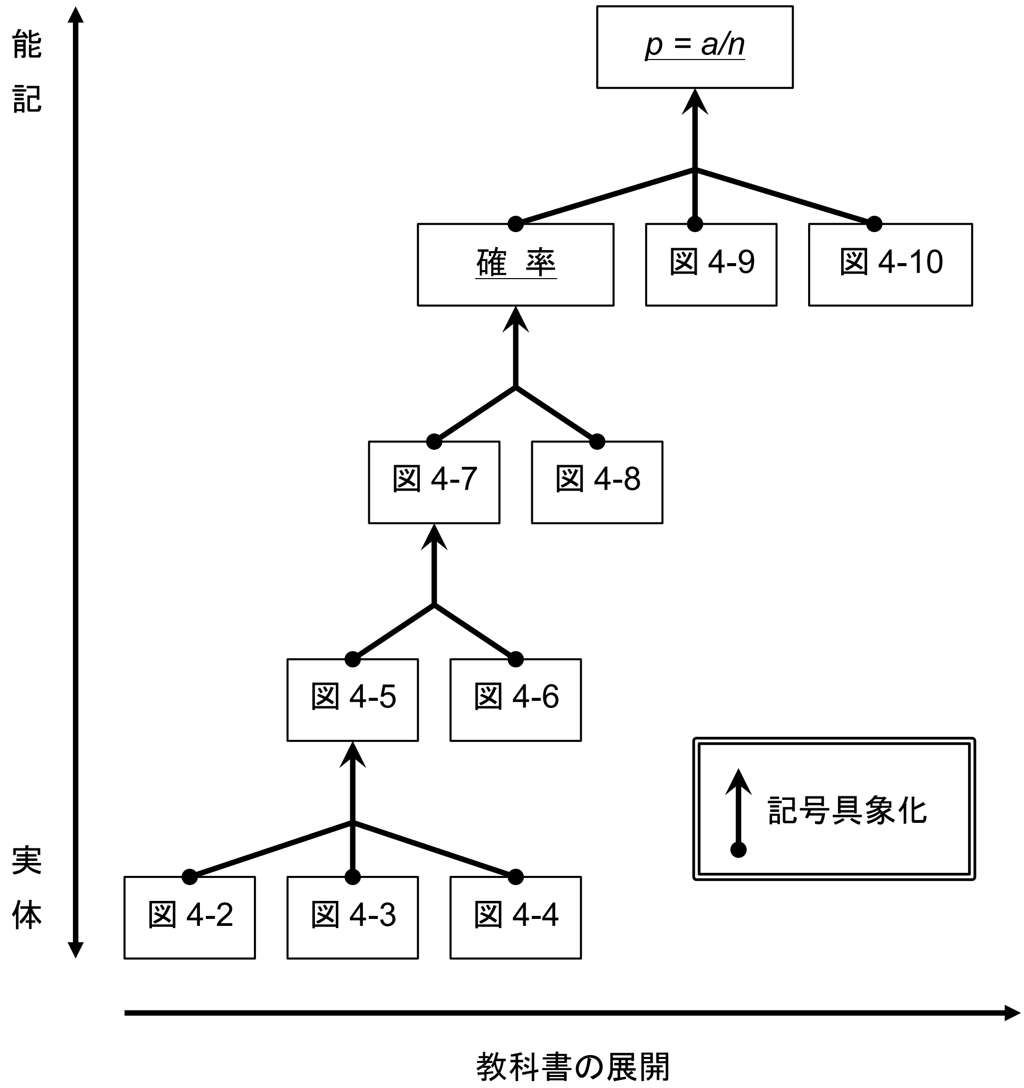


図 4-11. 構成の木：中学校教科書の確率単元

図 4-11 の一連の記号具象化プロセスをより分析的にみてみれば，図 4-2 から図 4-8 をその実体としてもつ確率は統計的確率である。この点に第 3 章の議論を踏まえると，小数の法則の克服に必要となるメタ規則である圧倒規則は，統計的確率としての確率の構成に関わる一段目から三段目までの記号具象化のプロ

セスにおいて有効に機能しているものである，ということがわかる。いいかえれば，図 4-11 は確率と圧倒規則が関連するのに三段階の記号具象化を経る必要があることを示しており，小数の法則の克服の困難性の一端を示していようが，これは中学校確率単元のゴールである $p = a/n$ に至るための第四の記号具象化と総合的に分析されるとき，より重大な問題を明らかにする。

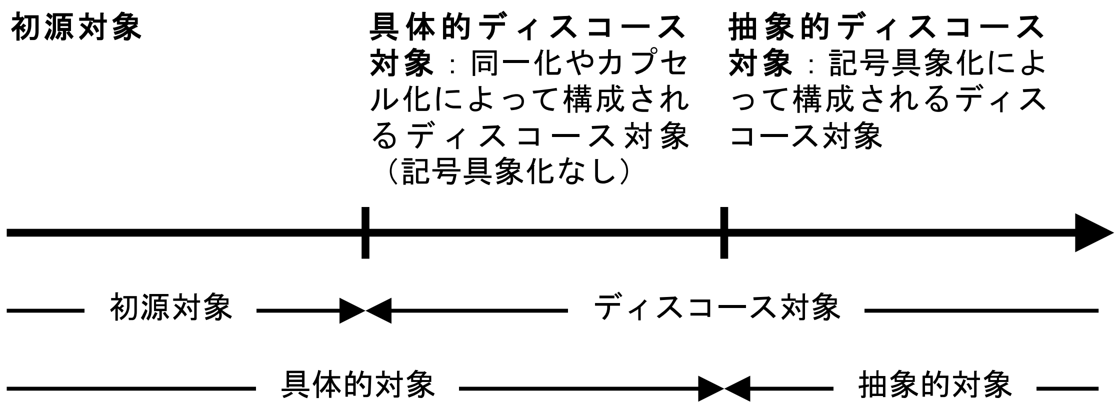


図 4-12. 対象の相互関係(Sfard, 2008, p. 173)

統計的確率を数学的確率へと接続することを意図して企画されているであろう第四の記号具象化が意味しているのは，中学校確率単元の最終段階において圧倒規則の価値が著しく低くなる，ということである。それは，図 4-11 を図 4-13 のように略記するとより明確になろう。第一から第三の具象化までは，実体間に明確な関連がある（「問題文と実験手順」，「表と表解釈」，「グラフとグラフ解釈」）一方，第四の具象化における実体間の関係は自明なものではなく，「同様に確からしい」によって無理矢理関連づけられているにすぎない。つまり，第四の記号具象化の段階において，それまでで構成してきた統計的確率は必ずしも必要でない。換言すれば，数学的確率の議論は確率実験を前提にしないから，

圧倒規則は必要とされない。こうした中学校確率単元における対象構成の構造をみると，中学校の確率学習の結果として小数の法則が生じるのは，自然な現象として理解され得る。

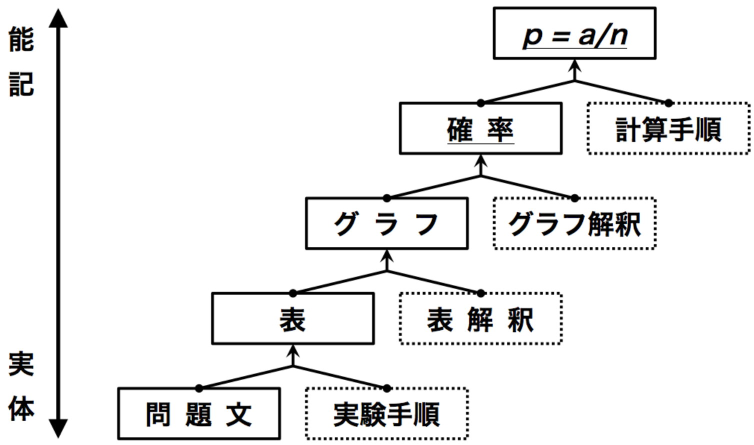


図 4-13. 略記図：図 4-11

3.　高等学校数学教科書における確率単元の対象構成の分析

3.1　分析の方法

高等学校確率単元の分析で使用される教科書は数研出版の高等学校数学教科書『高等学校 数学 A』(岡部・他, 2012）であり，分析対象となる箇所は確率単元の冒頭の小節「５ 事象と確率」である。また本節は教科書の確率単元を分析するが，生徒が構成した学習対象を応用する場面として捉えられる「問題」や「例題」は，前節同様に，研究対象から除外する。

本節の分析では，学習対象「確率」が構成されるまでの確率単元中の能記と

実体の関係，そして能記と実体の接続方法について検討する。前節の中学校教科書の分析においては，表現体系の変容に注目した。しかし，算数と接地した数学である中学校数学と，算数を離れむしろ大学数学と連関する数学である高等学校数学の質の違いを考えれば，高等学校数学において数学的対象が図式というよりも言語を用いて構成されていくことは想像に難くない。したがって，高等学校の教科書分析においては，新しい名詞の導入に着目しながら対象構成について検討する。勿論その際，教科書中に現れるすべての名詞を詳細に追っていくということは行わず，確率概念の形成にとって重要であるものを適宜選択することにする。幸い教科書中では重要語句が書体を変えて表記されているから，それを指標として分析を行えばよい。

3.2　高等学校数学教科書における確率単元の対象構成

『高等学校 数学 A』(岡部・他, 2012)の確率単元の「５ 確率と事象」は，さらに三つのパート（5-A，5-B，5-C）に分割されている。確率単元における最初の対象構成は，「5-A 試行と事象」の「試行」の構成から始まる。この対象の能記「試行」はその実体である「同じ条件のもとで繰り返すことができる実験や観察」を，タイムレスな表現つまり動詞を抜いた表現に置き換えたものであるため，この対象構成は記号具象化として同定される。次に，この試行という対象を用いて「事象」が定義される。より具体的には「試行の結果として起こる事柄」を，動詞を用いない完全な名詞表現に置き換えたものとして事象が導入される。したがって，この対象構成は記号具象化である。最後に，「根元事象」

と「全事象」を構成して 5-A は幕を閉じる。全事象の実体は，「事象」，「サイコロの目に関する標本空間の図」（図 4-14 右の 5 を参照されたい），「*U* 自身で表される事象」である。したがって，全事象の対象構成は「*U* 自身で表される事象」の時間を抜く作業を経ているので，記号具象化と同定できる。同様の手順で「根元事象」も構成される。

「5-B 同様に確からしいときの確率」は，「同様に確からしい」の構成から始まる。対象「同様に確からしい」は〈「同様に確からしい」，「ある試行において，どの根元事象が起こることも同程度に期待できる」〉と定式化できる。したがって，実体の表記から能記の表記への変換においては，動詞の減少がみられるので，この対象構成は記号具象化として特徴づけることができる。5-B のキャップストーンは「確率／$P(A)$」である。この対象の実体は，「同様に確からしい」，「起こりうる場合の数を N とする」，「事象 A が起こる場合の数を a とする」，「a/N」の四つが指摘され得る[4]。確率／$P(A)$の構成は，「起こりうる場合の数を N とする」，「事象 A が起こる場合の数を a とする」から動詞を抜くプロセスを経ているので，記号具象化ということができる。以上の議論は図 4-14 のようにまとめられる。なお，「5-C いろいろな事象の確率」は練習問題の節であるため，本節の考察対象にはならないし，実際に重要な対象構成も確認されなかった。

上述の分析により，高等学校確率単元の導入部には，五段階の対象の抽象度の上昇が含まれていることが明らかになった。この対象構成プロセスをみれば

[4] 教科書中では「起こりうる場合の数を N，事象 A が起こる場合の数を a とする」とあり，「起こりうる場合の数を N とする」という表現はないが，簡潔のためにこのように表記した。

わかるように，高校数学における確率は数学的確率として規定されている。一方，小数の法則の克服に関わる圧倒規則は，統計的確率のディスコースで基本的に必要となるメタ規則である。したがって教科書の対象構成上，高等学校の確率単元において圧倒規則は不要なメタ規則である。必要になるとしても，せいぜい確率実験との関連が暗示される記号具象化の二段階目までであろうが，その後の三回の記号具象化を経て，その必要性は大幅に減少する。その意味で，高校数学における確率学習の結果として小数の法則が生じるのは，必然的であるといえる。

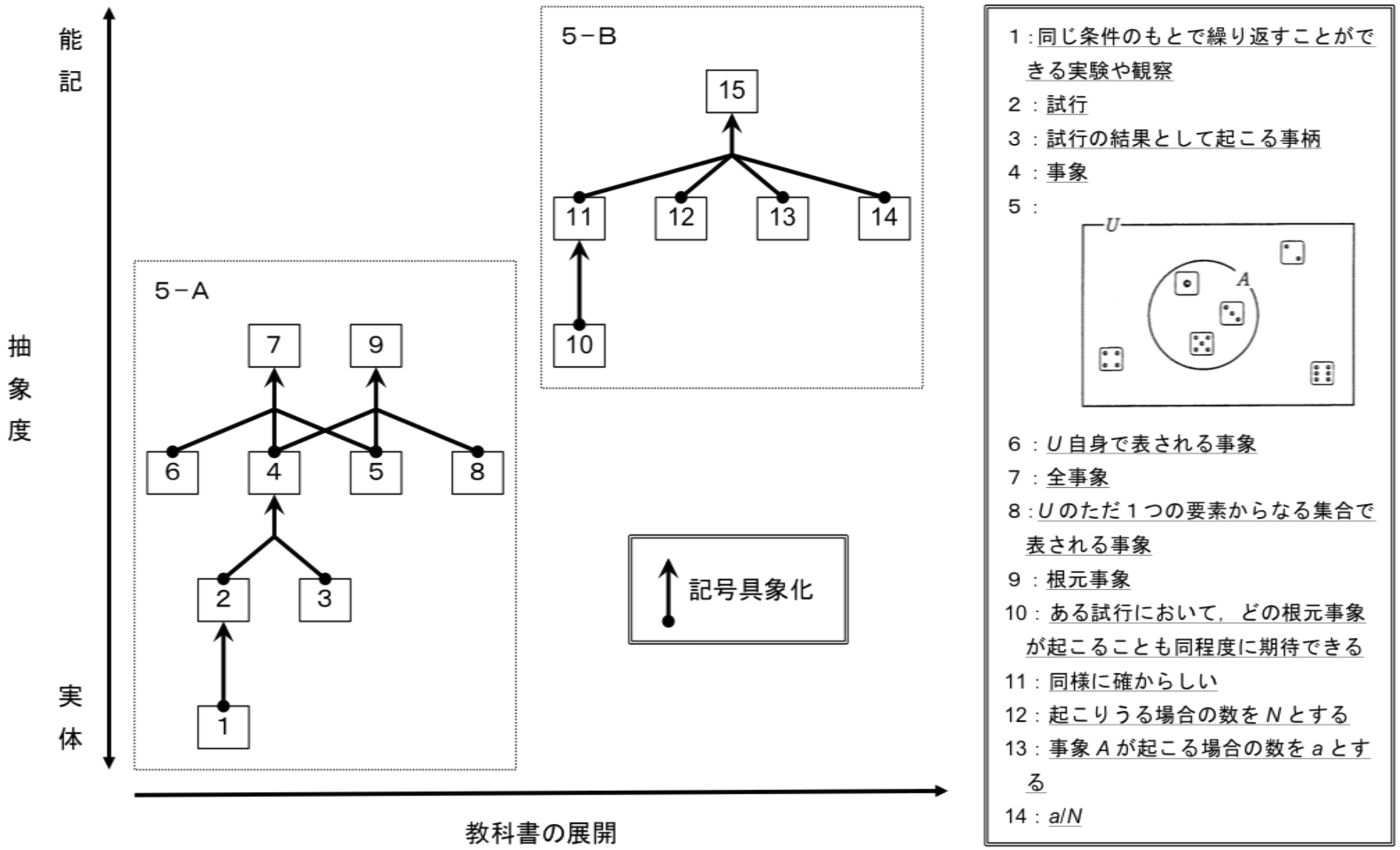


図 4-14. 構成の木：高等学校教科書の確率単元

4. 中等教育における確率単元の対象構成の構造

第 1 章 2 節が明らかにしたことの一つは，小数の法則の克服には認知具象化が必要であり，これは困難な企てであるということである。それを受けて本章では，「具象化」という言葉の共通性を頼りに，教科書表記にみられる対象構成を同定してきた。確率単元における対象構成プロセスの内実が記号具象化の連続であるということが明らかになった今，認知具象化と記号具象化の関係性を明らかにする段階にきたと考える。第 4 節はこの課題に取り組むものであり，この課題の解決は，中等教育を総合する視座から教科書確率単元に内在する小数の法則の要因を指摘することを可能にする。

4.1 認知具象化と記号具象化の関係

O =〈S, R〉という対象規定は，西洋哲学に起こった言語論的転回が，スファードの研究に大きな影響を与えていることを示している。というのは，認知具象化理論において，「対象」という言葉が構造的コンセプションや認知具象化を説明するために用いられる一方（詳しくは第 1 章 2 節を参照されたい），コモグニション論においてそれは能記と実体によって説明されるものになるからである。つまり「対象」が定義項から被定義項へと変化しているのである。そしてこれに伴って「具象化」の解釈も認知的なものから記号的なものへと移行することになる。

記号具象化を含む対象構成の定義は上述の通りであるが，新しい名詞が導入

されるという対象構成に共通の特徴は，もう一つの重要概念へと我々を誘う。それは第 2 章 1.2.3 節で言及した対象学習である。以下の考察に備えてその正確な定義を，対をなす概念であるメタ学習とともに記しておこう：

《・「対象学習」：語彙の増加，新しいルーチンの構成，承認される新しい物語の生産を通して達成される既存のディスコースの拡大を表す学習；したがってこの学習は，ディスコースの内因的拡大へと至る。

・「メタ学習」：ディスコースのメタ規則の変容と関連し，ディスコースにおける外因的変容とたいてい関係する学習；この変容は，言葉を定義したり図形を同定したりするといったような慣れ親しんだ作業が，よく知らない別の方法で新たに行われ，特定の既知の言葉がその使用法を変える，ということを意味する。》(Sfard, 2008, pp. 255-256; 下線は筆者加筆)

スファードは対象構成と学習の関係性については述べていないが，この対象学習の定義より，少なくとも「語彙の増加」という点で，対象構成は対象学習に関連する概念ということができよう。

なおこのメタ学習の定義より，認知具象化はコモグニション論においてはメタ学習に関わるものであるということがわかる。なぜならば，操作的コンセプションと構造的コンセプションは同じ概念の異なる見え方を意味し，前者から後者への移行の決定的段階として認知具象化を指摘できるからである（詳細は第 1 章 2.1 節を参照されたい）。

記号具象化を含む対象構成が対象学習を特徴づける用語である一方，認知具

象化がメタ学習を認知主義的に語るための概念であるという事実は，スファードの“reification”の使用法の劇的な変化を記している。言語論的転回を経て，「具象化」はメタ学習の問題ではなく対象学習のそれになったのである。しかしこのことは,「具象化」の重要度の減少を少しも意味しない。対象学習とメタ学習の重要性には優劣がつけられないからである。メタ学習を想定しない対象学習は空虚であり，また対象学習を前提しないメタ学習は空論である。

以上を踏まえると，とりわけメタ規則に注目して考察を行った第 3 章は，メタ学習の視点から小数の法則の要因へ迫ったものであるといえる。しかし，メタ学習が適切な対象学習の上に行われることは容易に想像できるから，小数の法則の要因を探究する上で，メタ学習的側面に注目するのは方法論的狭隘である。その意味で本章 1，2，3 節は，対象学習の視点から小数の法則の要因を探る試みと特徴づけることができる。

4.2　認知具象化のコモグニション論的定式化

第 4.1 節の考察より, 教科書確率単元が一連の記号具象化によって構造化されていることを示すだけでは，第 1 章で提起された問題へのコモグニション論的近接にとって不十分であることが指摘された。ではスファードが研究者人生の序盤を捧げた研究対象である認知具象化を，コモグニション論の範疇で定式化することはできないか。この企てが達成されれば，第 1 章で指摘された確率概念の形成過程に潜む困難性を教授学的に指摘することができる。

認知具象化は「同一表現を認識する仕方の操作から構造へのシフト」として

特徴づけられるが，これをコモグナイズする際には，以下の二点の特徴として分離して考えると都合がよい：

① 認知具象化は操作から構造への認識方法のシフトである。

② 認知具象化は同一表現の認識方法のシフトである。

①の特徴はコモグニション論において，認識方法も含んだコミュニケーション方法（コモグニション方法）のシフトとして記号具象化によって取り扱われる。また特徴②をいいかえると，既知の能記の実体に新たな要素を加えることであるから，この操作に該当する対象構成は同一化である。これより，認知具象化はコモグニション論において次のように定式化され得る。

認知具象化：記号具象化とそれに続く同一化

第 2 節と第 3 節では，中学校と高等学校の確率単元にみられる記号具象化が教科書を通して同定されてきた。以下では「中等教育における確率単元」というより広い視点からみることで，確率概念の形成過程における認知具象化をコモグニション論の語法で指摘してみたい。

4.3　確率単元の対象構成に関する総合的考察

中学校における確率概念の構成は，四段階の記号具象化によって特徴づけられる。この確率概念は，その実体として確率実験に関わる数々の表記をもっていることから，統計的確率と呼ばれるものである。また，五段階の記号具象化によって構成される高等学校の確率概念は，その実体として標本空間や「同様に確からしい」をもつため，数学的確率と呼ばれるものである。

以上より，中等教育全体という視座でみると，確率という能記に対して異なる一連の実体が記号具象化によって連結されている，ということができる。したがって，ここに数学的確率と統計的確率の同一化という対象構成を指摘することができ（図 4-15），認知具象化に関する考察（第 1 章）とそのコモグニション論的定式化から得られる示唆に従えば，確率概念の形成にとってここが決定的な局面である。ではこの場面は教科書上どのように演出されているのだろうか。

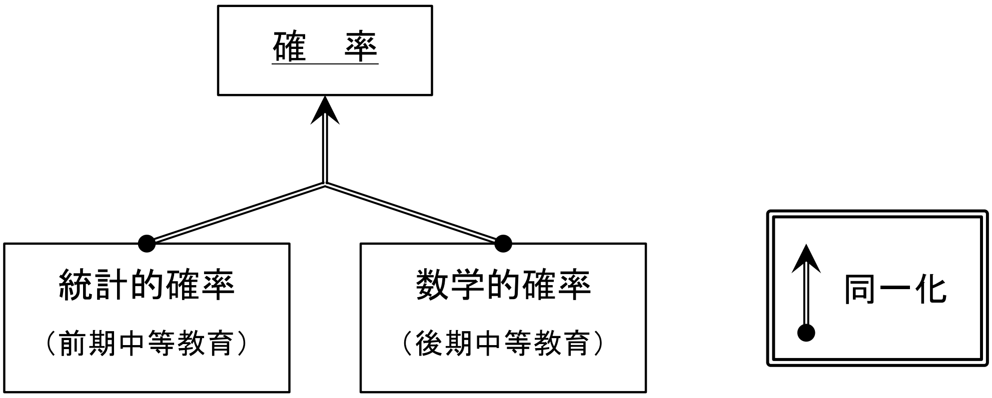


図 4-15. 構成の木：中等教育確率単元

この視点から，統計的確率の側から数学的確率に歩み寄る場面といえる『未来へひろがる数学２』の確率単元をみてみると，図 4-10 にみられる実験との一致によって統計的確率と数学的確率の同一化への配慮が確認された。一方，『高等学校 数学A』の中には，統計的確率と数学的確率の同一化に関わるような記述はみられない。これは確率概念の垂直的数学化(cf. Gravemeijer et al., 2000/2009, pp. 237-239; 大谷, 2002, pp. 56-61)を意図した上での構成であろうが，学力から能力へと関心を移しつつある今日の教育目標の動向を踏まえるとき，中等教育を

一貫する(杉野本・岩崎・他, 2011)確率指導として，統計的確率と数学的確率の共存に関する更なる考察が必要のように思われる。勿論，統計的確率と数学的確率をどちらも「確率」と呼ぶことによって同一化が図られているという解釈もできるが，こうした「潜在的同一化」が十分に機能し得ないことは，全国学力学習状況調査の結果から示唆されている(国立教育政策研究所，2012，pp. 283-286)。

第４章のまとめ

第 3 章は領域一般の視点から，数学学習の帰結として小数の法則が生じることを主張するものであったが，第 4 章は確率の領域固有性に注目し，確率学習の結果として小数の法則が生じることを，意図されたカリキュラムのレベルで示した。本章の結論は以下のようにまとめられる。

① 中学校教科書の確率単元は四段階の記号具象化構造として特徴づけられる。この対象構成プロセスをみれば明らかなように，中学校確率単元における確率は統計的確率である。圧倒規則は統計的確率に関わるものであるから，中学校確率単元，特に学習の初期段階において，圧倒規則は有効に機能している。しかし，圧倒規則が確率概念と明確に関連づけられるまでに三段階の記号具象化を経る必要があり，ここに小数の法則の克服の困難性の一端を垣間みることができるが，より重大なのは，中学校確率単元のゴールが「$p = a/n$」であり，「同様に確からしい」に基づく数値計算方法である，ということである。この最終段階の記号具象化は，数学的確率へ向かうものである。圧倒規則は基本的には統計的確率のディスコースのメタ規則であるため，この第四の記号具象化は，中学校の確率学習の最終局面で圧倒規則が不要になることを示唆している。その意味で，第 3 章の示した補正規則や一般化規則の有効性を踏まえれば，中学校の確率学習の結果として小数の法則が形成されるのは当然である。

② 高等学校教科書の確率単元は五段階の記号具象化構造として特徴づけられ

る。この対象構成プロセスをみれば明らかなように，高等学校確率単元における確率は数学的確率である。そのため，記号具象化を繰り返し，確率単元の対象の抽象度は上昇していく一方，その過程で圧倒規則の存在価値は減少していく。したがって，高等学校における確率学習の結果として小数の法則が生じるのは，第 3 章の示した補正規則や一般化規則の有効性を踏まえた上で，当然である。

③ 以上のように中等教育において，<u>確率</u>は統計的確率と数学的確率の二つを意味しているが，展開としては数学的確率へ向かう。数学としての確率論の習得を目標とするのであればこれでよいのかもしれないが，今日的な数学教育の目標が応用を強調する以上，統計的確率の重要性は無視できないものである。したがって，中等教育を一貫する視座から確率単元を眺めるとき，確率という言葉が統計的確率と数学的確率という二つの異なる意味をもつということを強調する必要があろうが，教科書の記述にそのような配慮はみられず，それらの同一化（認知具象化）は生徒に任されている。換言すれば，教科書内で展開されているディスコースの変容は対象学習的なものであり，メタ学習としてのディスコース変容ではない。一方，第 3 章が示したように，小数の法則の克服にはメタ学習が必要となる。これでは数学的確率が確率単元で優勢を占め，圧倒規則の居場所がなくなり，小数の法則が生じるのは当然である。

引用・参考文献：第４章

岩崎秀樹(1990).「図的表記の意味と指示」. 平林一榮先生頌寿記念出版会編『数学教育学のパースペクティブ』(pp. 108-126). 東京：聖文社.

岩崎秀樹(2007).『数学教育学の成立と展望』. 京都：ミネルヴァ書房.

大谷実(2002).『学校数学の一斉授業における数学的活動の社会的構成』. 東京：風間書房.

岡部恒治・他 17 名(2012).『高等学校 数学 A』. 東京：数研出版株式会社.

岡本和夫・小関熙純・森杉馨・佐々木武・他 39 名(2012b). 『未来へひろがる数学２』. 東京：啓林館.

国立教育政策研究所(2012).『平成 24 年度全国学力・学習状況調査【中学校】報告書』. http://www.nier.go.jp/index.html.

佐々木徹郎(2004).「数学教育における『意味の連鎖』に基づいた『学習軌道仮説』について」. 全国数学教育学会誌『数学教育学研究』, *10*, 13-19.

杉野本勇気・岩崎秀樹・大滝孝治・岩知道秀樹(2011). 「高校数学における論証指導：Sylvester の定理に向けた局所的組織化」. 日本数学教育学会誌『数学教育』, *93*(3), 13-16.

那須俊夫(1985).「同値関係について」.『広島大学教育学部紀要：第二部』, *33*, 87-96.

平林一栄(1970).「数学教育学の課題Ｉ：抽象の問題と, 現代的教材の早期導入可能性の問題」.『広島大学教育学部紀要：第一部』, *19*, 83-93.

ラカン, J. (1972). 宮本忠雄・竹内迪也・高橋徹・佐々木孝次［共訳］『エクリⅠ』. 東京：弘文堂. ［原著版：1966 年］

Gravemeijer, K., Cobb, P., Bowers, J., & Whitenack, J., (2000/2009). Symbolizing, Modeling, and Instructional Design. In P. Cobb, E. Yackel & K. McClain (eds.), *Communicating and symbolizing in mathematics: Perspectives on discourse, tools, and instructional design* (pp. 225 - 273). New Jersey, USA: Lawrence Erlbaum Associates

Gravemeijer, K. (2002). Preamble: From models to modeling. In K. Gravemeijer, R. Lehrer, B. van Oers, & L. Verschaffel (eds.), *Symbolizing, modeling and tool use in mathematics education* (pp. 7-22). Dordrecht, the Netherlands: Kluwer Academic Publishers.

Presmeg, N. (2006). Semiotics and the “connections” standard: Significance of semiotics for teachers of mathematics. *Educational Studies in Mathematics*, *61*(1-2), 163-182.

Sfard, A. (2008). *Thinking as communicating: Human development, the growth of discourses, and mathematizing*. Cambridge, UK: Cambridge University Press.

第 5 章
授業ディスコースに内在する小数の法則の要因：相補的視座から

本章では，第 3 章と第 4 章において教科書レベルで明らかにした小数の法則の要因が，いかに実際の授業に現れているかを確認したい。そのために，高等学校の確率の授業を分析する。

1. 対象授業と記録方法

分析対象となる授業と観察の方法は以下の通りである：

日時：2013 年 6 月 19 日（水），一限目

対象授業：確率単元第一時

クラス：国立大学附属高等学校第一学年

授業者：教諭 X

使用教科書：『数学 A』(坪井・他, 2012; ほぼ未使用)

観察形態：非参与型

記録方法：教室後方からの映像記録，写真記録，ノート記録（なるべく授業に影響を与えないため，机間移動などは一切行わない)

授業の詳細な情報は論文末の資料を参照されたい。なお本研究は教師の指導行動に関心があるので，授業の情報としては，教師の発言と板書を中心として

記載している。教師と生徒の発言には通し番号を付けているが，基本的には教師の発言に関心があるため，生徒の発言の場合，「(S_xの発言)」などのように表記する。したがって具体的な発言内容はすべて教師のものである。

2. 授業の分析と考察

2.1 補正規則の場合

授業中に取り扱われた問題は以下の二問である：

問題１：１つのさいころを投げるとき３の倍数の目が出る確率を求めよ。
問題２：２つのさいころを投げるとき目の和が４の倍数になる確率を求めよ。

問題１は授業冒頭で，次のような教師の発言を伴いながら，「2/6 = 1/3」という計算によって解決された：

5. それで、これずーっと前に出した問題、一番最初の授業で出した問題なんだけど。サイコロを一つ振る。３の倍数が目として出る。３の倍数の目が出る確率。
6. T：S_1（名字）くん、S_1（フルネーム）くん、一つのサイコロを投げるとき、３の倍数の目が出る確率はいくらになりますか？
7. （S_1の返答）
8. ３分の１。じゃあこの３分の１はどうやって出した？出しますか？
9. （S_1の返答）
10. ６つ目があって。６分の２が３分の１になる。

11. で、確率を求めなさいといわれたら、いい？確率を求めなさいといわれたら、もう既に中学校から習っている知識で、静かにしてね、いい？習ってる知識として、サイコロを投げたときに、何が起こり得るかっていうのを全部数え上げたら、１から６の目が出るっていうのがわかった。
12. この６ね。この６っていう数字は、１から６の目が出るというので６だ。
13. でこの２っていうのは、さっきいってくれたように、３の倍数が出る、３と６が出る、という目の出方をみると２個あるから２っていう数字になっている。
14. これを求めるのは中学校で何回もやってきているので、まあみんなすっと求められるよね。

この問題解決過程は，第 3 章の補正規則の分析手法に従えば，「=」を含んでおり，フレーズ型の式である 2/6 をセンテンス型の式として補正する作業を含んでいるため，補正規則が有効に働く問題であるといえる。さらにいえば，約分のプロセスは分子と分母のバランスを保つ作業を含んでいるため，ここでも補正規則が機能していると考えることができる。

問題２は，次のような教師の発言を伴いながら，「9/36 = 1/4」という計算によって解決された：

69. 何人か表を書いて考えてたりしてくれたんだけど、表で考えてみよう。
70. ええ、場合の数に入るときにさ、二つのサイコロやったんだけど、いい？場合の数に入るときに、二つのサイコロの問題は、あのときは表を書いたね。
71. S_2 くんがいってくれたみたいに、和を今からここに、二つの数の合計を書いていこう。そうすると、２、３、４、５、６、７。

72. ちがう。10。6か。

73. 確かにたし算の合計としては２から 12 までの数が出てきてる。

74. で、いい？この表つかって考えると。

75. 今からもう一個別の考え方をするよ。

76. いいですか。ちょっと聴いて。サイコロを２個振った結果、表のマス目は全部で 36 個ある。36 個あるね。

77. でその中で４の倍数が何個あるか数えると、何個あるかというと、９個。９個あるね。

78. でこれ約分すると、４分の１になります。

	1	2	3	4	5	6
1						
2						
3						
4						
5						
6						

補 正

	1	2	3	4	5	6
1	*2*	*3*	*4*	*5*	*6*	*7*
2	*3*	*4*	*5*	*6*	*7*	*8*
3	*4*	*5*	*6*	*7*	*8*	*9*
4	*5*	*6*	*7*	*8*	*9*	*10*
5	*6*	*7*	*8*	*9*	*10*	*11*
6	*7*	*8*	*9*	*10*	*11*	*12*

図 5-1. 補正規則：二つのサイコロの表

「9/36 = 1/4」という解決過程は，問題１と同様に右辺と左辺の補正と分子と分母の補正の作業を伴っており，補正規則が有効に機能する問題として特徴づけられる。また問題２はその解決過程において表が用いられているが，この表を完成させる行程においても補正規則が働いていると考えることもできる。つまり, 図 5-1 のように表は枠を与えられブランクが埋められていくわけであるが, この表を埋めていく作業は，空欄なしの表を完成型とみなして表を補正してい

くプロセスとして理解できる。

以上より，高等学校の確率単元の導入部において，小数の法則の要因となるメタ規則である補正規則が有効に機能していることが確認された。

2.2　記号具象化の場合

第 2.1 節では問題解決場面に注目して授業を分析してきたので，第 2.2 節では概念形成場面に着目して，高等学校確率授業に内在する小数の法則の要因について考察してみたい。授業展開自体は,「中学校の振り返り及び新しい用語の導入」と「問題２の問題解決」にわけられる。

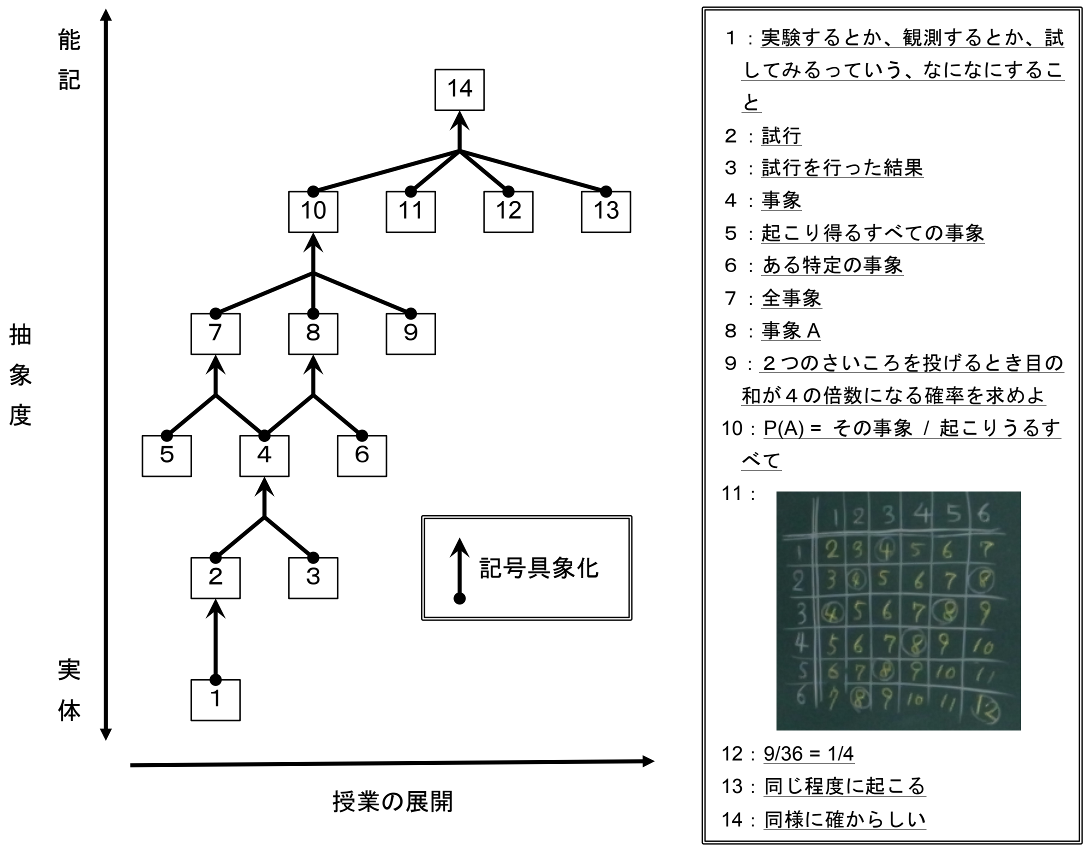


図 5-2. 構成の木：高等学校確率授業（第一時）

この授業を第4章と同様に構成の木として描いてみると, 図5-2のようになる。図4-14と比較して特徴的な点は,「同様に確からしい」が対象構成のゴールになっている点と「根元事象」を導入しない点などにあるが，小数の法則に注目する本研究の視点からいえば，教科書の展開と本授業の展開に大きな違いはない。つまり，教科書同様に，本時も基本的には数学的確率の概念形成を目指したものであり，統計的確率の出番はなく，したがって圧倒規則に存在価値は学べば学ぶほどなくなっていかざるを得ない。

第５章のまとめ

第 5 章では実際の授業において小数の法則の要因がいかに現れているかを確認するために，高等学校確率単元の授業分析を行った。結果として，小数の法則の発生要因となるメタ規則である補正規則が観察授業内でも有効に機能していることが明らかになった。また，確率学習において文脈によっては補正規則に取って代わる必要があり，小数の法則の克服のために必要となるメタ規則である圧倒規則は，数学的確率に関わる度重なる記号具象化を経て，高等学校の確率単元の授業において，ほとんど必要のないものになっていることも明らかにされた。第 3 章と第 4 章は意図されたカリキュラムのレベルで小数の法則の発生の必然性を明らかにしたが，本章の示す結果は，それが実施されたカリキュラムのレベルでも主張できることを意味している。

引用・参考文献：第５章

坪井俊・他 13 名(2012).『数学 A』. 東京：数研出版.

終章：本研究の成果と今後に残された課題

先行する確率研究の状況を地理のメタファーを用いてまとめれば，ミスコンセプションに関する開拓の進んでいる島と，未開の土地の多く残された確率指導に関する島があり，両者を結ぶ橋は未だかけられていない，といったところであろう。本研究の目的はこの橋の建設であり，確率の心理学の問題を確率の教授学の問題として捉え直すことであった。以下では各章の内容を振り返ることで，本研究全体の成果を示すとともに，残された課題に関する小論を展開する。

1. 本研究の成果

本研究の目的は「小数の法則の教授学的要因を明らかにする」ことであった。本節では，本研究がこの目的に対していかに取り組んできたかを概観する。

1.1 第 1 章 確率概念の形成におけるミスコンセプションの記号論的モデル化

ミスコンセプションという心理学的現象について，教科書や授業という教授学的な対象と明確に関係づけて議論するためには，それなりの工夫が必要である。少なくとも心理学の側から教授学へと接近する方向性と，教授学から心理学へと近接する方向性の二つは必要となると考える。第 1 章は前者の作業に取

り組むものであり，記号論の視点からミスコンセプションやその克服プロセスをモデル化するという手法をもって，心理学の側から教授学への通路を確保した。

第 1 節は小数の法則のモデル化をねらいとする節であった。第 1.1 節では小数の法則のモデル化のための理論的基盤であるシュタインブリングの認識論的三角形と溝口の C(C,N,E)モデルについて概観し，それらに対する批判的考察を行った。批判の内容を要約すれば，両モデルともにミスコンセプションの記述を意図しているわけではないため，本研究の観点からみればモデルの構成要素に課題がある，ということである。この課題は両モデルを総合することによって解消でき，それに取り組んだのが第 1.2 節である。ここで，小数の法則のモデル化の基盤となる「コンセプションの静態の四面体モデル」が構築された。このモデルは認識論的三角形を準拠枠にしながら，そこに C(C,N,E)モデルの「確信」という発想を加えたものである。確信を考慮することによって，「内知識の脆さ」や「ミスコンセプションの弾性」といった，現象は認められつつも原因を説明されてこなかった事実を解釈することが可能になった。勿論，コンセプションの静態の四面体モデルは小数の法則をモデル化することも可能であり，それは「〈対象〉：小標本」，「〈記号〉：確率」，「〈概念〉：大数の法則」，「〈確信〉：決定論」として記号論的な枠組みのもとに記述される。対象と記号の間接的連携という記号論的な形式は，ミスコンセプションを記述する際にも有効であることがこの節より明らかになった。この考えは第 3 章においてディスコースの視点からさらに発展させられることになる。

第 2 節は小数の法則の克服過程のモデル化を目指したものである。その際の基本的な方針は，コンセプションの静態の四面体モデルを並べていく，というものであるが，問題はその並べ方である。この点については，記号の分析から数学的認識の展開の様相を明らかにしようとする，スファードの 20 世紀末の理論である認知具象化理論に注目した。具体的にはまず，第 2.1 節では認知具象化理論や真野によるその概念変容論的解釈を要約し，認知具象化がコンセプションの質に決定的な変化をもたらす認知過程であることが明らかになった。次に第 2.2 節では，認知具象化理論の記述性をコンセプションの静態の四面体モデルによって強化し，最後に第 2.3 節において，確率史を手掛かりに，確率概念の形成過程をモデル化した。小数の法則の克服には決定論から非決定論への〈確信〉の転換が鍵になり，このプロセスは認知具象化として特徴づけられる。認知具象化の困難性はミスコンセプションの心理学的要因の一つであるから，この点もミスコンセプション研究の教授学的展開を考える上での検討課題となる。

1.2　第 2 章 コンセプション研究のディスコース論的展開

第 1 章では心理学の側から教授学へと迫ったが，第 2 章はその逆の取り組みということができる。第 1 章でも言及したスファードは数学的認識に関する心理学的な研究で著名であるが，近年では新たに言語学・記号学的な視座から，数学的認識の展開を新たに捉え直す試みを行っている。コモグニション論と呼ばれるその新理論は，個人の認知，個人間のコミュニケーション，教科書の表記（そして情意まで）を同じ現象の異なる現れとみなすものであるため，教科

書や授業を明確にミスコンセプションと関連づけることを目的とする本研究の強力な理論的基盤となる。

第 1 節ではコモグニション論を概観した。特に第 1.1 節ではコモグニション論の研究方法観について，分析単位であるディスコースに注目して要約した。コモグニション論において，ディスコースとはコミュニケーションの型のことであり，この型を使ってコミュニケーションを分析していくことがコモグニション研究の主な作業となる。この場合のコミュニケーションの捉え方は独特のものであり，ここに本理論がコモグニション論と呼ばれる所以がある。コモグニション論は，認知も表記も対話もすべてコミュニケーションの生じている場所が異なるだけの同一現象であると捉え，このことを強調するためにコミュニケーションをあえてコモグニションといいかえる。この点に関しては第 1.2 節において，コモグニション論の数学観や学習観とともに概説した。コモグニション論において，数学とは一つのディスコースであり，学習とはディスコースの変容として捉えられる。この学習の定義にみられるように，スファードの新理論は，心理学的な用語を排除したり操作的に再規定したりする点にも特徴がある。

第 2 節ではコモグニション論を用いる利点について四つの観点から考察した。第 2.1 節では他のディスコース論との比較を通してコモグニション論の価値を明らかにした。ディスコース研究は流行の兆しをみせているが，新興勢力であるが故に共通基盤が見出されていなかったり，様々な暗黙の前提が無反省のまま放置されたりしている状況である。コモグニション論は研究用語や研究方法や研究哲学を明確に提示するものであるため，研究の相互理解や研究成果の蓄

積という面だけでみても，他のディスコース研究よりも優れている。第 2.2 節ではコモグニション論の表記論的可能性について述べた。上述のようにコモグニション論はそもそも表記をもディスコースと捉える研究枠組みであるが，実際にこの点を有効に活用した研究は僅かである。表記への着想は，我が国の先行する数学教育研究が研究の方向性に関して導き出した一つの答えであろうから，この課題意識にコモグニション論を載せることで，我が国独自のコモグニション研究が展開できるかもしれない。第 2.3 節ではヴィットマンの主張する数学教育学の核心とコモグニション論の関係性について考察した。コモグニション論はそもそも人間の活動すべてを分析の射程に収めるものであるから，一見すると数学教育学の核心とはほど遠いものにみえるかもしれない。しかし，ヴィットマンは数学教育学の固有性を強調することのみで核心を提示したわけではなく，関連諸学との関係をもって初めて自律できるという，ある種の矛盾を孕むような状態を常態とする学問として数学教育学を描いており，この点に注目するとき，コモグニション論の数学教育学的価値が浮かび上がってくる。コモグニション論は言語学や記号学と密接に結びついており，数学教育研究が関連諸学と適切に連関することを可能にする理論である。第 2.4 節では研究倫理という視点からコモグニション論を使用する利点を明らかにした。研究倫理は自身の研究への徹底した反省をベースにするだろうが，その反省のための枠組みは必ずしも明確ではない。コモグニション論は上述のようにすべての人間活動を分析対象にするから，数学教育研究も分析の対象とできる。つまり研究者の自己点検の道具としてもコモグニション論は使用可能であり，この点はコモグニシ

ョン論の意義の一つといえるのではないか。

1.3　第 3 章 教科書ディスコースに内在する小数の法則の領域普遍的要因：ディスコースの規則の視座から

先行研究が示したいくつかのミスコンセプションに共通する興味深い特徴は，学年の進行によって誤答率が上昇するということであり(e.g., 長谷川・岩田, 1996)，小数の法則はそのような傾向をもつミスコンセプションの一つである(cf. 松浦, 2009)。この原因を究明することは本研究の目的のパラフレーズといってよく，本章以下に続く章はこの課題に具体的に取り組むパートである。

コモグニション論の視点に立てば，ミスコンセプションもコミュニケーションの一形態ということになるのだから，コモグニション論の概念をもって適切に定式化されれば，ミスコンセプションは単なる認知現象ではなく，個人間コミュニケーションにも教科書表記にもみられるコモグニション現象として同定され得る。第 1 章 1 節と第 2 章の基礎的な考察を受けて，第 1.1 節では，コンセプションの静態の四面体モデルをディスコースのコモグニション論的三角形として改訂し，認知のモデルをコモグニションのモデルとして拡張した。結果として，コンセプションの静態の四面体モデルの四項目によってモデル化されていたミスコンセプションを，ディスコースとしてより操作的に記述しようとする際には，二つのディスコース間の葛藤としてそれを表現するために，六項目を要することになった。この六項目を示したのが，第 1.1 節において構築されたコモグニション葛藤の二重三角形であり, 第 1.2 節ではこれを用いて小数の法則

が新たにモデル化された。このモデル化において特に注目すべきものは，小数の法則の要因となるメタ規則である「補正規則」と「一般化規則」である。これらは第 1 章において「〈確信〉：決定論」として語られていたものであり，コモグニション論の力によってより明確なものとなっている。

第 2 節では特に補正規則に焦点をあて，中学校数学教科書内におけるその優勢を，「＝」に着目した量的分析によって示した。メタ規則はその特性上，明示的に教科書の表記やコミュニケーション上の表現として現れづらいため，その同定作業においては研究者の解釈が入らざるを得ない。コモグニション論は研究用語の操作的定義を重んじるから，一見すると「解釈」には否定的なようにみえるかもしれないが，そうではない。それではコモグニション主義の批判する行動主義に逆戻りである。むしろ，個別具体の文脈に依存した研究者の解釈の価値を積極的に認めている(cf. Sfard, 2008, pp. 278-280; Heyd-Metzuyanim & Sfard, 2012, p. 133)。コモグニション論が用語の定義にこだわるのは，様々な解釈を共有し，それらについて議論し，研究を発展させるための共通言語を準備するためなのである。

第 3 節では数学教育随一の難教材である論証との比較を通して，小数の法則の要因に迫った。論証学習と確率学習に共通する困難性は，考察の対象と考察の方法のある種のギャップに起因する。確率という学習対象は抽象的であるためそれについて考えるための方法は経験的というよりも論理的になるのが普通である。そのため圧倒規則よりも補正規則や一般規則といったメタ規則が確率的場面でも学習者に受け入れ易くなっていると考えられる。

1.4　第 4 章 教科書ディスコースに内在する小数の法則の領域固有的要因：概念形成の視座から

第 3 章は数学学習全般の結果として小数の法則が生じることを示しており，小数の法則の領域普遍的な要因に関する考察であった。このように前章を特徴づけるとき，第 4 章は領域固有性の視点から小数の法則の要因を明らかにするものである，ということができる。領域固有性の一端はその領域の対象の特徴に現れるだろうから，本研究ではコモグニション論における対象構成を枠組みとして，中学校と高等学校の教科書における確率単元を分析した。対象構成には記号具象化が含まれていることに端的に現れているように，対象構成法に着目することは第 1 章 2 節が問題にした認知具象化を教授学的に探究することに繋がる。

中学校確率単元の分析（第 2 節）が明らかにしたことは，教科書確率単元が四段階の記号具象化のプロセスによって構造化されており，最初の三段階は圧倒規則に関わる統計的確率を構成するものである一方，第四の記号具象化は圧倒規則を必要としない数学的確率へ向かうものである，ということである。これは圧倒規則の個体化(individualization)が困難であるにも関わらず，中学校確率学習の最終段階で結局それが不要になることを意味している。また高等学校確率単元の分析（第 3 節）が明らかにしたことは，教科書確率単元が五段階の記号具象化のプロセスによって構造化されており，このプロセスはすべて数学的確率に関わるものである，ということである。これは高等学校確率単元において，圧倒規則が不要になることを意味している。以上より，学校数学における

数学的確率の優勢が明らかになるが，確率の応用を考えるとき，統計的確率の考え方はなくてはならない。したがって，数学的確率としての確率概念の形成を意図するにせよ，「確率」という言葉をもって数学的確率と統計的確率の両者を意味していることを適切に強調しなければ，圧倒規則の存在価値は減ることはあっても増すことはない。しかし現行の教科書において，そのような配慮は僅かである（第 4 節)。

1.5　第 5 章 授業ディスコースに内在する小数の法則の要因：相補的視座から

第 3 章と第 4 章では，意図されたカリキュラムにおける小数の法則の要因を実証的に示したが，その要因が実施されたカリキュラムのレベルで現れるとは必ずしもいえない。そこで第 5 章では，高等学校の確率単元の授業（第一時）を対象に，第 3 章の示した補正規則の優勢や第 4 章の示した圧倒規則の劣勢を確認した。教科書と同様の事態は授業内でも生じており，成功的な学習の結果として小数の法則という事態は，実施されたカリキュラムにおいても生じているということが明らかになった。

2.　本研究の意義

本節では本研究の意義について，「基礎研究」と「開発研究」の視点から明らかにする。

2.1　基礎研究的意義

本研究はヴィットマンの「デザイン科学としての数学教育学」を学的基盤として論を起こしている。したがって，本研究の意義を主張するためには，そこに立ち返る必要がある。ヴィットマンの生命論的パラダイムを根底にもつデザイン科学としての数学教育学においては，「本質的学習場 *substantial learning environment*」を中心とした理論と実践の往還が強調される(cf. Wittmann, 2001; 岩崎, 2007)。この「生命論的プロセス *systemic process*」(Wittmann, 2001)における本研究の機能を明らかにすることは，本研究の意義を示すとこに繋がると考える。

序章 1.3 節で述べたように，ミスコンセプション研究は，学習者の実態調査を通して多くの体系的な誤りの存在を明らかにし（第一期），様々な認知理論との関連のもとでミスコンセプションを探究し（第二期），構成主義へと展開した（第三期）。この展開は図 6-1 に従えば，「実践知から研究へ」の矢印が第一期，「研究から学問知へ」の矢印が第二期，「学問知から研究へ」の矢印が第三期におおよそ対応するように思われる。しかしそこでのミスコンセプションはまさに心理学的対象であったから，数学教育研究の生命論的プロセスの中心に位置づく本質的学習場という教授学的対象との関連は暗黙的なままであった。換言すれば，これまでのミスコンセプション研究は「『本質的学習場を巡る』理論と実践」であったとは必ずしもいえないのではないか。

本研究は，実践知としての学習者の誤りをディスコースの視点から明示的に教授学的研究の文脈にのせ，それをコモグニション葛藤として学問知に変換し，

実証的な手法でその要因を示した。したがって，ミスコンセプション研究を「本質的学習場を巡る理論と実践」のプロセスに位置づけ，そのプロセスの一端を担ったという点で，本研究には価値がある（図 6-1）。

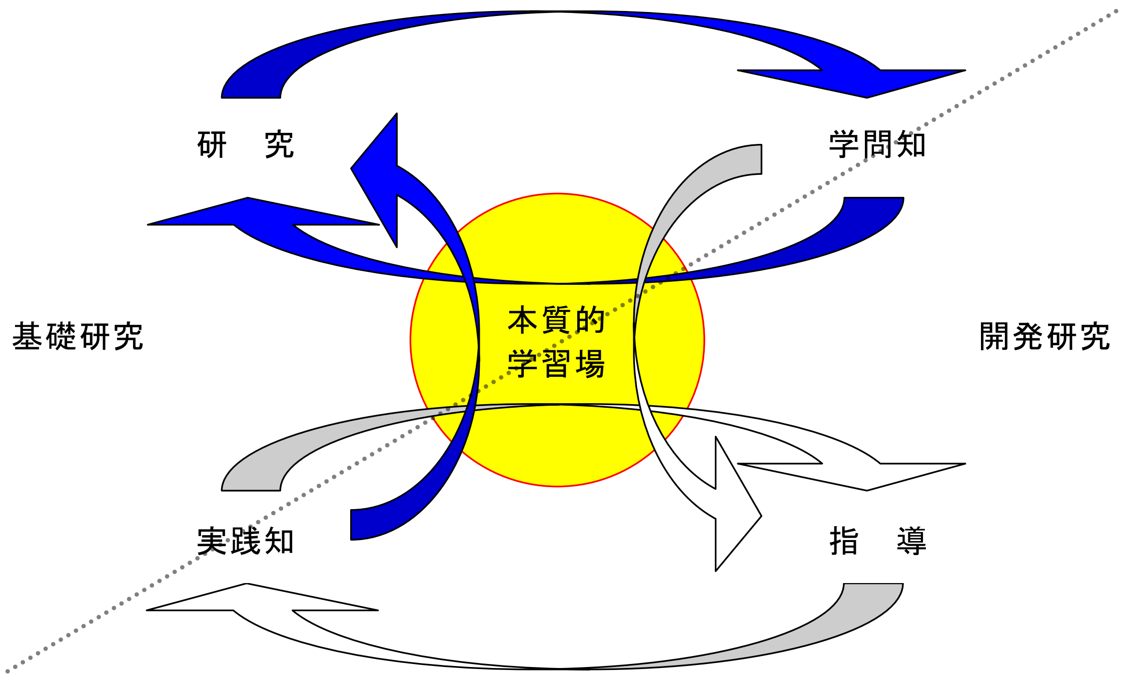


図 6-1. 「本質的学習場を巡る理論と実践[1]」における本研究の位置

（Wittamann (2001, p. 5)をもとに筆者が作成）

2.2　開発研究的意義

カリキュラムや授業の開発を反省する場合，一つの有効な手段は設計原理を

[1] Wittmann (2001)はこの図に名前を与えていないが，複数の研究者が命名を試みている：「研究，指導，学問知，実践知と本質的学習場」(湊［訳］：ビットマン, 2000, p. 32),「本質的学習場を巡る理論と実践」(岩崎・中野, 2006, p. 13; 岩崎, 2007, 36),「知識の創造, 使用, 交換のプロセスの中心にある本質的学習場」(Ruthven & Goodchild, 2008, p. 577)。本研究は岩崎の名称を採用するが，それはこの名称が「本質的学習場」ではなく，「理論と実践に往還」に焦点を当てたものであり，Wittmann (2001)の論点はまさにそこにあったと考えるからである。

再検討することであろう。今日，教科書や授業において確率単元は展開されているわけであるが，その開発原理は何であろうか。数学の特質を考えれば，教科書や授業の設計原理の一つは「決定論」であろう。一方，確率・統計の背景にある思想は「非決定論」である。本研究は，従来の開発原理をもとに確率単元をデザインしたとき，小数の法則が必然的に生じてしまうことを主張したものであるから，カリキュラム開発や授業開発に反省を促すという点で，本研究には開発研究的な意義がある。

しかしこれは，確率・統計領域を独自教科として確立すべきであるということを意味しない。確率・統計領域は偶然性を必然性によって捉えようとする努力の賜物であるから，確定的事象と確率的事象が相互に関連づけられながら学ばれなければ，確率・統計領域の存在理由は了解され得ないと考える。内容の存在理由の了解はその内容の本質的理解に繋がり，本質的理解はその内容が思考力や判断力や表現力として発現されるための必要条件であると考えられるから，数学科の内容領域としての確率・統計の在り方について，教科それ自体の設計原理のレベルから，今後の開発研究が展開されなければならない。

3. 残された課題：否定の問題

本論文の第 1 章 2 節は確率概念の形成過程の難所の一つとして認知具象化を指摘したが，決定論から非決定論へという確率概念の形成の本質に関わる転換

に注目するとき，認識における「否定」という研究対象が新たに現れてくる。本節ではこの「否定」について，「応用条件のメタ規則」という視点から迫ってみることで，今後の課題に方向性を与えたい。無論，本研究の実践的展開の面で残された課題は数多いが，指導理論の開発へ着手するためには，確率単元の構造や学習指導の困難性に関する情報がまだ不足していると考える。

3.1　否定分析の視点

ルーチンは「応用条件 *applicability condition*」，「行為方針 *course of action*」，「終了条件 *closing condition*」の三つに分類される(Sfard, 2008, pp. 209-216)。行為方針は「ルーチンの方法 *how of routine*」，応用条件と終了条件は「ルーチンの条件 *when of routine*」ともいわれる。行為方針は，コミュニケーション（問題解決や思考も含む）が行われる方法に関するメタ規則群である。応用条件は，当該の行為方針を選択するためのメタ規則群である。終了条件は当該の行為方針の完了を判断するためのメタ規則群である。「たし算」を例とすれば，例えば「＋の記号をもつ式の計算にはたし算の行為方針を使う」は応用条件のメタ規則である。また算数の文脈において，結合法則・交換法則は行為方針のメタ規則である。さらに，「右辺から＋がなくなったら行為方針をやめる」は終了条件のメタ規則である。Sfard (2008)は，数学教育研究におけるルーチンの条件の無視を指摘し，コモグニション研究の中心の課題の一つとしてルーチンの条件の探究をあげている。

3.2　小学校割合単元から中学校確率単元への移行におけるメタ規則に関する否定

数学学習の困難性の一端は否定という知的操作にある(岩崎, 1992, p. 14)。この知見を手掛かりに，本小節では中学校確率単元において，具体的にどのような否定が確率概念の形成を阻害しているのかを検討してみたい。

確率学習の困難性の一端は数学一般で有効な考え方が確率単元において負に作用するということにある，ということを第 3 章は明らかにした。これをルーチンの視点から解釈すれば，先行する数学学習で有効な行為方針が，確率学習では障害になるということである。したがって，確率概念が導入される中学校確率単元においては，確率固有の行為方針に習熟させることだけでなく，確率学習に先行する数学学習の応用条件を否定することが重要になる。以下では，小学校割合単元と中学校確率単元の比較のもとで，教科書において暗黙に否定されている三つの応用条件をあげる。

まず確率単元において否定される割合単元の行為方針の応用条件として，問題状況に関するものがあげられる。割合単元の問題には確定的な状況が用いられるが，確率単元の問題は確率的な状況についてのものとなる。したがって，小学校割合単元から中学校確率単元への移行においては，「確定的な問題状況」ではない，という応用条件に関する否定が生じている。

次に，割合単元の行為方針の応用条件に関して，分数や小数や百分率によって表記される数値に関する応用条件が，確率単元において否定されている。小学校割合単元では，数値の範囲は可能性として区間[0,∞)の有理数を取り得るが，中学校割合単元のそれは区間[0,1]の有理数である。実際には，明示的に『わく

わく算数５下』(清水・他, 2012)に表記されている割合の数値は最大 2, 最小 0.001, 0.1%, 1 厘である。また『未来へひろがる数学２』(岡本・他, 2012b)における確率の数値の最大は 1 であり最小は 0 である。

さらに，上述の数値の意味に関しても，確率単元で否定される割合単元の行為方針の応用条件が存在する。小学校割合単元における割合の数値の意味は「割合」であるが，中学校確率単元における確率の数値の意味は「量」であろう。この応用条件の否定は，『未来へひろがる数学２』(岡本・他, 2012b)では，相対度数を介して行われている。

以上のように，中学校確率単元の学習においては，少なくとも先行する小学校割合単元の学習の応用条件である「問題：確定的状況」,「数値：区間[0,∞)の有理数」,「数値の意味：割合」という三つの条件の否定が生じる。

3.3　確率に関する算数と数学の接続に伴う否定の構造

我々の現実に否定が存在しない以上, 素朴な認識は肯定的事態に基づく(cf. ピアジェ, 1986)。観点を変えれば概念化あるいは記号化を伴わない限り, 否定的事態は我々の認識に現れない。したがって初期的な数学的認識においても，肯定的事態は否定的事態に先行する。

数学はいわば「本質」への探求的活動であろう。しかし，数学における本質を辞書的意味にあるように，事態や概念の中心に位置し，したがってその内部にある, とイメージするのは妥当であろうか。岩崎(1992)の答えは「否」である。これは「本質」を翻訳し，“substance”にすることで了解されよう。この語を“sub”

と“stance”に分節すれば，中心というよりも，基盤という意味が現れてくる。数学における本質はむしろ事態や概念の傍らにあって，それらを支えるものと考える方が妥当であろう。以上のような主張から，岩崎(1992)は数学的概念 A とその否定¬A を図 6-2 のように配置し，Figure of Substance（以下，F.S.と略記する）と呼ぶ。

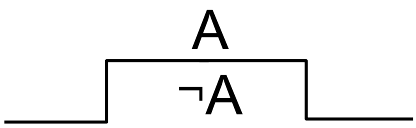


図 6-2. Figure of Substance (岩崎, 1992, p. 16)

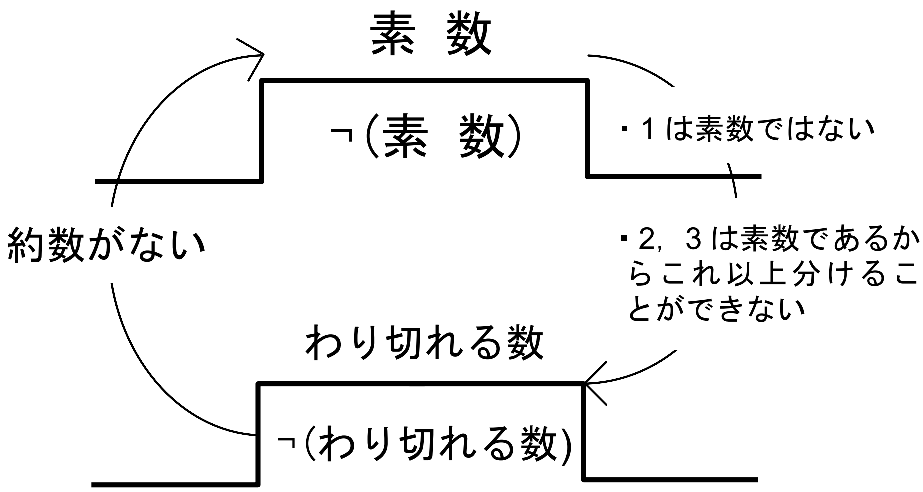


図 6-3. F.S.：素数(岩崎, 1992, p. 17)

この図に基づいて，素数に関する数学的認識の展開は次のように例示される。まず肯定的事態として「わり切れる数」があり，その否定的事態「¬(わり切れる数)」が substance としてある。そして「¬(わり切れる数)」を，「約数がない」という否定によって特徴づけることによって，素数概念は生まれる。また，こう

した象徴的更新が達成されると，今度は素数という観点から行われる否定によって，例えば，「1 は素数でない」，「2，3 は素数であるからこれ以上分けることができない」というように，「わり切れる数」と「¬(わり切れる数)」を統一的に扱うことが可能になる。そしてそこには数論を語る上で不可欠な「約数」や「倍数」や「公約数」や「公倍数」の概念が生起し，新たな水準の学習場面が創発される。以上の議論は図 6-3 のようにまとめられ，左の矢印は「上昇的否定」，右のそれは「下降的否定」と呼ばれる(岩崎, 1992, p. 17)。

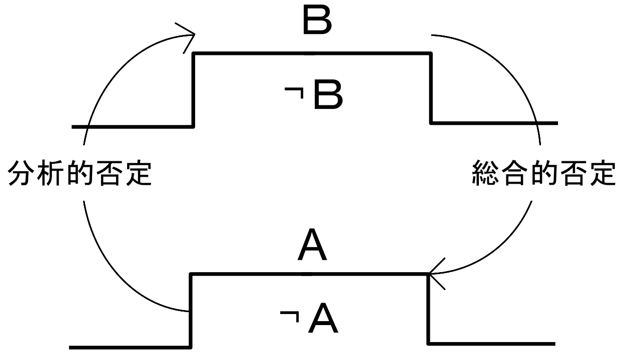


図 6-4. F.S.：概念形成一般

なお，岩崎の否定論における概念の「上・下」は，論理学的な上下関係ではなく，認識論的な上下関係である。つまり新しい概念への到達が「上昇」と表現され，その新しい概念を用いた認識の再組織化が「下降」と表現される。しかし，多少特殊な用法であるし，上下関係に関わる様々な誤解の種にもなりかねないので，本稿では上下に関わる用語の翻訳を試みてみたい（図 6-4）。プラトンにならって，上昇的否定は否定的事態を否定によって検討することを意味するので「分析的否定」，下降的否定は新概念を用いた否定によって旧概念を構造化することを意味するので「総合的否定」とそれぞれいいかえてもよいよう

に思う(cf. 岩崎, 1985)。また上昇（分析）と下降（総合）という二重の否定は，数学的認識の展開を特徴づけるメルクマールと考えてもよく，数理論理学的な二重否定と区別する意味で,「認識論的二重否定」と呼んでもよいかもしれない。

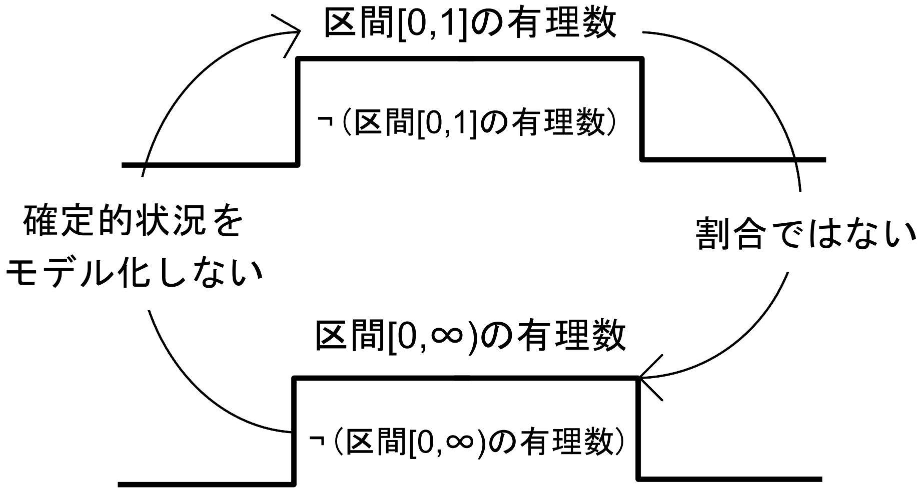


図 6-5. F.S.：確率概念

以上の議論を踏まえて,「問題 : 確定的状況」,「数値 : 区間[0,∞)の有理数」,「数値の意味 : 割合」という応用条件のメタ規則の否定を構造化すると，図 6-5 のようになる。まず確率単元の学習の条件となる概念として想定されているのは「区間[0,∞)の有理数」である。そしてその substance の内,「確定的状況をモデル化しないもの」が「区間[0,1]の有理数」として顕在化される。この際，コイン投げ試行の結果の相対度数やサイコロの目の数の割合として,「区間[0,1]の有理数」の数値が算出されるが，それらは蓋然性の程度を表す量であり,「割合ではない」ということが理解されなければ，確率概念の形成にはならない。既存のカリキュラムにおいては，確率概念の形成はおおむねここまでであるが，この後の展開としては，確率の有理量から無理量への拡張が一つ考えられる。人間の素朴

な認識は否定ではなく肯定であり(cf. ピアジェ, 1986)，メタ規則の特性の一つは，行為者には意識されづらいということであるから(Sfard, 2008, pp. 203-204)，こうした複雑な否定構造は，確率概念を形成し小数の法則を克服する作業を困難にしている要因の一つとして指摘できよう。

しかし，本研究が示したように，小数の法則へ影響を与えている単元は数学科全般に及ぶため，小学校の割合単元と中学校の確率単元の間の否定構造を明らかにするだけでは，確率概念の形成過程の本性や確率ミスコンセプションの要因を解明するための否定分析としては不十分といわざるを得ない。例えば，関数単元と確率単元の関連，中学校の確率単元と高等学校のそれとの関連，確率単元と統計単元との関連，確率の解析学的展開など，否定分析されるべき対象は少なくない。それらの分析作業は今後に残された課題である。

3.4 ミスコンセプションの更なる要因

本研究はミスコンセプションの教授学的要因を明らかにすることを目的としており，数学科の内容の中にその要因を求めてきた。上述の否定の議論も同様である。しかしこうした内容レベルの議論を越えて，学習の困難性をより広い社会的なものと関連づける理論も存在する。「教授の人間学理論 *anthropological theory of the didactic*」(cf. 宮川, 2011)と呼ばれるこの理論は，図 6-6 のような広い射程から学習に作用する制約について議論をする(cf. Barbé et al., 2005; Bosch & Gascón, 2006; Artigue & Winsløw, 2010)。

本研究が明らかにしてきたことは，決定レベルに沿っていえば「問い」レベ

ルから「教科」レベルまでの話であろう。したがって，今後に残された課題として，より上層の決定レベルの視点から小数の法則の要因や確率学習の困難性の要因に関する考察を行うことがあげられよう。実際，こうした議論はコモグニション研究においても行われている。例えば Kim, Ferrini-Mundy, & Sfard (2012)は, 韓国人大学生とイギリス人大学生の無限に関するディスコースの比較を行い，言語の相違が理解の仕方に差を与えていることを示している。言語は決定レベルでいえば「文明」や「社会」に位置づくものであろう。我が国が西洋数学を受容した際に(cf. 伊達, 2013)，様々な教授学的制約が日本語における確率論のディスコースに意図されず仕掛けられたと予想される。この制約を紐解く作業はコモグニション論的にも人間学理論的にも，興味深い課題である。

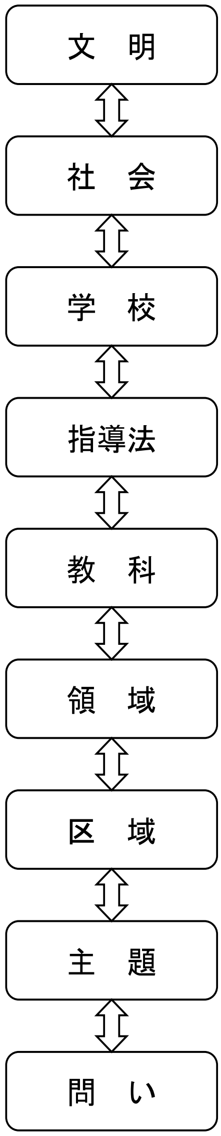


図 6-6. 決定レベルの段階
（Bosch & Gascón, 2006, p.

引用・参考文献：終章

岩崎秀樹(1985).「図形指導における数学的推論の課題（Ｉ）」.『山口大学教育学部研究論叢』, *34*(3), 97-108.

岩崎秀樹(1992).「数学学習における『否定』の研究（１）」. 日本数学教育学会『第 25 回数学教育論文発表会論文集』(pp. 13-18). 岡山：岡山大学.

岩崎秀樹(2007).『数学教育学の成立と展望』. 京都：ミネルヴァ書房.

岩崎秀樹・中野俊幸(2006).「学としての数学教育研究の展開」. 日本数学教育学会誌『数学教育学論究』, *85*, 3-21.

岡本和夫・小関熙純・森杉馨・佐々木武・他 39 名(2012b).『未来へひろがる数学２』. 東京：啓林館.

清水静海・船越俊介・他 49 名(2012).『わくわく算数５下』. 東京：啓林館.

伊達文治(2013).『日本数学教育の形成』. 広島：溪水社.

長谷川順一・岩田貴宏(1996).「等周長の正方形と平行四辺形に対する小学生の面積判断」. 日本数学教育学会誌『算数教育』, *78*(4), 60-65.

ピアジェ, J. (1986). 芳賀純・前原寛・星三和子・日下正一・堀正［訳］『矛盾の研究：子どもにおける矛盾の意識化と克服』. 兵庫：三和書房.［原著版：1974 年］

ビットマン, E. Ch. (2000). 湊三郎［訳］「算数・数学教育を生命論的過程として発展させる」, 日本数学教育学会誌『数学教育』, *82*(12), 30-42.

松浦武人(2009).「初等教育における児童の確率概念の発達を促す学習材の開発

研究：確率判断におけるヒューリスティックスの改善に焦点をあてて」. 日本数学教育学会誌『数学教育学論究』, *91*, 3-13.

宮川健(2011). 「フランスを起源とする数学教授学の『学』としての性格：わが国における『学』としての数学教育研究をめざして」. 日本数学教育学会誌『数学教育学論究』, *94*, 37-68.

Artigue, M. & Winsløw, C. (2010). International comparative studies on mathematics education: A viewpoint from the anthropological theory of didactics. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, *31*(1), 47-82.

Barbé, J., Bosch, M., Espinoza, L., & Gascón, J. (2005). Didactic restrictions on teachers practice: The case of limits of functions at Spanish high schools. *Educational Studies in Mathematics*, *59* (1-3), 235-268.

Bosch, M. & Gascón, J. (2006). Twenty-five years of the didactic transposition. *ICMI Bulletin*, *58*, 51-65.

Heyd-Metzuyanim, E. & Sfard, A. (2012). Identity struggles in the mathematics classroom: On learning mathematics as an interplay of mathematizing and identify. *International Journal of Educational Research*, *51-52*, 128-145.

Kim, D., Ferrini-Mundy, J, & Sfard, A. (2012). How does language impact the learning of mathematics? Comparison of English and Korean speaking university students' discourses on infinity. *International Journal of Educational Research*, *51-52*, 86-108.

Ruthven, K. & Goodchild, S. (2008). Linking researching with teaching: Towards synergy of scholarly and craft knowledge. In L. D. English (ed.), *Handbook of international research in mathematics education* (Second Edition, pp. 561-588). New York, USA: Lawrence Erlbaum Associates.

Sfard, A. (2008). *Thinking as communicating: Human development, the growth of discourses, and mathematizing*. Cambridge, UK: Cambridge University Press.

Wittmann, E. Ch. (2001). Developing mathematics education in a systemic process. *Educational Studies in Mathematics*, *48*(1), 1-20.

本論文の引用・参考文献

1. 引用・参考文献

阿部好貴(2010).『数学教育におけるリテラシーの育成に関する研究』. 未公刊博士学位論文, 広島大学.

池上明哉(1998).「レヴィナスにおける存在論から倫理への成り行き」. 慶応義塾大学『哲学』, *87*, 87-104.

石井英真(2010).「学力議論の現在：ポスト近代社会における学力の論じ方」. 松下佳代［編著］『〈新しい能力〉は教育を変えるか：学力・リテラシー・コンピテンシー』(pp. 141-178). 京都：ミネルヴァ書房.

伊藤清(1986).「確率論の発展：Laplace の確率の解析的理論によせて」. ラプラス, P. S.［著］／伊藤清・樋口順四郎［訳・解説］『確率の解析的理論』(pp. 419-442). 東京：共立出版.

岩崎秀樹(1985). 「図形指導における数学的推論の課題（Ⅰ）」. 『山口大学教育学部研究論叢』, *34*(3), 97-108.

岩崎秀樹(1990).「図的表記の意味と指示」. 平林一榮先生頌寿記念出版会編『数学教育学のパースペクティブ』(pp. 108-126). 東京：聖文社.

岩崎秀樹(1992).「数学学習における『否定』の研究（１）」. 日本数学教育学会『第 25 回数学教育論文発表会論文集』(pp. 13-18). 岡山：岡山大学.

岩崎秀樹(2003).「磯田論文(2002)『数学史上の関数と極限の数学化過程』の『眺望』をめぐって」. 日本数学教育学会『第36回数学教育論文発表会「課題別分科会」発表集録：今後の我が国の数学教育研究』(pp.180-182). 北海道：札幌コンベンションセンター.

岩崎秀樹(2007).『数学教育学の成立と展望』. 京都：ミネルヴァ書房.

岩崎秀樹・阿部好貴・山口武志(2008).「知識基盤社会における数学的リテラシーの課題と展望」. 日本科学教育学会誌『科学教育研究』, *32*(4), 366-377.

岩崎秀樹・大滝孝治・杉野本勇気・岩知道秀樹(2013).「数学教師を目指す教育学部初年次学生の論証認識に関する考察」. 日本科学教育学会誌『科学教育研究』, *37*(3), 226-234.

岩崎秀樹・大滝孝治・新居広平(2012).「数学教育における目的・目標論再考」. 日本数学教育学会誌『数学教育』, *94*(11), 26-29.

岩崎秀樹・中野俊幸(2006).「学としての数学教育研究の展開」. 日本数学教育学会誌『数学教育学論究』, *85*, 3-21.

岩崎秀樹・服部裕一郎(2010).「数学的リテラシーの提起する課題と展望：中等数学教育における一つの試み」. 日本数学教育学会『第43回数学教育論文発表会「課題別分科会」発表収録』(pp. 13-18). 宮崎：宮崎大学.

岩崎秀樹・山口武志(2000).「一般化の過程に関する認知論的・記号論的分析」. 日本数学教育学会誌『数学教育学論究』, *75*, 1-22.

岩崎浩(1998).「『メタ知識』を視点とした授業改善へのアプローチ：『指示の文脈』と『記号体系』との間の相互作用」. 全国数学教育学会誌『数学教育

学研究』，*4*，83-103.

ヴィゴツキー, L. S. (2001). 柴田義松［訳］『思考と言語』(新訳版). 東京：新読書社. ［原著版：1956 年］

ウィトゲンシュタイン, L. (1976). 藤本隆志［訳］『ウィトゲンシュタイン全集８：哲学探究』. 東京：大修館書店. ［原著版：1953 年］

魚津郁夫(2006).『プラグマティズムの思想』. 東京：筑摩書房.

内井惣七(1995).『科学哲学入門 : 科学の方法・科学の目的』. 京都 : 世界思想社.

大谷実(2002).『学校数学の一斉授業における数学的活動の社会的構成』. 東京：風間書房.

岡崎正和・岩崎秀樹(2003).「算数から数学への移行教材としての作図：経験的認識から論理的認識への転化を促す理論と実践」. 日本数学教育学会誌『数学教育学論究』，*80*，3-27.

岡部恒治・他 17 名(2012).『高等学校 数学 A』. 東京：数研出版株式会社.

岡部恭幸(2006).『確率概念の認識における水準とそれに基づくカリキュラムに関する研究』. 未公刊博士学位論文，神戸大学.

岡本和夫・小関熙純・森杉馨・佐々木武・他 39 名(2012a). 『未来へひろがる数学１』. 東京：啓林館.

岡本和夫・小関熙純・森杉馨・佐々木武・他 39 名(2012b). 『未来へひろがる数学２』. 東京：啓林館.

岡本和夫・小関熙純・森杉馨・佐々木武・他 39 名(2012c). 『未来へひろがる数学３』. 東京：啓林館.

オグデン, C.&リチャーズ, I. (1967/2001). 石橋幸太郎［訳］／外山滋比古［解説］『意味の意味』. 東京：新泉社. ［原著版：1923 年］

金本良通(2014).『数学的コミュニケーションを展開する授業構成原理』. 東京：教育出版.

鬼界彰夫(2003). 『ウィトゲンシュタインはこう考えた：哲学的思考の全軌跡 1912-1951』. 東京：講談社.

ギリース, D. (2004). 中村智香子［訳］『確率の哲学理論』. 東京：日本経済評論社. ［原著版：2000 年］

國宗進(2013).『数学教育における論証の理解と学習指導に関する研究』. 未公刊博士学位論文，広島大学.

国立教育政策研究所(2012).『平成 24 年度全国学力・学習状況調査【中学校】報告書』. http://www.nier.go.jp/index.html.

国立教育政策研究所(2013).『平成 25 年度全国学力・学習状況調査報告書中学校数学』. http://www.nier.go.jp/index.html.

国立教育研究所(1991). 『数学教育の国際比較：第２回国際数学教育調査最終報告』. 東京：第一法規.

小山正孝(2010).『算数教育における数学的理解の過程モデルの研究』. 東京：聖文新社.

コルモゴロフ, A. N., ジュルベンコ, I. G.&プロホロフ, A. V. (2003). 丸山哲郎・馬場良和［訳］『コルモゴロフの確率論入門』. 東京：森北出版株式会社. ［原著版：1995 年］

近藤洋逸・好並英司(1964).『論理学概論』. 東京：岩波書店.

佐々木徹郎(2004).「数学教育における『意味の連鎖』に基づいた『学習軌道仮説』について」. 全国数学教育学会誌『数学教育学研究』, *10*, 13-19.

柴田義松(2006).『ヴィゴツキー入門』. 東京：子どもの未来社.

清水静海・船越俊介・他 49 名(2012).『わくわく算数５下』. 東京：啓林館.

清水美憲(2007).『算数・数学教育における思考指導の方法』. 東京：東洋館出版社.

真野祐輔(2010).『算数・数学学習における概念変容に関する基礎的研究：「数」領域の展開を中心に』. 未公刊博士学位論文, 広島大学.

真野祐輔(2011).「変数性に関する概念変容場面のデザインに向けた基礎研究（Ｉ）:『式』のコンセプションの変容をどう捉えるべきか」. 全国数学教育学会誌『数学教育学研究』, *17*(2), 13-24.

真野祐輔(2013).「平方根の加法の学習における記号論的連鎖と具象化の分析：A. Sfard の数学的ディスコース論の視座から」. 日本数学教育学会誌『数学教育学論究：臨時増刊 第 46 回秋期研究大会特集号』, *95*, 193-200.

真野祐輔・溝口達也(2012).「数学教育学の『第一哲学』とは何か」.『新しい算数研究』, *493*, 28-29.

杉野本勇気・岩崎秀樹・大滝孝治・岩知道秀樹(2011).「高校数学における論証指導：Sylvester の定理に向けた局所的組織化」. 日本数学教育学会誌『数学教育』, *93*(3), 13-16.

関口靖広(2010).「研究方法論」. 日本数学教育学会［編］『数学教育学研究ハ

ンドブック』(pp. 9-15). 東京：東洋館出版社.

関口靖広(2013). 『教育研究のための質的研究法講座』. 京都：北大路書房.

ソシュール, F. (1972). 小林英夫［訳］『一般言語学講義』. 東京：岩波書店.［原著版：1949 年］

伊達文治(2013).『日本数学教育の形成』. 広島：溪水社.

坪井俊・他 13 名(2012).『数学 A』. 東京：数研出版.

戸田清(1960/1989). 「数学と表記」. 戸田清先生の米寿をお祝いする会［編］『米寿記念 戸田清先生論文集』(pp. 47-79). 広島：ニシキプリント.

ドゥアンヌ, S. (2010). 長谷川眞理子・小林哲生［訳］『数覚とは何か？心が数を創り，操る仕組み』. 東京：早川書房. ［原著版：1997 年］

永井均(1995). 『ウィトゲンシュタイン入門』. 東京：筑摩書房.

那須俊夫(1985).「同値関係について」.『広島大学教育学部紀要：第二部』, *33*, 87-96.

ハイデルベルガー, M. (1991).「フェヒナーの非決定論：自由から偶然の法則へ」, R. クリューガー・L. ダーストン・M. ハイデルベルガー［編］／近昭夫・木村和範・長屋政勝・伊藤陽一・杉森滉一［訳］『確率革命：社会認識と確率』(pp. 96-157). 東京：梓出版社.［原著版：1987 年］

バシュラール, G. (2012). 及川馥［訳］『科学的精神の形成：対象認識の精神分析のために』. 東京：平凡社.［原著版：1938 年］

長谷川順一・岩田貴宏(1996).「等周長の正方形と平行四辺形に対する小学生の面積判断」. 日本数学教育学会誌『算数教育』, *78*(4), 60-65.

馬場卓也(2003).「数学教育と社会の関係性の考察：民族数学と批判的数学教育の視点より」．全国数学教育学会誌『数学教育学研究』，*9*，15-23．

早田透(2013).「数学教育における一般化とその妥当性判断に関する考察」．全国数学教育学会誌『数学教育学研究』，*19*(1)，47-53．

ピアジェ, J. (1986)．芳賀純・前原寛・星三和子・日下正一・堀正［訳］『矛盾の研究：子どもにおける矛盾の意識化と克服』．兵庫：三和書房．［原著版：1974 年］

ピアジェ, J.＆ガルシア, R. (1996)．藤野邦夫・松原望［訳］『精神発生と科学史：知の形成と科学史の比較研究』．東京：新評論．［原著版：1983 年］

ビショップ, A. J. (2011)．湊三郎［訳］『数学的文化化：算数・数学教育を文化の立場から眺望する』．東京：教育出版．［原著版：1991 年］

ビットマン, E. Ch. (2000)．湊三郎［訳］「算数・数学教育を生命論的過程として発展させる」，日本数学教育学会誌『数学教育』，*82*(12)，30-42．

日野圭子(2011).「数学学習における記号論的視点の近年の動向と課題」．日本数学教育学会『第 44 回数学教育論文発表会論文集』，*1*，11-20．新潟：上越教育大学.

平林一栄(1970).「数学教育学の課題Ⅰ：抽象の問題と，現代的教材の早期導入可能性の問題」．『広島大学教育学部紀要：第一部』，*19*, 83-93.

平林一栄(1986).「数学教育の有効性のために」.『奈良教育大学紀要』, *35*(2), 1-17.

平林一榮(1987/2013).『数学教育の活動主義的展開』．東京：東洋館出版社.

平林一榮(2007).「数学教育学の居場所(niche)：新しい認識論の視座から」．日本

数学教育学会誌『数学教育学論究』，*88*，39-47.

平林一栄・藤井昌興(1965).「数学教育における表記の問題（第４報）：7.数学的表記の縮合について」．日本数学教育学会誌『数学教育学論究』，*10*, 1-14.

藤井斉亮(1989).「認知的コンフリクトによる理解の分析と評価：方程式・不等式を具体的題材として」, 日本数学教育学会誌『数学教育学論究』, *53*, 3-31.

藤井斉亮(1992).「児童・生徒の文字の理解とミスコンセプションに関するインタビュー調査」，日本数学教育学会誌『数学教育学論究』，*58*，3-27.

フレーゲ, G. (1986). 土屋俊［訳］「意義と意味について」．坂本百代［大編］『現代哲学基本論文集Ⅰ：フレーゲ／ラッセル／ラムジー／ヘンペル／シュリック／ノイラート／カルナップ』(pp. 1-44). 東京：勁草書房.

前原昭二(1967).『記号論理入門』．東京：日本評論社.

松浦武人(2009).「初等教育における児童の確率概念の発達を促す学習材の開発研究：確率判断におけるヒューリスティックスの改善に焦点をあてて」．数学教育学会誌『数学教育学論究』，*91*，3-13.

丸山泰司(2007).「言語の呪縛と解放：ウィトゲンシュタインの哲学教育」．教育哲学会誌『教育哲学研究』，*96*，115-131.

溝口達也(1995a).「認識論的障害の克服過程の記述カテゴリーによる特徴づけ：極限概念を事例として」．日本数学教育学会誌『数学教育学論究』，*63-64*, 27-48.

溝口達也(1995b).「数学学習における認識論的障害の克服の意義：子どもの認識論的障害との関わり方に焦点を当てて」.『筑波大学教育学系論集』, *20*(1),

37-51.

溝口達也(2004).「学習指導における子どものコンセプションの変容に関する研究」. 鳥取大学教育地域科学部『教育実践総合センター研究年報』, *13*, 31-41.

宮川健(2011).「フランスを起源とする数学教授学の『学』としての性格：わが国における『学』としての数学教育研究をめざして」. 日本数学教育学会誌『数学教育学論究』, *94*, 37-68.

山元一郎(1965).『コトバの哲学』. 東京：岩波書店.

ラカン, J. (1972). 宮本忠雄・竹内迪也・高橋徹・佐々木孝次［共訳］『エクリⅠ』. 東京：弘文堂.［原著版：1966 年］

和田信哉(2008).「小数の乗法の意味に関する記号論的考察」. 全国数学教育学会誌『数学教育学研究』, *14*, 9-18.

Artigue, M. & Winsløw, C. (2010). International comparative studies on mathematics education: A viewpoint from the anthropological theory of didactics. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, *31*(1), 47-82.

Balacheff, N. (2000). A modelling challenge: untangling learner knowledge. In *Journées internationales d'Orsay sur les sciences cognitives: L'apprentissage* (JIOSC 2000, pp. 7-16).

Barbé, J., Bosch, M., Espinoza, L., & Gascón, J. (2005). Didactic restrictions on teachers practice: The case of limits of functions at Spanish high schools. *Educational Studies in Mathematics*, *59* (1-3), 235-268.

Bosch, M. & Gascón, J. (2006). Twenty-five years of the didactic transposition. *ICMI*

Bulletin, *58*, 51-65.

Brousseau, G. (1997). *Theory of didactical situations in mathematics: Didactique des mathématiques, 1970-1990* (edited and translated by N. Balacheff, M. Cooper, R. Sutherland, V. Warfield). Dordrecht, The Netherlands: Kluwer Academic Publishers.

Carvalho, P. C. P. (2012), Teaching probability in secondary school. *Pre-proceedings of the 12th International Congress on Mathematical Education*, *Regular Lecture 3-8*, 611-619. Seoul, Korea: International Commission on Mathematical Instruction.

Chevallard, Y. (1989/2007). Implicit mathematics: Their impact on societal needs and demands. In U. Gellert & E. Jablonka (eds.), *Mathematisation and demathematisation: Social, philosophical and educational ramifications* (pp. 57-65). Boston, USA: Sense Publisher.

Chevallard, Y. (2012), Teaching mathematics in tomorrow's society: A case for an oncoming counterparadigm. *Pre-proceedings of the 12th International Congress on Mathematical Education*, *Regular Lecture 4-11*, 865-877. Seoul, Korea: International Commission on Mathematical Instruction.

Confrey, J. (1987). 'Misconceptions' across subject matters: Science, mathematics and programming. In J. D. Novak (ed.), *Proceedings of the second international seminar: Misconceptions and educational strategies in science and mathematics*, *1*, 81-106. New York, USA: Cornell University, Department of Education.

Confrey, J. (1990). A review of the research on the student conceptions in mathematics, science, and programming. In C. B. Cazden, (ed.), *Review of research in education* (16, pp. 3-56). Washington, DC, USA: Academic Educational Research Association.

Confrey, J. & Kazak, S. (2006). A thirty-year reflection on constructivism in mathematics education in PME. In A. Gutiérrez & P. Boero (eds.), *Handbook of research on the psychology of mathematics education: Past, present and future* (pp. 305-345). Rotterdam, The Netherlands: Sense Publishers.

Dörlfer, W. (1991). Forms and means of generalization in mathematics. In A. J. Bishop, S. Mellin-Olsen, & J. van Dormolen (eds.). *Mathematical knowledge: Its growth through teaching* (pp. 63-85). Dordrecht, The Netherlands: Kluwer Academic Publishers.

Erlwanger, S. H. (1973/2004). Benny's conception of rules and answers in IPI mathematics. In T. P. Carpenter, J. A. Dossey & J. L. Koehler (eds.), *Classics in mathematics education research* (pp. 48-58). Virginia, USA: The National Council of Teachers of Mathematics, Inc.

Ernest, P. (1991). *The philosophy of mathematics education*. London, UK: The Falmer Press.

Ernest, P. (1998). *Social constructivism as a philosophy of mathematics*. New York, USA: State University of New York Press.

Ernest, P. (2001). Critical mathematics education, In P. Gates (ed.). *Issues in mathematics teaching* (pp. 277-293). London, UK: Routledge Falmer.

Ernest, P. (2009). What is ‘first philosophy’ in mathematics education? In M. Tzekaki, M. Kaldrimidou & H. Sakonidis (eds.). *Proceedings of the 33rd Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, *1*, 25-42.

Ernest, P. (2010). Reflections on theories of learning. In B. Sriraman & L. English (eds.), *Theories of mathematics education: Seeking new frontiers* (pp. 39-47). Heidelberg, Germany: Springer.

Ernest, P. (2012). What is our first philosophy in mathematics education? *For the Learning of Mathematics*, *32*(3), 8-14.

Farnsworth, V. & Solomon, Y. (eds.) (2013). *Reframing educational research: Resisting the ‘what works’ agenda* (pp. 139-150). New York, USA: Routledge.

Forman, E. A. (2012). Commentary: Expanding and clarifying the commognitive framework. *International Journal of Educational Research*, *51-52*, 151-154.

Freudenthal, H. (1971). Geometry between the devil and the deep sea. *Educational Studies in Mathematics*, *82*(3-4), 413-435.

Gravemeijer, K., Cobb, P., Bowers, J., & Whitenack, J., (2000/2009). Symbolizing, Modeling, and Instructional Design. In P. Cobb, E. Yackel & K. McClain (eds.), *Communicating and symbolizing in mathematics: Perspectives on discourse, tools, and instructional design* (pp. 225 - 273). New Jersey, USA: Lawrence Erlbaum Associates

Gravemeijer, K. (2002). Preamble: From models to modeling. In K. Gravemeijer, R. Lehrer, B. van Oers, & L. Verschaffel (eds.), *Symbolizing, modeling and tool use* *in mathematics education* (pp. 7-22). Dordrecht, the Netherlands: Kluwer Academic Publishers.

Güçler, B. (2013). Examining the discourse on the limit concept in a beginning-level calculus classroom. *Educational Studies in Mathematics*, *82*(3), 439-453.

Heyd-Metzuyanim, E. & Sfard, A. (2012). Identity struggles in the mathematics classroom: On learning mathematics as an interplay of mathematizing and identify. *International Journal of Educational Research*, *51-52*, 128-145.

Heyd-Metzuyanim, E. (2013). The co-construction of 'learning difficulties' in Mathematics: Teacher-student interactions and their role in the development of a 'disabled' mathematical identity. *Educational Studies in Mathematics, 82*(1), 341-368.

Hiebert, J. & Lefevre, P. (1986). Conceptual and procedural knowledge in mathematics: an introductory analysis. In J. Hiebert (ed.), *Conceptual and procedural knowledge: The case of mathematics* (pp. 1-27). New Jersey, USA: Lawrence Erlbaum Associates.

Iwasaki, H. & Ueda, A. (1999). Development of mathematics education in Japan from Meiji era to present time: Forcusing on the change of realism and academism. *International Journal of Curriculum Development and Practice*, *1*(1). 103-112.

Jankvist, U. T. (2010). An empirical study of using history as a 'goal'. *Educational Studies in Mathematics*, *74*(1), 53-74.

Jones, G. A., Langrall, C. W., & Mooney, E. S. (2007). Research in probability:

Responding to classroom realities. In F. K. Lester, Jr. (ed.), *Second handbook of research on mathematics teaching and learning: A project of the National Council of Teachers of Mathematics* (pp. 909-955). Charlotte, USA: Information Age Publishing.

Kahneman, D. (2011). *Thinking, fast and slow*. New York, USA: Farrar, Straus and Giroux.

Kim, D., Ferrini-Mundy, J, & Sfard, A. (2012). How does language impact the learning of mathematics? Comparison of English and Korean speaking university students' discourses on infinity. *International Journal of Educational Research*, *51-52*, 86-108.

Kjeldsen, T. H. & Blomhøj, M. (2012). Beyond motivation: History as a method for learning meta-discursive rules in mathematics. *Educational Studies in Mathematics, 80*(3), 327-349.

Krummheuer, G. (2013). The relationship between diagrammatic argumentation and narrative argumentation in the context of the development of mathematical thinking in the early years. *Educational Studies in Mathematics*, *84*(2), 249-265.

Mizoguchi, T. (1993). On shifting conviction in conceptual evolution. In I. Hirabayashi, N. Nohda, K. Shigematsu & F. L. Lin (eds.), *Proceedings of the 17th Annual Meeting of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (I, pp. 260-267). Tsukuba, Japan.

Moschkovich, J. N. (ed.) (2010). *Language and mathematics education: Multiple* *perspectives and directions for research*. Charlotte, USA: Information Age Publishing.

Newton, J. A. (2012). Investigating the mathematical equivalence of written and enacted middle school *Standards*-based curricula: Focus on rational numbers. *International Journal of Educational Research*, *51-52*, 66-85.

Presmeg, N. (2006). Semiotics and the “connections” standard: Significance of semiotics for teachers of mathematics. *Educational Studies in Mathematics*, *61*(1-2), 163-182.

Radford, L., Schubring, G., & Seeger, F. (eds.) (2008a). *Semiotics in mathematics education*. Rotterdam, The Netherlands: Sense Publishers.

Radford, L., Schubring, G., & Seeger, F. (2008b). The ubiquitousness of signs: By way of introduction. In L. Radford, G. Schubring, & F. Seeger (eds.), *Semiotics in mathematics education* (pp. vii-x). Rotterdam, The Netherlands: Sense Publishers.

Ruthven, K. & Goodchild, S. (2008). Linking researching with teaching: Towards synergy of scholarly and craft knowledge. In L. D. English (ed.), *Handbook of international research in mathematics education* (Second Edition, pp. 561-588). New York, USA: Lawrence Erlbaum Associates.

Schubring, G. (2011). Conceptions for relating the evolution of mathematical concepts to mathematics learning: Epistemology, history, and semiotics interacting. *Educational Studies in Mathematics*, *77*(1), 79-104.

Sfard, A. (1991). On the dual nature of mathematics conceptions: Reflections on processes and objects as different sides of the same coin. *Educational Studies in Mathematics*, *22*(1), 1-36.

Sfard, A. (2001). Communicating to learn or learning to communicate? Mathematics education in quest for new answers to old questions. *Zentralblatt für Didaktik Mathematik / International Reviews on Mathematical Education*, *33*(1), 17–25.

Sfard, A. (2007). When the rules of discourse change, but nobody tells you: Making sense of mathematics learning from a commognitive standpoint. *The Journal of the Learning Sciences*, *16*(4), 567-615.

Sfard, A. (2008). *Thinking as communicating: Human development, the growth of discourses, and mathematizing*. Cambridge, UK: Cambridge University Press.

Sfard, A. (2010). A theory bite on infinity: A companion to Falk. *Cognition and Instruction*, *28*(2), 210-218.

Sfard, A. (2012). Introduction: Developing mathematical discourse - Some insights from communicational research. *International Journal of Educational Research*, *51-52*, 1-9.

Sfard, A. (2013a). Almost 20 years after: Developments in research on language and mathematics. Review of J. N. Moschkovich (ed.) (2010) *Language and mathematics education: Multiple perspectives and directions for research*. *Educational Studies in Mathematics*, *82*(2), 331-339.

Sfard, A. (2013b). Not just so stories: Practising discursive research for benefit of educational practice. In V. Farnsworth & Y. Solomon (eds.), *Reframing educational research: Resisting the 'what works' agenda* (pp. 139-150). New York, USA: Routledge.

Sfard, A. & Linchevski, L. (1994). The gains and pitfalls of reification: The case of algebra. *Educational Studies in Mathematics*, *26*, 191-228.

Shaughnessy, J. M. (1992). Research in probability and statistics: Reflections and directions. In D. A. Grouws (ed.), *Handbook of research on mathematics teaching and learning: A project of the National Council of Teachers of Mathematics* (pp. 465-494). New York, USA: Macmillan Publishing Company.

Sriraman, B. & Nardi, E. (2012). Theories in mathematics education: Some developments and ways forward. In M. A. (Ken) Clements, A. J. Bishop, C. Keitel, J. Kilpatrick, & F. K. S. Leung (eds). *Third International Handbook of Mathematics education* (pp. 303-325). New York, USA: Springer Science+Business Media.

Steinbring, H. (1991a). The theoretical nature of probability in the classroom. In R. Kapadia & M. Borovcnik (eds.), *Chance encounters: Probability in education* (pp. 135-167). Dordrecht, the Netherlands: Kluwer Academic Publishers.

Steinbring, H. (1991b). The concept of chance in everyday teaching: Aspects of a social epistemology of mathematical knowledge. *Educational Studies in Mathematics*, *22*(6), 503-522.

Steinbring, H. (1997). Epistemological investigation of classroom interaction in elementary mathematics teaching. *Educational Studies in Mathematics*, *32*(1), 49-92.

Steinbring, H. (2005/2009). *The construction of new mathematical knowledge in classroom interaction: An epistemological perspective*. Berlin, Germany: Springer.

Steinbring, H. (2006). What makes a sign a *mathematical sign*? An epistemological perspective on mathematical interaction. *Educational Studies in Mathematics*, *61*(1-2), 49-92.

Steinbring, H., Bartolini Bussi, M. G., & Sierpinska, A. (eds.). (1998). *Language and communication in the mathematics classroom*. Virginia, USA: National Council of Teachers of Mathematics.

Tversky, A., & Kahneman, D. (1971). The belief in the law of small numbers. *Psychological Bulletin*, *76*, 105-110.

Tversky, A., & Kahneman, D. (1974). Judgment under uncertainty: Heuristics and biases. *Science*, *185*, 1124-1131.

Vergnaud, G. (1988/2004). Multiplicative structures. In T. P. Carpenter, J. A. Dossey & J. L. Koehler (eds.), *Classics in mathematics education research* (pp. 84-96). Virginia, USA: The National Council of Teachers of Mathematics, Inc.

Wittmann, E. Ch. (1995). Mathematics education as a 'design science', *Educational Studies in Mathematics*, *29*(4), 355-374.

Wittmann, E. Ch. (2001). Developing mathematics education in a systemic process.

Educational Studies in Mathematics, *48*(1), 1-20.

Xu, L. & Clarke, D. (2013). Meta-rules of discursive practice in mathematics classrooms from Seoul, Shanghai and Tokyo. *Zentralblatt für Didaktik Mathematik / International Reviews on Mathematical Education*, *45*(1), 61–72.

2. 本論文に関わる筆者の主要業績

2.1 学術雑誌掲載論文（査読有）

1. 大滝孝治,「確率コンセプションの共生発生に関する一考察」,『数学教育学研究』, 全国数学教育学会, *17*(2), pp. 25-33, 2011.
2. 大滝孝治,「数学的ミスコンセプションのモデル化：小数の法則を事例として」,『数学教育学研究』, 全国数学教育学会, *18*(1), pp. 43-50, 2012.
3. 大滝孝治,「数学的ミスコンセプションの弾性に関する一考察：〈小数の法則〉に焦点をあてて」,『数学教育学研究』, 全国数学教育学会, *18*(2), pp. 115-120, 2012.
4. 大滝孝治,「確率ミスコンセプションの克服に関する否定論的考察：小数の法則を事例として」,『数学教育学研究』, 全国数学教育学会, *19*(2), pp. 109-115, 2013.
5. 大滝孝治,「確率単元の構造に関するコモグニション論的考察：中学校数学教科書の分析を通して」,『数学教育学論究：臨時増刊 第 46 回秋期研究大

会特集号』，日本数学教育学会，*95*，49-56，2013.

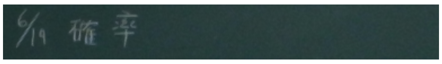
6. 大滝孝治,「確率ミスコンセプションのコモグニション論的解釈：小数の法則を事例として」,『数学教育学研究』, 全国数学教育学会, *20*(2), 1-9, 2014.
7. 岩崎秀樹・大滝孝治・杉野本勇気・岩知道秀樹，「数学教師を目指す教育学部初年次学生の論証認識に関する考察」，『科学教育研究』，日本科学教育学会，*37*(3)，pp. 226-234，2013.
8. 岩崎秀樹・大滝孝治・新居広平,「数学教育における目的・目標論再考」,『数学教育』，日本数学教育学会，*94*(11)，pp. 26-29，2012.
9. 杉野本勇気・岩崎秀樹・大滝孝治・岩知道秀樹,「高校数学における論証指導：Sylvester の定理に向けた局所的組織化」,『数学教育』，日本数学教育学会，*93*(9)，pp. 13-16，2011.

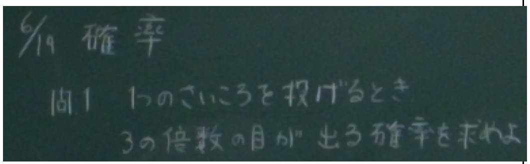
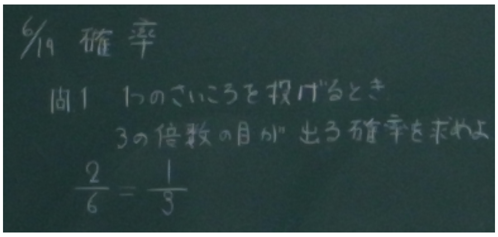
2.2　論文集掲載論文（査読有）

10. 大滝孝治,「確率領域におけるミスコンセプションに関する一考察：確率概念の多義性からみた克服の障害」,『日本数学教育学会第 43 回数学教育論文発表会論文集』，日本数学教育学会，pp. 657-662，2010.
11. 大滝孝治,「数学的コンセプションの動態のモデル化」,『日本数学教育学会第 44 回数学教育論文発表会論文集』，pp. 1011-1016，2011.
12. 大滝孝治,「数学的ミスコンセプションに関するコモグニション論的考察」,『日本数学教育学会第 45 回数学教育論文発表会論文集』，pp. 1115-1120，2012.

13. 岩知道秀樹・岩崎秀樹・杉野本勇気・大滝孝治,「中等教育を一貫する論証指導の意義と課題（５）：一意性の意識化に向けた一つの試み」,『日本数学教育学会第 45 回数学教育論文発表会論文集』, pp. 89-94，2012.

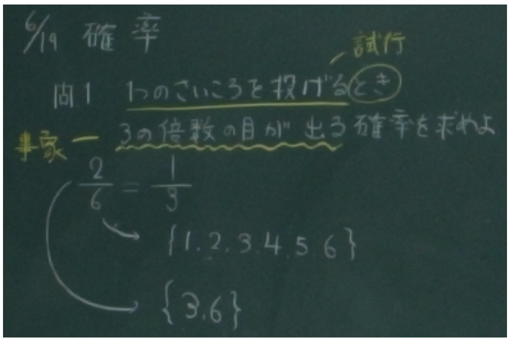
資料：授業トランスクリプト

教師の発言	板書など
1.　（最初の５分は宿題返却と再提出の説明） 2.　じゃあ、プリントはしまってください。 3.　今日から新しいところに入ります。今まで何やってたかというと、順列と組み合わせをやっていました。順列と組み合わせを合わせてよく場合の数といいましたが、今日からは本場である確率に入っていきます。 4.　で、今日から確率の授業をずっとやっていくんですけど、その授業の間に、皆さん気づいたと思いますけど、後に、大学院の博士課程後期の僕の先輩にあたる人が、研究の一環として授業をみていきます。皆さん、変に緊張しないように。よろしくお願いします。	

5.　それで、これずーっと前に出した問題、一番最初の授業で出した問題なんだけど。サイコロを一つ振る。３の倍数が目として出る。３の倍数の目が出る確率。	
6.　T：S_1（名字）くん、S_1（フルネーム）くん、一つのサイコロを投げるとき、３の倍数の目が出る確率はいくらになりますか？	
7.　（S_1 の返答）	
8.　３分の１。じゃあこの３分の１はどうやって出した？出しますか？	
9.　（S_1 の返答）	
10.　６つ目があって。６分の２が３分の１になる。	
11.　で、確率を求めなさいといわれたら、いい？確率を求めなさいといわれたら、もう既に中学校から習っている知識で、静かにしてね、いい？習ってる知識として、サイコロを投げたときに、何が起こり得るかって	

いうのを全部数え上げたら、１から６の目が出るっていうのがわかった。 12. この６ね。この６っていう数字は、１から６の目が出るというので６だ。 13. でこの２っていうのは、さっきいってくれたように、３の倍数が出る、３と６が出る、という目の出方をみると２個あるから２っていう数字になっている。 14. これを求めるのは中学校で何回もやってきているので、まあみんなすっと求められるよね。 15. じゃあ今日なにを新しいことをやるかというと、言葉を最初新しいことをやります。 16. まず、ある実験をすると。実験とか観測をすると。確率の問題では、なになにするとき、と書かれます。 17. この実験するとか、観測するとか、	

試してみるっていう、なになにすることを、試行ということにします。

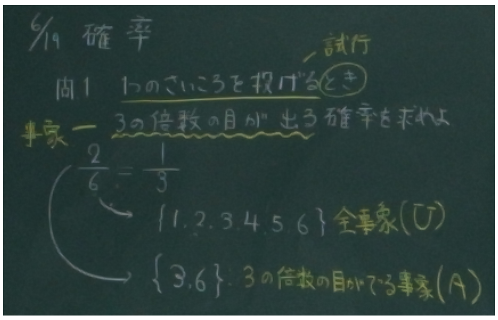


18. で、試行を行った結果、なんかが起こるわけだ。そのとき起こることとして、３の倍数の目が出るっていうことが起こる確率を求める。何かが起こること、この問題では３の倍数の目が出ることだけど、何かが起こる、ね、試行をやったら何かが起こる、これを事象といいます。

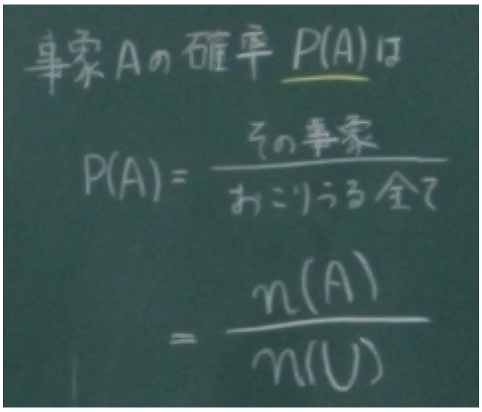
19. だから試行をやった結果、サイコロを振るという試行を行った結果、３の倍数の目が出るという事象が起こる、っていういい方をします。

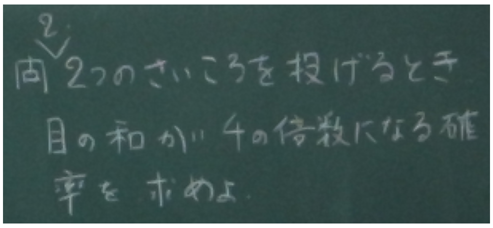
20. これ言葉の問題なんだけど。

21. で、いいですか、じゃあこの確率を求めようといったときに、６分の２って最初に計算したよね。この６っていうのは、サイコロを振るっていう試行を行ったときに、起こり得る事象をすべて書き出したものだ。こ

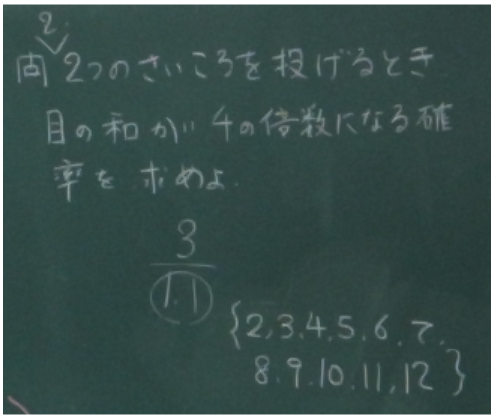


れを、起こり得るすべての事象っていう意味で、全事象といいます。	
22. 全事象。で、これよくＵという。起こり得るすべての事象の集まり。起こり得るすべての事象をかき集めたもの。	
23. だから全事象の個数を書いたことになる。全事象の個数を書いたことになる。	
24. じゃあ３と６っていうは何を書いたかっていうと、まあ３の倍数の目が出る事象を書いて、その個数が２だったので、６分の２になる、ということをやりました。	
25. なのでこれはねえ、よく事象Ａとします。３の倍数の目が出る事象。ある特定の事象なので Ａ という名前をつけておきましょう。	
26. いい？ここまでは完全に中学校の復習に近いんだけど、言葉を高校流にいうと、３の倍数の目が出る事象	

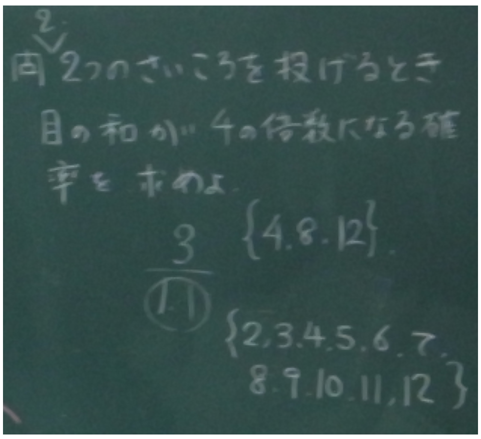
を得る、その事象をＡとしよう、この場合はＡとしよう、事象Ａの確率といわれたときにPAと書きます。 27. Pは何のPでしょう？確率P。 28. 確率 Probability、Probable って英語、Probability のP。 29. は［wa］、今やってきたことを思い出せば、どう表せるかっていうと、まあさっきいった言葉をそのまま書くだけ。 30. 起こり得るすべての場合の数、で、これだいぶ言葉省略してるけど、その事象が起こる場合。 31. これを記号で書くと、これ覚えてるかな、わざわざ集合チックに書いたのは、これが使えるから。 32. 覚えてる？集合の要素の個数。集合の要素の個数。 33. と表されます。これが確率。今までやってきたことの確率のまあ復習。	

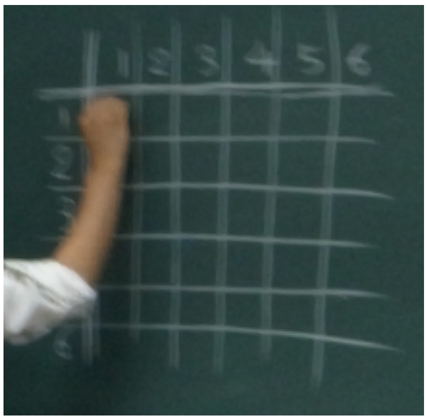
中学校までの復習。	
34.　で、もう一問、考えてみよう。	
35.　２つのサイコロを投げるとき、ええ二つの目、たす、和が、目の和が、４の倍数になります。	
36.　あ、問２だね問２。あっちが１だったから問２。	
37.　これも、今までやってきたこととほとんど変わらない感じで。	机間指導（約２分半）
38.　いいかね。じゃあ S_2 くん。答えはいくつになりましたか？	
39.　（S_2 の返答）	
40.　やってない？３分の１。３分の１。	
41.　（S_2 の返答）	
42.　４分の１？４分の１。	
43.　４分の１になるためにどう考える？最初の分子分母。	
44.　（S_2 の返答）	
45.　わかんない？12 分の３、12 分の３。その 12 分の３はなぜきた？	3/12 と薄く書く。
46.　誰かわかる？12 分の３をうまく S_2	

くんの言葉を拾って。 47.　（S_2の返答） 48.　11 分の３？ 49.　ちょっと隣近所に訊いていいし。助けてあげる。 50.　考えれそう？考えれそう？ 51.　どう？ 52.　ん、今とまってる。何がなんか、11 分の３になった？これは 11 は。 53.　（S_2の返答） 54.　（S_2の返答を復唱しながら）二つのサイコロ投げたら、12 まで。 55.　二つのサイコロ投げたら 12 まで、それはどういう意味？（22:41） 56.　（S_2の返答） 57.　二つのサイコロを振ったら１から 12 までの数が出る？それは、２から？１から？たし算をしてるよね？ 58.　（S_2の返答） 59.　たし算。はいはい。	 3/11 と書き直す



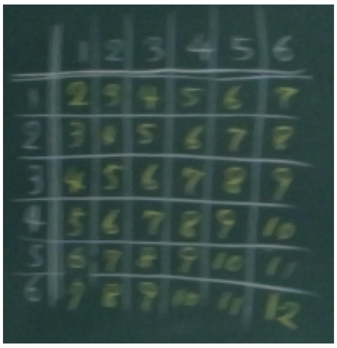
60. で、この３、みんないい、11 分の11。S_2 くんがどう考えたかというと、たし算として二つのサイコロ振ったら、２から、２から、そうか書いた方がいいか、全事象は２、３、４、５、６、７、８、９、10、11、12 と。これであってる？これで 11 個書けた。
61. みえる？二つのサイコロ振ったら、たし算した結果、２から 12 までの 11 個の数字がでてくる。で、そのうち？
62. え一、求めたい事象っていうのは、目の和が４の倍数であるから、その事象はどう表せる？
63. （S_2 の返答）
64. ４と８と 12、そうだね。４と８と 12。なるほど。
65. こうやって求めてもらいました。
66. じゃあどう。２、３、４、５、６、７、８、９、10、11、12 っていう



全事象があると。いい？２から 12 までの全事象が一個ずつあります。	
67. で、４、８、２［ママ］っていう３つの事象が、こん中で条件に当てはまります。その事象ってことね。だから。	
68. 他に答えが出た人、どう？他の答え。	
69. 何人か表を書いて考えてたりしてくれたんだけど、表で考えてみよう。	
70. ええ、場合の数に入るときにさ、二つのサイコロやったんだけど、いい？場合の数に入るときに、二つのサイコロの問題は、あのときは表を書いたね。	
71. S_2 くんがいってくれたみたいに、和を今からここに、二つの数の合計を書いていこう。そうすると、２、３、４、５、６、７。	
72. ちがう。10。６か。	(5, 1)の枠に一度 11 と書く。

73. 確かにたし算の合計としては２から 12 までの数が出てきてる。

74. で、いい？この表つかって考えると。

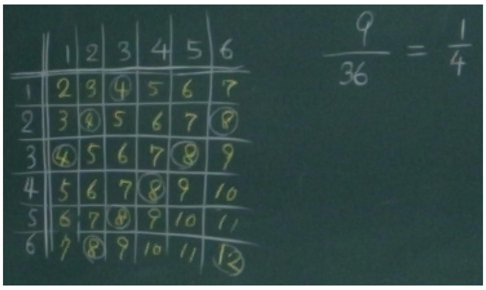


75. 今からもう一個別の考え方をするよ。

76. いいですか。ちょっと聴いて。サイコロを２個振った結果、表のマス目は全部で 36 個ある。36 個あるね。

77. でその中で４の倍数が何個あるか数えると、何個あるかというと、９個。９個あるね。

78. でこれ約分すると、４分の１になります。



79. さあここで違う考え方で、違う数え方で数えたら、違う答えが出た。11 分の３と４分の１、４分の１。

80. 何で違う答えが出てしまったのかを考えてみよう。

81. なんで違う答えが出てしまったのか。

82. 起こり得るすべての場合を数えたときに、分母に書いたね。起こり得るすべての場合を数えて分母に書いた。 83. じゃあ起こり得るすべての場合をたし算の結果としてやったら確かに 11 個になった。 84. 起こり得るすべての場合を、表に出てマス目の個数ね、全部の数の合計で考えたら 36 個になってる。 85. 確かにやってることは、一見正しくみえる、どっちも。どっちも正しいようにみえるね。 86. 起こり得るすべての場合って書いてあるんだから、起こり得る場合を、たし算の結果っていう風にしてみたら、２から 12 までの 11 種類しか出てこない。 87. こっちは、起こり得るすべての場合っていうのを、１と１のたし算、１と２のたし算、っていう風に、細か	

く表にしてみてったら、そしたら36 個出てきた。同じ種類の数字もそれぞれ別々に数えてみたら、合計36 個でてきた。	
88. なんで違うの？なんで違うの？	
89. どこがおかしいか。どっちかがおかしい、それともどっちもおかしい、どっちもあってる？	
90. ここがおかしいよ、っていうのがどこかみつかるかな。	
91. S_3 さん、S_3 さん、S_3 さん、どこか変だってのはあります？	
92. （S_3 の返答）	表の考え
93. と考える。左が合ってると考える。	
94. とすると、こっちでやったこと、起こり得るすべての場合をちゃんと数えたはずだ、11 個。だけど 11 分のになっちゃう。どういう数え方が変なのかな？	
95. 誰かいえる人、いえる人はぜひ挙手して欲しい。	

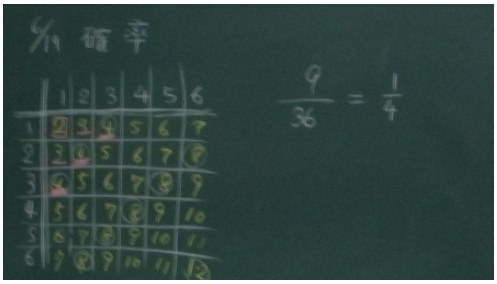
96. じゃあ各数字に注目してみよう。ここに出てくる２っていうのは、サイコロを２つ振ったときにどういう（聞き取れない）としてでてくるか、というと、ここにいるよね、２。１回しか出てこない、１回出てくるだけ。

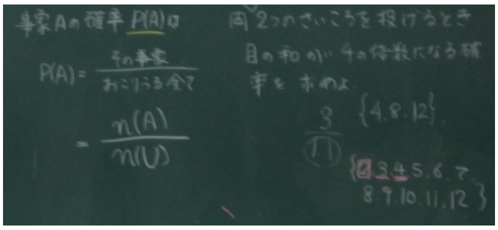
97. 次３考える。（聞き取れない）。３を考えると、いい、３を考えると何回出てきたかというと、２回だね。

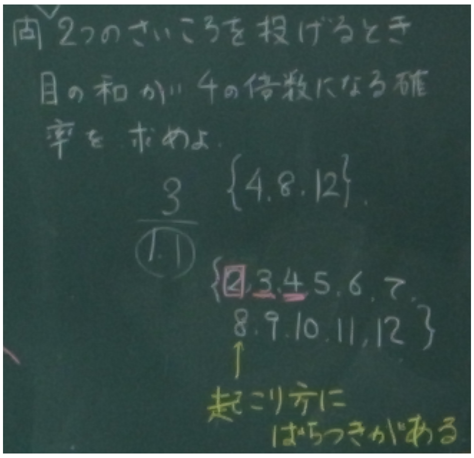
98. 次じゃあ４考えてみる。４考えたら３回出てきてる。

99. いいですか。ここが、ここが大事ね。２、３、４、５、６、７と書きましたと。

100. ２、３、４、５、６、７、８、９、10、11、12 と書きました。あれがすべての場合ですと。出てくる場合ですと。書いたんだけれども、こっちで考えてみたら、２は１回しか出てきてないね。２は１回しか出てき





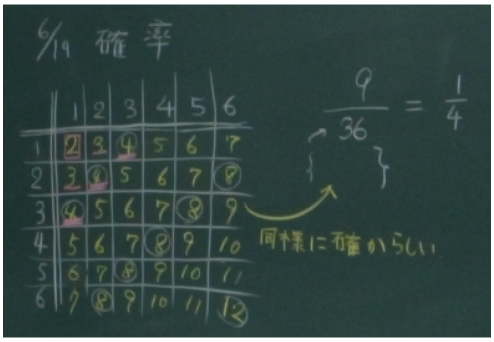
てない。３は２回しか出てきてない。あ、２回出てきた。４は３回出てきた。で５、６、７って考えるに従って、出てくる回数がばらばらになっていくね。 101.つまりどういうことかというと、２つのサイコロを振ったときには、ここで考えた場合の起こり得るすべての事象っていうのは、みえる？下の方だけど。 102.いいですか。起こり方にばらつきがある。今あげてくれた全事象には。ああごめん、こっちあがった全事象には。こっちであがった全事象は、起こり方にばらつきがある。 103.確率をやるときに、これじゃよくないっていうのを、実は中学校でみんなやってるんだよね。ある言葉を思い出せたら。起こり方が同様じゃない。同様って言葉で何か思い出せん？同様って言葉。同様に、同様に、	

思い出せん？同様に、同様に、思い出せん？そうそうそう。 104.全事象、起こり得るすべてを考える場合、とにかく確率で事象を考える場合ね、は（wa）その１個１個の起こる事象、まあ２の目が出る、３の目が出る、ばーって集めて全事象って呼ぶ。全事象の、いい？ちゃんと聴いてよ。全事象のすべてが同様に確からしい。もうちょっといい方を変えると、同じ程度に起こることが期待されないといけない。同じ程度に起こる。それを同様に確からしい、と中学校ではいっていた。で、高校でも全く同じ言葉を使う。 105.だからこの 11 個。２、３、４、５、６、７、８、９、10、11、12 をみてみると、２、ええ２つのサイコロの合計ね、和が２になるっていうのは、あっちでは１通りしか起こらない、実際には。だけど、４をみてみ	

れば、ええ、３通り起こる。っていう風に、起こり方にばらつきがある。つまり、同様に、同様な程度に期待されない。それを、同様に確からしくない、と。

106.（聞き取れない）

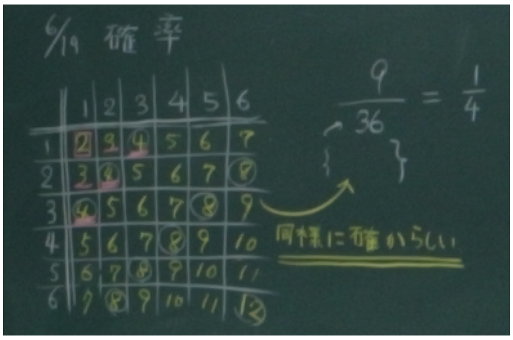
107.だから、あえ、こっちでは、全事象をこうやって書くとめんどくさいから書かないよ、書かないけど、全事象は、これだよこれ、表からきてる。全事象は表からきてる。



108.でこれは、すべて、ええ、同様に、確からしいでいい？言葉は大丈夫？思い出した、言葉？同様に確、たし、たし、か。同様に確からしい。

109.何が同様に確からしいっていうと、各事象が起こるのは、同様に確からしい。いい？ここの２が出る、ここの３が出る、ここの４が出る、ここの５が出る、全部みたときに各事象が起こるのは同様に確からしい。

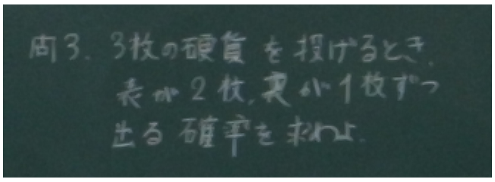
110. これが大切ね。確率の事象を考えるときには、常に、同様に確からしい事象を考えましょうと。



111. いいですか？

112. ちょっと、それに関連して、どう、何が同様に確からしいのかをちゃんと見極めないと、失敗しそうな問題。

113. ええ、３枚の硬貨を投げます。ええ３枚のコイン、コイン、コイン、硬貨。



114. ３枚の硬貨を投げるときに、ええ表が２枚出て、裏が１枚ずつ出る確率を求めよ。

115. じゃあ２、３分ちょっとまあ、書き写してから２、３分考えてみてください。３枚の硬貨を投げるとき、表が、表が２枚、裏が１枚出る確率を求めよ。

116. （机間指導）

117. もうちょっと待つよ、もうちょっと

待つ。

118.考えてみてください。

119.いいですか？はい。

120.じゃあ訊きます。４分の１になった人？４分の１になった人？いない？いない？すばらしい。

121.じゃあ８分の３になった人。

122.（S_4 発言）

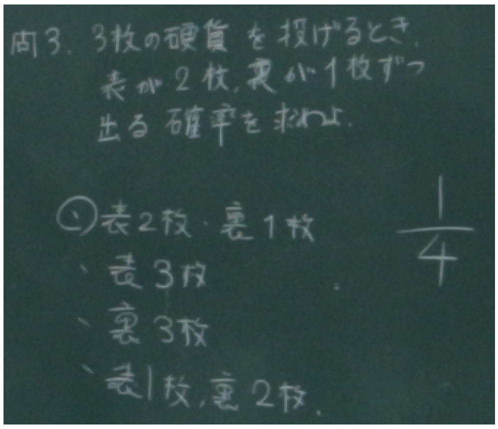
123.大体そんな感じ。数えてみたら、まあ確かに８分の３になる。じゃあ何で４分の１って訊いたかというと、ちょっとこれはじゃあ自分で間違えを指摘してみて。

124.間違えを指摘してみて。起こり得るのは、まず表２枚裏１枚っていうセットがでるパターンがある。これが起こり得る場合１。

125.大丈夫か？大丈夫か？

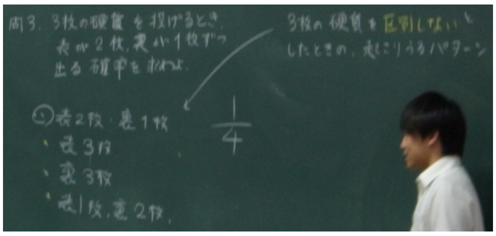
126.次起こり得る場合２。表３枚。

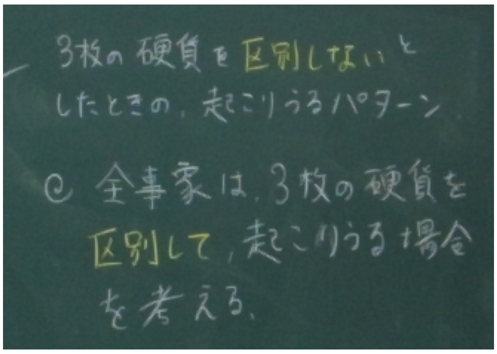
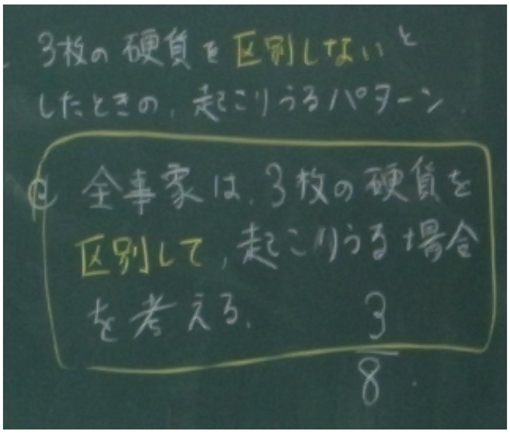
127.いい？ちょっと聴いてよ。聴いてよ。聴いてよ。おいしゃべってる人。



聴いてよ。 128.裏３枚。 129.で起こり得るセットというのはこの３種類しかないんだから、ああ、もう１枚。ええっと、ええ、あごめん、４分の１にはなる。ええ表２枚裏１枚、表１枚、表１枚裏２枚。出てくる種類はこの４種類しかないんだから、分母は４だ。出てくる種類はこの４種類しかないんだから分母は４。で、当てはまるのは、１個だから１。 130.いいですか？この考え方、S_5くん、この考え方じゃあ何がおかしいか？ 131.いい、もう一回言うね。出てくるパターンはこの４種類しかない。出てくるパターンはこの４種類しかない。のに、あ、ので、そのうちの１種類が起こる、ええ、該当する場合、事象なので４分の１。	

132. っていう答え方が、誰かがしたとしよう。ただみんなは手あげてもらったように、８分の３っていう答えが出てる。この考え方どこがおかしい？で、みんなも今いい、自分でどこがおかしいか指摘してみてよ。自分の中で。 133. どこがおかしい？S_5 くん、どこがおかしい、何がおかしい？ 134.（十分に聞き取れない。周りから助けてもらってもいいよ、というような主旨の発言であると思われる） 135. わからん？S_6 さん、S_6 さん、どこがおかしい？ 136.（S_6 の返答） 137. そうだね、そうそう。その言葉が一番、今使ってる言葉、今知っている言葉では、ちゃんと言えてる。 138. いいですか？いいですか？ 139. 自分の中で明確に答えられなかった人、この４つのパターンが全事象	

だとあげたときにすでに、全事象の取り上げ方がおかしい。それはなぜかというと、４つの場合が同様に確からしくない。同様に確からしくない。 140. じゃあこの考え方の間違い、間違った考え方の根本に何がきてるか、というと、この考え方ね。 141. いいですか？４枚、あ、ごめん、３枚の硬貨を区別しないとしたときには、いいですか？静かにして。 142. いい？静かにして、待ってるよ。 143. ３枚の硬貨を区別しない場合の出てくるパターンは、確かに４種類だ。ただこうやって数えると、起こり方に偏りが出てしまう、同様に確からしくなくなってしまう。 144. じゃあ正しい８分の３を導くためにはどうするかというと、正しくするためには、あのパターンでは足りないわけよね。パターンが足りな	

い。 145.ごめん、ちょっと走り書きになってしまったけど、コイン３枚区別しましょう、ちゃんと。コイン３枚を区別するから、裏と表が出るのは２の３乗になる。でそのうち、数えてみれば、表２枚裏１枚は３枚出る。 146.ごめん、答え書くだけになってしまうけど、８分の３がなぜ出てくるかというと、これね。 147.で今まとめのとこに３枚の硬貨と書いたけど、確率やるときは、今後、いい？確率やるときは、場合の数じゃない、おい聴いとけよ、聴いといてよ、聴いといてよ、場合の数じゃなくて確率をやるときは、すべてのものを区別しよう、これから。そうすると、同様に確からしくない場合を避けることができる。 148.今後ずっと貫いてね。確率やるときは、特に断りがない場合は、すべて	 （チャイム） 

のものを区別する。青玉６個入ってる袋と言われたら、青玉区別できないと考えるんじゃなくて、その中に入っている玉すべて区別できると。今後、確率においてそうやっていくと、まあ同様に確からしい場合にほとんどもってける。 149. じゃあ今日はここまでです。おわります。解散。	

謝　辞

夏目漱石は *I love you.* を「月が奇麗ですね」と和訳したらしい。以下は *Thank you very much, Prof. Dr. Hideki Iwasaki.* の私訳です。

筆者が約六年前に数学教育研究をこころざし，こうして博士学位論文を書き上げようとしている現在までの間に，日本の数学教育研究の一つの歴史が幕をおろしました。それは 2011 年 5 月 27 日未明のことです。「なぜ一介の院生である大滝孝治がこの場面に立ち会わねばならなかったのか？」これが，故平林一榮先生が筆者に残していった最後の問いです。解答作業は生涯にわたるでしょうが，千里の道も一歩からといいますので，この場をかりて少しばかり解答用紙をうめてみようと思います。

内田樹曰く，《私にとってはレヴィナスのテクストこそが「完全記号」なのである。もちろん「完全なる無謬の師」や「すべての意味がそこに見出せるテクスト」というのは，ひとつの「物語」である。私だって，それくらいのことは分かっている。分かった上で，私はあえてこの「物語」を選び取ることにしたのである。師に仕えるというのは，この「物語」に有り金を賭ける，ということである。なぜそんな無謀なことをするかと言えば，このような「命がけの跳躍」をしないと進めない境地がある，と私には思われるからである》(内田, 2001/2011)。

自称「物書き兼業武道家」の内田樹と，フランスのユダヤ人思想家エマニュ

謝　辞

エル・レヴィナスには，直接の師弟関係はありません。自称弟子です。ですから，内田の流儀に従えば，筆者が平林先生を師と仰ぐことは可能です。しかし，それはやはり適切な表現ではないでしょう。師は他にいます。筆者の師である岩崎秀樹先生は，「ヒラバヤシ」という物語にすべてを賭けている人です。したがってあえていえば，平林先生は「グランド師」や「メタ師」とでもなろうかと思いますが，いずれも今ひとつなので，「老師」と呼ばせていただきます。

レヴィナス的に述べると，「師」とは「最初の他者」であるそうです。ここでいう「他者」とは「無限」の象徴です。弟子は師をその際限のなさ故に決して測り切ることができない。このような感覚を，筆者は自分の師に対してもっていますし，その師も平林老師にある種の無限をみていると想像します。ですから筆者からすれば，師は$\aleph_0$，老師は$\aleph_1$，とでもいえるでしょうか。

そうなると，教育機能を有する集団は，どれも後退の一途を辿るように思われますが（薄まっていくわけですから），この命題は偽のようです。経験的にも明らかです。今では，人を月の上に落とすことも可能です。これはおそらく，「無限」というのは，師のもつ実際の知識・技術・精神 *etc.* ではなくて，弟子が想定する師のそれらを表しているからです。むしろ，そのように「師」を想定した人間を「弟子」というのでしょう。そもそも師の知識が実際に無限であれば，学問的探究など存在しないと思われます。あったとしても一話完結，はい，さようならです。そうではなくて，決して到達し得ない境地を認め，それでもそこに届こうと右往左往する，という一連の知的な活動が学問なのでしょう。

ですから，老師不在に悲観することなく，学的探究を続ける必要があります。

謝　辞

「『ヒラバヤシ』という物語に賭ける命がけの跳躍は，ヒロシマ・スクールの使命である。と同時にその跳躍によって，ヒロシマ・スクールは十分にヒロシマ・スクール的になる」。僭越ながらこれが，老師の弟子の弟子が，老師の弟子から受け取った「物語」のプロローグです。

　筆者は様々な条件に恵まれ，最晩年期の老師の思想に触れる機会がありました。どうやらシュバラールの人間学理論とヴィトゲンシュタインの言語哲学について熱心に研究されていたようです。今こうして本論文を振り返ってみますと，それはフランス教授学的な課題意識に対して言語ゲーム論的な発想で取り組んだものといえると思います。その意味で筆者はいつのまにか老師の研究を引き継いでいたようです。これは研究テーマが「ミスコンセプション」であるということを考えると，我ながら驚くべきことです。しかし丁寧に振り返ってみると，それは様々な形で筆者に条件づけられていたといえそうです。

　ミスコンセプションという言葉には新潟大学の学部生時代に和田信哉先生の研究室で勉強している時代に出会いました。記号論的研究を専門とする先生のもとでなぜか心理学的概念であるミスコンセプションを研究テーマとして設定したわけですが，この選択がヒラバヤシという物語に繋がるための第一歩であったことは間違いありません。このとき既に，「コンセプション」という言葉でフランス教授学への扉が，そして「記号論」という和田先生の世界の見え方から言語ゲーム論への扉が，それぞれ準備されていました。そして前者の扉は溝口達也先生のコンセプション研究，後者の扉は真野祐輔先生のスファード研究を介してそれぞれ開かれました。さらにこれらの扉の先が実は繋がっているら

しいという洞察は，宮川健先生の人間学研究によって示唆されました。

　勿論，「確率」という領域選択も，本研究の成立にとっては不可欠な要素ですが，これも偶然に設定されたわけではないようです。確率への着想は阿部好貴先生の数学的リテラシー研究によって方向づけられていたといえます。しかし確率研究は数学教育研究としては少数派であり，ともすれば代数研究や幾何研究へと向かってしまう可能性は常にありました。それでも確率に踏みとどまれたのは，副査を務めていただいた柴一実先生を筆頭読者の一人として想定していたことが大きいです。先生のご専門は科学教育であり，数学教育の中でそれに最も近いのは確率教育でしょう。なんとか先生に筆者の言葉を届かせようと，先生と課題意識を共有できるであろう確率にこだわっていたのだと今になれば思えます。

　しかし，フランス教授学も言語ゲーム論も確率もただ漠然と並んでいたのではヒラバヤシという物語へは繋がり得ません。それらは数学教育的に緻密な論理を通して整然と関連づけられる必要があります。曲がりなりにもそれができたのは，副査を務めていただいた植田敦三先生との議論の影響が大きいです。

　師は老師の最後の姿を長距離走者のメタファーにたくしました(岩崎, 2012)。それにならって述べれば，筆者は菲才ながらも平林先生の「たすき」を引き受けるための条件を，上述の方々，そしてここに記すことのできなかった多くの方々との偶然の出会いを通して，必然的にみたしていました。受け取ったからには次のランナーへ手渡さねばなりませんが，中継ポイントはまだまだ先です。その日まで《少なくとも最後まで歩かなかった》(村上, 2007/2010)といえるよう

な研究者人生をおくることをここに誓います。

引用・参考文献

岩崎秀樹(2012).「未完の不在」. 全国数学教育学会誌『数学教育学研究』, *18*(特別号), 2-9.

内田樹(2001/2011).『レヴィナスと愛の現象学』. 東京：文藝春秋.

大滝孝治(2012).「『ヒラバヤシ』という物語」. 全国数学教育学会誌『数学教育学研究』, *18*(特別号), 71.

村上春樹(2007/2010).『走ることについて語るときに僕の語ること』. 東京：文藝春秋.