学　位　論　文

数学教育における教室文化の文化化に関する研究

申　請　者

佐々木　徹郎

愛知教育大学教育学部

序　章　本研究の目的と方法

第１節　数学教育における教室文化の課題

１.１　本研究の課題

教育には，知識・技能を介在させる実践的思想が伴っている。そのための場（トポス）としての文化的状況がなければならない。今日ではこれを「教室」と呼び，教育のすべの課題の原因と結果は，ここに関係している。にもかかわらず，数学教育において，教室がどのような役割をもち，どのような学習状況があるのかは，必ずしも十分に考察されてこなかった。伝統的に優れた学習状況としてしばしば引用される，ソクラテスの問答法や産婆術は，決して今日の「教室」を前提にしたものではない。

中世の学校までは，学校そのものが教場であり，教室という概念はなかった。「クラス」という言葉は，1517年のパリ大学に関する記述に初めて登場した(佐藤，1996, p.9)。さらに農業基盤から工業基盤への社会変動と共に普通教育が創設され，それが18世紀から19世紀のことであるから，その意味で学校における「教室」という場（トポス）を示す言葉は近年の産物なのである。そのため数学学習において，教室はあくまでも便宜なのか，それとも本質的役割をもつものなのか，こうした課題は，必ずしも明確にされていない。おそらくそこには，教科指導を巡る「教室」の意味の歴史的変容があったと考える。

例えば，近代の初期，3R's としての識字の普遍化は喫緊の課題であり，指導内容の定着はもっぱら反復と記憶に求められていたであろうが，そのような時代の教師の役割や教室の意味は，おそらく今日のそれとは同列に扱えないはずである。例えば 20 世紀初頭の日本の場合，義務教育における算術の目標は「算術ハ日常ノ計算ニ成熟セシメ，生活上必須ナル知識ヲ与へ，兼ネテ思考ヲ精確ナラシムルヲ以テ要旨トス」であった。一方今日の義務教育における算数・数学の目標は「算数的活動を通して，数量や図形についての基礎的・基本的な知識及び技能を身に付け，日常の事象について見通しをもち筋道を立てて考え，表現する能力を育てるとともに，算数的活動の楽しさや数理的な処理のよさに気付き，進んで生活や学習に活用しようとする態度を育てる」であり「数学的活動を通して，数量や図形などに関する基礎的な概念や原理・法則についての理解を深め，数学的な表現や処理の仕方を習得し，事象を数理的に考察し表現する能力を高めるとともに，数学的活動の楽しさや数学のよさを実感し，それらを活用して考えたり判断したりしようとしする態度を育てる」である。およそ百年の懸隔を隔てる中で，教室における社会的な相互作用はその複雑さを増し，それを企画しなければならない教職の専門性は，比較もできないぐらい高

度化しているといってよいであろう。

こうした「教室」の歴史的変容にもかかわらず，多くの数学教育研究は，教室を括弧に入れたまま，その考察の焦点を，学習者の活動や教師の指示，そして教科内容の展開に合わせている。しかし，Stigler & Hiebert (1999) は，"The Teaching Gap" の中で「学習指導は，文化的営みである」と指摘し，「学習指導の改善は教師一人一人の技術的改善ではけっしてなく，文化的台本の改善によるべきである」ことを明らかにしている。そこでは教室に対して，人数や編成といった統計白書に記される点を超えて，「台本」を具体化する舞台としての教室を今日の教室たらしめる文化的営みが記されている。

そのために，数学教育における教室文化という概念をまず明らかにしておかなければならない。教室文化という用語は，我が国では一般的ではない。「文化」あたる英語 “culture” は社会や集団に固有の生活様式を意味するものとなっている（下中弘，哲学事典，p.1239）。本研究における「文化」は，英語流の生活様式としての意味が強い。従って，教室文化は学校教育における日常の教室での学習状況や授業様式を示している。本研究では，主として，数学教育に固有の教室文化を研究対象としており，算数・数学の授業を念頭においている。

本研究では教室文化のあるべき形式を規範的に研究することを目的としている。数学教育における教室文化の重要性を指摘した数学教育学者は，Bauersfeld (1992a, 1992b, 1995) である。「教育目的に適う数学学習や個人発達がなされる教室文化の特徴は何か。また，さまざまな教室文化は，生徒の数学学習にどのような影響を及ぼしているのか」（1995, p. 281）という課題をあげている。これが，本研究の中心課題である。そのため，教室文化を学級経営の観点から明確にし，そこに数学教育思想を基盤において，教室文化を対比的分類を試みる。

最終的には，教室文化の対比的分類に基づいて，教室文化の変動を明らかにする。つまり，Bishop（1988）の「数学的文化化」を参考に，教室文化において，教室の成員である教師と児童・生徒の文化化に着目する「教室文化」の既定を試みる。さらに，あるべき教室文化への文化化をデザインするための理論と事例を考察する。これらの考察は，教室文化の文化化の意義や理論を解明するこになり，それをデザインする方法論として，学級づくりや授業開発など，教師教育の指針となることを目指す。

以上をまとめると，次の表のようになる。

研究課題１：数学教育における教室文化とは何か。またその特性は何か。これを究明するために，Vygotsky 理論に重点をおいて，数学学習への教室文化の意義を考察するばかりでなく,数学教育における教室文化の固有性を追究する。
研究課題２：Likert や Malik の経営学や Wittmann の数学教育思想に基づいて，数学教育における教室文化を対比的に分類する。
研究課題３：構成主義，Vygotsky 理論などの社会文化理論，数学観，言語学の観点から課題２で示唆された「在るべき」教室文化のもつ数学学習上の意義を明らかにする。
研究課題４：数学教育における教室文化の実践事例を挙げて，ディスコース分析する。そして，数学教育における教室文化の特徴を例示する。
研究課題５：数学教育における教室文化の文化化を定義し，記号論的観点から数学的活動との関係を考察にする。さらに，教室文化の文化化をデザインするための理論を事例と共に究明する。

１.２ 本課題の背景

課題の背景にある研究状況について述べる。筆者が初めて教室文化という言葉を知ったのは，十数年前当時筑波大学教授の三輪辰郎による米国滞在記の中であったと記憶している。わが国とは異なる教室や生徒の様子が，文化的な違いとして綿密に記述されていた。そして，教室文化の差異を実感したのは，海外での授業観察の経験であった。それとともに，わが国の少人数指導が，伝統的な教室文化において実践されていることに違和感をもった。

文化という用語は，かなり広義である。文化という言葉は，ラテン語の“cultura”に由来し，本来は「耕すこと」や「栽培」を意味していた。それが18世紀には転じてドイツ語„Kultur“となり，教養的な意味が強いものとなった。そして，英語“culture”は文化として，社会や集団に固有の生活様式を意味するものとなった（下中弘，哲学事典，p.1239)。本研究における教室文化は，学校教育における日常の教室での学習指導の様式や学習状況，価値観を示している。 数学教育における教室文化の意義を指摘した数学教育学者は，Bauersfeld（1992a, 1992b, 1995）である。「教育目的に適う数学学習や個人発達がなされる教室文化の特徴は何か。また，さまざまな教室文化は，生徒の数学学習にどのような影響を及ぼしているのか」(1995, p. 281)という課題をあげた。

また，Seeger, Voigt & Waschescio （1998）は，"The cultur of the mathematics classroom" の序文において，次のような課題をあげている（pp. 1- 2)。

・教室文化と文化の関係，文化の共有と創造の関係，特定文化の共有と大きな

文化の共有の関係。
・教室における指導過程を，主に間接的な教授・学習過程における，文化化の過程として概念化すること。
・共同的活動の文化として，数学学習のための教室とは何か。

これらの課題は，理論的観点と実践的観点からなっている。

まず理論的観点は，数学学習に対する観点の革新である。数学学習において，教室の学習集団はあくまでも便宜なのか，それとも本質的役割をもつものなのか。つまり，数学学習における教室がいかなる場所かという議論は，今日でも確定していない。ところが，授業研究は，教室や学級の存在を前提になされている。

数学学習は，個人の頭の中で行われるものというのが，従来の観点である。発見学習の源流となったのは，ソクラテスの対話法であるといわれている（Freudenthal, 1973, pp.99-108；青木一他，1988, p.618）。実際，プラトンの『メノン』（藤沢，1974）は，ソクラテスとメノンの召使いによる一対一の問答という形になっており，今日のような教室におけるコミュニケーションではない。Piaget 理論の構成主義までは，そのような学習観が基本であった。

この観点を一新させたのは，Vygotsky の理論である。「精神間から精神内へ」「外言の内言への内化」「模倣による学習」「発達の最近接領域」といった理論は，コミュニティーやコミュニケーションを第一義的にとらえ，学習における社会や文化の意義を強調している。このような観点に基づいた数学教育の研究は，わが国でも行われている（大谷，2002；吉田，1998, 2000）。

次に実践的観点は，教師が学級を経営し，算数・数学のカリキュラムや授業を開発するための指針を与えることである。これは，教師による「学級づくり」の課題である。

近年，少人数指導，能力別学級編成など教室の在り方が，ゆとり教育や学力向上のための教育政策としても取り上げられた。改革の対象が，学級や教室の編成に向けられたのである。これは，実践的な教育問題が，学級崩壊という形で現れたことへの対応でもある。

数学教育における授業や教室がもつ課題について，平林一栄（1987）は，次のように述べている。

《われわれの今日の授業，とりわけ算数･数学の授業は，物的生産の過程にアナロジーを求めていたのではないか。学校・教室は一つの「工場」にみたてられ，そこから出来そこないの「人間計算器」がドンドンと生産されていく―というのが，今日の算数・数学教育を風刺する，もっとも痛烈なカリカチュアーではなかろうか。

授業とは一体どんなプロセスなのか。教室というのはどんな場所なのか。われわれに「学校工場」以外の誇りうる授業や教室のイメージがあるのか。(p.14)》

教室における「授業とは何か」という素朴な問いに対する，明確なイメージが，教師に共有されていないというのが，現実の問題である。佐藤学（1996, pp. 20, 21)によれば，カリキュラムの科学的研究の創始者とされるシカゴ大学のJ. F. Bobbit（1876-1956）は，テイラーの「科学的経営の原理」をまるごと援用して，カリキュラムの科学的な作成と評価方法を論じた。テイラーの「科学的経営の原理」は，大工場のアセンブリ･ライン（流れ作業）を実現する原理（テイラー･システム）を提示したものである。J. F. Bobbitt のカリキュラム論における工場生産工程とのアナロジーは明瞭であるという。

したがって，それを越えたアナロジーは何か，またそれはいかなる学級づくりや授業を生むのかということが問題になる。この問題を，本研究は，学級経営の観点から教室文化の質的分類や, 教室文化の文化化の課題として設定した。

ここでは，ソシュールの言語学を起源とする記号論や Vygotsky 理論，これを基にした参加論を本研究の方法論として応用する。文化化とは，教師と児童･生徒が，教室におけるリソースを活用して，文化に適応していくことである。

本研究の重点は，規範的立場から数学教育における，在るべき教室文化を究明することである。これによって，数学学習における教室やその文化がもつ意義を明確にできる。

そのために，まず数学教育における教室文化とは何かを示す。これは，数学教育における教室文化の特質を明らかにすることである。ここでは，数学教育の研究成果のみならず，科学哲学やエスノメソドロジーなどの社会学を活用する。

また，学級経営の観点から数学教育における教室文化を分類する。これによって，数学教育における「学級づくり」の在り方を明らかできる。

そして，その考察の中で，在るべき教室文化を取り上げ，数学学習における意義を明確にする。そのためには，構成主義とともに，Vygotsky 理論などの社会・文化理論から教室における数学学習を考察することになる。また，数学観や言語学の観点から，教室文化の特徴を明らかにする。

さらに，教室文化の実践事例を挙げて，ディスコース分析し，考察する。最後に，図１のように，生命論的教室文化へと教室文化を文化化するための理論と事例を明らかにしていく。それらは，数学的活動の段階論や記号論などの理論から導出する。

これらの研究成果によって, 数学教育における教室や授業のイメージは何か,

また何であるべきかに答えることになる。つまり，「学校工場」を超えた授業や教室の理論やそのイメージを与えることが可能となる。

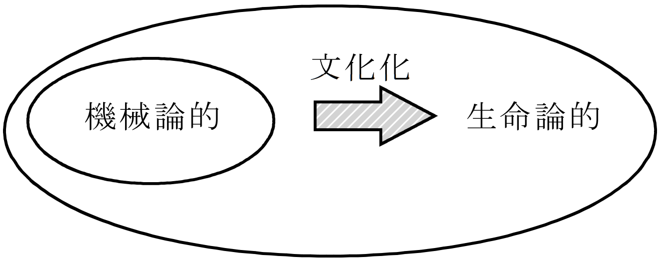


図 1

第２節　本研究の目的と方法

２.１　本研究の目的

本研究の目的は，数学教育における教室文化の在り方やその文化化につい規範的な提言を行うことである。社会･文化的観点から数学学習をとらえ，算数･数学の指導の在り方を考察するために，生活的文化と数学的文化が変容し，文化化がなされる場所としての教室文化を研究の焦点とした。

そのために，数学教育において，学級という学習集団における教室文化の意義や特徴を明らかにする。そして，社会・文化的な視座において，教室文化の文化化の視点から，数学教育のカリキュラムや授業の開発に活用できる実践的成果を得る。

実際，教師にとって，学級づくりは重要な仕事の一つである。また，そのことが児童・生徒の数学学習に大きな影響を及ぼしている。本研究では，このような実践的な問題を，数学教育において，教室文化をいかに文化化するべきかという数学教育学の課題とした。

さらに，数学学習という観点からは，算数・数学指導における教室の意義や教室文化の固有性は何かという問題がある。これは，教室は数学学習においてどのような役割を果たしており，どのような必然性があるのかという問題である。つまり数学教育における教室文化の固有性である。

数学は人類の社会的・歴史的文化である。そのような教育に関わる文化的課題に対しては，ミクロな視点からの研究とマクロな視点からの研究がある。

ミクロな視点からは，各個人の学習過程を考察することになる。また，マクロな視点からは，数学の歴史や文化と，一般の文化や社会との関わりの教育的価値を考察することになる。そこで，本研究はミクロな視点を拡大（ズームアウト）し，またマクロな視点を焦点化（ズームイン）した研究対象として，教室文化を位置づけた。

構成主義におけるミクロな視点から教室文化をとらえれば，教室文化とは合意領域("consensual domain")，あるいは広い意味での（非形式的なものを含めた）数学的知識と言い換えることができる。しかし，これを突き詰めただけでは，教室文化としての固有性は薄いものとなる。

これに対して，Vygotsky 理論を源流とする社会･文化的な観点から教室文化をとらえれば，教室文化は決定的に重要である。なぜなら，数学という文化遺産，あるいは社会における「学校数学」に，子どもの生活的文化が出会い，衝突し，文化化される場としての教室文化は，不可欠な概念だからである。つまり，数学学習における発達の最近接領域を形成しているものが，教室文化である。

数学的知識の構成における社会や文化の意義は，最近になって議論されるようになった。その先駆的な数理思想は，Lakatos（1976）による"Proofs and Refutations" の"The Logic of Mathematical Discovery" である。これは，オイラーの多面体定理をめぐる歴史的発展を教室における対話として再構成したものである。つまり，数学的コミュニティーの意義を論理的に示したものであり，数学学習において教室が不可欠であることを示したものである。

本研究では，教室の文化の実態を踏まえつつ，教室文化の規範的観点から，その文化化を考察していく。

２.２　本研究の方法

数学教育における教室文化をとらえる研究方法の理論的枠組みを示す。数学教育研究には，J. Piaget の認識論を源流とする構成主義がある。構成主義の立場では，教室における合意や知識の共有を重視する。このように，合意され，共有されるものが教室文化である。この理論によれば，教室における知識の構成における合意や共有の過程を分析する方法が適切である。（第３章）

また，L. Vygotsky を源流とする社会・文化理論である。この理論では，児童・生徒の学習は模倣に始まり，文化を自身の活動に適応し内化することとして説明する。児童・生徒は人類が創造した文化遺産に適応し，個人化しなければならない。教師の仕事は，児童・生徒が制度的数学を内化し，個人化するように指導することである。その文脈や状況が教室文化である。（第３章・第５章）

これらの立場は，一見しただけでは相反している。これは，授業つまり教室における学習指導が，個人の知識構成と数学的文化の内化という二つの相反する方向性をもっているいるからである。つまり，授業は，それらの方向性をお互いに補い，統合する複雑な過程である。そこで，このことを教室文化がもつ本質であるととらえ，「相補性」と呼ぶことにする。

相補性の観点に立つ教室文化の研究方法は,次の両方向の分析が必要となる。つまり，制度的な数学が構成される過程を分析すると同時に，文化的道具としての記号を中心として，教室におけるディスコースを分析することである。（第１章・第５章）

また，本研究方法の特徴は，社会学におけるエスノメソドロジーを教室文化の考察に応用し，さらにリッカートやマリックによる経営学の成果を学級経営の考察に活用する点にある。この中では，教室という学習集団や授業という複雑な学習過程を考察する方法論として，事例研究を行い，それによって分析と考察を進めている。（第２章・第４章）

そのような事例分析において，教室におけるディスコースという形式に注目した。ここで使用する枠組みは，F. de Saussure の言語学と L. Wittgenstein の言

語ゲームである。

Saussure 言語学におけるラングとパロールの思想は，教室における数学学習を考察する方法を与えてくれる。つまり，「学校数学」を F. de Saussure のラングと対比するなら，教室は，教師や子どもがラングとしての「学校数学」を知り，それを利用する場所であるとともに，「個人的数学」，つまりパロールを構成し，それらの整合を実践する場所でもある（佐藤学，p.6, 1996)。このような思想に基づいて，「数学的活動の段階論」や「意味の連鎖」を活用する。（第３章・第５章）

したがって，教室におけるディスコース分析が主要な研究方法となる。言語学におけるディスコースは，人間の発話そのものであり，話し言葉だけでなく，書き言葉も含まれる。教育研究では談話と訳され，コミュニケーションの言語活動を指している。

数学教育においては，Sfard(2002)は，数学的ディスコースの要素として，次の 2 つをあげている。これらの観点では，L. Vygotosky の学習理論や L. Wittgenstein の言語ゲームの考え方が重要である。

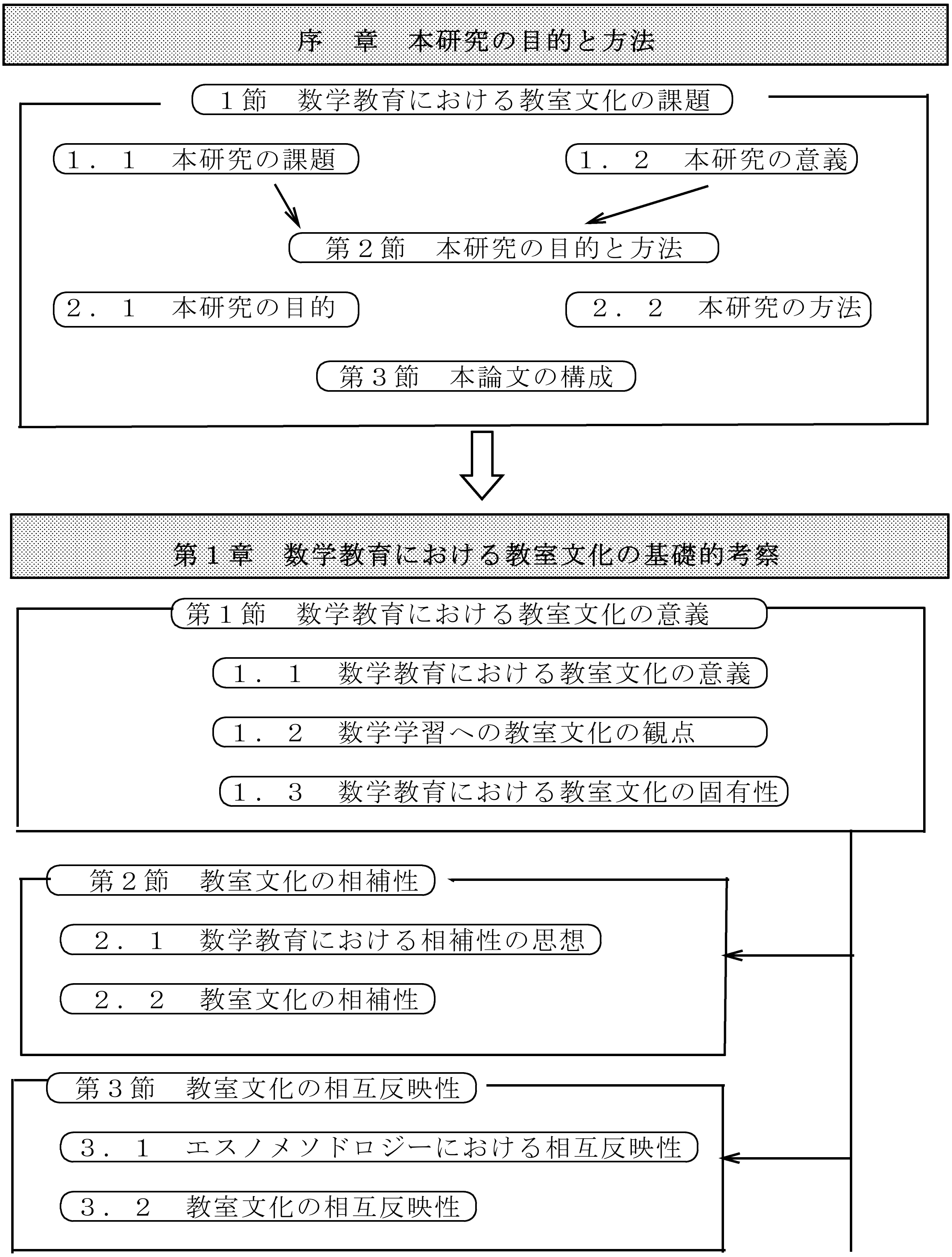
・コミュニケーションを仲介する道具としての記号的人工物。
・コミュニケーションを形成するためのメタ規則。これは観察者が構成するもので，ディスコースの参加者には暗黙のものもある。

（第４章・第５章）

It（Culture） is one of the worst concepts ever formulated. N. Luhmann

第３節　本論文の構成

《論文構成図》



第４節　教室文化の規範性

４．１　数学教育における社会・数学的規範

４．２　教室文化の規範性

第５節　教室文化の創発性

５．１　教室の相互作用による創発

５．２　教室文化の創発性

第２章　教室文化への学級経営の観点

第1節　教室文化と学級経営

１．１　学級づくりとしての教室文化

１．２　リッカートの経営分析

１．３　機械論ー技術論的アプローチ

１．４　生命論ー進化論的アプローチ

第2節　機械論的教室文化

２．１　教室文化における機械論の源流

２．２　機械論的教室文化

第3節　生命論的教室文化

３．１　数学教育における生命論

３．２　生命論的教室文化

第３章　数学学習における生命論的教室文化の意義

- 第１節　教室文化の構成主義的観点
  - １．１　教室文化への構成主義的観点
  - １．２　生命論的教室文化と構成主義
- 第２節　教室文化と社会・文化理論
  - ２．１　教室文化と社会・文化理論
  - ２．２　教室文化と発達の最近接領域
  - ２．３　生命論的教室文化と社会・文化理論
- 第３節　生命論的教室文化と数学観
  - ３．１　生命論的教室文化と数学観
  - ３．２　生命論的教室文化と Lakatos の数学論
- 第４節　生命論的教室文化の言語学的観点
  - ４．１　生命論的教室文化と言語
  - ４．２　言語ゲームとしての教室文化

第４章　数学教育の生命論的教室文化のディスコース分析

第１節　生命論的教室文化の事例

１．１　本質的学習環境

１．２　単元構成

第２節　数学教育におけるディスコース分析

第３節　生命論的教室文化のディスコース分析

３．１　平方数とピラミッド数

３．２　掛け算から２次方程式へ

３．３　算数のリズム

３．４　正の数・負の数

第５章　教室文化の文化化

第１節　教室文化の文化化

１．１　教室文化の文化化

１．２　数学的文化化と教室文化

１．３　教室文化の文化化におけるデザイン

第２節　数学的活動による教室文化の文化化

２．１　算数・数学的活動と教室文化

２．２　数学的活動の段階論

２．３　算数的活動における式の指導

第３節　教室文化の記号論的文化化

３．１　記号論における「意味の連鎖」

３．２　教室文化を文化化するための「意味の連鎖」

３．３　記号化における架空性

第４節　教室文化の文化化の理論と事例

４．１　「誤り」からの理解

４．２　「模倣」としての学習

４．３　「参加」としての学習

４．４　「儀式」としての教室文化

終　章　本研究の総括と今後の課題

第１節　本研究の総括

第２節　今後の課題

《序章の引用・参考文献》

和文文献

青木一・大槻健・小川利夫・柿沼肇・斎藤浩志・鈴木秀一・山住正己［編］（1988）.『現代教育学辞典』，労働旬報社.

大谷実（2002）.『学校数学の一斉授業における数学的活動の社会的構成』，風間書房.

佐藤学（1996）.『教育方法学』，岩波書店.

下中弘［編］（1971）.『哲学事典』，平凡社.

平林一榮（1987）.『数学教育の活動主義的展開』，東洋館出版社.

藤沢令夫［訳］（1974）.『プラトン全集 9　メノン』，岩波書店.

吉田香織（1998）.「Vygotsky 理論に基づく数学的概念の獲得過程の考察（4）－算数科の学習指導の考察を中心にして－」，『全国数学教育学会誌　数学教育学研究』，第 4 巻，pp.63-69.

吉田香織（2000）.「Vygotsky の「複合的思考の段階」に基づく分数の生活的概念の考察　－連合的思考を中心として－」，『全国数学教育学会誌　数学教育学研究』，第 6 巻，pp.139-148.

欧文文献

Bauersfeld, H.（1992a）. Integrating theories for mathematics education. *For the Learning of Mathematics* **12***,* 2, 19-28.

Bauersfeld, H.（1992b）. Classroom cultures from a social constructivist's perspective. *Educational Studies in Mathematics,* 23, 467-481.

Bauersfeld, H.（1995）. "Language game" in the mathematics Classroom: Their function and their effects. In P. Cobb, & H. Bauersfeld（Eds.）, *The emergence of mathematical meaning.* Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum.

Freudenthal. H.（1973）. *Mathematics as an educational task*. Dordrecht, The Netherlands: D. Reidel Publishing Company.

Lakatos, I.（1976）. *Proofs and refutations.* Cambridge, UK: Cambridge University Press.

Seeger, F., Voigt, J., & Waschescio, U.（1998）. *The culture of the mathematics classroom.* Cambridge, UK: Cambridge University Press.

Sfard, A.（2002）. There is more to discourse than meets the ears: looking at thinking as commucating to learn more about mathematical learning. In C. Kieran, & E. Forman, A. Sfard（Eds.）, *Learnig Discourse: Dicursive approaches to research in mathematics education*（pp. 13-57）. Kluwer Academic Publishers, The Netherlands.

Stigler, J. W., & Hiebert, J.（1999）. *The teaching gap: Best ideas from the world's teachers for improving education in the classroom.* New York: The Free Press.

第１章　数学教育における教室文化の基礎的考察

第１節では，数学教育における教室文化の定義を述べる。第２節では教室文化の相補性について，第３節では教室文化の相互反映性について，第４節では教室文化の規範性について，第５節では教室文化の創発性について，それぞれ述べる。これらは，教室文化の主要な特性である。

第１節　数学教育における教室文化の意義

１.１　数学教育における教室文化の意義

文化という言葉は，ラテン語の “cultura” に由来し，本来は「耕すこと」や「栽培」を意味していた。それが18世紀になって，転じて「教養」，そして「文化」となった。そこで，ドイツ語 “Kultur” は教養的な意味が強いものであり，英語 “culture” は社会や集団に固有の生活様式を意味するものとなっっている（下中弘，哲学事典，p. 1239）。

教育学においても，文化は重要で広範な言葉である。文化遺産や文化・教養的目的などの用語は，しばしば用いられるものの，明確な定義がなされている訳ではない。文化が注目されるされるようになったのは，文化人類学や文化心理学によるところが大きい。これらの観点や手法によって教育実践を分析することは，質的な研究として，教育学研究において不可欠なものとなってきた。

しかし，文化人類学と教育学とでは文化に対する捉え方に差異がある。文化人類学でしばしば取り上げられたのは，西欧文化とは異なる「未開の」文化であり，未知の文化である。つまり，異なる環境の中で発達した生活様式や習慣の実体である。

これに対して，一般に教育における文化は安定しており，個人が適応すべき文化遺産である。というのも，教育の過程とは，価値ある文化を存続させるために，個人が継承するものだからある(Nickson, 1992)。

このことは，文化のとらえ方に，記述的なものと規範的なものがあることを示している。Bishop(1988)は，C1　人々の生活様式の全体，C2　人工物の全体，C3　制約された人工物，C4　大衆文化　について，それらの差異を次のような表１にまとめている。

文化の概念

記述的	規範的
C1　文化人類学的－生活様式全体 －活動と人工物の全体	C1n　(C1)から不要な要素を引く
C2　知的・芸術的活動の成果	C2n　考え，語られる最良のもの
C3　芸術（C2 から哲学，科学，歴史を引いたもの）	C3n　最高の芸術（アート，音楽，絵画，彫刻など）
C4　レクレーション（余暇活動）	C4n　健全なレクレーション

C1　人々の生活様式の全体

C2　人工物の全体

C3　制約された人工物

C4　大衆文化

表 1

文化人類学や文化心理学では記述的な文化が，そして教育学では規範的な文化が，それぞれ研究対象となることが多い。実際，文化人類学や文化心理学で取り上げられる事例には，学校における教育実践とは異質なものが多い。

そこで，J.S. Bruner(ブルーナー，2004)による『教育という文化』から，教育学における文化の特質を見ていくことにする。

《文化はそれ自身，人間の作り出したものではあるが，それは人間の心独自の働きを形作るとともに，その可能性を生み出していく。この観点に立つと，学習と思考は常に文化的背景の中に位置づけられているし，常に文化的資源の利用に依存している。》(p. 4)

つまり，文化は，人間が作り出すという側面と，逆に人間の心の働きを形作り，可能性を生み出すという側面を持っている。そして，教育と文化の関係を，次のように述べている。

《教育とは単に巧みな情報処理にかかわる技術的なビジネスではないし，また単に

「学習理論」を教室に応用したり，教科中心の「アチーブメントテスト」の結果を利用したりするだけのものではない…。それは文化をその構成員の要求に適応させるとともに，構成員や彼らの認識のあり方を文化の側の要請に適合させるという，一つの複合した遂行作業なのである。》(pp. 56-57)

それでは，ブルーナー(2004)のいう「文化をその構成員の要求に適応させるとともに，構成員や彼らの認識のあり方を文化の側の要請に適合させる」というのはどういうことか。既成の指導法や学習理論の授業への適応や学力テストの点数を上げるための指導とどこが違うのだろうか。

このような問題を考察するために，数学教育では，文化という概念を基本的なものへと「焦点化（ズームイン)」しなければならない。その基本単位は，算数・数学の授業がなされる教室である。つまり，教室文化である。

教室文化は学校教育における日常の教室での学習指導様式や学習状況である。特に数学教育では，算数・数学の授業を念頭においている。つまり，「教室文化とは，学校教育での日常の教室における，児童･生徒と教師による学習と指導の様式」である。特に「数学教育では，算数・数学授業における教室での学習指導の様式」を示す。

教室文化には，人類の知的遺産や教養，あるいは文化人類学における民族文化とは異なる特質がある。つまり，固定的なものあるいは特異なものよりも，むしろ柔軟で，可塑性をもったものである。主として，意味をつくる活動によって形成される。しかも，それは，無意識であることが多い。

これは，文化心理学における文化の概念に近い。北山忍(1997)は，次のように述べている。

《心のプロセスの多くは，日常的現実に即して生きることを通して形成されると考える．日常的現実は，そこにある社会の歴史を通じて築かれ，蓄えられてきた習慣や公の意味の構造などから成り立っている．このような習慣には，会話のスクリプト，さまざまな儀礼から，子育てや学校教育における慣行，さらにはより広く社会制度などが含まれる．また，公の意味の構造には，そこの社会にあるイデオロギーや人間観などが含まれる。これら両者をあわせたものを，ここでは文化と定義する.》(pp. 21-22)

このような観点から，ある社会集団において，個々人の行為から形成される，日常的現実における慣習，公の意味構造が文化である。数学教育では，算数・

数学の授業において，教師や児童・生徒が算数・数学に関わる行為から形成される，教室の日常的現実における慣習，そして学校制度やカリキュラム，教科書などからなる公の意味構造が教室文化である。

１.２　数学学習への教室文化の観点

算数・数学の授業において，教室は数学学習の場である。従来，数学学習は，行動主義や認知理論のように，主として個々の児童･生徒への視点から考察されてきた。これに対して，集団における数学学習の社会･文化理論は，L.Vygotsky の理論を源流としている。*"Thought and Language"*（1986）では，次のように述べられている。

《今日子どもが，共同でできることは，明日には，一人でできるようになる。つまり，良い指導とは，発達の前を進むときだけある。指導は，下限に目を向けるものである。つまりある計算指導をするには，子どもが最低限の機能に成熟していなければならない。しかし，同時に上限を考えなければならないということである。つまり，指導は，過去にだけではなく，未来に目を向けなければならないのである。》（pp. 188-189）

これは，教室における学習集団の意義と共に，文化としての指導内容の系統性や体系性，知識のネットワークを強調しているのである。また，『発達の最近接領域の理論』（ヴィゴツキー，2003）では，次のように述べられている。

《高次精神機能の発達の基本法則をつぎのような形に定式化しました。あらゆる高次精神機能は子どもの発達において二回現れます。最初は集団的活動・社会的活動として、すなわち、精神間機能として、二回目には個人的活動として、子どもの思考内部の方法として、精神内機能としてあらわれます。

ことばの発達の事例は、この点の問題全体にたいする枠組みとなりえます。ことばは、はじめは子どもとまわりの人間とのあいだにコミュニケーションの手段として発生します。その後、内言に転化するようになってはじめて、それは子ども自身の思考の基本的方法となり、子どもの内的精神機能となります。ボールドウィン、リニヤーノおよびピアジェの研究が示したように、まずはじめ子どもの集団のなかに口論が発生し、それとともに自分の考えを論証しようとする欲求が発生します。そしてその後にはじめて、子どもが自分の考えの根拠を意識化し、確かめることをおぼえるのを特質とする、内的活動の独自な素養としての思惟が子どもに発生します。「私たち自身も言葉を喜んで信用しますが、コミュニケーションの過程でのみ、考えを検討し確認する必要が生ずるのです」とピアジェは語っています。》（pp. 21-22）

「集団的活動・社会的活動から個人的活動へ」「精神間機能から精神内機能へ」という定式は，数学学習における教室の意義を示しており，教室文化を考

察する原点となる。
　また，数学教育学においては，構成主義における独我論を回避するために，社会的相互作用や社会・文化理論を取り入れた社会的構成主義がある。Bauersfeld （1992a）は，「社会的構成主義からみた教室文化」の中で，次のように述べている。
《教室における研究の基本的方向は，急進的構成主義における個人の構成と，教室の社会的相互作用の過程における社会的次元の役割を統合し，両立させることである。》（p. 467）
　そして，学習そのものを「実践共同体への参加」ととらえる理論は，Lave & Wenger （1991） の状況的学習論である。これは，教室における学習を意義づけるものである。
《新参者が知識や技能を習得するには，共同体の社会文化的実践へと十全参加しなければばならない。》（Lave & Wenger , 1991, p. 29）
　実際，Bauersfeld（1995）は，Lave & Wenger の状況的学習論に基づいて，教室という共同体における社会文化的実践という立場から文化をとらえることで，「数学教育における教室文化」を考察している（p. 281）。
　また，Bruner（1996） は"The culture of education" の中で，「文化心理学（cultural psychology）」を強調する。つまり，既に述べたように，文化は人間が作り出すという側面と，逆に人間の心の働きを形作り，可能性を生み出すという両面を持っている。つまり，記述的な文化と規範的な文化が深く関連しているという観点である。
　そこで，ブルーナー（2004）は，教育への「心理－文化的アプローチの原則」として，8つの原則(tenets)を上げている。

1. 見通しの原則 (The perspectival tenet)
2. 制約の原則 (The constraints tenet)
3. 構成主義の原則 (The constructivism tenet)
4. 相互交渉の原則 (The interactional tenet)
5. 外在化の原則 (The externalization tenet)
6. 道具主義の原則 (The instrumentalism tenet)
7. 制度の原則 (The institutional tenet)
8. アイデンディティと自尊心の原則 (The tenet of identity and self-esteen)
9. 物語の原則 (The narrative tenet)

　これらの原則は，社会学や文化人類学，文化心理学などの観点を取り入れ，意味

に対する意識や反省，他者との対話や交渉を強調したものとなっている。それぞれの原則を説明する。

１．見通しの原則 (The perspectival tenet)は，「人間の思想の解釈的、意味作成的側面にハイライトを当てることになるが、同様に他方で、精神生活というこの深く人間的な側面を養成しようとするところから生ずる不調和という固有のリスクをも認めているのである。教育を、なんらかの危機をはらむ作業にもさせるし、またすさんだルーティーンとしての作業にもさせる、それは教育のもつヤヌス神的二面性によるのである」(p. 19)。これは，文化が事実や命題，事象や現象に意味を与え，解釈や理解を可能にしていることである。教育においては，この原則から文化的目的が導かれるし，また危険性もはらむことになる。

２．制約の原則 (The constraints tenet)は，人間が意味をつくる形態が，2つの制約を受けているという原則である。「第一は、人間の精神機能のしかたそのものの性質として本来的に備わっているものである」(p. 19)。そして，教育はこの制約を超えるところにあると述べている。

《生得的な資質と思うかにかかわらず、我々にヴィゴツキーが「発達の最近接領域」と呼んだもの、つまり資質を超えて進む方法を見つける能力を持っているようである。プラトンの『メノン』*Meno* における有名な奴隷少年は、ある「数学的洞察」が実際可能であった（少なくとも主人のソクラテスから尋ねられた問いへの答えとしては)。彼のこの洞察はソクラテスの質問なしには可能だったろうか。

このことがもたらす教育上の示唆は大きいし、また複雑である。もし教育学が人間にその「生来的な」素質を超えて進む力を与えるのなら、それは文化がそのために発達させてきた「道具一式」を後世へ伝えてゆかなければならない。言うまでもないことだが、現代のそこそこ立派な大学での数学専攻生なら誰しも、たとえば、あの微積分学を「発明」したライプニッツよりも数学がよくできるーつまり我々は先達の巨人たちの肩の上に立っているのである。》(p. 22)

第二の制約は，言語や表記システムによる制約である。「第二のものは、人間の心にとって使用可能となるシンボルシステムによって一般的に課せられてくる制約ー言わば言語の本来的性質によって課せられる制約ーについてであった」(p. 23)。

３．構成主義の原則 (The constructivism tenet)は，数学教育における構成主義(Cobb, 1994a)として知られている原則よりも，むしろ社会構成主義の原則である。

《現実の構成とは、伝統と、思考様式という文化的道具一式とによる産物である。この意味で教育というものは、子どもたちが意味形成と現実構成にあたって文化的道具の使用法を学習するのを援助し，彼等が自分の居場所としての世界へよりよく適応してゆく変化の過程で必要に応じて援助するものとして考えられねばならない。》(p. 25)

４．相互交渉の原則 (The interactional tenet)は，「文化とはどういうものか、そしてその文化が世界をどう捉えているかを子どもが発見するのは、原則的には他者との相互交渉を通してである」(p. 26) ということである。この原理は，数学学習における教室の意義として重要である。

《教育への文化的でかつ心理学的なアプローチから、明らかにされてきているもっともラジカルな提言の一つは、学級というものが、相互に学習しあう者からなり，そこでのオーケストラの進行を司る教師がいる小集団として捉え直されるということである。》(p. 28)

５．外在化の原則 (The externalization tenet)は，「外的に具体化する」(p. 29) ことである。図や文字や記号などによる外的表現をすることである。

《具体的外在化は認知活動をその暗黙性から解放し、それをより公共的で、より折衝可能であり、「連帯的な」ものにする。そして同時に認知活動をそれにつづく熟考とメタ認知につながりやすいものにする。おそらく外在化の歴史において最大の画期的事件は、「リテラシー」の出現であり、それは思考と記憶を、粘土板や紙の上に「外在化」させた。》(p. 32)

この原則において，教室文化に関連する規範について，次のように述べられている。

《学校の教室は、しきたりを作る上では、明らかに法にはかなわない。しかしそれは長期にわたって継続する影響をもちうる。我々が、身につけている思考とたしなみの習慣というものは、今ではほとんど忘れられてしまった教室の中で、一人の特定の教師によって培われたものなのである。》(p. 31)

６．道具主義の原則 (The instrumentalism tenet)は,「教育は個々人の生活において道具として働くことを知っているが、それらは直接個人にという意味においてよりも、文化とその種々の制度として道具的役割を果たす」(p. 33) ということである。さらに,文化心理学における学校について,次のように言及している。

《文化心理学の主要な教育原則の一つは、学校が文化から「独立して在るもの」とは決して考えられないということである。学校が何を教え、実際に生徒にどのような思考様式と「発話レジスター」を培おうとしているかは、学校が生徒の生活と文化の中にどのように位置づけられているかということと切り離してはありえない。》(p. 36)

７．制度の原則 (The institutional tenet)は,「進んだ世界では教育は制度化されるにつれて、他の諸制度の働きやそれが必然的にもたらすものと同じように作用し、すべての制度に共通する問題に悩むこととなるというものである」(p. 38)。そして,学校教育制度の研究状況は,次のような状況である。

《学校教育はいかにその状況的性質が複雑であり、社会的経済的風土の変化にさらされているいるとしても、学校教育制度についての「人類学」に向けての系統立った研究がいかに少ないかは驚くほどである。》(p. 43)

８．アイデンディティと自尊心の原則 (The tenet of identity and self-esteen)は,「人間の経験において、多分唯一のもっとも普遍的なものは、「自己」という現象であり、教育がその形成に決定的な力を持つものである」(p. 46) というものである。

９．物語の原則 (The narrative tenet)は,「人間が世界についての自分たちの知識を体制化し、管理し、実際に現前の経験をも構造化する」(p. 52) ために,「人々とその境遇を扱う」(p. 52) ための原則である。これには,論理－科学的思考と物語（ナラティブ）的思考がある。

《我々は自分たちの「生」を（他人に対してと同じく自分対しても）ナラティブの形式で代表させているのである。》(p. 53)

数学教育における文化心理学について,Lerman(1996)は,「発達の最近接領域」を強調して,次のように述べている。

《学習は,理論／科学的概念として生じる。これは,発達の最近接領域 (z. p. d.)

において，つまりより知識のある人との関わりの中で，抽象から具体へと上昇する。この世界観では，教授と学習は一体のものである。》(p. 138)

さらに，Stigler & Hiebart（1999）"The teaching gap" では，「授業は文化的活動である」ことを強調している。

《授業のような文化的活動は，完成品として発明されるのではなく，長い時間の中で発展するものである。それは，文化の一部である憶測や信念の安定した関係網に一致するものである。》(p. 87)

このように，数学教育における教室文化が，数学学習において本質的に重要であることが認識されている。つまり，社会･文化理論による数学教育の「分析単位」として，教室文化には決定的な意義があることが明らかになっているのである。

１.３　数学教育における教室文化の固有性

本研究では，一般的な教室文化の一種として算数・数学指導の教室文化をとらえているのではない。数学教育における教室文化は，固有の意義をもつものとして考察している。その根拠は，数学の本質に関する数理哲学にある。

数理哲学は，数学の体系における論理や形式に関する論理主義，直観主義，形式主義だけではない。これらの哲学は，数学教育に大きな影響を与えてきたものの，数学が発展するダイナミックス（力動性）を説明するには不十分である。

本研究で着目するのは，むしろ，Karl Popper や Thomas Kuhn の科学哲学の影響を受けた数理哲学である。そのようなものとして，Imre Lakatos の数学論がよく知られている。これは，数学史研究の成果を取り入れ，数学が創られた歴史を合理的に再構成するものである。

《哲学の導きを欠いた数学史は盲目であり，また数学史の最も興味をそそる現象に背を向けた数学の哲学は空虚である.》（ラカトシュ, 1980, pp. 2-3）

Lakatos（1976）は，"Proofs and Refutations" において，Euler の多面体定理を例として，数学の歴史的発達の過程を，教室におけるコミュニケーションとして再構成して見せた。それは，次のような文章から始まる。

《対話はある架空の教室でなされている。クラスはある問題に興味を寄せている。》（ラカトシュ, 1980, p. 7）

この対話の中で，数学の発達過程における概念拡張のための「反証やモンスター排除」が提示され，数学的コミュニティーに固有の意義があることを示されている。これは，数学がたどった発展過程は，教室において再構成できるという，数学教育の観点を与えてくれる。つまり，数学教育における教室文化の固有性を示唆しているのである。

第２節　教室文化の相補性

２．１　数学教育における相補主義の思想

本研究では，数学教育における教室文化を定義するだけではなく，4 つの主要な特性を明確にする。まず，教室文化の相補性について述べる。

相補性の原理そのものは，N. Bohr が 1927 年のコモ講演「量子の要請と原子理論の最近の発展」で，量子力学を解釈する考え方として，発表したものである。量子現象における電子や光などの粒子は，ある時は空間を伝播する波として振る舞い，またある時はエネルギーをもつ粒子として振る舞う。このような量子現象は，日常世界や古典力学では矛盾しているように見える。そこで，量子力学では，互いに矛盾するかのように見える現象を互いに背反する記述様式のもとで現れる事象として受容し，把握したのである。これが，相補性の思想である（ボーア，1999, pp. 311-323）。

実際に，Bohr（1963）は次のように述べている。

《考察している対象の振る舞いにかんして異なる設定の実験によって私たちが手に入れる，見かけ上はたがいに相容れない情報は，あきらかに従来のやり方では相互に関連づけることはないけれども，（経験全体の包括的な説明にとっては同様に欠かすことのできないものであって,）それらはたがいに相補的であると見なしうるのです。》（p.124）

数学教育における相補性の思想は，ドイツの数学教育研究者 H.G.Steiner（1985）や M.Otte（1984）が導入したものである。Steiner（1985）は，相補性について次のように述べている。

《相補性の概念は，さまざまなレベルあるいはタイプの知識や活動の関係を理解するための道具である。それは，例えば「科学理論　対　日常知識」「メタ知識　対　原知識」「経験的　対　形式的」「個人的　対　社会的」「感覚　対　認知」といった対立する知識や活動で，システム論的統制の問題となるような関係である。》（p.15）

そして，Pattee（1982）が，"The Need for Complementarity in Models of Cognitive Behavior"の中で，相補性の概念が認知心理学の基礎においても，重要な役割を果たすという主張を，引用している。

《相補性のない記述様式で認知システムを説明できるという古典的な考え方は，自己矛盾や概念パラドックスに陥る。相補性はパラドックスを認識することでもある。その根源は主体・客体の二元論や決定論と自由意志のパラドックスである。…心理学者は，認識論的原理として相補性の基本的考え方を吸収するよう努力して欲しい。相補性というのは，決して明瞭なものではないが，豊かな可能性をもっている。相補性の原理は，心理学における二律背反を解消するこ

とではない。そのような二律背反の例としては，心と体，構造と過程，主体と客体，決定論と自由意志，法と統制などがある。逆に，…相補性の原理では，形式的には両立しない記述様式を同時に使うことになる。明白な矛盾を解決する代わりに，それを現実の側面として受け入れることなのである。》（Steiner, 1985, p.15）

つまり，Pattee（1982）が述べている相補性の原理というのは，心理学における二律背反を解消することではなく，そのパラドックスを認識し，形式的には両立しない記述様式を同時に使うことである。そして，明白な矛盾を解決する代わりに，それを現実の側面として受け入れるという主張である。

他方，Otte（1984）は「活動理論」から，認識のメカニズムをとらえ，相補性と人間活動の関係について述べている。そして，認知の問題の考察において不可欠な「知識とメタ知識」の記述がまさに相補主義の必然性を示すものであると述べている。

《活動理論によってのみ，相補性の認識論的意義を発展させ，利用することができる。他方，相補主義は，…活動理論を有害な還元主義から守り，同時に必要不可欠な相対的還元主義を可能性にする。認知の問題に関しては，われわれは知っているとはどういうことかを知ることなしに，知ることはできないのである。ある理論の概念を学ぶというのは，理論的な概念についての知識を得るときに他ならないのである（カテゴリー性，認知機能など）。メタ知識を得ることなしに，知識を得ることなどあり得ない。しかし，メタ知識はある点で発展の産物であり，他の点では必要条件でもある。したがって，知識とメタ知識は閉じた論理的体系として一様な記述で，完全に提示することも表現することもできないのである。》（p.15）

これらに対して，Lerman（1996, p.139）は，Ernest（1994）や Cobb（1994b）のいう相補性というのは，注意深く読むと，Steiner（1985）の使い方とは異なっていると批判する。つまり，Steiner（1985）は，理論と理論の相補性ではなく，理論と活動という異なる 2 つのレベルの対象における相補性を主張していると述べている。確かに，Steiner（1985）を見る限り，そうである。

しかし Pattee（1982）や Otte（1984）の引用を見ると，「二律背反」や「論理的体系における記述様式」に言及しており，必ずしもそうではないことがわかる。したがって，相補性は理論どうしも，異なるレベルも，両方の場合を含んでいるとしてよい。これらを厳密に区別することは実際的ではないし，現実にその必要性はない。

それでは，数学教育における相補主義は，どのように考えるべきなのだろうか。まず重要なことは，相補主義は，折衷主義ではないということである。折

衷主義は，異なる観点や理論において，矛盾点を無視し，都合よいところだけを取り入れて結合することである。これらは，科学理論として歴史的に批判され，科学哲学においては，一般に政治的判断と見られている。

つまり相補性は，還元主義的に単独の理論ですべての現象を説明することでないのみならず，折衷主義的な妥協を示しているのではない。数学教育研究において，本質的な思想なのである。

２．２　教室文化の相補性

教室文化は，教室における教師と児童・生徒が協同で構築する文化という側面と，教育文化や学校文化から規定される分析単位としての側面がある。また，教室文化そのものを解釈する観点として，Piaget 流の構成主義の立場と Vygotsky 流の社会･文化主義の立場がある。これは，数学学習においても，「構成」と「模倣」という背反する視点を与える。児童･生徒の「自力解決」を強調する指導と「関わり合い」や「教え」を強調する指導がある。また，クラス編成の在り方も，同質性を重視するものと異質性を重視するものがある。

これらの背反する教室現象を説明するには，3 つの方法がある。まず，還元主義である。ある観点や理論だけから整合的に解釈して，他の観点を否定して矛盾を解消してようとする立場である。次に，折衷主義である。それぞれの理論や観点の矛盾を無視して，それぞれの特徴を折衷したモデルを作る立場である。最後に相補主義である。それぞれの現象を受け入れて，それぞれの理論から解釈し，矛盾を解消する代わりに，それを現実の側面として受け入れる立場である。

相補主義というのは，あえて相矛盾する前提に基づいて議論することではない。それは，むしろ折衷主義である。相補主義では，教室における現実の現象を優先させ，矛盾するかのように見えても，より複雑性をもつ，全体的な枠組みの中で，教室現象を説明する立場である。このような立場は，今日の数学教育研究では重要な観点として，受け入れられるようになってきた（Lerman, 2006; Simon, 2009）。

つまり，教室文化には，さまざまな教室における教師や児童・生徒の行為からなる複雑性がある。これは，教室文化がもっている本質である。この複雑性を解釈するためには，相補主義の立場が不可欠なのである。そこで，教室文化がもつ複雑性を認識するために，その本質を教室文化の相補性としてとらえることにする。

第３節　教室文化の相互反映性

３．１　エスノメソドロジーにおける相互反映性

エスノメソドロジーは，もともと社会学者の Harold　Garfinkel が 1954 年シカゴ大学法学部のメンドロウィッツと共に，ストロッドベックの陪審員研究計画に参加して，論文を仕上げたとき思いついたものであった。その辺りの事情を Garfinkel（1968）は次のように説明している。

《「エスノ」という言葉は、ある社会のメンバーが、彼の属する社会の常識的知識を、「あらゆること」についての常識的知識として、なんらかの仕方で利用することができるということを指すらしい。…

スナバン族はおそらく民間療法において、彼らの療法特有の言葉を用いるであろうが、ぼくはそれと非常によく似たやり方で仕事をする陪審員たちに出会ったんだ。例えば、スナバン族であれば、民間療法をめぐり、さまざまな病気の原因や治療法について、しかじかのことを知っているとまわりから期待され、また自分もそれを知っていると主張する権利ももつだろう。そこには陪審員たちと同じような特徴があると思った。われわれの社会メンバーたちは、特に陪審員になるという状況において、事実や空想、仮説や推測、証拠や証明、審理や系統だった知識などを実際に考慮しなければならない。そういうときは彼らは自分と同じ状況におかれた人たちなら、互いに何を知っているか、何を処理すべきかなどに関して、当然相手が知っているものとみなしている。問題なのは、そうした知識が利用できるということなんだ。》（ガーフィンケル他， 1987, pp.14-15）

つまり，ある社会の中で成員が常識と考え，しかも使える知識を分析する。これが，エスノメソドロジーの基本的発想である。K.ライター（1980）は，そのような知識を「日常知（commonsense　knowledge）」と呼んでいる。また「社会的構造感（the sense of social structure）」という用語をしばしば用いている。

《エスノメソドロジーは，一般に＜日常知＞と呼ばれる三つの関連した現象についての研究である。それは，＜一連の身近な知識＞，＜日常的思考法＞，＜日常的リアリティ感ないし自然的態度＞である。…第三の　＜日常的リアリティ感＞すなわち成員の＜社会的構造感＞である。…

社会的構造感は，社会的世界が「自然な秩序」（natural　order）であるという感覚や思い込みである。「自然な秩序」は客体的であり，すなわちそれは「あそこにあって」人びとが出会ったり対応したりできる。「自然な秩序」は，個々人の知覚の産物ではなく，むしろ，それを知覚するそのやり方からは独立したある物と感じられる。》（ライター, 1980, pp.89-91）

このような思想は，教室文化の基盤にもなっている。その中でも，重要な用語に「相互反映性」がある。エスノメソドロジーにおける相互反映性は，"reflexivity" の訳であり，「文脈状況再帰性」と訳されることもある。

山田富秋（1987)は，次のように説明している。
《エッシャーの絵の中では、どちらの手がどちらの手を描いているのかわからず、結局二つの手が相互に相手の手を描き出しているのである。それと同じように、私たちのエスノメソッドは、個々具体的な場面における実践（プラシス）として「社会構造」を作り出し、また、「社会構造」は次に続く実践を行う土台となる。…ガーフィンケルは、これをリアリティの「相互反映性」（リフレクシヴィティ，reflexivity）と呼び、ヘルメスの輪にも似た生成する循環性である。》（pp. 315, 316）

高山眞知子(1987)は，相互反映性を「文脈状況再帰性」と訳して，次のように説明している。
《ここでの問題意識は、…「文脈状況表示性」によりコトバの意味が不確定・多様であるにもかかわらず、ではなぜ人びと（つまり一定の仲間うちや社会の成員）はお互いに叙述をかわすときにコトバを全部説明しなくとも「ツー、カー」、「ア、ウソ」と意思を疎通しあうことができるのだろうか、ということである。それは、人びとがその叙述を通して一つの共通の「リアリティ」を作り上げ、その内部に住んでいるつもりでいるからである。この「リアリティ」は、人びとがその内部でそれについて語れば語るほど、雪だるま式に確固とした現実感を帯びてくるのであり、逆に語られなければ溶けて消えてしまうものなのである。この「リアリティ」を、一つの環境、「文脈状況」とみなしたとき、この「リアリティ」と叙述との相互依存関係、相互増幅関係、相互敷衍関係、つまりフィードバック関係が、「文脈状況再帰性」である。》（pp. 334-335）

さらに，クロン（1996）は，「状況」について，次のように述べている。
《ある状況を記述することは、その状況を構築することである。再帰性（「相互反映性」）は、ある行為を記述することと、その行為を行うことが等価であることを、また、それを理解することと、その理解を表現することが等価であることを意味する。》（p.53）

教室の文脈状況は，「その都度」構築されている。教室における教師や児童・生徒の発言には，教室におけるリアリティや文脈を指し示すものがある。また教師は，そのような児童・生徒による行為や発言を理解して記述し，またそれを指示している。教師は，その都度「相互反映性」を意識しつつ学習指導をしているのである。

そして，教室の文脈状況は，教室文化として構築される。つまり，それぞれの児童・生徒や教師の行為や知識と教室文化は，相互反映性をもっており，お互いを構築しながら，成長しているのである。つまり，教室文化の構築のためには，それらの相互反映性に注目しなければならないのである。

３．２　教室文化の相互反映性

個々の児童･生徒の数学学習と教室文化の関係は，重要な教室文化の特性を示している。それは，エスノメソドロジーにおける個々の具体的な場面における実践と社会構造の関係と類似している。このような関係は，文化心理学における心と文化の関係と同じである。北山忍（1997）は,「相互構成」という用語を使っている。

《心は，文化に関与することを通じて形成され，同時に，文化は，心により維持・変容されることにより将来へと受け継がれていく．…つまり，文化と心との関係を探るにあたって，日常的慣習，公の意味構造などの文化の集合的要素と，心理的プロセスや構造との相互構成（mutual constitutuion）過程に着目する.》（p. 21）

児童・生徒による数学的知識の獲得や数学学習は，教室文化に参加することで実践され，また教室文化は，児童･生徒や教師の実践によって構築される。また，教室文化と学校文化や教育制度，教育環境や一般の文化などとの相互関係も同様である。教室文化がもつ，このような相互関係を相互反映性と呼ぶ。つまり，教室文化の相互反映性とは，個々の数学学習と教室文化における相互構築の関係である。

第４節　教室文化の規範性

４．１　数学教育における社会・数学的規範

数学教育の研究は，実在科学としての側面と規範科学としての側面を同時にもっている。数学教育の歴史や現状を調査・分析したり，実践の事例を解釈すること，また子どもの心理学的事実や社会的状況を考察することが実在科学としての側面である。規範科学としての側面は，数学教育の在るべき姿を哲学的に追究することである。

数学教育における教室の規範には，数学的規範と社会的規範がある。数学的規範は，数学の定義や公理，定理，命題に基づいた規則である。数学的な証明によって，論証される。また，社会的規範は，教室における行動のルール，発言の決まりなどである。説明や話し合いの仕方や，正しい意見の基準などもそうである。ただし，規範は必ずしも意識的で，明示的とは限らない。暗黙的に従っている規範もある。

さらに，Yackel & Cobb（1996）は,「社会数学的規範（sociomathematical norms）」を加えている。これは，次のような規範である。

《教室において，数学的な差異や数学的に有効だとか，エレガントとはどういうことか。また，何をもって数学的説明とし，数学的に正しいとするのか，と

いうのが社会数学的規範である。例えば，生徒自身が答えや考えを説明しなければならないというのは，社会的規範である。これに対して，何が数学的な説明なのかというのが社会数学的規範である。また，生徒が多様な答えを考えるように，というのは社会的規範であり，数学的に異なる答えとは何かというのは，社会数学的規範である。…例えば，問題解決について話し合っているとき，既に出されている答えとは違う答えを考えようというのが社会的規範であり，数学的に違うというのは，どういうことかが社会数学的規範である。》(p. 461)

実際に，社会数学的規範は，どのような算数・数学の授業にも見られる。これは，「教室において，数学的に異なるとか，数学的に正しいとか，数学的に有効だとか，数学的にエレガントといったことを，どう理解すべきか」(p.461)，また「どんな説明や理由が，数学的に受け入れられるかといったこと」(p.461)である。

例えば，「三角形の内角の和が 180 度である」ことは，小学校では角度を測ったり，実際に紙で角度を寄せ集めたりすることが，正しい説明なのである。このような説明の妥当性は，数学的規範や社会的規範ではなく，社会数学的規範である。このような算数・数学における実験・実測による説明は，社会数学的規範を根拠としているものが多い。

また，社会的規範について，Cobb & Yackel(1998)は，次のような例を挙げている。これは，社会的規範が，教室において児童・生徒がもつ信念になっていることを示している。

《児童・生徒は教師が何を望んでいるかを推測することが当たり前と思っており，自分が考えたことを述べてはならないと思っていることがある。》(p. 167)

《社会的規範の分析は，教室の社会的相互作用の正常性を焦点としたものであり，これが教室生活の文法を形成しているのである。》(p. 168)

そして，心理的観点から，社会的規範と社会数学的規範の違いを次のような表 1 にまとめている(p.166)。

社会的観点	心理的観点
教室の社会的規範	自分や他人の役割や数学的活動の本性についての信念
社会数学的規範	数学に対する信念や価値観

表 1

４．２　教室文化の規範性

規範とは，信念や価値観であり，判断の規準となるものである。文化を考察するとき，実在の文化を研究する立場と文化がもつべき規範を研究する立場がある。前者は，文化人類学のようにさまざまな文化の実態を調査し記述することになる。後者は，文化記号学のように文化の在り方や，あるべきパラダイムを追究することになる（竹内芳郎，1981; Bishop, 1988, pp.3-7）。

また，教室における規範は，教室文化の形成要素である。この規範は，教師や生徒が教室（授業）へ参加する構造を決定している。教室によっては，「元気よく手を上げましょう。」「大きな声で発表しましょう。」といった学習のルールが，掲示されている場合もある。ハンドサインも，これに含まれる。これらは，社会的規範の具体例である。

さらに，Cobb & Yackel (1998) が，クラスの全体討議での社会的規範としてあげているのは，「答やその理由を話す」「友達の意見をよく聞く」「賛成か反対をはっきり言う」「おかしいと思ったら，別の答えを考える」（p.167）などである。これらは，わが国の教室でもしばしば見られる規範である。

しかし，Cobb & Yackel (1998) が，強調しているのは，「教師は明確なリストをもって規範を協定するのではないし，そのリストが完成することもない」（p.167）ということである。つまり，社会的規範は，それぞれの教室に依存して協定されることである。また，ブルーナー (2004) の外在化の原則にあるように，「学校の教室は、しきたりを作る上では、明らかに法にはかなわない」（p. 31）ものである。

このように，教室にはそれぞれの規範があるという特性のことを，教室文化の規範性と呼ぶ。本研究では，教室文化の規範性を中心に考察を進めていく。つまり，教室文化の在るべき姿を究明する。特に規範性を取りあげるのは，次の理由がある。教室は学校教育の目標を達成するための場であり，教育目標は，文化の規範性を重視している。したがって，教室文化を考察するには，その規範性に注目しなければならないからである。

第５節　教室文化の創発性

５．１　教室の相互作用による創発

ブルーナー (2004) の相互交渉の原則にあるように，文化とはどういうものかを，子どもが理解するのは、他者との相互交渉を通してである (p. 26)。このような相互作用を中心に位置づける認識論には，H. Blumer(ブルーマー，1991)のシンボリック相互作用論がある。

シンボリック相互作用論は，3 つの前提に立脚している。

《第一の前提は、人間は、ものごとが自分に対して持つ意味にのっとって、そのものごとに対して行為するというものである。》(p.2)
《第二の前提は、このようなものごとの意味は、個人がその仲間と一緒に参加する社会的相互作用から導き出され、発生するということである。》(p.2)
《第三の前提は、このような意味は、個人が、自分の出会ったものごとに対処するなかで、その個人が用いる解釈の過程によってあつかわれたり、修正されたりするということである。》(p.2)

さらに，このような前提から，方法論への含意として，次のような 4 つの認識が導かれる。

《(1) 人間は，個人としてであれ集団的にであれ、自分たちの世界を構成する対象の意味にのっとって行為しようとする。

(2) 人間の結びつきは、その中で彼らがお互いに対して指示を行い、またお互いの指示を解釈するひとつの過程という形態を必然的に取るものである。

(3) 社会的行為は、個人によるものであれ集団的なものであれ、その中で行為者が、自分たちが直面する状況に気づき、それを解釈し評価するひとつの過程を通して構成される。

(4) 組織や制度や分業や相互依存関係のネットワークを構成する複雑な行為の連結は、動的なものであって、静的に固定されたものではない。》(p.64)

そして，人間が，対象の意味にのっとって行為することや，その意味が社会的相互作用によって形成されることは，教室における相互作用を考察するための前提になる。これは，数学教育では，相互作用主義と呼ばれるものである(Sierpinska & Lerman, 1996, p. 850)。

相互作用主義の特徴は，相互作用が発達のための手段なのではなく，相互作用と個人の発達は不可分であるということである。研究の焦点は，個人ではなく，ある文化における個人間の相互作用である。ここでは言語が，非常に重要である。言語は，現実を映し出す鏡ではなく，経験を形づくる鋳型である。

このような思想は，K. J. Gergen の社会構成主義に含まれている。西洋哲学における経験主義と合理主義という二項対立を乗り越えるものと主張するガーゲン(2004)は，次のように述べている。

《単独の個人は、決して「意味する」ことができない。意味が生まれるには、他者が行為を補足し、それが関係性の中で役割を果たすことが必要なのだ。つまり、コミュニケーションするということは、他者によって意味という特権を与えられることである。もし、他者がある発話をコミュニケーションとして扱わないならば、あるいは、もし他者がある発話を自分自身と関連づけることができないならば、そのような発話は無意味である。》(p.354)

《意味は、他者の行為によって創造されるし、また、制限もされる。…個人の最初の行為（発話、身振り、など）は、いかなる特定の補足的行為をも強制しない。すなわち、最初の行為は、単独では、論理的な拘束力をもたない。》(p.354)

数学教育における構成主義(Cobb, 1994a)では，当然ながら個人による意味の構成を前提としている。これに対して，単独の個人だけでは，意味を構成できないという主張は，重要である。実際に，教室において意味が創発される現実を観察すれば，主として教師あるいは他の児童・生徒の補足行為や関連づけがいかに決定的な役割を担っているかが，分かる。

数学教育における社会的構成主義では，構成主義と相互作用主義を，相補的に両立させる立場をとる(Bauersfeld, 1992a, p.467; 1992b; Cobb, 1994b, p.17)。教室の相互作用における意味の創発では，教室における教師の学習指導や児童・生徒の相互作用が決定的に重要である。このために，数学教育においては，構成主義と相互作用主義を統合して創発理論と呼ばれる(Cobb & Bauersfeld, 1995, p. 113)。

５．２　教室文化の創発性

数学教育における教室は，集団学習の場である。教室における社会的相互作用によって，数学的な意味や概念，信念，習慣が創発される。また，それらの創発は，教室文化の特性である。これを，教室文化の創発性と呼ぶことにする。

教室文化の創発性で重要なことは，学習集団に参加し，話し合いをすることが間接的な学びになるということである。児童・生徒は，教師や他者の話を注意深く聞くことで，数量や図形などの数学的思考とは何かを学ぶ。そして，教師や他の児童・生徒から，どのような答えが正しく，単純で，エレガントかということを学ぶのである(Sierpinska & Lerman, 1996, p. 851)。つまり，教室文化の創発性は，学習集団における社会的相互作用の意義に着目した特性である。

さらに，数学的概念の創発は，教師や児童・生徒がどのように，その概念の意味を理解するかに依存する。しかし，その数学的意味がどこで発生したのかを明らかにすることはできないこともある。数学の意味は，交渉によってつくられることが多いからである。そこでは，記号，状況や活動の解釈に同意する学習集団がある。その交渉の結果が，創発性をもっているということである。つまり，個々人の貢献が，相互作用によって，だれも考えも期待もしなかったようなものを生みだすことがある(Sierpinska & Lerman, 1996, p. 851)。

つまり，この創発性には，「話し合い(negotiation)のような相互作用を通じて、個人的寄与が、本人も含めて、誰もが予期しなかったような結果をだす」（平林一榮，2011, p. 10)ことを含めている。しかし，算数・数学の授業においてこのような現象は，さほど頻繁に起こるものではない。これは，授業における偶

然性だけではなく，教師の学級づくりや指導能力を必要とするからである。
坪田耕三(2003)は，次のように述べている。
《授業の中で子どもが，ある「問い」に出会ったとき，子どもには何かしらの見通しや答えの予想が思い浮かぶ。そしてその仮の答えに向かって様々な追究や議論がわき上がる。
時には対立し，時には一致した意見ともなるが，その予想に向かって，解決の方向に進んでいく。
そのうちに,はじめの予想や考えとは全く異なる答えが導かれることがある。すると，驚きをもってそれを受けとめることになる。
強烈な印象を残すことになるのである。
教材研究をし，一所懸命に指導案を書くのだが，実際の授業では当初の予想とは異なる展開になることがある。
だが，そのような展開を恐れずに，ドラマチックな展開として先生も授業を楽しむように心がければよい。》（p.28）
算数・数学の授業が予想と異なる展開となっても，ドラマチックに展開することを心がけ，教師がそれを楽しむことが大切だと主張している。これは，算数・数学の学習指導において，重要な教師の態度である。これは，教師が教室文化がもつ創発性を積極的に活用することの意義を指摘たものである。

第６節　第１章のまとめ

教室文化は学校教育における日常の教室での学習指導の様式である。数学教育では，算数・数学の授業を念頭においている。つまり,「教室文化とは，学校教育での日常の教室における，児童･生徒と教師による学習と指導の様式」である。特に「数学教育では，算数・数学授業における教室での学習指導の様式」である。
つまり，社会集団において，個々人が意味を構成する活動によって形成される日常的現実や慣習，そして公の意味構造が文化である。数学教育では，算数・数学の授業において，教師や児童・生徒が算数・数学の意味をつくる活動によって形成される教室の日常的現実や慣習，そして学校制度やカリキュラム，教科書などにおける公の意味構造が教室文化である。
そして，数学教育における教室文化は，数学学習において本質的な意義をもっている。なぜなら，社会･文化理論による数学学習の「分析単位」として，教室文化があるからである。
さらに数理哲学において，Lakatos(1976)は，"Proofs and Refutations" の中で，オイラーの多面体定理を事例として，数学の歴史的発達の過程を，教室におけ

るコミュニケーションとして再構成した。それは，次のような文章から始まる。《対話はある架空の教室でなされている。クラスはある問題に興味を寄せている。（ラカトシュ, 1980, p. 7）》

この対話の中で，数学の発展過程における概念拡張のための「反証やモンスター排除」が提示され，数学的コミュニティーに固有の意義があることを示している。これは，数学が発展する過程は，教室文化として再構成されるという，数学教育の本質的な観点を与えてくれる。つまり，数学教育における固有の教室文化を示唆している。

そこで，数学教育における教室文化がもっている特性を 4 つあげる。

①教室文化の相補性

これは，教室の複雑性を認識するための教室文化の特性である。相補性の原理は，N. Bohr が，量子力学を解釈する考え方として創案したものである。

教室文化は，教室における教師と児童・生徒が協同で構築する文化という側面と，教育文化や学校文化から規定される分析単位としての側面がある。また，教室文化そのものを解釈する観点として, Piaget 流の構成主義の立場と Vygotsky 流の社会･文化理論がある。これは，数学学習においても，「構成」と「模倣」という背反する視点を与える。児童･生徒の「自力解決」を強調する指導と「関わり合い」を強調する指導がある。また，クラス編成の在り方も，同質性と異質性，それぞれを重視するものがある。

これらの背反する教室現象を説明するには，3 つの方法がある。まず，還元主義である。ある理論や観点だけから整合的に解釈して，矛盾を解消してようとする立場である。次に，折衷主義である。それぞれの観点の特徴を折衷してモデルや理論にまとめる立場である。最後に相補主義である。それぞれの現象に合わせて，それぞれの理論から解釈し，矛盾を解決する代わりに，それを現実の現象として受け入れる立場である。

そして，教室文化の本性から相補主義が本質的である。相補主義というのは，あえて相矛盾する前提に基づいて議論することではない。それは，折衷主義である。相補主義では，現実の教室における複雑な現象を優先させ，矛盾するかのように見えても，全体的な枠組みの中で，解釈しようとする立場である。このような立場は，今日の数学教育研究では一般的に受け入れられるようになってきた（Lerman, 2006; Simon, 2009）。

つまり，教室文化には，さまざまな教室における教師の行為や児童・生徒の活動からなる複雑性がある。この複雑性を解釈するためには，相補主義の立場が不可欠である。このことから，教室文化は，本質的に相補性をもっているものととらえるのが，教室文化の相補性である。

②教室文化の相互反映性

これは，個々の児童･生徒の数学学習と教室文化の関係である。個々の児童･生徒の数学学習は，教室文化に関与することを通じて実践され，同時に，教室文化は，児童･生徒の学習により継承され，あるいは変容させられる。

この関係は，エスノメソドロジーにおける，具体的場面における実践と社会構造の関係と同じである。それは，日常的慣習，公の意味構造などの文化の集合的要素と，心理的プロセスや構造との相互構成（mutual constitutuion）過程に着目することである。またこの関係は，文化心理学における心と文化の関係と同じである。

児童・生徒による数学的知識の獲得や数学学習は，教室文化に参加することで実践され，また，教室文化は，児童･生徒や教師の実践によって形成される。また，教室文化と学校文化や教育制度，教育環境や一般の文化などとの相互関係も同様である。教室文化がもつ，このような相互関係を相互反映性と呼ぶ。つまり，教室文化の相互反映性は，数学学習と教室文化における相互構成の関係である。

③教室文化の規範性

これは，数学教育として教室の在るべき姿を追求する原則である。規範とは，信念や価値観であり，評価の規準となるものである。教室は学校教育の目標を達成するための場である。教育目標には，文化における規範性を活用することが含まれている。

つまり，教室における規範は，教室文化の要素あるいは，その一部である。この規範は，教師や生徒が教室（授業）へ参加する構造を決定している。教室によっては，「元気よく手を上げましょう。」「大きな声で発表しましょう。」といった約束事が掲示されている場合もある。これらは，社会的規範の具体的な例である。

しかし，「教師は明確なリストをもって規範を協定するのではないし，そのリストが完成することもない」。つまり，社会的規範や社会数学的規範は，それぞれの教室に依存している。このように，教室にはそれぞれの規範があるという本性のことを，教室文化の規範性と呼ぶ。

④教室文化の創発性

これは，学級という教室の学習集団の特質である。教室では社会的相互作用によって，数学的な意味や概念，信念，習慣が創発される。これを，教室文化の創発性と呼ぶことにする。

相互作用主義で大切なことは，文化に参加し，話し合いをすることが，意義ある学習になるということである。児童・生徒は，人の話を注意深く聞くこと

で，数量や図形などの数学的思考とは何かを学ぶ。そして，教師や他の児童・生徒から，どのような答えが正しく，単純で，エレガントかということを学ぶのである。つまり，教室文化の創発性は，学習集団における社会的相互作用の有効性に着目した特性である。

《第１章の引用・参考文献》

和文文献

ガーゲン，K. J.［著］／永田素彦・深尾誠［訳］(2004).『社会構成主義の理論と実践　関係性が現実をつくる』，ナカニシヤ出版.

ガーフィンケル，ハロルド他(1968). 山田富秋／好井裕明／山崎敬一（編訳1987),『エスノメソドロジー　社会的思考の解体』，せりか書房.

北山忍（1997).「２章　文化心理学とは何か」，柏木佳子他［編],『文化心理学－理論と実証』，東京大学出版会.

クロン，アラン／山田富秋・水川喜文［訳］(1996).『入門エスノメソドロジー　私たちはみな実践的社会学者である』，せりか書房.

下中弘[編］(1971).『哲学事典』，平凡社.

高山眞智子(1987).「訳者あとがき」，ライター[著],『エスノメソドロジーとは何か』，新曜社.

竹内芳郎（1981).『文化の理論のために－文化記号学への道』，岩波書店.

坪田耕三(2003).『坪田式　算数授業シリーズ①　算数楽しく　授業術』，教育出版.

平林一榮（2011).「数学教育学における認識論（続々）－相互作用主義についてー」，岩崎研究室.

ヴィゴツキー，L. S.［著]／土井捷三・神谷栄司[訳］(2003).『発達の最近接領域の理論』，三学出版.

ビショップ，アラン　J.[著]／湊三郎[訳](2011).『数学的文化化』，教育出版.

ブルーナー，J. S.［著］／岡本夏木他［訳］(2004).『教育という文化』，岩波書店.

ブルーマー，H.［著］／後藤将之［訳］(1991).『シンボリック相互作用論　パースペクティブと方法』，勁草書房.

ボーア，N. [著]／山本義隆編[訳］(1999).『ニールス･ボーア論文集１ 因果性と相補性』，岩波文庫.

山田富秋（1987).「あとがき」,『エスノメソドロジー－社会学的思考の解体』，せりか書房.

ライター，K.／高山眞智子［訳］(1987).『エスノメソドロジーとは何か』，新曜社.

ラカトシュ，I. [著]／佐々木力[訳］(1980).『数学的発見の論理　－証明と論駁－』，共立出版.

欧文文献

Bishop, A. J.（1988）. *Mathematical enculturation -A cultural perspective on mathematics education-*. Dordrecht, The Netherlands: Kluwer Academic Publishers,

Bohr, N.（1963）. *Essays 1958-1962 on Atomic Physics & Human Knowledge （Philosophical Writings of Niels Bohr, Vol. 3）*. Interscience Publishers Inc.

Bauersfeld, H.（1992a）. Classroom cultures from a social constructivist's perspective. *Educational Studies in Mathematics,* 23, 467-481.

Bauersfeld, H.（1992b）. Integrating theories for mathematics education. *For the Learning of Mathematics,* 12, 2, 19-28.

Bauersfeld, H.（1995）. "Language game" in the mathematics Classroom: Their function and their effects. In P. Cobb, & H. Bauersfeld （Eds.）, *The emergence of mathematical meaning.* Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum.

Bruner, J.（1996）. *The culture of education*. Cambridge, MA: Harvard University Press.

Cobb, P.（1994a）. Constructivism and Learning. In Husen, T. and Postlethwaite,N.（Eds.）, *International Encyclopaedia of Education 2nd Ed.,* Oxford: Pergamon, 1049-1052.

Cobb, P.（1994b）. Where Is the Mind? Constructivist and Social Perspectives on Mathematical Development. *Educational Researcher,* Vol.23, No.7.

Cobb, P., & Bauersfeld, H.（1995）. *The emergence of mathematical meaning.* Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum.

Cobb, P., & Yackel, E.（1998）. A constructivist perspective on the culture of the mathematics classroom. In F. Seeger, J. Voigt, & U. Waschescio（Eds.）, *The culture of the mathmematics classroom* （pp. 158-190）. Cambridge, UK: Cambridge University Press.

Ernest, P.（1994）. What is Social Constructivism in the Psychology of Mathematics Education. *Proceedings of the 18th International Conference for the PME XVIII,* Lisbon: Portugal.

Lakatos, I.（1976）. *Proofs and refutations.* Cambridge, UK: Cambridge University Press.

Lave, J., & Wenger, E.（1991）. *Situated learning: Legitimate peripheral participation*. Cambridge: Cambridge University Press.

Lerman, S.（1996）. Intersubjectivity in mathematics learning: A challenge to the radical constructivist paradigm? *Journal for Research in Mathematics Education*, 27（2）, 133-150.

Lerman, S.（2006）. Theories of mathematics education: Is plurality a problem? *Zentralblatt für Didaktik der Mathematik*, Vol. 38（1）, pp. 83-13.

Nickson, M.（1992）. The culture of the mathematics classrooom: An unknown quantitiy?

In D. A. Grouws（Ed.）, *Handbook of research on mathematics teaching and learning: A project of the National Council of Teachers of Mathematics*（pp. 101-114）. Macmillan Publishing Company.

Otte, M.（1984）. The Work of E. G. Judin（1930-1976） on Activity theory in the light of recent tendencies in epistemological thinking. In: M. Hedegaard et al.（Eds.）: *Learning and teaching on a scientific basis: methodoligical and epistemological aspect of activity theory of learning and teaching.* Aarhus, pp. 43-86.

Pattee, H. H.（1982）. The need for complementarity in models of cognitive behavior. In: W. B. Weimer, D. S. Palermo（Eds.） *Cognition and the symbolic processes. Vol. 2*. Hillsdale N. J., pp. 21-30.

Sierpinska, A., & Lerman, S.（1996）. Epistemologies of Mahtematics and of Mathematics Education. In A. J. Bishop, K. Clements, C. Keitel, J. Kilpatrick, & C. Laborde（Eds.）, *International Hnadbook of Mathematics Education Part 2*, Dordrecht/ Boston/ London: Kluwer Academic Publishers.

Simon, Martin A.（2009）. Amidst Multiple Theories of Learning in Mahtematics Education, *Journal for Research in Mathematics Education*, 40（5）, 477-490.

Steiner, H.G.（1985）. Theory of Mathematics Education（TME）: an Introduction, *For the Learning of Mathematics* ***5,*** 2.

Stigler, J. W., & Hiebert, J.（1999）. *The teaching gap: Best ideas from the world's teachers for improving education in the classroom.* New York: The Free Press.

Vygotsky, L. S.（1986）. *Thought and language.* The Massachusetts Institute of Technology Press: Cambridge, Massachusetts, London, Endland.

Yackel, E., & Cobb, P.（1996）. Sociomathematical norms, argumentation, and autonomy in mathematics, *Journal for Research in Mathematics Education*, 27（4）, 458-477.

第２章　教室文化への学級経営の観点

第１節では，教室文化と学級経営の関連について述べる。その上で，第２節では，機械論的教室文化の源流や問題点に触れる。そして，第３節では生命論的教室文化について明らかにしていく。

第１節　教室文化と学級経営

１.１　学級づくりとしての教室文化

学級経営は，教師の重要な仕事であり，「学級づくり」と呼ばれる。学級づくりは，授業に大きな影響を与える。もちろん，授業を通して学級づくりをしていくこともある。

例えば，坪田耕三（2005）は，「しっかりとした学級づくりの基盤に立って，日々の授業が質のいいもの　」（p.7）になるとして，授業づくりの条件を挙げている。

《子どもを見る目，教材を見る目，この両者がそなわって一人前の授業者になる。そのためには，しっかりした学級づくりの基盤に立って，日々の授業が質のいいものになっていかなければならない。

例えば，次の八つのようなことがよい授業づくりの条件になるのではないだろうか。

①　ねらいをはっきりさせること。
②　子どもの気持ちに寄り添うこと。
③　子どもたちが一緒に学び，深め合えるようにすること。
④　子どもの発想に感動すること。
⑤　教科の基本の考えを知っていること。
⑥　具体的なイメージが生まれるハンズオンの精神で授業すること。
⑦　発見的な学びにすること。
⑧　身近な教材を使うこと。　》（pp.7, 8）

これらは，学級づくりに関わる条件でもある。つまり，教師と「子どもたちが一緒に学び，深め合える」学級をつくることが重要である。

坪田耕三（2003）は，小学校 4 年の計算の順序についての例をあげて，学級の雰囲気や学びの風土について，次のように述べている。

《もしも，算数の時間に，「3 ＋ 9 × 2 ＝ 24」という答えを言った子がいたら，どうするだろうか。この答えは違っているのである。

先生が「違いますよ」と言うのだろうか。

それとも，まわりにいる子どもたちがこのことを自分たちで修正するのだろ

うか。
担任の先生は，どのような姿を望んでいるだろうか。
先生が修正するよりも，子どもたち同士で修正していければ，これに越したことはない。
きっと「違いまーす！」という子がいるだろう。
しかし，ただ，答えが違うことを大声で指摘して，それだけという学級の雰囲気であれば，それは少々寂しい。
共に授業を創るという姿勢はできていない。
「答えは 21 です」と訂正する子もいるであろう。
正しい答えを言ってくれる子がいても，それだけでは授業としては成り立たない。だから，先生としては「そうですね，この答えは 21 です」と言って済ますのはよくない。ただの答え合わせをしても間違った子に対して何の指導にもならないからである。
望むべきは，「24 と書いた人の気持ちがわかります」という子がいてほしいものである。そして，それを説明する子が登場すれば，なおいい。
つまり，たとえ間違った答えが登場したとしても，それを許容し，さらにその修正が，気持ちよく行われる雰囲気の学級でありたい。
例えば，こんなことを言ってくれればいいなと思う。
「24 としたのは，左から順番に計算してしまったからだと思います」
「だから，3 ＋ 9 ＝ 12 で，これを 2 倍して 24 にしてしまったんだと思います」
「たし算とかけ算が混じっている計算では，かけ算のほうを先にする約束があります。この場合は，9 × 2 ＝ 18 が先で，これに 3 を足して 21 になります」
こんな発言が優しい雰囲気の中で次々に登場する学級は，よい仲間となっており，よりよい学びの風土をもっているといえる。》（pp.74-75）
この例では，「間違った答えが登場したとしても，それを許容し，さらにその修正が，気持ちよく行われる雰囲気の学級」や「優しい雰囲気」の中での「よりよい学びの風土」について，述べられている。
そのような学級づくりとは何か，またそのために大切なことは何かである。例えば，教育実習生は，学級づくりの経験がない中で授業をする。また，既成の学級づくりを十分に活用できないために，準備した教材や指導計画が上手く機能しないことが多い。
例えば，ある小学校の教育実習生による，5 年「異分母分数の加法」についての研究授業である。まさに教材として実物を準備し，それぞれの児童が操作的な活動をしながら，問題を解決し，3 つの解法について話し合いをした。そ

して，教師は教科書にあるような「通分による加法」をまとめた。

このような実物を使った指導や実習生の綿密な指導計画からすれば，上出来の授業となることが期待された。しかし，現実は逆であった。それらが，ほとんど徒労に終わったのである。

まず最初のつまずきは，1L の枡に半分だけジュースを入れて，児童に提示したときだった。これは何リットルかを発問した。5dL という答えがまず出た。そして，0.5L という答えも次に出た。しかし，ついに $\frac{1}{2}$ L という答えは出なかったのである。これに，実習生は意外だったようである。児童は，学校で 3 年生から学んでいるとはいえ，日常生活において，量を表すために分数を利用する経験は乏しいのである。

しかし，それは予想していなかった出来事である。そこで，補助的な発問をして何とか児童から，$\frac{1}{2}$ L を引き出し，児童がこのような量の表現を理解するように，指導しなければならない。ところが実習生は，時間の都合もあって，それをあきらめ，「$\frac{1}{2}$ L と $\frac{1}{3}$ L ですね」と話した。そのため，児童が分数そのものを，どう理解してるかが不明確なまま授業が始まった。

そして，準備された紙に色を塗り，ハサミで切って，それらを合わせてみることで，児童は，答えが $\frac{5}{6}$ L となるという答えを出した。児童が，ジュースの量を紙に写し取り，加える活動は重要である。しかしそれがなぜ，$\frac{5}{6}$ L となるのかには，言及がなかった。そして，教科書にあるように，$\frac{1}{2}$ と $\frac{1}{3}$ を通分して加えるという答えが出た。そして，最後に $\frac{2}{5}$ L という答えが出た。正直にいって，少なくともこの最後の答えは，児童との事前の打ち合わせがあったと思われた。

そして，この 3 つの答えについて話し合うことになった。最後の答えは，「分母どうし，分子どうしを足したのだと思います」という意見が出た。また，「$\frac{1}{2}$ L に足しているのに，答えが，それより小さくなっているのはおかしい」という児童の意見を引き出して，第 3 の答えは誤りであるとされた。次に重要になるのは，第 1 の操作的活動による解法と通分による解法の関係である。これらが関連してこそ，算数的活動を通して指導する意義がある。

ところが，実習生は，「図を操作する答えは，どんな分数でもできるとは限りませんが，通分ならどんな分数でもできるので，通分して足すのがいいですね」とまとめてしまった。教室において，算数的活動を通して，通分の意味が構成されることはなかった。

これは，教材研究の浅さも原因であるものの，児童の考えを引き出すような学級づくりを経験していないことが大きな原因である。そのため，熱心な準備や指導が，それに似合うだけの成果を上げることができなかった。もちろん，実習生では仕方のないことであるし，むしろ教育実習としては，算数授業の奥深さや難しさを体験したことは，貴重である。

このような学級づくりの重要性は，米国においても同様である。Lampert (2001) は，教室における活動や関わり合いの規範を確立することを「教室文化の構築」と呼んでいる (p.51)。そして，自らの実践経験から，次のように述べている。

《学年の始まりをどうするかということから，指導が始まる。教師がまだ会ったことのない生徒，また生徒同士でも知り合いでない者が多い。どこから数学を始めるか，生徒を知ることや活動の計画を作ることが，課題となる。しかし，これらの課題は，生徒が教師の指導からどのように学ぶかを，教えるということである。私は，この課題を「教室文化の構築」と呼んでいる。というのも，それは活動や相互作用の規範を確立することだからである。それによって，教師は教えることができるようになり，生徒は学ぶことができるようになるのである。》(p.51)

つまり，わが国の学級づくりを，教室文化と呼んでいるのである。Lampert (2001)は教室文化の規範性を強調し，これを教室文化の構築の問題としてとらえている。また，教室文化の創発性に関連して，次のように言及している。

《教室文化を指導することで，学級全体に教える。この文化を維持するには，生徒個人やグループとの相互作用が重要である。》(p.51)

また，Hiebert et al.(1997)は，教室文化を「教室の社会文化」と呼んでいる。そして，「健全な社会文化」とは，「教室が数学的コミュニティー」となり，生徒が，その一員として参加することである(p.43)。問題は，教師がそのような健全な教室文化を構築するためには，どうするかということである。Hiebert et al.(1997)は，4 つの特徴をあげている。

《生徒が課題を数学の問題として実感するための教室の社会文化には，次の 4 つの特徴がある。

第 1 に，数学のアイデアは教室のお金ようなものである。つまり，参加者が発表するアイデアは，全員の学習に役立ち，答えや考えを保証するお金のようなものである。アイデアは評価され，試されることになる。それぞれのアイデアを皆で受け入れ考えるということは，そのアイデアやそれを考えた人への敬意の顕れである。

第 2 に，教室の社会文化の特徴は，生徒の主体的な問題解決である。生徒は，自分の方法が，全員が理解されるように工夫しなければならない。また，生徒はさまざまな解決方法があることも，わかっていなければならない。別の方法を考え，友

人と考えを共有する自由は，次の第 3 の特徴に関係してくる。

第 3 は，学習における誤りを認めることである。生徒も教師も，誤りは，理由を考える機会を与え，分析のレベルを上げるきっかけになるものとしてとらえなければならない。誤りは，包み隠してはならない。構成主義の立場から，それを使わなければならない。

第 4 の教室の社会文化における特徴は，正しさの根拠は教科の論理や構造にあることである。それは，参加者の社会的地位には依らない。つまり，説明の説得性や解答の正確さは数学の意味によるものであり，発表者の人気によるのではない。この認識は，学習者の構成主義的なコミュニティーを形成するための鍵である。》（pp. 9-10）

健全な教室文化の特徴は，次のように，まとめることができる。

① 生徒のアイデアの重視
② 生徒の主体的学習
③ 誤りを発展のきっかけとして認めている
④ 数学的根拠の重視

このような「健全な社会文化の恩恵」として，次のような点を挙げている。

《グループの一員として数学をするということは，コミュニティーに参加することである。コミュニティーでは，コミュニティーの目標とその目標に向けてともに学ぶ方法が共有されている。数学コミュニティーにおける目標とは，生徒が問題解決することであり，理解することである。共に学ぶ方法は，コミュニケーションと相互作用のための規範となる。数学コミュニティーの一員となって学ぶことは，目標を共有し，社会的相互作用の規範を受け入れることである。教室が数学コミュニティーになり，全ての生徒がそこに参加することがなぜ重要なのか。それは，このようなコミュニティーが，数学をより深く理解する環境となるからである。生徒が共に問題を解決し，意図的に解決方法に関わっていくことで，数学の理解を構成する機会が豊かになるのである。》（p.43）

つまり，健全な教室文化が構築されることで，教室が数学コミュニティーになるという主張である。これは，教室文化の相互反映性や規範性，創発性に着目したものである。まず，生徒の問題解決が数学コミュニティーとしての教室と相互に反映している点は，まさに教室文化の相互反映性である。また，「健全な教室文化の特徴」は，まさに規範であり，教室文化の規範性である。また，コミュニケーションや社会的相互作用を重視している点は，教室文化の創発性に注目している。

さらに，教室文化には，健全なものとそうでないものがあることになる。この問題は重要であり，健全な教室文化とは何かということを，さらに考察しなければならない。

１.２　リッカートの経営分析

教室文化の構築には，教師の学級経営が関連している。つまり，教師は学級の経営者としての役割を担っている。教師の学級経営の重要性が認識されている今日でも，マネージメント論は，教育の世界では少ない。

経営学の成果を学級経営に活用しているのは，上越教育大学の西川純である。西川(2006)は，「管理者としての教師」の仕事として，次のようなやり方が妥当かと問う。

《１．全体の作業の手続きを，単純な構成部分もしくは仕事に分解する。

２.それぞれの構成部分を実行するためにもっともよい方法を開発すること。

３．このような一つ一つの仕事を遂行するための，適切な素質と技術をもっている人間を雇い入れること。

４．定められた最上の方法で，これらの人々を各自の仕事ができるように訓練すること。

５．仕事の時間分析等で決められた妥当な速度で，一定の手順に従って従業員たちが既定の仕事が遂行できるような管理方式を整えること。

いかがであろうか？実は，これは「独善的専制型」の管理者の典型的な行動であり，業績の低い管理者の特徴である。》（p.187）

しかし，一般に算数・数学の授業を観察すると，頻繁に，そのような学級づくりの特徴を認めることがある。それは，次のような特徴である。

１．指導内容を単純な構成部分に分けて，スモールステップで指導している。

算数･数学の指導では，スモールステップが基本になっている。教科書の教材構成も，スモールステップになっている。例えば，小学校 5 年の「異分母分数の加法」を指導するには，「通分」，それには「最大公約数」，「公約数」「約数」，それには「倍数」と分解する。そして，逆に「倍数」からスモールステップで指導していく。このように指導内容を原子論的に分解し，単純なものから複雑なものへ，スモールステップで指導していく。

２．それぞれの内容を指導するために，最良でも孤立した指導法を使っている。

分解された個々の「内容」を指導し，それぞれの困難を克服するために孤立した，最良の指導法を適用する。操作的活動などの指導法や練習法を利用する。

３．能力や技能をもつ「できる」児童・生徒を中心に進めている。

授業を円滑に進めるために，「できる」児童・生徒が中心になる。Hiebert et al. (1997)の「健全な教室文化の特徴の④」とは逆に，学級における児童・生徒の社会的地位が「数学的な正しさ」の基準になりがちである。

４．児童・生徒が，教科書のやり方で問題を解く訓練を繰り返している。

多くの授業は，教科書を教えるものであり，「練り上げ」を経た後の問題解決は教科書のやり方に従ったものである。また，その解法を練習する。もちろん，これは学習効率のためには有利である。

５．児童・生徒が，正確に速くできるためのドリル練習をしている。

算数・数学科では，百マス計算など，効率的で効果的なドリル練習がしばしば採用されている。

６．個人の出来に対して，○をつけるなど，報賞を与えている。

「褒める」という指導は重要である。しかし，テストだけではなく，授業において，個々の児童・生徒の出来に対して単純な評価をすることである。

西川(2006)の「管理者としての教師」は，米国ミシガン大学の Rensis Likert（リッカート，1964)の『経営の行動科学』を引用したものである。利潤を追求する会社経営と，学級経営における算数・数学の指導が，類似した特徴を持っていることは意外なことである。しかし例えば，学力向上を目標とし，児童･生徒の算数・数学学力を伸ばすことが，教室における利潤であると考えれば，これは理解できる。もちろん，教室における利潤とは何かは，教室文化によって変わってくる。

さらに，西川(2006, p.186)は，リッカート(1968, pp.20-25)の『組織の行動科学』を参考にして，「独善的専制型」から「集団参画型」までの学級経営スタイルを，表１のように分類し，その特徴を示している。そして，「集団参画型」の管理者が最も業績をあげており，「相談型」「博愛的専制型」が続く。そして「独善的専制型」が最も生産性の低い管理者であると述べている(西川，p.187)。

教育の世界では，「管理」という言葉そのものが歓迎されない。ところが，リッカートの経営学には，学級づくりを考察するために，大きな示唆がある。西川(2006)の次のような指摘には，意表を突かれる。

《教育の世界では，独善的専制型が有効だと考えられている。よく言われる「指導なきところに進歩なし」などの言葉に端的に表れる。そのような誤解が生じる理由は，ちゃんとした測定がなされないためであるとリッカートは分析している。》(p.188)

《つまり独善的専制型をすれば，短期的には業績があがる。しかし，内部矛盾を秘めた業績である。それが表面化する 1 年度には管理者が交代するので責任は問われない。それが独善的専制型がよい方法だと誤解される理由である。》(p.189)

確かに，児童・生徒を思い通り動かしたいという欲求は，独善的専制型管理に類似しているとしても，どの教師もっている。しかし，長いスパンや内部の要因を考慮すると，独善的専制型より集団参画型の方が生産性が高いのである

（p.191）。

そして，教室文化の観点から，学級経営を見ていく必要がある。独善的専制型や集団参画型の学級経営は，どのような教室文化に分類できるのであろうか。

	独善的専制型	博愛的（温情的）専制型	相談型	集団参画型
教師が子どもに対してもつ信頼度	子どもを全く信頼していない	恩着せがましい信頼をもっている	信頼はあるが十分ではなく，意思決定の際には統制をもちたいと望む	あらゆることについて子どもを十分信頼している
勉強の仕方に関するアイディアのしくみ上げ	子どものアイディアを取り上げることはめったにない	ときに子どものアイディアを取り上げる	普通，子どものアイディアを取り上げる	つねに子どものアイディアを取り上げる
動機づけの方法	懲罰，ときに報酬	報酬，若干の懲罰およびその予告	報酬，ときに懲罰，若干の関与	参加を通じてやる気を起こさせる。集団で目標を設定し，評価させることによってやる気を起こさせる
責任感	教師はもつが子どもはもたない	教師はもつが子どもは少ししかもたない	子どもたちは，目標に向かって行動する	教師も子どもも自分の役割に関して責任感をもつ
目標の設定の方法	教師が決める	教師が決めるが，子どもの意見を聞く場合もある	子どもと話し合った後で，教師が決める	緊急の場合を除いて，全体で話し合って決める

表 1

１.３　機械論－技術論的アプローチ

数学教育学の研究に，経営学の成果を活用しているのは，ドイツの数学教育者 Wittmann （2001）である。これは，経営アプローチを数学教育思想に関連させる重要な研究である。そして，これは教室文化の本質を考察するために不可欠である。

Wittmann（2001）は，スイスの経営学者 F. Malik（1986, 2004）を参考にして，複雑な組織を経営するための 2 つのアプローチを示している。まず，機械論－技術論的（mechanistic-technomorph）アプローチである。

《このアプローチのパラダイムは，古典力学における機械論である。基本的に，機械はある目標や計画，機能によって構成される。信頼性や効率性は基本的な性質と機能によって決まる。…このパラダイムによる技術の成功は，圧倒的であり，工学分野をはるかに越えて，限りない範囲に適用されていった。…
このパラダイムから，次のような信念が生まれた。つまり，人間の目的にかなう，いかなる秩序も，このパラダイムなしには，もたらされないということである。》（Malik, 1986, SS. 37, 38）

この機械論－技術論的アプローチは，目標と計画を明確にして，信頼性や機能性に着目し，効率的に成果をあげていく経営方法である。これは，合理主義を追求する組織経営である。そのモデルは機械であり，これを支えているのは，技術である。機械論の伝統は，17 世紀の科学革命によって確立された思想である（カーニイ，1972）。そのことから，機械がもつ合理性は，組織経営にも適応できるという信念が生まれたのである。

これは，リッカート（1968）の「独善的専制型」の組織体システムに類似している。組織での意思決定が管理者によってなされる点などである。しかし，機械論－技術論的アプローチは，科学思想が根拠となっている。また，学級経営の観点からは，西川（2006）の「独善的専制型」の学級経営に近い。そこに見られるのは，子どもたちを教師の意のままに操縦したいという欲望であり，機械がもつ合理性は，そのまま学級経営にも適応可能という信念である。

１.４　生命論－進化論的アプローチ

生命論－進化論的（systemic-evolutionary）アプローチは，機械論－技術論的アプローチに対するものとして，Wittmann（2001）が言及している。これは，生命体のような自発性や自己生成の思想に基づくものである。

《複雑系の経営に対する生命論－進化論的アプローチは，さまざまな仮定から始まる。その基本的なパラダイムは，有機体のように自発的で自己生成の秩序をもつことである。自発的秩序は，また社会の中で発展する。人間活動によって，あるいはその結果として，成立するのである。しかし，それらは必ずしも，

当初の意図や計画，目標に対応しているわけではない。ところが，それは，高度に合理的なのである。》（Malik, 1986, SS. 38-39）

この生命論－進化論的アプローチは，管理者の意図や当初の計画，目標を柔軟にとらえ，臨機応変な対応をする。そして，組織の秩序が有機体のように自己生成するようなやり方を工夫する。また，参加者の自発性を重視しながらも，高度に合理的なアプローチである。これは，学級経営においては，西川(2006) の「集団参画型」と似ている。児童生徒が，教室における実践やコミュニケーションに参加することで，自立できるように指導することである。教室における教師と児童･生徒が，学習集団としての自律性や規範性をもっていることである。

生命論－進化論のパラダイムについて，Wittmann（2001)は，次のように述べている。

《生命論－進化論的パラダイムによれば，社会組織を導くように影響を与える唯一の方法は，その組織がもつ自己組織力と相互に作用することである。組織外部からの指導は，内部の過程に適合しない限り，上手くいっても無害に終わる程度にしかならない。さらに，外部からの制御は，わずかなものであっても，組織内の自発性は抑圧され，有害なものとなる。固有の基盤がない組織は，複雑な環境に対処することができない。多様性は，多様性によってのみ受け入れられる。》（p.8)）

このようなパラダイムを学級経営に適応することは，学習集団（吉本均，1995a, 1995b)を重視してきた，わが国の授業研究からは，当然のことのように思われる。改めて，その重要性が指摘されているように思われる。

実際に，Wittmann（2001)は，このパラダイムには東洋的な思想があるとして，次のように述べている。

《複雑系のマネージメントに対する生命論－進化論的アプローチは，西洋哲学では，ここ数十年間に発展したものである。それが，アジアでは 2000 年以上前に生まれていたことは，驚き以上のことである。老子や荘子は道教の哲学を見いだしている。道教の教えとは，「無為」である。これは，リーダーが，クライアントの自然力や傾注を侵すことなく，自己を組織し，自らを助けるために指導することである。…西洋社会では，今日でも機械論－技術論に根ざした思考と行動のパターンに捕らわれており，生命論－進化論の思想の広がりは遅れており，かなりの困難を伴っている。》（pp.8-9）

このことは，経営学や組織論ではあるものの，学校教育に置き換えれば，わが国の授業研究や，アジアの教育思想が近年，欧米で大きく注目されている背景にあるのであろう。

第２節　機械論的教室文化

２.１　数学教育における機械論の源流

近代科学の主要な思想であった機械論は，数学教育に大きな影響を与えた。数学教育における機械論は，次の 3 人の思想が源流となった。Wittmann（2001）は，「はじけた夢」として，次の 3 つの思想をあげている。

・デカルトの合理主義

機械論的世界観を提示したのは，フランスの哲学者 R. Descartes（1596-1650）である。著書『方法序説』（1637 年）等に著された合理主義や還元主義，心体二元論は，近代の哲学や科学に大きな影響を与えている。数学においては，解析幾何の発想だけではなく，数学教育そのもに大きな影響を与えている。

・ヒルベルトの形式主義

ドイツの数学者 D. Hilbert（1862-1943）は，公理主義を提唱し，Bourbaki の「現代数学」へとつながる構造主義の基盤をつくった。

・コメニウスの『大教授学』

J. A. Comenius（1592-1670）は，教授学の創始者である。近代の学校教育制度を構想し，子どものための教科書のもとになった『世界図絵』などを著した。

学校教育の歴史において，コメニウスの教授学は出発点であり，また基盤となっている。柳治男（2005）は，次のように述べている。

《産業革命が進行し、ワットの蒸気機関が織物工場や製粉工場で実用化され、生産性が向上し始めた時、時代精神として、機械のように教えることは、きわめて斬新な試みであった。ランカスターの学校には、工場主を中心として多くの見学者が訪れたという。

すでにこの学校が出現する 100 年もの昔、ボヘミア生まれのプロテスタント系の宣教師 J. A. コメニウス（Comenius）は、『大教授学』を発表し、学校をその当時のハイテク機械であった時計と印刷機になぞらえ、スピーディな大量教育の実現を期待していた。教授活動を機械になぞらえ、丸暗記を行うことが、積極的意味を持った時代がかつて存在したのである。》（pp. 45-46）

産業革命が進行するなかで，大衆への学校教育が不可欠となり，Comenius の教授学が，学校教育の基本思想となったのである。もちろん，これは今日でも，学校教育の仕組みとして継承されている。教室や教科書などは，その典型である。

これら 3 人の思想が源流となった機械論は，数学教育に深い影響を与えている。また，数学教育における機械論の思想は，スモールステップやドリル練習，プログラム学習といった行動主義の数学学習論と強固に結びついていることに留意しなければならない。今日のわが国では，「ゆとり教育」以降，そのよう

な指導法が大流行したことがある。

このように，近年の授業研究やカリキュラム開発における機械論の影響は，特に意識されないほど，大きい。佐藤学(1996)は，学校改革運動における機械論の影響について，次のように述べている。

《(20 世紀の) 学校改革の運動において最も大きな影響を及ぼし続けてきたのは，デューイを出発点とする子ども中心主義の系譜ではなく，産業主義の発展を基礎とする社会的効率主義の系譜であった．産業主義の工場や企業をモデルとする教育過程を最初に体系化したのは，カリキュラムの科学的研究の創始者であるシカゴ大学のフランクリン･ボビット(J. F. Bobbitt, 1876-1956)であった.》(p. 20)

《ボビットは，さらに，カリキュラムに組織する教育内容の選択基準を「実用性」に求め，大人の社会生活の「活動分析」によって，産業生活と社会生活に有用な知識と技能を確定する研究を進めている．この「活動分析」の方法は，同じく産業主義をモデルとして効率主義の教育を推進したチャーターズ(W. W. Charters, 1875-1952)の「仕事分析」に継承されている.》(p. 21)

当時のシカゴ大学哲学科教授といえば，J. デューイが有名である。しかし，実際には，Bobbitt の方が，学校改革運動に大きな影響を及ぼしたというのは，皮肉な現実である。これは，Wittmann (2001)が指摘するように，欧米の教育思想における機械論の根強さを例証している。

そして，当時の授業やカリキュラム研究と行動主義の結びつきについて，佐藤学(1996)は，次のように述べている。

《授業とカリキュラムに関する科学的研究は，1950 年代から 60 年代にかけて，行動科学と行動主義心理学の発展に支えられて推進されてきた.

1950 年代から 60 年代にいたるカリキュラム研究と授業研究の最も基底的なパラダイムを提出したのは，ラルフ・タイラー(R. W. Tyler, 1902-95)の『カリキュラムと教授の基礎原理』(1949 年)であった．タイラーは，ボビットやチャーターズの「社会的効率主義」の系譜を継承して，産業主義の工学モデルを基礎として進歩主義教育のカリキュラムと授業の「計画」と「評価」を理論化し定式化している．その定式化された理論は，一般に「タイラーの原理」と呼ばれ，カリキュラムと授業の計画と実践と評価の原型的なモデルとして影響を及ぼしている.》(p. 26)

《「タイラーの原理」は，行動科学を基礎とし，工学的発想によって教育実践の科学的統制を求める研究者と教師に広く浸透している．1960 年代から 70 年代の教育工学や新カリキュラム (教科内容の現代化) の発展の基盤には，この「タイラーの原理」が横たわっていた．なかでも，ブルームの「教育目標の分

類学（タキソノミー）」と「形成的評価」と「完全習得学習（マスタリー・ラーニング）」は，「タイラーの原理」を教育目標の階層的構造による特殊化とその評価研究の側面において発展させた研究として注目されている.》（p.　27）

B. Bloom のタキソノミー，形成的評価，完全習得学習は，数学教育においてもしばしば取り上げられてきた。今日でも，魅力を感じている教師は多い。相当の時間を費やして，スモールステップで学習を進めれば，多数の児童・生徒が算数・数学の内容を習得できるという，完全習得学習の考え方は，一般的なものである。

つまり，数学教育における機械論の伝統は，心理学における行動主義と結びつき，また教育工学，特に情報テクノロジーの発達とも相まって，強固に存続している。そして，進歩主義的教育や数学教育の現代化，Bloom の理論などを支えてきた方法論の中には，機械論の教育思想があったのである。

２.２　機械論的教室文化

今日の学校では，当然のものである教室や学級は，中世までの学校にはなかった。それでは，学校には何があったのか。どのような場だったのか。柳治男(2005)は，次のように述べている。

《中世の学校は多くの場合一つの部屋でしかなく、しかもそれは「教室(class room)」ではなく、「教場(school　rooom)」と呼ばれた。この「教場」の中にいる子どもは年齢がまちまちで､同年齢の子どもの集まりなどは見られなかった。われわれがカリキュラムといっている、教授活動の全体的な計画なども、まったく存在しなかったのである。》（p. 2）

《この教場としての学校に「学級」が存在しなかったということは、もともと生徒を年齢や能力で分けるという発想がなかったことを意味している。》(p. 32)

《誰が、何を、どこで、誰から学ぶのか、現代の学校ではあらかじめすべてが事細かに決められ、それが具体的には時間割に示されている。しかし、伝統的な学校では、細かな教授計画を事前に立てるということはなかった。教師は一人一人の生徒を相手に教えたわけであるから、極端な表現をすれば、目の前に座っている生徒が誰かによって、教える内容やレベルをその場で決めたのであろう。》（pp. 32-33）

そのような「計画性のない場当たり主義」（柳，2005,　p.　33)から，近代では当然のものになっているカリキュラムやクラスという概念が登場したのは，いつであろうか。佐藤学(1996)は，それは 16 世紀であったと説明している。

《1582 年のオランダのライデン大学の文献で，もともと「走路」を意味するラテン語の「カリキュラム」が，国王と教会の権力に強制された教育内容の課程を意味する言葉として登場し，ヨーロッパ各地の大学に普及している．授業

の単位や学級を意味する「クラス」という言葉が最初に登場するのも，1517 年のパリ大学に関する記述においてであった．16 世紀を通して，年齢と知識の習得の程度によって生徒を集団的に組織する方式が，各大学と学校に普及している。》(p. 9)

つまり，機械論の産物は，クラスや教室，教科書ばかりではなく，カリキュラムや時間割も，そうなのである。しかも，それらは単なる産物では終わっていない。

わが国の一斉指導は，Comenius の教授学の流れをくむものである。吉本均(1982)は，『大教授学』(1, p.216)を引用して，次のように指摘している。

《近代教授学の成立過程において授業に対する「集団」の積極的な意義を承認し、発見したのはコメニウスであった。…

コメニウスによれば、親がかりに自分で自分の子どもを立派に教育できたとしても、学校や学級という集団のなかで教育することがいっそう有効だと指摘しているのである。集団による授業を親の家庭における教育よりもいっそう有意義だとしているのである。そして、その専門職が教師というものにほかならないのである。

> 「私は、教師ひとりで百人近くの生徒を指導することは、可能である、と断言するばかりではありません。そうでなくてはいけない、と主張するのであります。なぜなら、その方が、教授者にとっても学習者にとってもまことに好都合であるからです。教授者の方では、目の前にいる生徒の数が多いほどますますよろこんで授業を推し進めて行くようになることは疑いありません…。そして、教師がますます熱心になるほど生徒の方でも活気づいてきます。生徒の側でも同じことで、数が多いほど楽しさも増しお互いに役立つことも多くなるでありましょう。」

教師一人が、子ども一人を教えるよりも、多くの子どもたちを一人の教師が教えることができるし、また、その方がいっそう楽しさも増し、活気づき、お互いに役立つことも多くなるというのである。教師対子どもという個別指導よりも、学校や学級で一斉に教えることの方が能率的でもあり、楽しい授業にもなるというのである。》(pp.59-60)

このような学校教育の中で，教師はクラスの子どもたちを思いのまま動かしたい，意のままに学級を管理したいという欲望をもつのは当然であろう。それは，「独善的専制」ではないにしても，多くの教師が持っている夢である。Wittmann (2001)は，先に述べた機械論思想の夢として，次のような自己概念があるとい

う。
《自らは高みに立って，ある分野の完璧な情報を集めれば，その分野をコントロールするために，その情報を使いこなすことができる，という思い込みである。》（pp. 7- 8）

このような願望は，決して珍しいことではない。実際，指導に熱心な教師の中には，指導法に関する完璧な情報を収集すれば，授業の中で児童・生徒を，思いのままにコントロールできるという信念をもっている人も多い。

このような機械論の産物や自己概念は，明らかにある教室文化を形成している。機械論の流れにある近代の教授学を基にして生まれた，学校教育や教室や学級が，機械論的な文化を担っているのは当然である。そこで，これを機械論的教室文化と呼ぶことにする。

その主な特徴をあげる。機械論的教室文化は，機械論的な教育目的に適合する教室における学習指導様式である。ただし，これは「必要条件」であって，「十分条件」ではない。

M1. 指導内容を単純な部分に分割して，スモールステップで指導する。

機械論の思想に従い，指導内容を単純な部分に分割する。ここには，ギリシャ哲学以来の原子論の伝統もある。また，それを単純なものから複雑なものへと学習を進める。これは，スモールステップの原理と呼ばれ，B.F. Skinner によるプログラム学習の基本原理である。これは，「誤りをできる限り少なくして目標に達するため，教材を細かいステップに分割する原理」（中島等，1974, p.49）である。

M2. それぞれの部分を指導するために孤立した指導法を使う。

指導内容には，それぞれの指導の困難性がある。機械は，技術に支えられている。技術論から学習指導を見ると，最良の指導法によれば，学習の困難は克服できることになる。しかし，それらの指導法は，それぞれに孤立しており，一貫性がない。

M3. 有能な児童・生徒を中心に授業を進める。

機械論的教室文化では，有能性が追求される。また，効率的に授業を進めるために，有能性が重視される。

M4. 教科書を教える授業。

わが国では，教科書の使用が法的に義務づけられている。しかし，その使い方は，「教科書を教える」と「教科書で教える」と区別される。教科書通りに学習指導することを「教科書を教える」といい，教科書を主な教材として工夫し学習指導することを「教科書で教える」としている。

M5. ドリル練習。

人間が機械的に反応するためには，練習が不可欠である。これを数学学習に適応したものが，ドリル練習である。「ソーンダイクの結合主義」では，「練習の法則」が重視される。「満足な経験を反復すれば，その経験を構成している刺激と反応の間の結帯を強化する」（中島等，1974, p.42）という法則である。

M6. 児童・生徒の出来に対して，報賞を与える。

児童・生徒の学習成果を褒めることは当然としても，外的動機づけとなるような報酬を与える。これは，「ソーンダイクの結合主義」では，「効果の法則」（中島等，1974, p.41）である。また，プログラム学習では，「即時フィードバックの原理」であり，「反応の正否は即時学習者に知らせる原理」（中島等，1974, p.49）である。

第３節　生命論的教室文化

３.１　数学教育における生命論

機械論の 3 つの思想における「夢がはじけた」と Wittmann （2001）は，述べている。これはどういうことだろうか。そのあたりの事情を詳しくは述べていない。しかし，それは，次のように説明できる。

デカルトの合理主義は，西欧における哲学の基盤となったものの，これを批判する思想や包括する思想が生まれた。イタリアの Vico（1668-1744）は「事実を知ることが出来るのは，その事実を作ったものだけである」と述べ，反デカルト主義を主張した（清水幾太郎［編］・大河内一男［著］，1979）。

また，自然科学においても，生物学とりわけ進化論の発展はデカルト的二元論を根本から覆すものとなった。人間は，猿はおろか単細胞レベルの生物から進化したという思想は，一般に西洋哲学の伝統からは，到底納得できなかったであろう。

さらに，重要なのは Sigmund Freud や Carl G. Jung 等による深層心理学や精神医学の発展である。心の問題は，数学を基礎とする合理的で客観的な観点から説明できるものではなく，不合理で主観的，物語的なものである。また，東洋の思想が西洋でも知られるようになると，全体性や集団性に着目する思想は，異文化の哲学として西洋にも知られていった。

そして，数学や物理学においても，数学基礎論，確率論や量子力学は，決定論や機械論を根本的に見直すきっかけとなった。ヒルベルトの形式主義は，自然数論を含む公理体系の無矛盾性や完全性を証明するプログラムとして構想された。しかし，チェコの数学者 K. Gödel（1906-1978）は，その構想は不可能であることを不完全性定理として証明した。これは，当時の数学界に大きな影響を与えた。

これに対して，オランダの数学者 L. E. J. Brouwer（1881-1966）やドイツの数学者 H. Weyl（1885-1955）は，直観主義（数学的構成主義）を提唱した。これは，オランダの H. Freudenthal（1905-1990）に大きな影響を与えている。さらには，近年のグラフ理論，組み合わせ数学の発展は，N. Bourbaki の構造主義では，十分に構想されていなかった領域となっている。

Comenius の『大教授学』は，機械論的教室文化を構築する重要な思想や方法論をもっていた。しかし，その後の Jean-Jacques Rousseau の自然主義，Johann Heinrich Pestalozzi の直観主義の方が，むしろ学校教育を普及させるための教育思想としてはるかに重視されるようになっていった。柳治男（2005）は，次のように述べている。

《ルソーやペスタロッチの思想を基盤に広がった進歩主義教育思想の立場から、モニトリアル・システムが行った丸暗記や機械的注入主義の教育は批判された。子どもの自発性、自主性を尊重した教育の重要性を訴える人々からは、現実に多くの貧しい子どもに「より早く」、「より安く」3R's を教えたにもかかわらず、批判され、歴史的に抹殺されてしまったのである。》（p. 45）

ここで述べられている進歩主義教育の思想を構築したのは，J. Dewey であって，Rousseau や Pestalozzi ではない。ただ，これらは深く関連している。それは，児童中心主義と呼ばれ，生活経験，子どもの自発的活動，問題解決を重視する観点である。そして，Dewey がそれらを集大成し，子どもを民主主義の担い手となるように育成する原則として位置づけたのである。つまり，現代社会の問題を民主的に解決する能力を育てる思想として構築したのである。

さらに，Jean Piaget の心理学研究や発生的認識論によって，子どもの思考や数学的概念の発達が科学的に説明されるようになった。そして，ロシアの心理学者 Lev Semenovich Vygotsky は，Piaget の心理学を批判的に発展させ，社会や文化をふまえた心理学の基盤を構築した。

これらの思想は，機械論の夢がはじけることによって形成されていったものである。生命論は，人間性を原理として多様な観点を相補主義的に考察する特質がある。数学教育に関連する，そのような思想を，総括的に数学教育における生命論としてとらえる。

３.２　生命論的教室文化

生命論の教育思想は，教室文化として結実させる必要がある。機械論的教室文化は，現在の学校教育の中に定着している。しかし，Wittmann（2001）が述べているように，生命論的アプローチが，西洋哲学において複雑系を扱うための組織論として集約されるようになったのは，ここ数十年のことである（p.8）。したがって，生命論の教育思想が，学校教育に実践的に定着することは，これ

らかの課題である。

数学教育における組織論としての基本単位は，教室である。ところが，構成主義においては，その教育思想を，個々の子どもの主体的学習として論じている。したがって，生命論が数学教育において実現されるためには，個々の子どもだけではなく，教室文化として受容されなければならないのである。

そこで，数学教育における生命論的教室文化を確立し，学習指導として実践するためには，教授原理を明確にしなければならない。生命論的教室文化に対する教授原理である。

数学教育における教授原理とは，数学的認識論に基づき，「数学的知識」を効果的に学習指導するための構想や基本方針を示した原則である。ここでの「数学的知識」とは用語・記号だけではなく，個人に内化された知識であり，概念や技能，態度などを含む広範なものである。

このような規範的な立場から，國本(2009)は，教授原理を次のように規定している。

《教授原理とは，数学教育学が学際的な科学であることから，関連科学で得られた研究成果や教育現場で得られた知見が集約された形でまとめられ，それを授業に生かせるための命題で有り，仮説である。だから，教授原理は規範的であり，かつ構成原理である。》(pp. 6-7)

そして，次のような，生命論に立つ数学教育の原理を挙げている。

(1) ピアジェの発生的認識論から得られる教授原理

1) 段階適切性の原理

2) 発生的原理

3) 活動的（能動的）学習の原理

4) 動的相互関連の原理

　ｱ) 大局的ネット化

　ｲ) 局所的ネット化

　ｳ) 内容や関係豊かな授業

5) 社会的学習の原理

6) 操作的原理

(2) ブルーナーの研究から得られる教授原理

1) スパイラルの原理

2) 表現様式の相互作用の原理

3) 基本的アイデア重視の原理

(3) その他の教授原理

1) 全体性の原理

2）　漸進的数学化の原理
3）　発達の最近接領域の原理
4）　定着の原理
5）　科学理論性（科学論的視点：数学の限界）の原理

これらの原理の中で，特に重要なのが「全体性の原理」である。これは，数学教育における生命論的教室文化における中心的な教授原理であり，次のように説明されている。

《「全体は部分の総和として認識できず，全体としての原理的把握が必要である」という認識論を教授的に具体化した原理である。》（p. 9）

生命論 "Systemic" は，全体論と訳すこともできる（國本，2006）。さらに，國本（2009）では，全体性の原理を，目標論，内容論，方法論の水準で考察している。

《目標論の観点から見ると，全体性の原理は，「生徒の全人的発達」と「適切な数学像の形成」と捉えられる。「生徒の全人的発達」とは，いわゆる，教育の目標である「人格（人間）形成」と同じ意味である。また，「適切な数学像の形成」とは，数学を準経験主義の立場に立って捉え，「活動（創造過程）としての数学」および「パターンの科学」としての数学を捉えることであり，また，「構造志向の数学」と「応用志向の数学（モデル構成過程としての数学）」を相補的に捉えること，さらに，数学が文化の中心（核）にあることを認識することを育成することである。

内容論から見ると，「基本的アイデアを中心に内容を編成すること」である。

方法論から見ると，「学習の全体的概観を初めに持つ」，「学習の見通しを持つ」，「学習内容のネット化」などが挙げられる。》（國本，2009, p.9）

つまり，目標論では，全人教育と数学へのイメージを重視することである。数学をパターンの科学としてとらえるのは，Wittmann（2004）の数学観である。教室文化において，数学観は重要である。内容論では，数学の考え方を重視している。また，方法論では，知識のネットワークである。

さらに，（國本，2009）は，全体性の原理を，次のように説明している。

《各部分が全体の中に位置づき，他の部分とどういう関係を持ち，１つの部分の変化が他の部分にどのような影響を与えるかを的確に把握する原理でもある。学習の最初に学習内容全体の概観を持てば，子どもたちは，見通しを持って学習することができ，ある程度，安心感を持って学習を進めることができる。子どもたちは，初めて学習する内容に関して，期待感とともに不安を持っているものである。

最初に，全体的概観を与えるからと言って，その与えられた問題の１つ１つ

をすべてその段階で解かなければならないということではない。今後の学習がどのように進展し，自らの行くべき方向（道）がわかればいいのである。》(p.9)
このような各部分と全体との関係を漠然と把握する原理である。これは，第4章第1節「単元構成」で述べる「デューイの漠たる全体」が関連している。
さらに，「数学化の原理」は重要である。これについては，数学的活動としてとらえ，第5章第2節で詳しく述べる。また，「発達の最近接領域の原理」については，第1章第4節で述べたように，教室文化がもつ相補性の観点から重要である。
以上をまとめて，生命論的教室文化の主な特徴をあげる。
S1. カリキュラムや単元の構成において，全体性の原理が考慮されている。
全体性の原理は，生命論的教室文化において，中心となる教授原理である。算数・数学の教師にとっては，単元の構成や教材の開発，また算数・数学的活動の指導において大きな意義をもつ。また，児童・生徒が知識のネットワークを形成できるように考慮して指導する。
S2. 児童・生徒の主体性を育成し，算数・数学の意味を構成するように指導する。
児童・生徒の主体性を育てることは，学校教育の重要な目的の一つであり，生命論的教室文化では，このことが重視されなければならない。というのも，算数・数学の授業では，知識や技能の習得が目標となることが多いからである。したがって，それらの調整が必要となる。そして，数学教育において，児童・生徒の主体性を育成するためには，児童・生徒が算数・数学の意味を構成できるような指導が重要になる。これは，数学教育における構成主義の原理を考慮したものである（Kilpatrick, 1987）。
S3. 教室において，数学的コミュニケーションによる合意領域を形成する。
教室におけるコミュニケーションは，生命論的教室文化において方法論ともなる。数学教育においては，数学的コミュニケーションによって，合意領域を形成することは，構成主義と Vygotsky の社会･文化的観点を組み合わせた立場である（Bussi, 1998, pp.15-35）。このような立場は，社会的構成主義と呼ばれる（Bauersfeld, 1992; Ernest, 1991, pp.68-88）。
S4. 一般化など数学的活動，数学化や問題解決過程を重視した指導をする。
問題解決の結果のみならず，その過程や数学的活動そのものを重視することである。数学的活動には，問題意識そのものである問題の設定や，モデル化，一般化，形式化などがある（Gravemeijer et al., 2000）。また，数学化と呼ばれることもある（Freudenthal, 1973; 國本, 2009, pp.9-10）。数学化には，「水平的数学化」と「垂直的数学化」がある。水平的数学化とは，問題状況を数学的用語に記号化することである。教室では，問題を数学化するために，生徒が話すこと

や，記号化することや，理由づけすることを非形式的に共有することである。また，垂直的数学化とは，数学的構造における記号化であり，新たな意味を与えた結果を示すことである。つまり，解釈や解答の形式化，一般化，統合化である（van Oers, 2000, p.153; Gravemeijer et al., 2000, pp.238-239）。

S5. 教室において発達の最近接領域が重視されている。

Vygotsky の「発達の最近接領域」は，第３章第２節で詳しく述べる。子どもが一人で問題解決できる「現下の発達水準」と，他人との協同によって問題解決できる「明日の発達水準」の間の差をもつ領域である。生命論的教室文化では，教師がこの領域を確認して学習指導する。

S6. 教室における数学的コミュニティーへ，児童･生徒が参加する。

教室が，数学的コミュニティーとなることは，Hiebert et al.（1997）が言及しているように，重要である。

S7. 児童･生徒の誤りの価値を認める。

児童・生徒の数学学習では，「誤り」は不可避なものである。機械論的教室文化では，誤りは，予め可能な限り除外するように計画することが求められる。しかし，生命論的教室文化では，児童・生徒の誤りは，深い理解や発展のきっかけなるものであり，価値あるものである。教師にとっても，児童・生徒の誤りの原因を追究することで，概念理解のための学習指導を構想することができる。

S8. ドリル練習だけでなく，数学的に価値のある練習をする。

ドリル練習だけではなく，数学的に価値のある練習が必要である。このような練習を，ビットマン（2004）は「生産的練習」と呼び，また國本（2006）は「創造的練習」と呼んでいる。数学的活動を含む練習である。これは，わが国の学習指導要領では，「課題学習」に含まれるものとなる。

第４節　第２章のまとめ

わが国において学級経営は，教師の重要な仕事であり，「学級づくり」とも呼ばれる。米国では，これを教室文化の構築と呼ぶことがある。また，健全な教室文化の構築についても議論されている。これを経営分析の観点から考察した。

教科教育学において，西川（2006）はリッカート（1964）の経営分析を参考にして，生産性が低い経営の考え方を「独善的専制型」とし，生産性が高い経営を「集団参画型」としている。そして，4 つの学級経営スタイルをまとめている。

これらの学級経営の分析に関連する数学教育学の実践思想には，機械論と生命論という二つの思潮がある。

機械論は，17 世紀 Comenius の『大教授学』に見られるものであり，学校を

その当時のハイテク機械であった時計と印刷機になぞらえ，スピーディな大量の庶民教育を実現しようとした。カリキュラムや教科書のみならず，教室そのものがその産物である。さらに，今日の進歩主義的教育や数学教育の現代化，Bloom の理論などにも，機械論の教育思想が含まれている。

これに対して生命論は，機械論の限界から，それを批判し包括する思想である。Rousseau や Pestalozzi の教育思想や Dewey の思想も，これに関連している。また，Piaget の発生的認識論によって，子どもの思考や数学的概念の発達過程が科学的に説明されるようになった。そして，Vygotsky は，Piaget の心理学を批判的に発展させ，社会や文化をふまえた心理学の基盤を構築した。つまり，生命論は, 人間性を原理として多様な観点を相補主義的に考察する特質がある。

これらの思想を教室文化に，それぞれ適応したものがそれぞれ，機械論的教室文化と生命論的教室文化である。

機械論的教室文化の特徴は，次の通りである。

M1. 指導内容を単純な部分に分割して，スモールステップで指導する。
M2. それぞれの部分を指導するために孤立した指導法を使う。
M3. 有能な児童・生徒を中心に授業を進める。
M4. 教科書を教える授業。
M5. ドリル練習。
M6. 児童・生徒の出来に対して，報賞を与える。

生命論的教室文化の特徴は，次の通りである。

S1. カリキュラムや単元の構成において，全体性の原理が考慮されている。
S2. 児童・生徒の主体性を育成し，算数・数学の意味を構成するように指導する。
S3. 教室において，数学的コミュニケーションによる合意領域を形成する。
S4. 一般化など数学的活動，数学化や問題解決過程を重視した指導をする。
S5. 教室において発達の最近接領域が重視されている。
S6. 教室における数学的コミュニティーへ，児童･生徒が参加する。
S7. 児童･生徒の誤りの価値を認める。
S8. ドリル練習だけでなく，数学的に価値のある練習をする。

《第２章の引用・参考文献》

和文文献

大河内一男［著］・清水幾太郎［編］(1979)．『世界の名著(33)　ビーコ』，中央公論新社．

カーニイ，H.［著］／中山茂・高柳雄一［訳］(1972)．『科学革命の時代　－コペルニクスからニュートンへ　(世界大学選書)』，平凡社．

國本景亀 (2006)．『「全体論的」数学教育の理論と実践に関する研究』，平成 15 ～ 17 年度科学研究費補助金（基盤研究(C)）研究成果報告書．

國本景亀 (2009)．「生命論に立つ数学教育学の方法論　－自由で個性豊かな算数・数学授業を目指して－」，『全国数学教育学会誌　数学教育学研究』，全国数学教育学会，pp. 1-15.

コメニウス，J.　A.［著］／井之口淳三［訳］(1995)．『世界図絵（平凡社ライブラリー)』，平凡社．

コメニュウス，J. A.［著］／梅根悟・勝田守一［監修」／鈴木秀勇［訳］(1962)．『大教授学１，２（世界教育学選集第 24, 25)』，明治図書．

佐藤学 (1996)．『教育方法学』，岩波書店．

坪田耕三(2003)．『坪田式　算数授業シリーズ①　算数楽しく　授業術』，教育出版．

坪田耕三 (2005)．『素敵な学級づくり　楽しく・優しく－子どもたちのための担任術』，教育出版．

デカルト［著］／谷川多佳子(1997)．『方法序説（岩波文庫)』，岩波書店．

中島健三・大野清四郎・［編著］(1974)．『現代教科教育学体系　4　数学と思考』，第一法規．

西川純 (2006)．『「勉強しなさい！」を言わない授業　－年間を通して、クラス全員の成績を上げ続けるなんて簡単だ！－』，東洋館出版社．

ビットマン［著］／國本景亀・山本信也［訳］(2004)．『算数・数学　授業改善から教育改革へ　PISA を乗り越えて：生命論的観点からの改革プログラム』，東洋館出版社．

リッカート［著］／三隅二不二［訳］ (1964)．『経営の行動科学』，ダイヤモンド社．

リッカート［著］／三隅二不二［訳］ (1968)．『組織の行動科学』，ダイヤモンド社．

柳治男 (2005)．『学級の歴史学　自明視された空間を疑う』，講談社．

吉本均 (1982)．『ドラマとしての授業の成立』，明治図書．

吉本均 (1995a)．『発問と集団思考の理論　第二版　授業改革理論双書 1』，明

治図書.
吉本均(1995b).『思考し問答する学習集団　－訓育的教授の理論（増補版）授業改革理論双書2』, 明治図書.

欧文文献

Bauersfeld, H.（1992）. Classroom cultures from a social constructivist's perspective. *Educational Studies in Mathematics,* 23, 467-481.

Bussi, Maria G. Bartolini（1998）. Joint activity in mathematics classroom:A Vygotskian analysis. In F. Seeger, J. Voigt, & U. Waschescio（Eds.）, *The culture of the mathmematics classroom*（pp. 158-190）. Cambridge, UK: Cambridge University Press.

Ernest, P.（1991）. *The philosophy of mathematics education*, The Falmer Press.

Freudenthal. H.（1973）. *Mathematics as an educational task*（pp.131-146）. Dordrecht, The Netherlands: D. Reidel Publishing Company.

Gravemeijer, K., Cobb, P., Bowers, J., & Whitenack, J.（2000）. Symbolizing, modeling, and instructional design. In P. Cobb, E. Yackel, & K. McClain（Eds.）, *Symbolizing, and communicating in mathematics classrooms: Perspectives on discourse, tools, and instructional design.*（pp. 225-273）. Mahwah, New Jersey: Lawrence Erlbaum Associates, Inc., Publishers.

Hiebert, J., Carpenter, T.P., Fennema, E., Fuson, K.C., Wearne, D., Murray, H., Olivier, A., & Human, P.（1997）. *Making Sense: teaching and learning mathematIcs.* Portsmouth, NH: Heinemann.

Kilpatrick, J.（1987）. What constructivism might be in mathematics education, proceedings of the 11th PME, pp.3-70.

Lampert, M.（2001）. *Teaching problems and the problem of teaching*. New Haven & London: Yale University Press.

Malik, F.（1986）. *Strategie des Managements komplexes Systeme*, Haupt, Bern.

Malik, F.（2004）. Systemisches Management, Evolution, Selbstorganisation, Haupt, Bern.

van Oers, B.（2000）. The appropriation of mathematical symbols: A psychosemiotic approach to mathematics learnig, In P. Cobb, E. Yackel, & K. McClain（Eds.）, *Symbolizing, and communicating in mathematics classrooms: Perspectives on discourse, tools, and instructional design.*（pp. 225-273）. Mahwah, New Jersey: Lawrence Erlbaum Associates, Inc., Publishers.

Wittmann, E. Ch.（2001）. Developing mathematics education in a systemic process, *Educational Studies in Mathematics, 48,* 1-20. Kluwer Academic Publishers.

Wittmann, E. Ch.（2004）. Mathematics as the science of patterns － a guideline for developing mathematics education from childhood to adulthood, 日本数学教育学会第 37 回数学教育論文発表会（岡山大学）.

第３章　数学学習における生命論的教室文化の意義

第１節では，数学学習と生命論的教室文化との関係について考察し，構成主義の観点から教室文化について述べる。そして，第２節では，Vygotsky の理論を源流とする社会･文化理論と教室文化について述べる。さらに，第３節では，生命論的教室文化と数学観につて考察する。とくに，Lakatos の数学論をとりあげる。第４節では，言語学の観点から教室文化を考察する。言語学の観点から生命論的教室文化の特徴について述べる。さらに，Wittgenstein による「言語ゲーム」の観点から，教室文化を考察する。

第１節　教室文化の構成主義的観点

１.１　教室文化の構成主義的観点

構成主義的観点から，数学学習における教室文化の意義について考察する。数学的知識は，生徒が主体的に構成するものと考えるのが構成主義である。特に重要なのは，von Glasersfeld（1989）が，同化（assimilation）と調節（accommodation）という Piaget の概念を，生存可能性（viability）というサイバネティクスの概念にまとめたことである（グレーザーズフェルド，2010）。知識の真理性は，生存可能性によって置き換えられる。数学学習は自己組織化の過程であり，主体が自らの活動を，合目的的に再組織化することである（Cobb & Yackel, 1998）。

2000 年代になって，米国における構成主義は，次のよう試練を受けた。

・カリフォルニア数学戦争
・米国における TIMSS，PISA など国際数学教育比較の結果が思わしくない。
・Vygotsky 理論など，社会文化理論からの批判
・知識社会において数学知識そのものの重要性が増した。
・“Teaching Gap”（Stigler & Hiebert, 2000）において，数学教育の文化性が強調されるようになった。

しかし，わが国では，「ゆとり教育」の頃から，ドリル練習やスモールステップ，能力別学級など，行動主義的な指導が流行した。ところが，欧米では，行動主義の大きな流行はなかった。それは，構成主義の役割が大きかった。本来，構成主義は，現代化運動失敗以後の行動主義への批判として生まれたものだったからである。

数学教育における構成主義の今日的意義について，平林（2012）は次のように述べている。

《1）構成主義は、認識論の一派であって、学習指導論ではない。それを学習指導論だと安易に考えて実践に移すことは、今の日本ではむしろ危険である。》（p.32）

これは，わが国のみならず，米国の教育実践に対しても当てはまる指摘である。認識論とは,「知識とは何か，また知識はいかにして得られるかを論じる」（平林，2000, p.48）ものである。つまり，規範的観点や理想論を含んでいる。したがって，現実との調整が常に求められることになる。

《2）「子どもの言うことによく耳を傾け、子供をよく観察せよ」と言うのが基本的態度である。これについては、大方の教師の賛同が得られるとおもう。》（p.32）

これは，生命論的教室文化における教師の基本的態度と共通している。

《3）現在行われているような学校における学力調査ではなく、社会人の学力調査をやってみたら、今の数学教育の基本的な欠陥がわかるでしょう。生涯手足のように使われる数学学力は、恐らく構成主義のいうような、子ども自身が自分で構成した知識であろう。》（p.32）

平林は，「ラジオ制作と同様に，自分で作ってみなければ，その仕組みは分からない」と話していた。理想としては，その通りである。しかしながら，コンピュータの時代に，現実にすべての数学的知識にそのようなことを要求することは無理である。このような点に，構成主義の理想論がある。

《4）Piaget の採った研究法：clinical interview に相当する構成主義的研究法は、teaching experiment である。これは、わが国で良く見られる研究授業（lesson study）と似ているが、実質は全く異なっている。つまり、「子供の言うことをよく聴き、その行動や思考を観察すること」が目的であって、定まった内容を子供に旨く教えようとするものではない。Piaget も決して子供を教えていない。「教授実験」といわれても、そこでは、教師は普通の意味での「教える人」ではなく、観察者であり、生徒の相談者であり、研究者でもある。》（p.32）

近年，米国を中心に注目されている研究授業（lesson study）と「教授実験」の違いを明確に述べている。研究授業は，教師教育の方法であり，指導法の研究が目的である。これに対して，教授実験はあくまで，子どもの心的現象の観察や実験が目的なのである。

《5）Piaget の研究には、発達心理学と認識論の二面があるが、前者は事実科学であり、後者は規範科学であることである。Piaget の発達段階（運動・感覚的段階、前操作段階、具体的操作段階、形式的操作段階など）は、規範科学としての認識論での演繹的・仮説的区分であり、それは実際とはよく当てはまら

ないと言う人がよくあるが、それは、上の両側面を混同しているからであろう。》（p.32）

これは，1)の指摘とも関連している。構成主義には，そのような二面性がある。

《私は外知識と内知識とを区別した。前者は教えられるべき知識であり、後者は学ばれた知識である。この区別は確かに知識の概念の二元論であるが、私は今のわが国の数学教育の実態からみて、この二元論を敢えて排除しようとは思わない。ただ、子供の生涯に亘って保存される知識は、内知識であることに間違いはないが、外知識は機に応じて内知識発達にあずかっているものであり、その存在は、将来数学者数学利用者を目指すものにとっては、否定できないものである。そして、内知識の発展をうながすものは、それまでの内知識とともに、膨大な外知識でもあると考えている。内知識だけに注目すると、とことして、それを幼稚な段階にとどめてしまう恐れがある。》（pp.32-33）

これは，3)の指摘に関連している。「構成主義のいうような，子ども自身が自分で構成した知識」を，ここでは内知識と呼んでいる。そして，現代社会における数学的知識を外知識として，その存在や意義を認めている。このことは，教室文化における数学学習を考察するために，重要な指摘である。

この指摘ように，構成主義から教室における集団的活動として教室文化を考察するには，記号的相互作用論などが必要となる。つまり，個々の生徒の数学学習と教室文化が，相互に反映している関係である「相互反映性（reflexivity）」に着目しなければならない（Cobb, 1989）。これについては，第1章第3節で述べた。

そして，Cobb & Yackel（1998）は，社会的と心理的という2つの観点から，教室における個人の活動と集団的活動を分析する枠組みを，次の表1ようにまとめている。

社会的観点	心理的観点
教室の社会的規範	自分や他人の役割についての信念 数学的活動の一般的性質
社会数学的規範	数学固有の信念や価値
教室の数学的実践	数学的概念と数学的活動

表1　教室における個人活動と集団活動に対する分析枠組み

そして，構成主義から教室文化を考察するために必要なのは，教室における

コミュニケーションへの着目である。コミュニケーションについて，Thompson（2000）は，記号的相互作用論の観点から，2 人のコミュニケーション過程を，次のような図 1 で説明している。

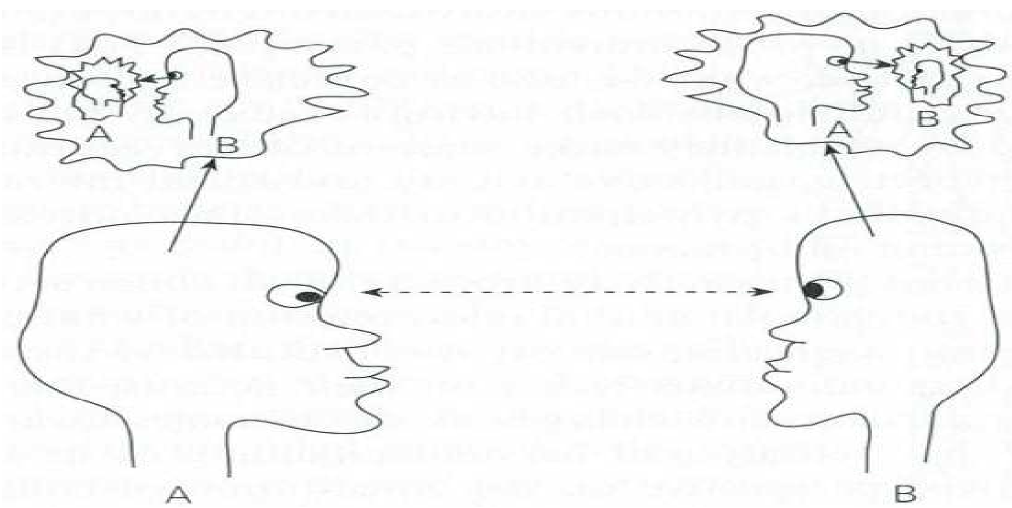


図１　記号的相互作用論におけるコミュニケーション過程

つまり，コミュニケーションが成立するには，お互いに相手のイメージを構成しながら，相互に作用し合っているのである。つまり，相互反映性は 2 人の人間の間で成り立っており，さらには自己の思考の中に，「自己相互反映性」が成立しているということである。個人対個人のコミュニケーションの成立を考えるには，意義のあるモデルである。これを突き詰めれば，「間主観性」の問題になる（Lerman,　1996）。しかし，本研究は，個人間のコミュニケーションそのものを追究するのではないので，このようなコミュニケーション過程を前提として議論を進める。

そこで重要になるのは，「合意領域（consensual domain; Maturana, 1978）」である。Maturana （1978）が定義した「合意領域」とは，基本的な生物の関係であり，2 つ以上の有機体が，相互作用することで成り立つものである。Richard（1991）は，次のように述べている。

《Maturana にとって，合意領域における行為とは，言語行為である。合意領域としての言語は，「相互を方向付ける行為」のパターンである。有機体は，行為の中で合意される。それは，必ずしも意識的（あるいは相互反映的）に同意されるものではなく，観察者から見れば，一致して活動しているようにみえる。それはあたかも，有機体が基本的条件に同意して，共に活動しているかのようにみえるであろう。合意領域を確立するには，結果よりも過程を重視しなければならない。つまり，合意領域の形成には大きな努力が必要なのである。》（p.

18）

このように，合意領域を生物学的な有機体の集団行為に基づいて定義している。さらに，Richard（1991）は，合意領域とは文化変容（acculturation）の過程そのものであると述べている。この点において，構成主義の立場からは，教室における合意領域が教室文化であるといえる。

１.２　生命論的教室文化と構成主義

「児童･生徒の主体的学習」や「算数･数学の意味の構成」は，生命論的教室文化の重要な特徴である。このような特徴は，数学教育における構成主義によって確立したものである（石田，1988；中原，1994, 1999）。

そして，このような数学学習は，コミュニケーションによって成り立っている。Thompson （2000）のコミュニケーションモデル（図 1）は，構成主義の観点を巧みに総括してる。われわれは，相手の頭の中を推測しながら，コミュニケーションを成り立たせている。

さらに，教室における数学学習では，主体が構成した意味は，コミュニケーションによって合意領域を形成することになる。このような過程における合意領域は，それぞれの教室文化となる。

しかしながら，「主体的学習」や「意味の構成」は，どこの教室にも見られる数学学習の実態ではない。むしろ，構成主義の理想である。そこで，数学学習におけるコミュニケーションを，より幅広く考察する必要がある。

つまり, 数学学習におけるコミュニケーションの役割についての問題である。Sfard（1998）や Lampert & Cobb（2003）は，それらに対して，2 つの比喩を挙げている。それは，「獲得」と「参加」である。これを，生命論的教室文化の観点から考察する。

獲得という比喩は，数学的知識の獲得である。Piaget や Vygotsky は，「概念発達」という言葉を使っている。概念とは知識の単位であり，これが洗練され，組み合わさって，豊かな認知構造が形成されるのである（Sfard, 1998, p. 5）。

参加の比喩は，次節で述べる Lave & Wenger（1991）の理論が根拠になっている。その基本的観点は, 学習を実践共同体への参加としてとらえることである。まず，知識や概念という用語が，「知る」という活動に取って代わることである。さらに，活動はその文脈と切り離すことはできないということである。そして，「実践」「ディスコース（言語活動）」「コミュニケーション」といった言葉は，集団活動への参加を示しているのである（Sfard, 1998, p. 6 ）。

「学習目的，学習，生徒，教師，概念・知識，知ること」の観点から，これらの比喩を対比して，Sfard（1998）は次の表 2 のようにまとめている。

獲得比喩		参加比喩
個人的満足	学習目的	コミュニティーの構築
何かの獲得	学習とは	参加者となること
受容者（消費者），（再）構成者	生徒	周辺参加者，見習い
提供者，司会者，仲介者	教師	熟練の参加者， 実践と言語活動の保持者
財産，所有物，商品 （私的，公的）	知識，概念	実践／言語／活動の観点
持っている，所持	知ること	所属すること， 参加すること， コミュニケーションすること

表２　比喩の対比

さらに重要なことは，これら 2 つの比喩は，数学学習に対して不可欠であり，どちらか一つを選択することは危険であると，Sfard（1998）が強調している点である。つまり，教室文化の相補性を指摘しているのである。したがって，生命論的教室文化における数学学習に対して，どちらの比喩も必要である。そして，数学教育における構成主義は，「獲得」としての数学学習とコミュニケーションをとらえることで成り立っている立場である。

第２節　教室文化と社会･文化理論

２.１　教室文化と社会･文化理論

数学教育における社会･文化理論の源流となったのは Vygotsky の理論である。Vygotsky 理論の特徴は，学習における「模倣」や「内化」を重視している点にある。Piaget 理論による構成主義では，模倣は受動的で，低次な行為とみられていた。これに対して，Vygotsky は模倣を通した協同学習や学習指導を発達の事実として価値づけている。「教育は模倣が可能なところでのみ可能」（柴田義松，2006, p.27）なのであり，模倣を人間固有の知的能力としている。また，「子どもが今日，協同でできることは，明日には一人でできるようになる」のであり，「教育学は子どもの発達の昨日にではなく，明日に目を向けなければならない」としているのである（柴田義松，2006, p.7）。

そのためには，「発達の最近接領域（Zone of Proximal Development）」の概念が必要になる。これは，子どもが一人で問題解決できる「現下の発達水準」と，他人との協同によって問題解決できる「明日の発達水準」の間の差をもつ領域である。教師の学習指導は，この領域を創り出し，そこに働きかけることによ

ってなされるのである。
また，Vygotsky 理論には，二つの主張がある。一つは，人間の高次精神活動は，「文化的道具（cultural tools）」を媒介にして，直接的な心理過程が間接的過程に転化するということである。文化的道具とは，言語や記号である。したがって，思考と言語・表現は一体のものであり，単純に分離することはできないということなる。二つ目の主張は，人間の高次精神機能は，精神間から精神内への内化によって働くということである。ヴィゴツキー(2003)は次のように述べている。
《あらゆる高次の精神機能は､子どもの発達において二回現れる。最初は､集団的活動・社会的活動として､すなわち精神間機能として､二回めには個人的活動として､子どもの思考内容の方法として､すなわち精神内機能として現れる。》（pp. 21-22）
このことは，子どもの言語発達において顕著である。言葉は，まず子どもと周りの人々とのコミュニケーション手段である話し言葉として発生する。これは外言と呼ばれる。外言が子ども自身の思考方法である内言へと内化し，精神内機能となるのである（柴田義松，2006, p.31）。
このような，Vygotsky の内言研究は，Piaget の「自己中心的言語」を批判的に検討することでなされた。自己中心的言語とは，独り言やモノローグである。相手が聞いているかどうかに関心のない，対話相手の観点に立たないことばである(茂呂，1999, p.15)。
そして，Piaget 理論における子どもの自己中心性と社会化，Vygotsky 理論における外言から内言へという，対照的方向性は，教室文化における言語を考察するために重要な論点である。この論点を，茂呂雄二(1999)は次のように説明している。
《ピアジェは，自己中心的言語が子どもの避けがたい子ども性の発露だとみなした。つまり子どもの非社会性が，このような現象の背景にある，と考えていた。この名づけの背景には，子どもは自閉的で非社会的存在だとするピアジェの子ども観がある。発達の過程で，自閉的で非社会的な思考様式が駆逐され，社会的で合理的な思考様式に塗り替えられる。このとき言語はあくまでも思考様式の外的なあらわれとして位置づけられる。やがて社会化された成熟した思想が子どもに吹き込まれ，自己中心的な思想を追い出す，ピアジェはこのように発想している。》（p.15）
このような Piaget の言語発達論は，数学教育にも大きな影響を与えている。算数・数学の授業における議論や証明の指導では，子どもの自己中心的言語を論証のように論理的言語へと指導することが目的とされる。また，それによっ

て，子どもの思考が社会化される意義があるとされている。また，言語はあくまでも思考の外的表現としてとらえられているのも特徴である。
《これに対して，ヴィゴツキーは，言語と思考の相互連関を次のように描く。まず出発点は他者との交通の手段としてのコミュニケーションの言語にある。これを自分に対して，とくに自分白身の思考の方向づけと統御のために使用するようになる。自己中心的言語は，なかば他者のため，なかば自己へ向いた，過渡的な形態として出現する。自己中心的言語は，そもそも子どもに固有のものではない,それは発達のプロセスのなかで創造され現象するものなのである。自己中心的言語は，それぞれ別個の発達のルーツを持つ思考と言語が衝突し，言語的な思考と知性的な言語を創造する過程の，まさに過渡期に出現するのである。それは，他者に向けられてなかば社会的であることばと，自分に向けられたなかば内言の，ハイブリッドとして説明される。》（pp.15-16）

つまり，Vygotsky によれば，コミュニケーションは，成長した子どもの思考の表現手段なのではなく，いかなる発達段階の子どもの思考とっても不可欠な文化的道具，そのものなのである。また，思考は言語によって実現されるものであり，言語は思考や活動の手段でる。したがって，これらは不離一体のものであるとしている。また，コミュニケーションの文化的道具である外言を，自らの内言へと内化するプロセスの創造性と不安定性を指摘している。このような理論の数学教育への影響についての研究は，総括できる段階にまでは来ていない。しかし，教師の指導や子どもの発達にふさわしいコミュニケーションの重要性は，認識されるようになった。

さらに，Vygotsky 理論の鍵となる用語に，生活的概念と科学的概念がある。生活概念は，自然発生的概念とも呼ばれ，子どもが生活の中で自然に身につける概念である。これには，無意識的なものや誤ったものも含まれる。科学的概念は，自覚性や随意性がある理論的概念であり，知識の体系性が大きな特徴である。Piaget 理論の研究対象が，科学的概念の自然発生的発達であるとすれば，Vygotsky 理論の特徴は科学的概念を非自然発生的概念の典型としてとらえ，学校教育のなかで組織的に形成されるものとして扱っている点にある（柴田義松，2006, pp. 85-106）。

また近年，Vygotsky 理論を源流として，状況的認知論が発展している。特に Lave & Wenger（1991）の "Situated Learning" は，正統的周辺参加論（LPP）として発展している。学習とは，実践者の共同体（communities of practitioners）に参加することである。新参者（newcomers）は，知識や技能を習得して，共同体の社会･文化的実践における周辺的参加から十全的参加（full participation）へと移行していくという考え方である（p.29）。

また，LPP の特徴は，学習者のアイデンティティの形成を重視している点にある。アイデンティティとは，「自分への理解の仕方，自分への見方，他人からの見方であり，安定した自分自身への知覚 」(p. 81)である。そして，実践的共同体への参加によって，アイデンティティは長期にわたって，形成されていくものと考えられている。これらの概念は，児童･生徒の教室文化への参加を考察するために有意義である。

２.２　教室文化と発達の最近接領域

教室文化としての発達の最近接領域について検討する。Vygotsky は，発達の最近接領域について，幾度か定義している。"Mind in Society"(1934/1978)では，次のように定義している。

《一人で問題解決できる現下の発達レベルと，大人の指導や有能な仲間との協同のもとで問題解決出来る潜在的発達レベルとの距離》(p.86)

ここで重要なことは，まず問題解決を発達レベルの指標としてあげていることである。このことから，この定義における問題解決というのは，テストの解答を想定していることが分かる。これは，重要な論点である。この時代の心理学に影響されている。

さらに，潜在的発達レベルに言及していることである。これは，Piaget 理論のように自然状態における生物的発達を対象とした研究では，除外されるものである。Vygotosky は，『思考と言語』(1956/1962)の中で，次のように解説している。

《これまでの定説では，子どもの知能発達の水準の指標となりうるものは，子どもの自主的活動だけであって，模倣は決してそのようなものとはなり得ないという命題はゆるぎないものだと考えられてきた。この見解は，現代のあらゆるテスト研究のシステムのなかにも表現されている。子どもが自主的に他人の助けなしに，展示なしに，誘導的質問なしに解いたテストの解答だけが，知能の発達の評価のさいには考慮されるのである。》(ヴィゴツキー，1956，上 p.267)

そして，彼は「教育と発達一般のおいたに存在する関係」(ヴィゴツキー，1956 上) について述べている。

《子どもにおける模倣の本質的な特色は，子どもが自分自身の可能性の限界をはるかにこえた一連の動作を模倣し得る点にある。だが，それらは無限に多いのではない。子どもは，集団的活動における模倣を通じて，大人の指導のもとに，理解をもって自主的にすることのできことよりもはるかに多くのことをすることができる。大人の指導のもとで，援助のもとで可能な問題解決の水準と自主的活動において可能な問題解決の水準とのあいだのくい違いが，子どもの発達の最近接領域領域を決定する。

…われわれのまえに知能年令が同じ七才の子どもが二人いる。しかし，そのうちの一人は，ちょっとした援助で，九才の問題を解くが，もう一人は七才半の問題しか解けない。これら両人の知能発達は同じたろうか？かれらの自主的活動という点では同じである。だが，発達の最近接可能性という点では，かれらは鋭く分かれる。大人の援助を得て子どもがすることのできるものは，われわれにかれの発達の最近接領域を示してくれる。これは，この方法によるときわれわれはすでに今日完成した発達過程だけではなく，すでに完結した発達のサイクルだけではなく，すでにしあがった成長過程だけでなく，現在生成しつつある過程，成長しまじめたばかりの，発達しはじめたばかりの過程をも考慮することができることを意味する。》（p.268）

実際に，子どもの発達水準を特定することは，予想以上に難しい。同程度と思われる問題を与えても，わずかの条件でできたり，できなかったりする。また同じ子どもでも，短期間の間に同様なことが起きる。できていたものが,できなくなったりすることさえある。「Piaget の研究には，事実科学としての発達心理学と，規範科学としての認識論の二面がある。Piaget の発達段階は，規範科学としての認識論での演繹的・仮説的区分であり，それは実際とはよく当てはまらないことがある」という平林（2012）の指摘は，この事実を示している。またそれは，その現象への一つの解釈である。

ところが，Vygotsky はそのことを，逆手にとって，それこそ子どもの発達の本質であると主張するのである。それは，心理学にとっても，教育学にとっても発想の転換であった。この点については，Vygotsky の著作をわが国にいち早く翻訳し，紹介した柴田義松（1965）が，次のように解説している。

《発達の最近接領域にかんする理論は，教育と発達との相互関係にかんするヴィゴツキーの思想の中心概念となるものであったが，それは次のようなものである．この「領域」の下限は，ふつうの知能テストなどによって示される子どもの発達水準である．ヴィゴツキーは，これだけでは子どもの発達状態を充分に明らかにすることはできないと考えた．というのは，このテストで同じ発達水準にいる子どもに，それよりむずかしい問題を教師が多少の援助を加えながらさせてみると，ある子どもはその誘導的な質問・範例・暗示などによって２年も上のテストを解くことができるのに，他の子どもはせいぜい半年先のテストしか解けないというような違いがあらわれる．従来のテスト論者の考えでは，このように他人の助けを借りて解いたようなものは何の価値もないとされたが，ヴィゴツキーは，子どもの発達過程を真にダイナミックな姿においてとらえるためには，このような解答をこそ大事にせねばならないと考えた．「発達の最近接領域」の上限というのは，このようにして子どもがおとなの助けを借

りて解き得る問題の水準によって示される．それは，すでに成熟したもの，発達のすでに完成した機能ではなくて，いままさに成熟しつつある機能を明らかにしてくれる．教師の助けを借りて子どもが今日なし得ることは，明日にはひとりでできるようになるだろう．だから，「発達の最近接領域」は，子どもの明日の発達水準を示すものである．それは，精神発達の過程をダイナミックにとらえるものとして心理学的に重要な意味をもつだけでなく，教育学的にも，教師は子どもの現在の発達水準だけでなく，明日の発達水準，いいかえれば発達の見通しを指針として教育活動を進めていかねばならないことを教師に教えるという意味で，重要な意義をもつといえよう.》（pp.164-165）

つまり，子どもは常にダイナミックで不安定な発達の可能性をもっているという思想である。これは，教育の重要性を再認識させる。子どもの発達は，親や教師などの大人の指導を抜きにしては成り立たないということである。Piagetの「科学的な態度」は，ともすれば，このことを軽視することになる。

また，子どもの誤りは，発達の証であり，大きな可能性をもっている。教師は，このことを認識して，指導しなければならない。教育は，過去の発達にではなく，明日の発達に目を向けて行われなければならないのである。その教育の可能性を決定するのが，発達の最近接領域なのである。

さらに，Lave & Wenger（1991）は，発達の最近接領域の解釈は，3 通りあると述べている。

第 1 は，Vygotsky 自身が述べているように，問題解決の文脈での発達の最近接領域である。

《第一に，最近接発達領域は，学習者が単独で取り組むときに示す問題解決能力と，より経験を積んだ人に助けられたり，彼らとの協同で取り組むときに示す問題解決能力との距離であるとして特徴づけられることが多い。この「外的支援」という解釈は，作業初期の遂行では歴然とした支援を与え，後には支援なしで遂行できるようにするという教授学的なアプローチを活発にした。》（レイヴ & ウェンガー，1993， p .23）

第 2 は，文化的解釈である。

《第二に「文化的」解釈は，最近接発達領域を社会歴史的な文脈によってもたらされる文化的知識一通常, 教授（instruction）によってアクセス可能となるーと，個々人の日常的経験との間の距離とみなす。ヘデゴール（Hedegaard）はこれを教授によってもたらせるものとしての理解された知識と，個人がもっているとされる活動的知識との距離であるとしている。この解釈はヴィゴツキーの科学的概念と日常的概念との区別，さらに科学的概念とその日常的なものとが融合したときに成熟した概念に至るとする彼の説に基づいたものである。》（レイ

ヴ & ウェンガー，1991，p.23）

この解釈は，生活的概念と科学的概念の対照的な発達方向の中で，発達の最近接領域という概念を位置づけるものである。図２は，生活的概念と科学的概念の対立関係における最近接領域を図式化したものである。この解釈における発達の最近接領域は，生命論的教室文化そのものである。

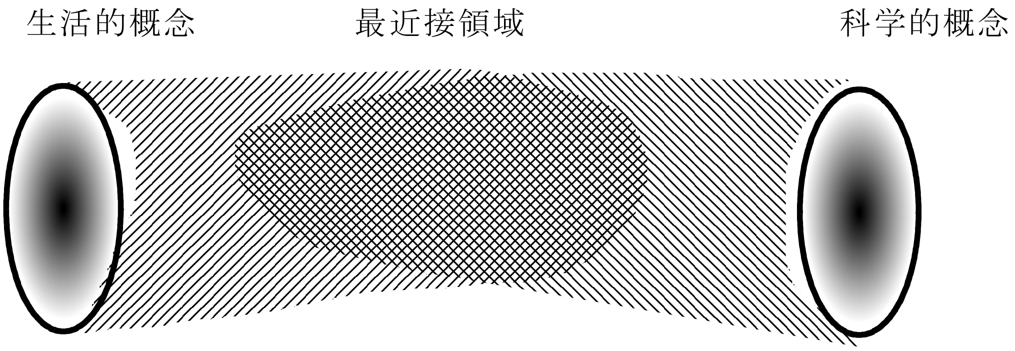


図２　生活的概念と科学的概念の関係からみた最近接領域の図式

第 3 は，文化－歴史的活動理論におけるの解釈である。

《第三の解釈としては，「集合主義的（collectivist）あるいは「社会レベルの（societal）」見方をする。エングンストレムは最近接発達領域を「個々人の日常的活動と，日常的活動に滞在的に埋め込まれているダブルバインドの解決として集合的に生成され得る，歴史的に新しい形態の社会レベルの活動との距離である」と定義している。このような最近接発達領域の概念の社会的解釈のもとでは研究者は社会的変容（societal　transformation）のプロセスに関心を集中させた研究をする傾向をもつ。彼らは学習の研究を教授学的構造化（pedagogical structuring）の文脈を越えて拡大させること，さらに社会的世界の構造を分析に含め，社会的実践がもつ葛藤的特性を中心的に考慮に入れるといった点で，私かちと共通の関心をもつものである。》（レイヴ & ウェンガー，1991，ｐ.24）

これは，Y.　Engenstroem の理論に着目し，個々人の日常的活動と新しい形態の社会レベルの活動の距離として，解釈するものである。エンゲストローム（1999）は，最近接発達領域について，次のように説明している。

《教授－学習的観点からすれば、最近接発達領域についての私の定義は、次のようなことを意味している。すなわち、学習者にとっては新しいが社会的には既存の（あるいは支配的な）形態を獲得させることを目指すだけでなく、歴史的に新しい活動形態を発達させることを目指すときにのみ、教授と学習は最近接発達領域の内部で動いていく、ということである。歴史的に新しい活動形態の発達をめざすということは、学習者に随伴した教室の外の学習者の生活活動

へと入っていく教授－学習実践を意味する。》（pp.229-230）

つまり，最近接発達領域は，既存の知識や技能を獲得させるだけではなく，社会的に新しい活動形態を発達させる場であるという認識である。また，これは学習者が教室外の生活活動へと入ることを意味している。これは，発達の最近接領域を教室文化として考察するための観点であり，第５章の教室文化の文化化や数学的活動において議論する。

２.３　生命論的教室文化と社会･文化理論

まず，生命論的教室文化の事例となるディスコースをあげて説明する。Vygotsky 理論の基盤である発達の最近接領域に着目し，児童・生徒の誤りを重視することは，生命論的教室文化の特徴である。この事例は，数学的コミュニケーションが中心となっている算数･数学授業である。

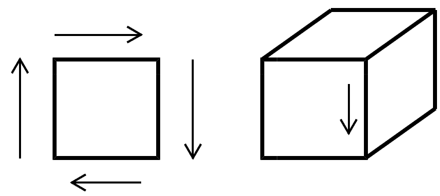
ここでは，体積の求め方についてのディスコースである。健司という児童が，「たて＋横＋高さ」でも，体積を表現できると主張して，他の児童と議論している。これを，前節で述べた構成主義，相互作用主義，次の第 3 節で述べる Lakatos の数学論，それぞれの立場から考察し，最後に Vygotosky 理論の意義について考察する。

《ディスコース》

この授業記録は，富山市立堀川小学校の牧野和則の実践である。（5 年生 1996 年 5 月 29 日 1,2 限）この記録の中の，後半だけを引用する。

教師：立体のことを考えている人。（挙手）みんなこんなことを考えているんだね。健司君はどうですか。

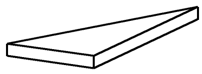
健司：ぼくは，真理子さんに似ているけど，ぼくは足している。面に高さがついたら大きさがでるから，面はこの辺でできているね。だから，たてと横にあと，高さを足せばできると思い，計算した。



5 × 3 × 9 は直さなければならないから，5 を 50 ㎜，3 を 30 ㎜にして足すというやり方で大きさが表せる。だから，50 ＋ 30 ＋ 9 ＝ 89　89 という大きさ。

文彦：三角形は，小さいけれど 5 年生の看板と同じような薄い形，できるかな。

健司：できる。幅 9 ㎜で，ここ 10 ㎝くらいで，ここ 5 ㎝ぐらいだとするとミリに直せば，9 ＋ 100 ＋ 50 ＝ 159。



智　：たて，横，高さ，足すだけでは…。たてと　横，足しても面積でないし…。

健司：足すと面積でないよ。

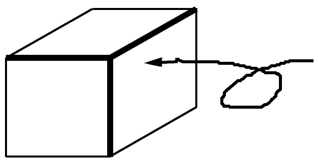
智　：足したら面積でない。面積は，100 cm^2なのに，足したらならない。100 が 10 列あるから，本当は 1000 cm^3なのに，健司君なら，足すということは，ここの面積でなく…。

健司：足したら面積でないよ。

英二：足すだけなら，3 列分を求めるだけになってしまう。

健司：ぼくは，面積でなく大きさを表している。面があり，底がある。面に高さがついて立体ができる。だから，これに高さをつけて立体ができると思った。

教師：



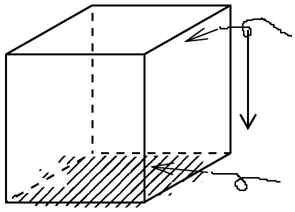
ここと ここ，ここを足せばいいということ。

英二：縦と横と高さは 10 だから，足せば 3 列と同じ。30 なら
10 ＋ 10 ＋ 10 ＝ 30 は，3 列という意味になるから絶対足すでない。

健司：この面に底がついたら，みんなは高さといっているけれど，ぼくは底ね。底がついたら，立体になると思う。

教師：たて　横　高さ（板書で指示）

健司：高さというより，ぼくは底ね。



この部分がついてくる

底があって立体

智　：分かるけど違っている。

教師：智君。どこが違うの。
智　：大きさを求めるってことは，大きさって，体積でないのかな。あれ，体積って何。
健司：教科書を作る人は，「たて×横×高さ」っていったんだけれど，そこには何か理由があったんでしょう。豊君や真由美さんのようにね。智君ならその大きさが「たて×横×高さ」で表せるという考えなんだからいいと思う。まさか，教科書をみて，ああそうなら使ってみようという人はいないと思うけれど。僕は，面に底をつけたとしたら，立体なるから，自分で納得いく考え方をしていたい。
智　：でも，あってないと。
健司：自分の考えが納得できればいい。
智　：何が求められるのかな。
健司：この面に底がつけば，立体ができて，大きさがでる。
健司：面に底があるところから，足して単位は教科書から使った。
教師：健司君の考えを聞いて，感じたことある人。
康江：私は，立方体で「たて×横×高さ」をしているのだけれど，健司君は足し算でしていて，その意味がはっきりしない。
文彦：真理子さんの 1 cm^3の立方体の入る数で求まると聞いて，ぼくは，1 cm^3が入らないのはどうなるのか質問して，（看板のこと）分かってきたのだけれど，智君の意見を聞いてパニックになってきて，よく分からない。
教師：分からないわけは，何だろう。
文彦：面積を出しているわけではないところを，健司君に聞きたい。
英二：健司君は，教科書に書いた人は自分で納得できたから書いたというけれど，教科書は「教える」と書いてあるから，正しいことを書いてあると思う。健司君は自分が納得しているというけれど…。
稔　：自分の考えに納得するのはいいけれど，健司君の「たて＋よこ＋高さ」は分からないところがある。「たて＋横」では，面積がでないでしょ。高さを足すということは分かるんだけれど，なぜ「たて＋横」なのか分からない「たて×横＋高さ」なら意味わかる。
智　：高さ足したらどうなるの。
教師：自分が友達の考えを聞いて，「あれっ」と思ったことをノートにまとめて下さい。（以下 15 分一人学習）

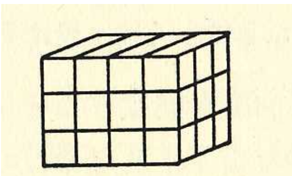
《以上》

①　構成主義の視点

健司は「たて＋横＋高さ」という独自の「大きさ」を構成した。彼の創造性の発揮である。また，このクラスの多くの子どもは，体積が「たて×横×高さ」で表され，それが 1 ㎝^{3}の立方体の個数を示すものだということは，理解している。それは，次のような発言からわかる。

健司：教科書を作る人は，「たて×横×高さ」っていったんだけれど，そこには何か理由があったんでしょう。豊君や真由美さんのようにね。智君ならその大きさが「たて×横×高さ」で表せるという考えなんだからいいと思う。
康江：私は，立方体で「たて×横×高さ」をしているのだけれど…。
文彦：真理子さんの 1 ㎝^{3}の立方体の入る数で求まると聞いて，ぼくは，1 ㎝^{3}が入らないのはどうなるのか　質問して，（看板のこと）分かってきたのだけれど…。

Piaget 心理学の立場に立つコープランド（1976,　pp.354-359）によれば，体積の測定における中心は「体積の保存」である。そこには，4 つの段階がある。
「36 個の立方体の積み木が，3 × 4 個の積み木を台として置かれている。それと“同じ数”の部屋のある家を，縦 3 個の積み木と横 2 個の積み木からなるより小さな島の上に立てられるかどうかを，子どもたちに尋ねる」。



第 1 段階の子どもたちは，保存を理解できない。
第 2 段階の子どもたちは，形の変化に対する体積の保存はない。第 2 段階の終わり頃になって，子どもたちは理解し始める。
第 3 段階は，ほぼ 7 歳から 12 歳までという長期間，小学生の大部分の期間にあたる。ブロック内部の体積についての保存は，認められる。なぜなら，同数の積み木があるからである。しかし，積み木によって占められた，または置き換えられた水の体積と同じであることが理解できない。つまり，体積は，中身の物質が何かということとは，無関係であり，例えば水の中に入れても，増えた水の体積は保存されることは，理解されていない。
第 4 段階は，体積と長さの関係（縦×横×高さ）がわかり，体積を測定することができる。また，体積の保存は，占有される物質には無関係であることが理解される。

したがって，Piaget 理論からすると，このディスコースにおける児童は，「体積の保存」を十分に理解しておらず，第 3 段階に完全に到達していないという説明になる。なぜなら，もし保存性があれば，体積が同じでも，健司の公式「たて＋横＋高さ」は異なるような立体の例（反例）は，容易に思いつくはずだからである。つまり，構成主義から見ると，「健司の公式」は，取るに足らない誤りの例であり，「生存可能性(Viable)」はなく，いずれは修正され棄却されるべきものである。

② 社会的相互作用について

健司は「たて＋横＋高さ」でも立体の「大きさ」を表すことが可能だと主張し，その理由も考えている。「面に底を付加える，つまり足して，立体ができるという」論理である。

この議論は，「健司の公式」をめぐるコミュニケーションである。例えば，文彦は，「1 ㎤の立方体が入らないような，薄い立体でも，体積の公式が成り立つ」という真理子の説明に言及している。健司の公式についても，そのような立体で成り立つかを検証させている。また，英二も，足したのでは面積や体積にはならないことを指摘するが，「体積って何」と自問することになっている。つまり，健司の公式は，教室における社会的相互作用によって，意味あるものになっている。これが，教室文化の創発性である。

しかし多くの児童は，「健司の公式」という推測に対しては懐疑的ではあり，反証を試みるものの，成功はしていない。Lakatos(1976)のいう「大局的な反例(grobal counterexample)」が出せないままなのである。そこで，稔は体積の公式と健司の公式を「調整」して「たて×横＋高さ」という新たな公式を推測した。これは，また新たな公式の創発である。

さらに，この教室では，「教科書」に対する価値を合意していることが分かる。わが国では，多くの教室におけるディスコースに，「教科書にあるから正しい」という子どもの発言がしばしばみられる。また，それが正しさの根拠となることが多い。

しかし，この教室の児童は，自分たちで考えることに，十分な価値があることを理解している。それは，健司や英二の次の発言から分かる。

健司：まさか，教科書をみて，ああそうなら使ってみようという人はいないと思うけれど。

英二：健司君は，教科書に書いた人は自分で納得できたから書いたというけれど，教科書は「教える」と書いてあるから，正しいことを書いてあると思う。

③ 社会・文化理論の視点

教師としては，「健司の公式」や「稔の公式」をどう解釈し，指導したらいいのだろうか。また，なぜ子どもたちは，「健司の公式」にこれほど，影響を受けているのか。また，反証ができないのか。これは，生命論的教室文化における，数学学習についての基本的問題である。

社会・文化理論の観点から，このディスコースを見ると，なぜ健司は「足し算の公式」に確信を持ち，「こだわり」をもっているかが説明できる。おそらく，彼は，体積の公式やその意味するところは理解しているはずである。にもかかわらず，辺の長さの和も「立体の大きさ」を表していると確信している。

これは，Vygotsky 理論にある「生活的概念」「科学的概念」を用いると説明できる（図３参照）。健司の公式である「足し算の公式」は，実は生活的概念なのである。われわれ大人の社会でも直方体の大きさを表すために，日常的に用いている。

現実の社会で，郵便局で荷物を送るときや，飛行機に手荷物を持ち込むとき，大きさの制限となっているのは，健司のような「足し算の公式」である。そこには，実用上の理由はあるにしても，体積そのものあるいはそれに類似する「大きさ」を表しているという感覚は，大人にもある。

他方，「体積の公式」は科学的概念である。日常生活の中で，立体の大きさを，この体積の公式で求めることは意外に少ない。ただ，体系的で数学的に妥当な公式である。ヴィゴツキー(1962)が述べているように，子どもの概念発達は，生活的概念と科学的概念を複雑に行き来するのであって，Piaget の段階説のように一方向的に発達するものではない。

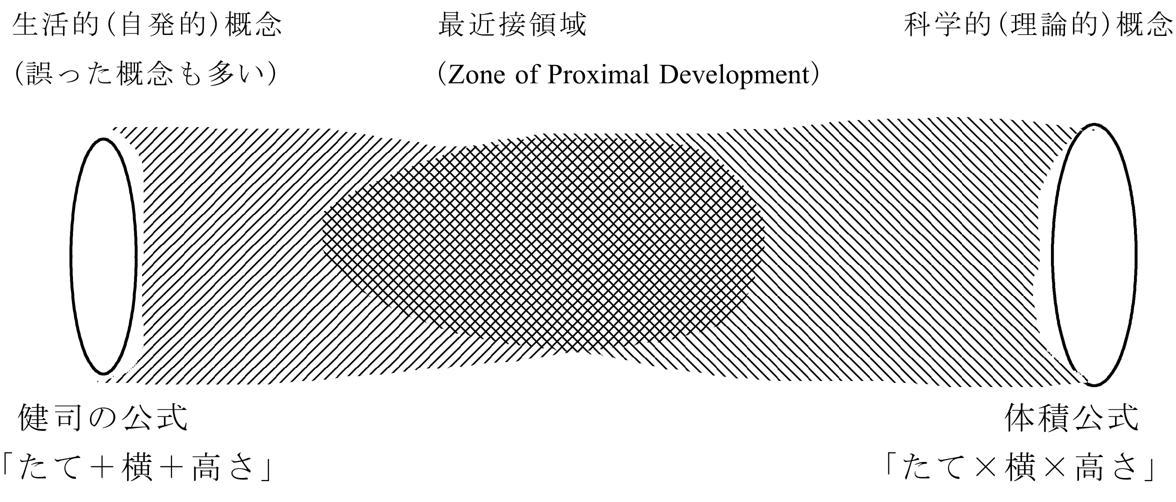


図３

したがって，この教室の子どもたちは，科学的概念から生活的概念へと行き

来しながら，「3 辺の積である体積と，3 辺の和の量は無関係である」という科学的知識を獲得するための，最近接発達領域にあるといえる。

つまり，子どもが「体積の保存」を理解していない点からだけで解釈するのでは不十分である。われわれ大人も，日常生活で「健司の公式」を使っているという事実は，それと矛盾するからである。

この教師が，「3 辺の和」と体積は無関係であるという「大局的反例」を示さなければ，健司の「足し算の公式」をめぐる話し合いが決着するのは難しい。そのため実際に，教師は子どもの考えの中に，そういう反例につながるものはないか確認する必要がある。そのため，児童の考えをノートにまとめさせている。これによって，教師はこの児童のディスコースに価値を見いだし，可能性を引き出そうとしている。

教室文化の相補性に基づいて，構成主義，社会的相互作用，社会・文化理論のそれぞれの観点から事例を検討した。構成主義からは，体積概念の基盤となる「体積の保存」についての示唆が得られ，児童が何を誤っているのかが分かった。社会相互作用からは，教室でのディスコースの方向が分かり，教師の今後の指導の在り方が示唆される。

そして，これらの観点を総括的にとらえて，児童の誤りの意義をふまえた学習指導を構想するには，社会・文化理論が不可欠である。つまり，生命論的教室文化における数学学習を解釈や考察には，社会・文化理論が最も重要な観点なのである。

第３節　生命論的教室文化と数学観

３.１　生命論的教室文化と数学観

数学教育における生命論的教室文化の固有性について述べる。つまり，算数･数学科に固有な生命論的教室文化とは何かということである。

本来，数学は古代ギリシャ以来の長い歴史をもつ教科であり，文化性や教養性が高い。数学は広い意味での文化の結晶であり，科学技術や人文科学，人間生活に広く関係している（Wittman, 1989, p. 298）。つまり，数学教育においては，数学の文化性に着目することは必然である。

数学教育における教室文化は，当然ながら数学的文化を含んでいる。ここで数学的文化と呼ぶものは，非形式的及び形式的な数学知識だけではなく，そのメタ知識である数学観を示している。

わが国の算数の教室文化における数学観の現実について，中村昌平（1999）は，次のように述べている。

《算数とは正しい答えさえ出せばよく，その過程は余り重要でないと思ってい

る児童がいる。》(p. 9)

その例として，分数のわり算を学習した後で，$\frac{4}{9} \div \frac{2}{3}$ を計算する方法についてのディスコースをあげている。この式を，$\frac{4\div 2}{9\div 3}$ と計算する児童がいたとする。そこで，教師を含めて，この場面にどう対応するかは，2つに分かれる。つまり，「すでに分数のわり算の仕方は学習したのでそれを使えばよいという意見が生徒から出て，他の生徒や教師もそれに賛同し，その方法が否定される」。また逆に「おもしろい方法なので考えてみようという意見が出て，他の生徒もそれに賛同し，教師もそれを促すことが考えられる」。そして，「こうした違いは教室文化の違いと言えよう」と指摘している(p. 13)。

それでは，生命論的教室文化における数学観とは何かである。中村(1999)は数学観について，次のように述べる。

《数学は不変の真理と絶対的な確実性から成ると見なす数学についての伝統的な見解は，算数・数学という教科は正確にはやく正しい答えにたどり着けばよしとする教室文化を生み出す要因になる…。また，数学は再考・修正されうものであると見なす数学についての新しい見解は，算数・数学は数学的知識を探究し創造する教科とする教室文化を生み出す要因になる。》(p. 14)

ここで述べている「算数･数学は数学的知識を探究し，創造する教科」という数学観をもつ教室文化は何かを考察しなければならない。そこで，より詳細に数学観を検討する。数学教育における数学観を，平林一榮（1993)は，Dossey (1992)を参考にして，次のように分類している。

(1) 外在的（Platonic）数学観

① 固定的・静的：子どもの数学学習そのものより，数学の知識を子どもに伝達することが重視される。

② 力動的：数学の発展を反映したカリキュラム改善を焦点にしているものの，依然として，生徒のカリキュラム習得や現代的科学への応用に重点を置いている。

(2) 内在的（Aristotelian）数学観

① 過程（process）としての数学：数学を知ること（knowing matheamtics）は，数学をすること(doing mathematics）と同義である。

② 活動（activity）としての数学：数学的活動を，認知過程やシェーマといった心理モデルによってとらえている。

③ 社会的相互作用（social interaction）の結果としての数学：数学学習は，知識，概念，法則，技能の獲得であり，文脈（context）に依存した社会

的相互作用によってなされる。

近年における数学教育研究の研究成果を考慮すると，「(2)　③　社会的相互作」は，独立した項目とすべきである。Ernest (1991) の社会的構成主義や Lampert & Cobb (2003) による数学的コミュニケーションに関する研究から，次のように区分できる。

(3)　社会的構成としての数学観

①　数学的コミュニケーションによる知識獲得

②　数学的コミュニケーションへの参加

数学観は多様で，固有の教室文化を形成している。したがって，それぞれの教室文化に，これらの数学観を，単純に独立させて当てはめるようなものではない。それぞれの教室文化は，それらの数学観を，要素として含んでいるのである。

さらに，数学的活動について，Dossey（1992）は心理学的側面を強調している。これに対して，Freudenthal (1983) は，精神的対象への教授学的現象として，数学的活動を捉えている。さらに，近年では数学的活動を「数学化・脱数学化（平林一榮訳語；mathematisation and dematehamtisation; Gellert & Jablonka, 2007）」として社会学的に考察するようになった。

また，Nickson (1992, pp. 101-102) は，数学的知識についての信念や価値観である数学観が，教室文化と大きく関係していると述べている。中村 (1999, p. 9) を参考にすれば，以上の数学観を，次の表３にまとめることができる。

	伝統的数学観	社会的構成としての数学観
Nickson	①数学は不変の真理と疑う余地のない確実性から成る	④数学は変化・発展するものである
Ernest	②絶対主義者による数学観	⑤可謬主義者による数学観
Dossey	③外在的数学観	⑥内在的数学観
教室文化	機械論的教室文化	生命論的教室文化

表３

この表３において，伝統的数学観は，①の不変性や確実性，②の絶対主義や

③の外在的数学観であり，機械論的教室文化に関連している。社会的構成としての数学観は，④の変化・発展性，⑤可謬主義者や⑥の内在的数学観に関連しており，生命論的教室文化となる。

３.２　生命論的教室文化と Lakatos の数学論

従来の数理哲学，つまり論理主義，直観主義，形式主義は，数学体系を論理実証主義の立場から特徴づけるものである。Sierpinska & Lerman（1996）は，これらの立場をまとめて，形式主義的伝統と呼んでいる（pp. 837-840）。これに対して，Lakatos （1976） の数学論は，数学が「発展し，変化する」過程を究明するための数理哲学である（Nickson, 1992, p. 103）。

Lakatos は，数学の歴史的発展の過程を，数学的コミュニケーションとして再構成している（Sriraman & English, 2010, pp. 8-10）。このような教室における数学的コミュニケーションは，数学教育における生命論的教室文化がもつ固有の特質である。数学の発展過程の本性を，教室における対話として再構成することは，まさに数学教育における生命論の思想である。そして，これはまさに「社会的構成としての数学観」になる。

Lakatos の数学論では，数学は準経験科学である。その探究過程は自然科学と同様に，推測に始まり反例による反駁によって定理や定義が再構築されるものである（Sierpinska & Lerman, 1996, p. 837）。証明は，自然科学の実験と同様に，定理を正当化するもの，つまり数学体系の中に論理的に埋め込むための思考実験だというのである。

《発見は，上下するのではなく，ジグザグの道をたどるのです．反例に小突かれ，素朴な推測から前提へと動き，再び戻って素朴な推測を排除し，定理で置き換える．素朴な推測と反例は一人前になった演繹構造には現れません：発見のジグザグは最終的な結果にはっきり現れることはないのです．》（ラカトシュ， 1980, p. 50）

Lakatos の数学観を，教室文化として実践したのは，ランパート（1995）である。彼女は，ラカトシュ（1980, p. 50）の発展過程を「意識的な推論」の過程として，次のような指摘をしている。

《〈数学する〉 人の立場から見ると、推測すること（ラカトシュの言う「意識的な推論」）は危険を引き受けることでもある。つまり、推測するには、自分の仮定が修正をまぬがれないこと、結論が不適切かもしれないことを認めなければならないし、他の人からの攻撃で傷つくことを覚悟しなければならない。勇気と慎み深さという資質が〈数学する〉活動への参加にもとめられるのは、たとえ推測が証明されたときでさえも、真理は暫定的なものにすぎないからである。》（ランパート， 1995, p. 190; Lampert, 1990）

そして，ポリアを引用して，数学の知識を獲得する活動にとって，「勇気と謙虚さ」は欠くことのできない「道徳的資質」であるとまとめている。これは，生命論的教室文化において重要な社会的規範である。そして，この「勇気と謙虚さ」という規範が数学の授業において獲得可能なのか，またそのための指導方法を，ランパート（1995, p. 232）は，追究している。

Lampert（1998）は，その指導方法について，次のように述べている。

《私のクラスでは，話し合いを始めるとき，問題に対して生徒の多様な答えを求める。また，それらの答えを「推測」と呼ぶことにしている。そして，クラス全体でどの解法が正しいかを話し合う。数学では，条件や仮定，解釈が重要である。話し合いの中では，そのことが明確になり，生徒は自分の言葉で定義を検討する。この活動は教室で行われるので，教師や生徒は，単純な結果や「解答」に対する評価について，見方を変えなければならない。このようにして，生徒は言葉を磨き，自分の主張を確証するという，数学の過程を学ぶのである。指導のテンポは遅くなるものの，生徒はディスコースによって，自分の思考を価値づけることに参加するのである。》（p. 156）

これは，教科書にある絶対的真理を生徒に効率よく伝達するという機械論的教室文化とは対極にある教室文化である。つまり，生命論的教室文化における指導の実際を示している。その中では，児童･生徒が「自分の考えの価値づけに参加すること」が重要なのである。そして，Lakatos の数学論を活かした指導になっている。

第４節　生命論的教室文化の言語学的観点

４.１．生命論的教室文化と言語

教室文化は，教室における言葉づかいの習慣であると定義できる（Bauersfeld, 1995）。また，数学は言語としての機能をもっており，コミュニケーションの手段でもある。

そして，第２節で述べたように，Piaget は子どもの自己中心的言語から社会的言語への発達を研究した。これに対して，Vygotsky は，Piaget の自己中心性を批判し，外言から内言へという言語の発達を主張した。これらの主張は，数学的概念の発達を考察するための基礎理論になっている。そこで，教室文化を言語学の観点から考察する。

言語の相対性を確立したことで，Saussure の言語学はよく知られている。特に，パロール（'parole', 'speech', 発話）とラング（'langue', 'language', 言語）を区別したことは，重要である（平林一榮，1987, pp. 377-380）。

パロールとは，発話の必要性から口にされるすべてのもの，そして，個別に

表現されるすべてのものである。ラングとは，言語能力の行使を個人に可能にするために社会が採り入れた契約の総体である。またパロールは，ラングという社会契約によって自らの思いを実現する，個人の行為でもある。まずパロールにおいて何度も試みられ，結果として，持続可能になるまで繰り返されたものが，ラングとなるである。つまり，ラングとは，パロールによって喚起されたものを，社会的に容認したものである（丸山圭三郎，1983, pp.88, 112）。

パロールとラングの関係は，「教室文化における数学」の区分と類似している。「非形式的な数学と形式的な数学（Gravemeijer, 1999）」，あるいは「個人の数学的知識と制度としての数学（'institutionalized mathematics'; Gravemeijer, 2002, p.13）」，「潜在的数学と顕在的数学（平林一榮訳語；'implicit mathematics and explicit mathematics'; Chevallard, 2007）」である。教室文化における数学は，これらを同時に含んでいるために，複雑な様相をもっている。

さらに，ラングの持続可能性は，構成主義者のいう生存可能性に似ている。パロールが，子ども自らの思考を実現するという考え方は，Vygotsky の言語観によく似ている（Gravemeijer, 2002, p.15）。言語は，さまざまな可能性や実現性，相対性をもっているからである。

しかしながら，言語におけるパロール・ラングと，「2 つの数学」では大きな違いもある。言語では，パロールは豊富で，生産性が高い。これに対して数学では，形式的数学として体系化されなければ，発展性や生産性は期待できない。しかも，個人の非形式的な数学知識がほとんど扱われないような教室文化を想定することさえ可能である。

したがって，数学教育におけるパロールとラングの関係は，Vygotsky の生活的概念と科学的概念に対応している。そして最近接領域は，まさに生命論的教室文化である。教師は，意図的に工夫して，最近接領域を創発しなければならない。このことを，本研究では「教室文化の文化化」と呼び，第５章で考察する。

また，Saussure の言語学の重要な概念は，言葉の恣意性に関する図式である。当初は図４のようなものであった。聴覚映像とは，音からのイメージである。「き」，"tree", "arbre", "Baum" などがそれである。日本人なら，「き」と聞けば，あるイメージをもつ。そのイメージが聴覚映像である。概念は，まさにイメージが指し示す意味内容である。

後年，Saussure は記号学を創始した。聴覚映像を能記（signifiant, signifier）と称し，概念を所記（signifié, signified）として，図５のようにまとめた。能記とは，記号表現であり，所記とは記号内容である。Saussure の記号学は，生命論的教室文化における学習指導やディスコースを考察する基盤となる。

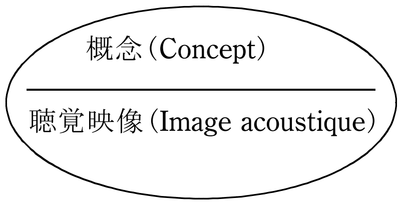


図４　当初の Saussure 言語記号

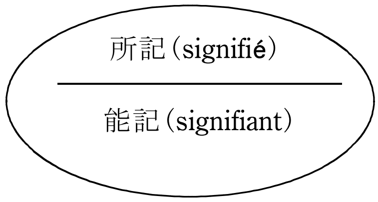


図５　Saussure の記号学

そこで重要となるのは，子どもの思考と表現の関係である。算数・数学における表現は言語だけではなく，教具，絵や図，数学記号などさまざまなものがある。第２節で述べたように，Piaget の立場では，思考と表現は別なものとしてとらえている。これに対して，Vygotsky 理論では，思考と表現の間の対応性や同型性を基本的視座としている。ただし，Vygotsky 自身は，対応性とか同型性という用語を用いている訳ではない（中村和夫，1998, p. 39)。これは，中村(1998)の用語である。

中村(1998)は Vygotsky の言葉と思考の関係について, 次のように述べている。《言葉と思考との対応性の主張は，言葉が思考を，つまり意識を形成するという思想を導いてもくれることになる．人間の行動の特質については，…歴史的経験，社会的経験，二重化された経験をその本質的成分として考慮することに明確に気づいていたヴィゴーツキーにとっては，言葉が歴史的・社会的起源を持ち，人と人との交流の手段であることを突き詰めていくならば，言葉と思考の対応性の思想から，さらに，言葉を中心にした意識の歴史的・社会的起源とその発達の問題へと駒を進めることは，まさに順路であった.》(p.41)

つまり，「言葉」は，数学教育では，教具，図式や数学記号など，さまざまな様式の表現ととらえることができるのである。

４.２　言語ゲームとしての教室文化

本研究における教室文化の記述は，「言語ゲーム（'language game', ,Sprachspiel')」の思想に従っている。教室文化とは何か。教室文化の特質とは何か。ある教室文化では数学的内容がどのように理解されているのか。これらの教育現象そのものを記述するよりも，むしろその教室文化における言語活動（ディスコース）に着目して，教室文化の規則性を記述するのである。

Bauersfeld（1995）は，次のように述べている。
《実感したことは言語にすることで対象になる。そして，言語ゲームによって，その内容についてコミュニケーションをする。特別な言語ゲームによって，言語そのものについて反省できるようになるのである。》(p. 277)

言語ゲームは，Wittgenstein 哲学の用語である。これは,「言葉を話すということは，活動や生活形式の一部であるという事実に基づいた用語である」（Wittgenstein, 1974, § 24）。つまり,「言葉の意味は言葉遣いの中にある」（Wittgenstein, 1974, § 43）のであり,「音は，特定の言語ゲームの中で発せられるときだけ，表現となる」（Wittgenstein, 1974, § 261）のである。つまり，言語ゲームとは，ある規則（ルール）に従う人間の振る舞い，行為あるいは生活や活動の形式である。

例えば,「机」という言葉を使う言語ゲームを考えよう。われわれは，机の定義を知って，机を理解しているのではなく，言語ゲームの規則（ルール）を理解することで，机を理解しているのである。

このことを，橋爪大三郎(2009)は，次のように分かりやすく解説している。

《誰か（Ａさんとする）が、机はなにか、わかっているとする。あなたが、机がなにか、わがらなかったとする。

そこでＡさんは、いろんな机を順番にもってくる。これも机。これも机。どの机も、ちょっとずつ違っている。形が違う。脚の数が違う。大きさが違う。色が違う。材料が違う。……。でも全体として、どこか似ている。…それを順番に見ていくうちに、あなたはやがて、机がなにかを理解する。そして“わかった！”と叫ぶ。

わかってしまえば、もうそれ以上、机を持ってきてもらう必要はない。

なぜ、わかったのか。

それはわからない。とにかくわかった。では、机とはなにか。説明できるとは限らない。定義できるとは限らない。

…

この例は、言葉というものの本質に触れている。「机」という言葉は、この世界にある、数えきれないたくさんの机を意味している。けれども、「机」の意味を理解するのに、そんなにたくさんの「机」を見る必要はない。私たちは有限個の、それもごくわずかの机を見るだけで十分なのだ。

有限個（ごく少数）をみるだけだのに、数えきれない場合にあてはまる規則（ルール）を理解する。こういう、なんとも不思議な能力によって、人間は言葉の意味を理解する。》（pp.118-119）

この例から示唆されることは,「算数・数学が分かるということは，言語ゲームである」ということである。算数・数学の授業や教科書では，いくつかの例によって計算などの手続きが示される。子どもは，その中からルールを理解する。これが一般化である。そして，様々な場合に，そのルールを適用できるようになる。それが，分かったということになる。

例えば，算数の数表記を学ぶときに，「十を 10」，「十一を 11」と書くことを，教師が教える。すると，この例によって，子どもが言語ゲームができるようになれば，「十二を 12」，「十三を 13」と書くようになる。ところが，それができなければ，「102」，「103」などと書くであろう。つまり，このルールが分かないか，別のルールを使っているのである。

図形の学習にも言語ゲームがある。小学校 3 年の「三角形」では，「二等辺三角形では，２つの角の大きさが同じです」という性質を学ぶ。これは，図６のような「特定の」二等辺三角形をかいて，角の大きさをくらべることで指導される。そして，授業のまとめとして，「二等辺三角形では，２つの角の大きさが同じです」という一般命題が示される。一つの特定の例から一般命題が導かれるのであり，これも言語ゲームである。

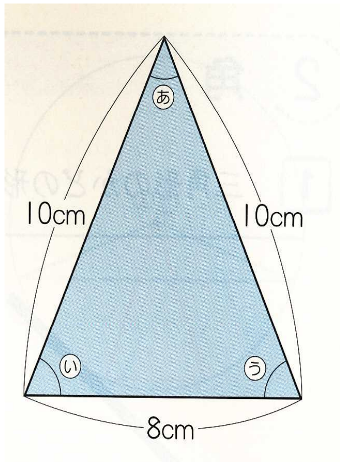


図６

言語ゲームの発想は，数学とは何かという数理哲学にも見られる。ヒルベルトの公理主義の考え方である。公理主義では，数学の対象は何かという定義を表記（'written symbol'; 平林一榮，1987, pp.374-375）する必要はない。むしろ，それらは無定義用語として，それらの関係や操作についての規則を表記すればよい。点と直線の代わりに，椅子と机と呼んでも構わないのである。大切なのは規則であり，数学では公理である。このことによって，数学の体系は，命題の体系のみならず，表記の体系にすることができたのである。

例えば，「点とは部分をもたないものである。線とは幅のない長さである」と表記してしまえば，次には「部分とは何か」「幅とは何か」を表記しなければなくなる。そこで，「2 点があれば，それらがその上にある直線が存在する」と表記することで，表記体系は完成するのである。言語ゲームにおけるルールの記述に着目する利点は，ここにある。

そして，Bauersfeld （1995）は，教室文化は教室における言葉づかいの習慣であり，それはまた言語ゲームそのものであると述べている。教室における子どもの言葉遣いについて，次のように述べている。

《子どもは，言葉遣いの切れ端を拾い，同じような状況で話すときに，それをまねして使ってみる。そして，その反応によって，意味を変えてみる。このようにして，まねした切れ端を補っていくのである。それはまた，状況に特有の意味を共有していくことになる。》（p.287）

これは，まさに机の言語ゲームと同様のことを，児童・生徒が教室で実行してることになる。そして，数学の確実性といったことも，言語ゲームであり，教室文化であることを，指摘する。

《数学には自己説明力がない。推論を進める力もない。学習者にとって，数学は便宜に過ぎない。Wittgenstein（1974）が述べているように，「この人が痛がっているということは，2 足す 2 が 4 であることよりも不確実である」といえようか。〈数学的確実性〉は心理的概念ではない。この種の確実性は言語ゲームなのである」（p.　224）このことから，確実性は社会的慣習から生まれるものである。つまり，社会的相互作用や教室文化に戻るのである。「初めに言語ゲームを見よ」（Wittgenstein, 1974, § 656）である。》（pp. 287-288）

つまり，数学学習における数学の固有性は，言語ゲームよって創発されるのである。このことから，数学教育における生命論的教室文化そのものが，言語ゲームといえる。そして，個人や集団の言語ゲームにおけるルールを，記述して，推測したものをメタルールと呼ぶ。このような言語ゲームやメタルールの観点は，第 4 章のディスコース分析の基盤になっている

第５節　第３章のまとめ

まず，構成主義的観点から，数学学習における教室文化の意義について考察した。数学的知識は，生徒が主体的に構成するものと考えるのが構成主義である。構成主義から教室文化を考察するために不可欠なのは，教室におけるコミュニケーションである。

つまり，コミュニケーションが成立するには，お互いに相手のイメージを構成しながら，相互に作用し合っているのである。相互反映性は 2 人の人間の間で成り立っており，さらには自己の思考の中に，メタ認知として「自己相互反映性」が成立しているということである。

そしてコミュニケーションによって形成されるのが，「合意領域」である。つまり，構成主義の立場から，教室における合意領域が教室文化である。さらに，これは，生命論的教室文化である。

次に，数学教育における社会･文化理論から教室文化を考察する。重要なのは Vygotsky の理論である。Vygotsky 理論の特徴は，学習における「模倣」や「内化」を重視している点にある。そのために，「発達の最近接領域」の概念が重要になる。

さらに，Vygotsky 理論には，二つの主張がある。一つは，人間の高次精神活動は，「文化的道具（cultural tools）」を媒介にして，直接的な心理過程を間接的過程に転化させることである。文化的道具とは，言語や記号である。したがっ

て，思考と言語・表現は一体のものであり，単純に分解することはできないということなる。他の主張は，人間の高次精神機能は，精神間から精神内への内化によって機能することである。

そして，そのような思想から，生活的概念と科学的概念の対照的な発達方向の中で，発達の最近接領域という概念を位置づけることもできる。このような発達の最近接領域が，生命論的教室文化である。

次に，算数･数学科に固有な生命論的教室文化とは何かについて述べた。数学教育における教室文化は，当然ながら数学的文化を含んでいる。ここで数学的文化と呼ぶものは，数学知識そのものだけではなく，そのメタ知識である数学観を含んでいる。

数学教育の生命論的教室文化における重要な数学観は，「社会的構成としての数学」であり，これは①数学的コミュニケーションによる知識獲得と②数学的コミュニケーションへの参加という 2 つの観点からなっている。

数理哲学者 Lakatos は，数学の歴史的発展の過程を，教室におけるコミュニケーションとして再構成している（Sriraman & English, 2010, pp. 8-10）。これは，数学教育における生命論的教室文化がもつ固有の特質である。数学の発展過程を，教室に再構成することは，数学教育における生命論の思想である。そして，これはまさに「社会的構成としての数学観」である。

つまり Lakatos の数学論には，社会的構成としての数学観がある。これは，数学は準経験科学であるという思想にもなる。その探究過程は自然科学と同様に，推測に始まり反例による反駁によって定理や定義が再構築されるものである。証明は，自然科学の実験と同様に，定理を正当化するものである。つまり，証明は数学体系の中に論理的に埋め込むための思考実験だというのである。

この数学観を，教室文化として実践したのは，ランパート（1995）である。数学の知識を獲得する活動にとって，「勇気と謙虚さ」は重要な道徳的資質であるとまとめている。

またそれは，教科書にある絶対的真理を生徒に効率よく伝達するという機械論的教室文化とは対極にある教室文化である。つまり，生命論的教室文化における指導の実際を示している。その中では，児童･生徒が「自分の考えの価値づけに参加すること」が重要なのである。

最後に，生命論的教室文化に対する言語学的観点について述べた。教室文化は，教室における言葉づかいの習慣であると定義できる（Bauersfeld, 1995）。また数学は言語としての機能をもっており，コミュニケーションの手段でもある。

言語の相対性を確立したことで，Saussure の言語学はよく知られている。特に，パロールとラングを区別したことは，重要である（平林一榮，1987, pp.

377-380)。パロールとラングは，Vygotsky の生活的概念と科学的概念に対応させた方がより適切である。最近接領域は，教室文化である。教師は，意図的に工夫して，最近接領域を創り出さなければならない。このことを，本研究では「教室文化の文化化」と呼ぶことにする。

Saussure の言語学の重要な概念は，記号の恣意性に関する図式である。後年，Saussure は記号学として，能記（signifiant, signifier）と所記（signifié，signified）と称して，図式的にまとめた。これは，教室文化の文化化において重要である。

さらに，数学教育における教室文化の固有性そのものが，生命論的教室文化から創発される。そこで，本研究における教室文化の分析や記述は，Wittgenstein (1974)の「言語ゲーム」の思想に従っている。つまり，教室における言語活動の形式について，規則性を記述するのである。これらの記述や分析を，ディスコース分析と呼ぶことにする。

《第３章の引用・参考文献》

和文文献

石田忠男（1988）.「算数・構成主義の立場から授業を検討する」,『ネタ教材開発ツーウェイ　特集「授業の常識論」を検討する』, No. 4，7 '88, pp. 21-26.

ヴィゴツキー，L．S．［著］／柴田義松［訳］（1956/1962）.『思考と言語』，明治図書.

ヴィゴツキー，L．S．［著］／土井捷三・神谷栄司［訳］（2003）.『発達の最近接領域の理論』，三学出版.

エンゲストローム，ユーリア［著］／山住勝広・松下佳代・百合草禎二・保坂裕子・庄井良信・手取義宏・高橋登［訳］（1999）.『拡張による学習　活動理論からのアプローチ』，新曜社.

グレーザーズフェルド, エルンスト・フォン［著］／ 西垣通［監修］，橋本 渉［翻訳］（2010）.『ラディカル構成主義（叢書コムニス 11）』，エヌティティ出版.

コープランド［著］／佐藤俊太郎［訳］（1976）.『ピアジェを算数指導にどう」生かすか』，明治図書，pp.354-359.

柴田義松（1965）.「ソビエト心理学からみたピアジェ（第Ⅷ章）」，波多野完治［編］.『ピアジェの発達心理学』，国土社.

柴田義松（2006）.『ヴィゴツキー入門』，寺子屋新書 020，子どもの未来社.

中村和夫（1998）.『ヴィゴツキーの発達論　文化-歴史的理論の形成と展開』，東京大学出版会.

中村昇平 (1999).「算数・数学授業における教室文化に関する考察」,『全国数学教育学会誌　数学教育学研究』，第 5 巻，pp.9-15.

中原忠男（1994）.『算数・数学教育における構成的アプローチの研究』，聖文社.

中原忠男（1999）.『構成的アプローチによる算数の新しい学習づくり』，東洋館出版社.

橋爪大三郎（2009）.『はじめての言語ゲーム』，講談社.

平林一榮（1987）.『数学教育の活動主義的展開』，東洋館出版社.

平林一榮（1993）.「算数・数学教育における数学観の問題」，西日本数学教育学会資料.

平林一榮（2000）.「数学教育における構成主義の素性－とくに急進的構成主義についてー」,『近畿数学教育学会会誌』，第 13 号，pp.14-21.

平林一榮（2012）.「数学・数学教育学における認識論（続）」,『全国数学教育学会誌　数学教育学研究』，第 18 巻　特別号，pp.27-33.

丸山圭三郎（1983）．『ソシュールを読む　岩波セミナーブックス 2』，岩波書店．
ラカトシュ，I．［著］／佐々木力［訳］（1980）．『数学的発見の論理　－証明と論駁－』，共立出版．
ランパート，M．［著］／秋田喜代美［訳］（1995）．「真正の学びを創造する　数学がわかることと数学を教えること」，佐伯胖／藤田英典／佐藤学［編］，『学びへの誘い　シリーズ学びと文化①』，東京大学出版会．
レイヴ，ジーン ＆ ウェンガー，エティエンヌ［著］／佐伯胖［訳］（1993）．『状況に埋め込まれた学習　正統的周辺参加』，産業図書．
茂呂雄二（1999）．『具体性のヴィゴツキー』，金子書房．
（図６は，平成 23 年 5 月 10 日検定済教科書『算数３下』株式会社新興社啓林館から複写））

欧文文献

Bauersfeld, H.（1995）. "Language game" in the mathematics Classroom: Their function and their effects. In P. Cobb, & H. Bauersfeld（Eds.）, *The emergence of mathematical meaning.* Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum.
Chevallard, Y.（2007）. Implicit mathematics. In U. Gellert, & E. Jablonka（Eds.）, *Mathematisation and demathematisation: Socila, philosophical and educational ramifications*. Rotterdam, The Netherlands: Sense Publishers.
Cobb, P.（1989）. Experiental, cognitive, and anthropological perspectives in mathematics education. *For the Learning of Mathematics,* 9（2）, 32-42.
Cobb, P., & Yackel, E.（1998）. A constructivist perspective on the culture of the mathematics classroom. In F. Seeger, J. Voigt, & U. Waschescio（Eds.）, *The culture of the mathmematics classroom*（pp. 158-190）. Cambridge, UK: Cambridge University Press.
Dossey, J. D.（1992）. The nature of Mathematics: Its role and its influence. In D. A. Grouws（Ed.）, *Handbook of research on mathematics teaching and learning: A project of the National Council of Teachers of Mathematics*（pp. 39-48）. Macmillan Publishing Company.
Ernest, P.（1991）. *The Philosophy of mathematics education*. The Falmer Press.
Freudenthal. H.（1983）. *Didactical phenomenology of mathematics structures*. Dordrecht, The Netherlands: Reidel.
Gellert, U., & Jablonka, E.（2007）. *Mathematisation and demathematisation: Socila, philosophical and educational ramifications*. Rotterdam, The Netherlands: Sense

Publishers.

Gravemeijer, K. (1999). How emergent models may foster the constituion of formal mathematics. *Mathematical Tinking and Learnig*, 1(2), 155-177.

Gravemeijer, K, (2002). Preamble: From models to modeling. In K. Gravmeijer, R. Lehrer, B. van Oers, & L. Verschaffel (Eds.), *Symbolizing, modeling and tool use in mathematics education* (pp.7-22). Dortrecht, The Netherlands: Kluwer Academic Publishers.

Lampert, M. (1990). When the problem is not the question and the solution is not the answer: Mathematical knowing and Teaching. *American Educational Research Journal,* 27(1), 27-63.

Lampert, M. (1998). Investigating teaching practice. In M. Lampert & M. L. Blunk (Eds.), *Talking Mathematics in School: Studies of Teaching and Learning*. United Kingdom: Cambridge University Press.

Lampert, M, & Cobb, P. (2003). Communication and language (chapter 16). In J. Kilpatrick, W. G. Martin, & D. Schifter (Eds.), *A Research Companion to Principles and Standards for School Mathematics.* National Council of Teachers of Mathematics, 237-249.

Lakatos, I. (1976). *Proofs and refutations.* Cambridge, UK: Cambridge University Press.

Lave, J., & Wenger, E. (1991). *Situated learning: Legitimate peripheral participation*. Cambridge: Cambridge University Press.

Lerman, S. (1996). Intersubjectivity in mathematics learning: A challenge to the radical constructivist paradigm? *Journal for Research in Mathematics Education*, 27(2), 133-150.

Maturana, Humberto (1978). Biology of Language: The Epistemology of Reality. In G. A. Miller, and E. Lenneberg (Eds.), *Psychology and Bilogy of Lnaguage and Thought* (pp.27-64). NY: Academic Press.

Nickson, M. (1992). The culture of the mathematics classrooom: An unknown quantitiy? In D. A. Grouws (Ed.), *Handbook of research on mathematics teaching and learning: A project of the National Council of Teachers of Mathematics* (pp. 101-114), Macmillan Publishing Company.

Richards, J. (1991). Mathematical discussions. In E. von Glasersfeld (Ed.), *Radical Constructivism in Mathematics Education* (pp. 13-51). Kluwer Academic Publishers.

Sfard, A. (1998). On two metaphors for learning and the dangers of choosing just one. *Educational Researcher*, 27(2), 4-13.

Sierpinska, A., & Lerman, S. (1996). Epistemologies of mathematics and of mathematics education. In A. J. Bishop, K. Clements, C. Keitel, J. Kilpatrick, & C. Laborde（Eds.）, *International Hnadbook of Mathematics Education*（pp. 827-876）, Kluwer Academic Publishers, Netherlands.

Sriraman, B., & English, L.（2010）. Surveying theories and philosophies of mathematics educaiton. In B. Sriraman & L. English（Eds.）, *Theories of Mathematics Education*, Advances in Mathematics Education, Springer-Verlag: Berlin Heidelberg.

Stigler, J. W., & Hiebert, J.（1999）. *The teaching gap: Best ideas from the world's teachers for improving education in the classroom.* New York: The Free Press.

Thompson, P. W.（2000）. Radical constructivism: reflections and directions. In L. P. Steffe, & P. W. Thompson（Eds.）, *Radical Constructivism on the in Action: Building on the Pioneering Work of Ernst von Glasersfeld.* London: RoutledgeFalmer.

Vygotsky, L. S.［M. Cole, V. John-Steiner, S. Scribner, & E. Souberman］（1934/1978）. *Mind in society: The development of higher psychological processes.* Cambridge, MA: Harvard University Press.

von Glasersfeld, E.（1989）. Constructivism. In T. Husen, & T. N. Postlethwaite（Eds.）, *The International Encyclopedia of Education*（1st ed., supplement, Vol. 1, pp. 162-163）. Oxford: Pergamon.

Wittgenstein, L.（1974）. Philosophical investigations. Oxford, England: Basil Blackwell.（Original work published 1945）

Wittmann, E. C.（1989）. The mathematical training of teachers from the point of view of education. *Journal für Mathematik － Didaktik,* 10（4）, 291-308.

第４章　数学教育の生命論的教室文化のディスコース分析

第１節では，生命論的教室文化の事例について述べる。Wittmann（1995, 2001a）の本質的学習環境，そして Lampert （1986）の単元構成における 4 つの知識について述べる。また第２節では，ディスコース分析について述べる。そして，第３節では，生命論的教室文化の実践事例として，「平方数とピラミッド数」の授業，「算数のリズム」の授業，さらに「正の数・負の数」の実践事例について述べる。また，それぞれをディスコース分析する。

第１節　生命論的教室文化の事例

１.１．本質的学習環境

生命論的教室文化では，単元や教材が重要な役割をもっている。この点で，Wittmann（2001a）の「本質的学習環境（Substantial Learning Environment）」は意義深い。これは，教授単元（Teaching Units; Wittmann, 1984）を拡張したものである。その観点は，次の通りである（2001a, p. 2）。

(1) それぞれのレベルにおいて，数学指導の目的，内容，原理を示唆している。
(2) あるレベルから発展した数学的内容，過程，方法と結びつくような，数学的活動の源泉になっている。
(3) さまざまな教室の条件に合うように，柔軟であること。
(4) 数学指導の数学的，心理学的，教育学的観点を統合する，実践研究の場となること。

これらの観点は，知識のネットワーク（國本，2006, p. 11），そして内容や教材の柔軟性，発展性を強調している。算数・数学の指導内容は，系統性や体系性をもっている。重要なことは，そのような知識のネットワークを児童・生徒が構成していることである。また，教材がもつ柔軟性や発展性は，算数・数学の教科の特質である。

そこで，本質的学習環境の例を 3 つあげる。Wittmann（2001a）自身は，「20 のゲーム」をあげている。

例１．20 のゲーム

①　②　③　④　⑤　⑥　⑦　⑧　⑨　⑩　⑪　⑫　⑬　⑭　⑮　⑯　⑰　⑱　⑲　⑳

1 から 20 までの数を一列に並べる。2 人でゲームをする。先攻は 1 個または 2 個の数を順番に取っていく。後攻も同様に，1 個または 2 個の数を順番に取っていく。このようにして，2 人のどちらかが⑳を取った方が勝ちとなる。

このゲームには必勝法があり，先攻が勝つためのストラテジーがある。先攻

が，② ⑤ ⑧ ⑪ ⑭ ⑰ と取れば，⑳を必ず取れる。これは，計算練習になるだけでなく，必勝法を推測したり，それを話し合うための教材になる。また，問題をさまざまに変えることができるので，柔軟性や発展性がある。

オーストラリア モナッシュ大学の Peter Sullivan（サリバン，2012）は，このゲームを，次のように発展させた。まず，初めのスタートの数，ゴールとする数，いくつずつ数えるかを変えてみる。

スタート数	ゴール数	いくつ数えるか
０	１０	１つか２つ

これは，⓪ ① ② ③ ④ ⑤ ⑥ ⑦ ⑧ ⑨ ⑩ と問題を変えることで，より簡単になる。これも先攻の必勝法がある。① ④ ⑦ と取れば，必ず勝てる。

スタート数	ゴール数	いくつ数えるか
０	１０	１つか２つか３つ

3 つの数から選べることになる。この場合も，先攻必勝である。② ⑥ と取れば勝てる。この差 4 ＝ 1 ＋ 3 である。

さらには，小数や分数でも可能である。

スタート数	ゴール数	いくつ数えるか
０	１	０.０５，０.１，０.１５
０	３	$\frac{1}{6}$ ，$\frac{1}{3}$

さらには，中学校の文字式や無理数でも可能である。

スタート数	ゴール数	いくつ数えるか
０	$5x+5y$	x，y，$x+y$
１	$32a^5$，b^5	２，a，b，ab
１	１２８	２，$\sqrt{2}$ ，$2\sqrt{2}$

このように，小学校から中学校までの計算練習となるようなゲームにすることができる。また，それぞれの必勝法を考えることで，必勝のためのパターンを見つけることができる。

例 2．3 つの整数の和

　１＋２＋３＝６，　　２＋３＋４＝９，　　３＋４＋５＝９，　…

この和にどんなパターンがあるかは，小学生でも追究できる教材になる。

「3 つの連続する整数の和は，3 の倍数である」。この数のパターンは，本質的学習環境として，豊富に発展する。すぐに一般化できる命題は，次のものである。「奇数個の連続する整数の和は，その奇数の倍数である」。

　偶数個の和は，どんなパターンであろうか。

１＋２＋３＝６＝２×３，２＋３＋４＝９＝３×３，３＋４＋５＝９＝３×３

$1+2+3+4=10=\frac{5}{2}\times 4$，$2+3+4+5=\frac{7}{2}\times 4$

「初項と末項の和の半分の偶数倍」であり，これは等比数列の和の公式になる。

　さらに，これを逆に考えてみる。つまり，自然数を連続する自然数の和で表してみる。

　１＝
　２＝
　３＝１＋２
　４＝
　５＝２＋３
　６＝１＋２＋３
　７＝３＋４
　８＝
　９＝４＋５＝２＋３＋４
１０＝１＋２＋３＋４
１１＝５＋６
１２＝３＋４＋５
１３＝６＋７
１４＝２＋３＋４＋５
１５＝７＋８＝４＋５＋６＝１＋２＋３＋４＋５
１６＝
１７＝８＋９
１８＝５＋６＋７＝３＋４＋５＋６
１９＝９＋１０
２０＝２＋３＋４＋５＋６
２１＝１０＋１１＝６＋７＋８＝１＋２＋３＋４＋５＋６

２２＝４＋５＋６＋７
２３＝１１＋１２
２４＝７＋８＋９
２５＝１２＋１３＝３＋４＋５＋６＋７
２６＝５＋６＋７＋８
２７＝１３＋１４＝８＋９＋１０＝２＋３＋４＋５＋６＋７
２８＝１＋２＋３＋４＋５＋６＋７
２９＝１４＋１５
３０＝９＋１０＋１１＝６＋７＋８＋９＝４＋５＋６＋７＋８
３１＝１５＋１６
３２＝
…

この数の現象からすぐに気が付くパターンは，1，2，4，8，16，32 など，「自然数2^n は連続な自然数の和で表すことができない」ことである。この他に，和の表し方が 1 通りのものから，3 通りのものまである。

・1 通り：3, 5, 6, 7, 10, 11, 12 , 13, 14, 17, 19, 20, 22, 24, 26, 28, 29, 31

これを見ると 2 以外の素数がすべて含まれていることである。偶数は，2^n で割ると，奇素数（2 以外の素数）になる。

・2 通り：9, 18, 25
・3 通り：15, 21, 27, 30

これらも同様に，2^n で割ると，次のようになる

・2 通り：9, 9, 25
・3 通り：15, 21, 27, 15

このことから分かることは，次のことである。

「自然数を連続な自然数で表す方法は，その自然数の 1 を除く奇数の約数の個数である」。

これらの命題は，Sylvester の定理と呼ばれる（杉野本他，2011）。小学校の計算練習やパターンの探究問題から，中学校の文字式，高等学校の等比数列，そして Sylvester の定理と，さまざまなレベルの数学的活動を促す発展性や教室に対応できる柔軟性をもっている。つまり，本質的学習環境となっている。

例 3．二等辺三角形

二等辺三角形は，小学校 3 年生から学習している基本図形である。「二等辺三角形の 2 つの底角は等しい」という性質は，自明な命題である。

ところが，「シュタイナー=レームスの定理」のように，難問もある。それは，「2 つの内角の 2 等分線（頂点から対辺までの長さ）が等しい三角形は，

二等辺三角形である」という定理である。
《この定理は，純幾何学的な説明をして欲しいとレームス（C. L. Lehmus）が，1840年に偉大なスイスの幾何学者シュタイナー（Jacob Steiner）に送ったものである．ところがシュタイナーの証明は相当複雑だったので，これが刺激でもっと簡単な証明法を案出しようとする人が続出した．シュタイナー=レームスの定理に関する論文が，1842 年，1844 年，1848 年といろいろな雑誌に発表され，1854 年から 1864 年までほとんど毎年のように，次の 100 年間はきわめて規則的にこれが続いた．》（コークスター & グレイツァー，1970）

この定理の証明は，転換法などの間接証明法を使えば，意外に簡単に証明できる。この証明法は，中学 3 年の「円周角の定理の逆」でも利用されているので，高校生なら理解できる。

もちろん，中学生の程度の問題もある。
「二等辺三角形 ABC で，底辺 BC 上の点 P から，等しい辺 AB，AC に下ろした垂線の足を，それぞれ点 Q，点 R とする。点 P が辺 BC 上を動くとき，線分 PQ と PR の長さの和は一定である。」

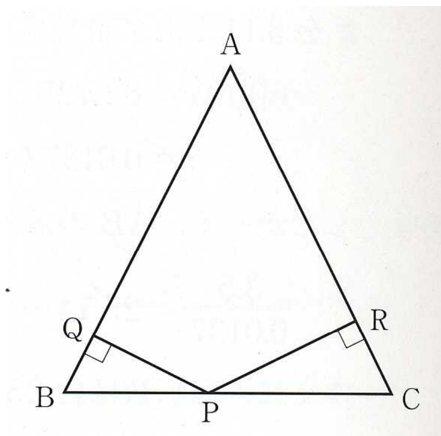


図 1

この証明には，いくつかの方法がある。
点 A と点 P を結んで△ ABC を△ APB と△ APC に分けて，面積を考える証明である。

また，△ PQB と△ PRC が相似であることを利用する方法，頂点 C から辺 AB に垂線を引き長方形を作る方法，さらに，図 2 のように辺 BC を軸とする頂点 A の線対称な点を A'とする。そうすれば，PQ ＋ PR の長さは，QR' の長さになる。これは，平行四辺形 ABA'C の辺 AB に対する高さに等しくなるので，点 P の位置にかかわりなく，一定である。

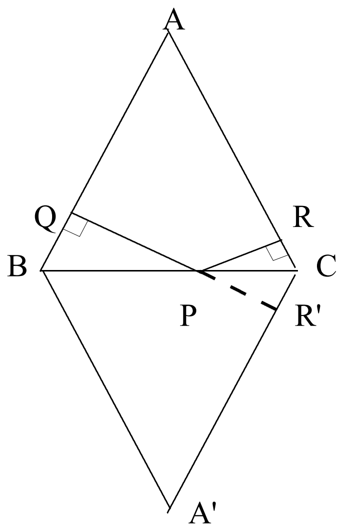


図 2

このようにさまざまな証明法があることは，命題が本質的学習環境となるために必要なことである。

さらに，この命題は直線 PQ，PR が垂線であることを変えたり，点 P を辺 BC の延長上に動かしたり，△ ABC を二等辺三角形であることを変えると，興味深い問題に発展する。

例えば，図３のように辺 CA に平行に PQ，辺 BA に平行に PR をとる。PQ ＋ PR は一定となる。証明は容易である。

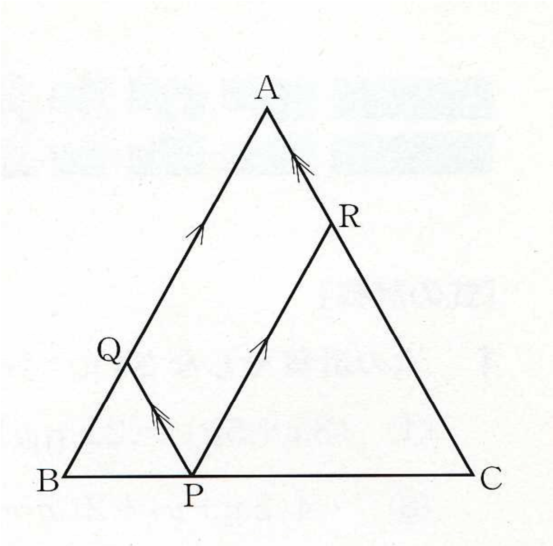


図３

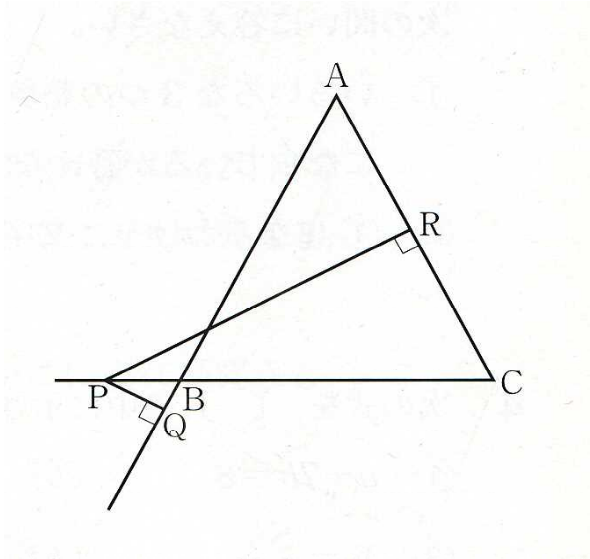


図４

また，図４のように，点 P を辺 BC の延長上にとる。すると，PR 〜 PQ（差）が一定となる。また，図５のように，△ ABC を正三角形にして，点 P を正三角形の内部の点にとり，垂線の足を，それぞれ点 Q，R，S とすれば，同様に PQ ＋ PR ＋ PS は一定になる。これは，美しい命題である。

さらに，正三角形 ABC で図６のように点 P を外部にとることもできる。そうすると，
PQ ＋ PS － PR ＝（一定）となる。
また，図７のように点 P をとると，
PS － PR － PQ ＝（一定）となる。
つまり，点 P が外部にあるときは，垂線の方向によって，負にすれば統合した式が導ける。これも興味深い結果である。

一般の三角形では，図３のように他の辺への平行線をとれば，興味深い関係が得られる。図８で，BC ＝ a，CA ＝ b，AB ＝ c とする。また，

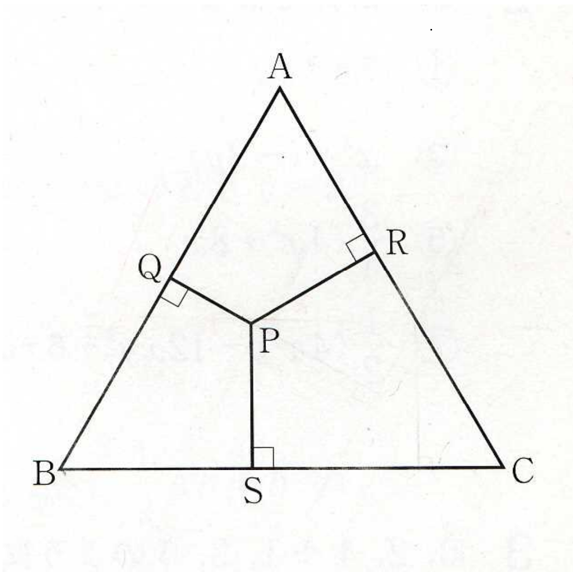


図５

BP ＝ x とすると，

$$PQ + PR = \left(\frac{b-c}{a}\right) x + c$$ という，一次関数になっている。

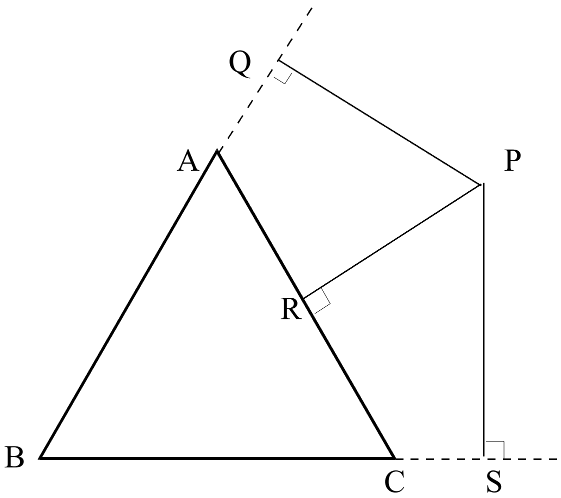


図 6

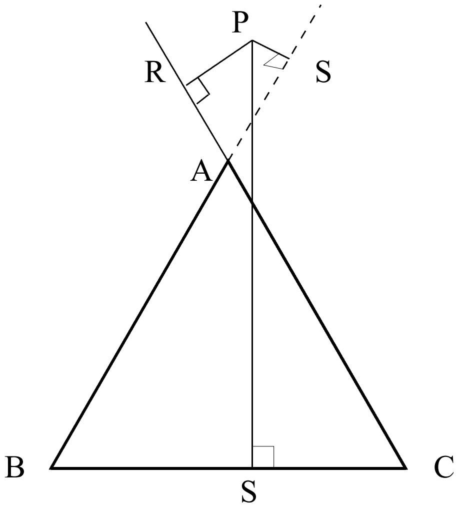


図 7

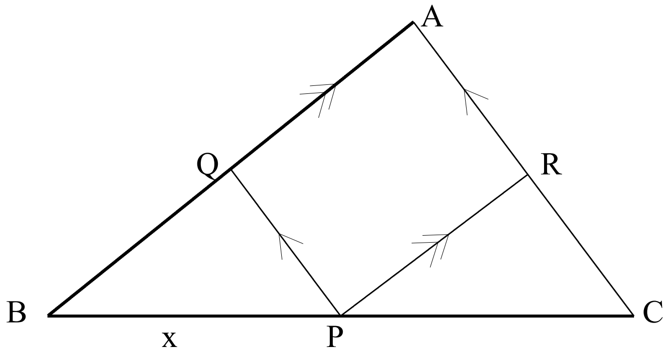


図 8

以上，本質的学習環境の例を 3 つあげた。これらの本質的学習環境は，生命論的教室文化のための教材開発につながっている。

さらに，注目すべきことは，図 9 のように，数学教育学の研究と教育現場における実践を結びつける場として，本質的学習環境を位置づけられることである。つまり，数学教育学研究のための事例となると同時に，教育現場における教材として活用できるということである。また本質的学習環境は，教師教育のための教材にもなるということである。

実際，サリバン(2012)は，例 1．20 のゲームを教師教育の教材にしている。そして，これは教師の適応力を伸ばすために有効であると述べている。

《教師教育の多くの場面でみられる共通するテーマは，課題の扱い方がうまく

いかなかった場合に別の方法を考えたり，設定した目標に既存の教材をうまく調整するなどを含めた柔軟に対応するための能力．つまり適応力と呼ばれる力の向上にあります．このような適応力を伸ばす課題は，困難を抱えている生徒や学習意欲の低い生徒に対する適応も含まれます．加えて，教師のカリキュラムに対する適応力を高める課題は，すでにある教材を授業に適応すること，カリキュラム全体に広がる内容を様々な方法で結びつけることを含んでいます.》（p.13）

例 2 については，Wittmann（2001b）は，Sylvester の定理を教師教育に活用している。この定理は,代数的な証明だけでは分かりにくい。しかし,杉野本他（2011）にあるように，図を操作する証明にすれば，理解しやすくなる。本質的学習環境の意義は，直観的な理解を可能にすることにもあると述べている。Mueller & Wittmann（1984）は，そのような例を多くあげている。本質的学習環境が教師教育に有用であることは，それが生命論的教室文化の基盤となっている根拠である。

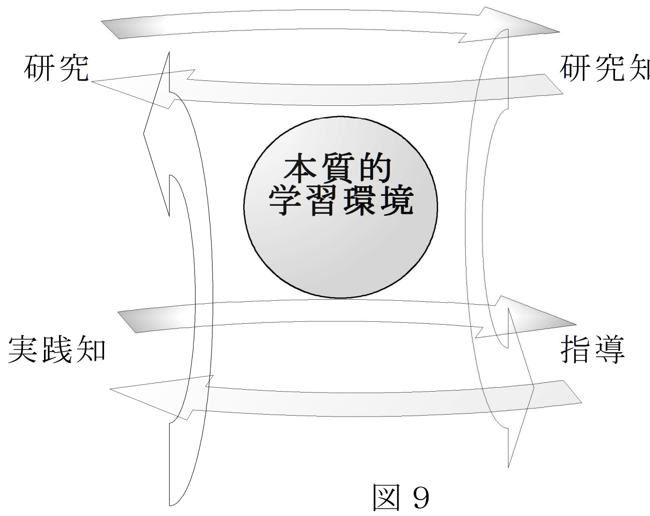


図 9

１.２． 単元構成

（１） Lampert の 4 つの知識

生命論的教室文化の事例として，単元構成の研究は Lampert（1986）の実験授業がある。これは，「乗法の筆算」の単元について，4 つの知識の設定し，これらが相互に活性化するように単元構成し，授業を実践した研究である。

その 4 つの知識とは，次のものである。

・直観的知識（Intuitive Knowledge）

「個人が問題解決をするときの文脈に関する知識である」。（p. 308）これは，

子どもがすでに日常生活で活用している知識や既習の知識である。
・具体的知識（Concrete Knowledge）
「具体物を操作して答を求める方法についての知識である」。（p. 309）架空的な設定の問題に対して，教具としての具体物を操作して解決するための方法についての知識である。
・計算知識（Computational Knowledge）
数の記号を処理する計算の意味や手続きについての知識である（pp. 308-309）。
・原理的知識（Principled Knowledge）
「数学的に正しい手続きを考えたり，さまざまな場面で活用するための知識である」。（p. 310）つまり，数学的な法則や原理に関する知識である。
これらの知識を相互に関連させて，活性化させるように単元構成される。これは，乗法の筆算だけではなく，さまざまな数とその計算に関係する単元に適用できる。
（２）デューイの「漠たる全体」
生命論的教室文化の重要な先行研究は，國本景亀（2009）の「全体性の原理」に関わるものである。実際に，平林一榮（1961，1987）は，J. Dewey 著『数の心理学（1895）』から「漠たる全体」の意義を解明し，次のような単元構成の図式を提示している。

①漠たる全体 → ②分析 → ③確定された全体

図２

《…授業は大抵②の段階から出発する。ところが，この場合は，この分析活動はしばしば教師において行われ，子どもは教師の分析の結果を鵜呑みにすることが多い。①の段階を与えられないでは，子どもが主体的に②の分析を行うことは不可能である。①こそ，子どもに分析の対象と目標を与えるものであり，それを欠いては，子どもは何をどう分析するのか分からないであろう。①によって，子どもははじめて分析の対象をもち，その後の学習活動に意味を見出しうる。
…この①の段階の展開にこそ教師の全知見・全人格が，もっとも強く反映する…。》（平林，1987, pp. 135-136）
この提唱は，機械論的教室文化と生命論的教室文化の差異を，単元構成において明らかにしたものである。つまり，「漠たる全体」の構想は，生命論的教

室文化の特質なのである。第２章の生命論的教室文化の全体性の原理（S1）に基づくものだからである。ここに，教師の資質や能力が強く反映することは，重要な指摘である。

第２節　数学教育におけるディスコース分析

言語学におけるディスコースは，人間の発話そのもであり，話し言葉だけでなく，書き言葉も含まれる。教育研究では談話と訳され，コミュニケーションにおける言語活動を指すものである。従来のディスコース分析には，Flanders（1970）の相互作用分析や，Mehan（1979, 1985）の会話分析があった。

Flanders（1970）の相互作用分析は，分析カテゴリーを用いて，授業中の教師と子どもの発言を 3 秒ごとに分類して記録し, そのデータを数量的に分析して，授業にける相互作用を客観的に考察する方法であった。当時は，中立的な科学的方法とされた。しかしその後，文化人類学的な立場から批判された。つまり，分析カテゴリーそのものが伝統的で，主観的であり，コミュニケーションのための相互作用にはなっていないという批判である（佐藤学，1996, pp.81-87）。

Mehan（1979, 1985）の会話分析は，エスノメソドロジー（Mehan & Wood, 1975）の会話分析の方法によって授業の社会的性格を分析するものである（佐藤，1996, p.93）。そして，教室に固有な発話連鎖のパターンとして，次のような発話の順序配置を指摘した。

「発問（Initiation, elicitation）」「応答（Reaction, reply）」「評価（Evaluation）」

これは，Ｉ-Ｒ-Ｅ構造と呼ばれる。田島信元（2003）は，次のように説明している。

《これは，答えを知っている教師が生徒に質問をし（Initiation），それに生徒が返答し（Response），教師がその返答を評価する（Evaluation），というシークエンスを示したものである。教師が「これは何ですか」と発問し，生徒がそれに「それは～です」ご返答する。そしてこの返答を教師が「そうです，それは～です」と評価する。この，返答を誘発するようなシークエンスは，家庭や職場でも見られるが，教師－生徒間におけるこのシークエンスは，ほとんどが教師の発問から始まるという特徴を持っている。》（pp.207-208）

このようなＩ-Ｒ-Ｅ構造からなる授業は，わが国では，「教科書を教える」授業によく見られるものであり，生命論的教室文化におけるディスコースを分析するには，不十分である。そこで，パターンの特定よりも複数の声がぶつかりあう「話し合い」の場面の分析が必要となる。

そのために，ディスコース分析は，幅広い課題への研究手法としてなされるようになったのである（藤江靖彦, 2007; Bauersfeld, 1995）。それは，学習の社会

・文化性や教室におけるコミュニケーションの問題に対して，多様な観点からの研究を可能にするからである。

数学教育におけるディスコースについては，Sfard（2002）は，数学的ディスコースの要素として，次の 2 つをあげている。

・コミュニケーションを媒介するツールとしての記号的人工物。
・コミュニケーションを形成するためのメタ規則。これは観察者が構成するもので，ディスコースの参加者には暗黙のものである。

まず，媒介ツールについて，次のように述べている。

《「人間が動物と異なるのは，道具を作りって，使うことができることである」とルリアは述べている。コミュニケーションは，他者とのものであっても，自己とのもの（思考）であっても，記号的ツールによって可能となる。その中でも，言語は最も重要である。例えば，たし算の記号は，数，グラフ，表，公式で使う，子どものツールである。…

…コミュニケーション過程において，思考と記号的ツールを独立したものとするのは，意味がない。つまり，「同じ思考でも，さまざまな手段で表される」というのは無意味である（これは，同じ手段を使った 2 つの表現を解釈できないということではない，解釈と思考は別物である）。つまり，記号的具体物から導かれる「認知の実態」とか「純粋思考」は存在しない。》（pp.28-29）

これは，教室における数学的コミュニケーションのなかでも，言葉や記号に着目することである。また，思考と表現は互いに，従属関係にあるものとしてとらえることである。

次に， メタ規則は，直接に見られるようなものではないものの，教室におけるディスコースの背景となっているものである。メタ規則については，次のように述べている。

《メタディスコース規則は，コミュニケーション活動の一般的な方向を指し示している。それは見えないし，「場面の背後」にある。陰伏性や遍在性のために，従来それは直接に，留意されなかった。近年，状況は急速に変化しており，参加論の枠組みや「数学的に話す」コミュニティーにおけるディスコース活動への関心は広がりをみせている。》（p.29）

つまり，ディスコース分析では，教室におけるディスコースを記述して，それを分析することで，コミュニケーションにおいてどのような記号や規則が機能しているか分析することである。これらの観点には，Vygotosky 理論や Wittgenstein の言語ゲームの考え方が含まれている。したがって，数学教育の生命論における研究方法として重要である。

第３節　生命論的教室文化のディスコース分析

３.１　平方数とピラミッド数

本質的学習環境は，生命論的教室文化の典型的な事例を提示してくれる。本授業事例は，数のパターンに関する教材であり，高知大学の國本景亀による授業開発と実践を参考にして，筆者が実践したものである。

ビットマン(2004)は，「数学はパターン科学である」という数学観をもっている。人間は本能的にパターン認識をし，またそれに興味をもつ。さらにそれを一般化して，命題として形式化したものが数学だという思想である。

2006 年，10 月愛知県内の公立小学校 4 年生の 17 名を対象に，筆者自身が実践した。この教材は，Wittmann による『数の本　第 2 学年(Zahlen Buch　grade 2nd，2002)』にある。テーマは，「平方数とピラミッド数」である。

この課題は，生活の中の問題でもなければ，現実的な問題でもない。しかし，児童の「食いつき」には驚いた。授業後の授業研究会でも，小学校の先生方から，児童は「このようなパターンの問題」は好きだという話が多かった。1 から 4 までの平方数から，パターンを見つけ，それより大きい数になったときの個数を考えるという問題である。

課題 1　　　　　　　　　　　　「平方数」

			○○○○
		○○○	○○○○
	○○	○○○	○○○○
○	○○	○○○	○○○○
図 1	図 2	図 3	図 4

指導計画（学習軌道 Leaning trajectory）
・平方数は，一辺が 1 個のものから 4 個のものへと徐々に提示する。
・児童は，一辺が 5 個の平方数の形や個数を考える。
・児童は，一辺が 6, 7, 10 そして 100 個の場合を考える。

《ディスコース 1》

101　教師(筆者)：さあ，黒板に一つずつ貼ってくからね。よく見ていてね。こうだなと思ったことを，後で答えてね。はい，初めはこれ。2 番目はこれ。・・・
そしてこれです(4 番目)。どんなことが分かったかな。

102　KI: 辺が一つずつ増えている。

103　IC: 縦も横も増えている。

104　IS: どれも四角のままになっている。

105　教師: ［黒板に「四角」と書く。］じゃあ，これらの丸を点と呼ぶことにしよう。これらの正方形にはいくつの丸でもいいんだけど，点と呼びましょう。点はいくつありますか。

106　SH: 1 つ。

107　教師: 席の順番で答えようか。

108　AI: 4。

109　WA: 9。

110　KO: 16。

111　教師: それでは，これらを式で表せるかな。

112　KU: 16 は，4 × 4。

113　教師: 皆さん，どうですか。式はどうなりますか。

114　IM: 9 は 3 × 3。

115　教師: これはどう，皆んなで。

116　全体: 2 × 2。

117　教師: そしてこれは 1 × 1。これが 1 番目，2 番目，3 番目，4 番目です。

118　教師: じゃあ，この次は。

119　全体: 5 番目。

120　児童のつぶやき: ああ，そういう意味か。

121　教師: どんな形になるかな? だれか，黒板で作ってくれませんか。やりたい人? それじゃあ，やりたい人皆出て，やってもらおうか。

122　教師: 出なかったお友達，これでいいですか。そうですね，これが 5 番目の形ですね。それじゃあ，点はいくつですか?

123　KT: 25。

124　教師: 式はどうなりますか。

125　KB: 5 × 5。

126　教師: 次はいくつかな?

127　KS: 36。

128　教師: 式はどうなる?

129　NO: 6 × 6。

130　教師: このように続けていくと，次はいくつですか?

131　KA: 49。

132　教師: それでは，これを続けていくと，10 番目はいくつになりますか?

133　NI: 100。
134　教師: 式は? そう，10×10 になるね。今度は，難しいぞ, ・・・
135　KT: 千番目でもいいよ。
136　教師: それは難し過ぎるね。百番目はどう? これが百個並んでいる。
137　SA: 千。
138　教師: 千になっちゃった。皆さん，どうですか? 他に意見はありますか?
139　YA: 一万。
140　教師: どっちだろう?
141　児童: 一万。
142　教師: それでは，式は?　どいう式で求められる?
143　IG: 100×100。
144　SH: 零を足せばいい。
145　教師: 皆に，説明して下さい。
146　SH: 零を端に動かす。
147　教師: 分かった，みんな，だれか SH さんの考えを説明してくれませんか?
148　IS: まず，100 の 0 を端へ動かす。
149　教師: これらの 0 をここへ動かすと，0 はいくつになる?
150　児童全体: 4 つ。
151　教師: 一万になるね。
152　SA: 次は，千番目だね。
153　教師: なるほどね。それもいいけど，次は形を変えてみようか?
154　児童のつぶやき: 一億万か。

《ディスコース分析 1》

児童は 4 番目までの例から，自然に 10 番目，100 番目と，主体的に一般化していった。これは，ビットマン(2004)のパターン科学を具現するものである。子どもは，本能的にパターンに興味をもつように思われた。

授業の中で，初めの印象的な児童の発言は，次のものであった。

104　IS: どれも正方形になっている。

「変化するもののなかで，不変なものを見出す」というルールは，パターンを一般化するときに不可欠な認識である。また，この図形のパターンは，数のパターンにつながっている。その証拠は，次の発言である。

119　教師: この次は，どうなるかな。
120　全体: 5 番目。
121　教師: どんな形になるかな? だれか，黒板で作ってくれませんか。やりた

い人? それじゃあ，やりたい人，皆でやってもらいましょう。

122　教師: 出なかった人，これでいいですか。そうですね，これが 5 番目の形ですね。それじゃあ，点はいくつあるかな?

123　KT: 25。

124　教師: 式はどうなりますか。

125　KB: 5 × 5。

126　教師: 次はいくつ?

127　KS: 36。

128　教師: 式はどうなる?

129　NO: 6 × 6。

130　教師: このように続けていくと，次はいくつですか?

131　KA: 49。

132　教師: それでは，これを続けていくと，10 番目はいくつになりますか?

133　NI: 100。

134　教師: 式は? そう，10 × 10 になるね。ちょっと難しいけど，・・・

児童は，自然に思考を発展させていることが分かる。そして，図形から数のパターンを式として表現している。さらに，児童は，素朴な指数法則を見出している。次の発言である。

144　SH: 零を足す。

145　教師: 皆に，説明して下さい。

146　SH: 零を端に動かす。

147　教師: 分かりましたか? だれか，SH さんの考えを説明してくれませんか?

148　IS: まず，100 の 0 を端へ動かす。

149　教師: これらの 0 をここへ動かすと，0 はいくつになる?

150　児童全体: 4 つ。

151　教師: 一万になるね。

指数法則は，中学校の学習内容である。小学校 4 年生の児童が，素朴な形とはいえ，容易に見出している，これには驚いた。本来，数学の法則とは，そのような自然な思考の発展によって得られるものなのであろう。またこれは，生命論的教室文化の契機である。

この分析から，この事例には次の特徴があることが分かる。

S4. 数学化や一般化など数学的活動や問題解決過程を重視した指導をする。

児童が，具体的で簡単な場合から一般化してパターンを見いだしているからである。ほとんどの児童が，この平方数の「言語ゲーム」の規則を理解し，そのゲームに参加していた。

課題 2:

ピラミッド数

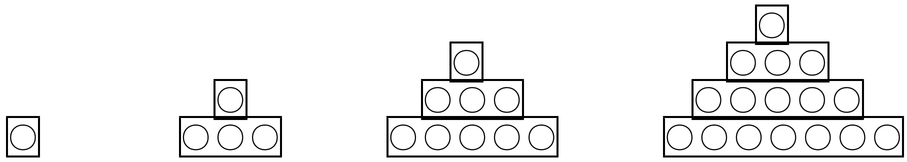


図 1　　図 2　　図 3　　図 4

指導計画（学習軌道 Leaning trajectory）

・ピラミッド数は，一辺が 1 個のものから 4 個のものへと徐々に提示される。しかし，この名前は児童が考える。
・児童が，平方数とピラミッド数は，形は違っていても，それぞれ同じ数になることを理解する。
・児童が，図 1 から図 4（これらは表示），図 5（これは表示しない）までの数を式で表現できる。

《ディスコース 2》

155 教師: それでは，図を変えます。
156 KT: 四角と四角があって，その中に丸がある。
157 教師: [図形を図 1 から図 4 まで貼り付ける。] これって，何?
158 数人の児童: テトリス(コンピュータゲームの名前)。ピラミッド。
159 教師: なるほど。他に名前はないかな?
160 KI: 階段を登っていく。
161 IM: だんだん大きくなるピラミッド。
162 教師: どんな名前にしようかな?
163 数人の児童: ピラミッド，テトリス・・・。
164 教師: 多数決で決めよう。テトリスがいい人? ・・・ ピラミッドがいい人?
165 教師: じゃあ，ピラミッドにしよう。[「ピラミッド数」と板書する。]
　　　さあ，いくつあるかな?
166 数人の児童: 1, 4, 9, 16。
167 教師: 何か気が付くことあるかな? ・・・KI 君, ヒントを出してくれる?
168 KI: ヒントはできない。
169 教師: それじゃあ，答えはどうなる。
170 KI: 平方数とピラミッド数は，同じ数。

《ディスコース分析 2》

児童 KI の考えを他の児童に広げる部分であり，3 人の児童がそれぞれ自分の考えを発表した。ライン 171 から 182 は，省略する。これは，教室において数学的コミュニティーを形成し,児童が参加することを促すためのものである。

この分析から，次の特徴がみられる。

S6. 教室における数学的コミュニティーへ，児童･生徒が参加する。

教室において，児童の自由な発言を重視する。また，教材や答えに，名前をつけることで，児童は親近感をもつ。また，次のような発問をした。

167 教師: 何か気が付くことあるかな? ・・・KI 君, ヒントを出してくれる?

168 KI: ヒントはできない。

これは，答えではなく，ヒントを求めることで，他の児童が考える時間を取るためである。またできれば, ヒントは児童同士で出すようにしたいからである。ただ，この教室では，このようなことに慣れていなかったので,「できない」ということになった。慣れてくれば，これが参加の規範となり，教室文化となるであろう。

《ディスコース 3》

183 IS: 形は違っても，両方の数は変わらない。

183 教師: 分かりますか? 分かる人!

184 SH: 同じ。形は正方形と三角形だけど，数は全く同じ。

185 教師: 形は違っても，同じ数。どうしてなんだろう? 理由が分かりますか? これは，本当に難しいので，こんなものを用意しました。何か分かる? これは，黒板のピラミッドのミニチュアです。これを皆に配るから, ハサミで切って, どうしたら形が同じになるか考えて下さい。

186 児童全員:［全員が紙を切って，操作している。］

187 教師: こんな形（正方形）になるかどうか。答えられる人はいますか?

188 IC: この形のここを切って，このようにしてやると，四角になる。

189 教師: ありがとう。他にある?

190 TU: これを切り分ける。

191 教師: 簡単にやろうと思ったら，ここを切って，こう並べることですね。これ（3 番目のピラミッド）を前で，やってくれませんか?

192 KT:［先の正方形（平方数の形）を作った。］

《ディスコース分析 3》

ライン 185 では，ピラミッドの形の厚紙を切りって，正方形に並べる操作を

するように指示した。この操作によって，なぜピラミッド数が平方数になるのかを操作的に証明できる。これは，「操作的証明（Wittmann，2004）」である。つまり，児童が主体的に操作することで，意味を構成するものである。

この分析から，次の特徴が明かになる。

S2. 児童・生徒の主体性を育成し，算数・数学の意味を構成するように指導する。

児童は，各個人で操作活動をして，それぞれの算数的な意味を構成しているからである。

《ディスコース 4》

193　教師: これは，ピラミッドに戻すこともできます。だから，形は違っていても，数は同じなんだね。すっきり分かった? ピラミッド数と平方数は同じなんだね。それじゃあ，今度は形をピラミッドに戻します。そして，ここに式を書いていきますから，よく見ていてね。
［黒板に，1=1　1+2+1=4　1+2+3+2+1=9　1+2+3+4+3+2+1=16　と書く。］
この式と形，何が似ている?

194　SI:［黒板の前に来る。］図の縦と式が同じ。

195　教師: SI 君は，この形をどう見たんだろう。分かる人いる?

196　IS: 縦型に見た。

197　教師: 縦型に見ている。これは，すごいことに気が付きました。他に意見はありますか? …他にない。ないか。ないんだったら，この次の式はどうなるか? じゃあね，これの次がどうなるか，プリントに書いて下さい。［プリントを配る。］…

198　教師: まず，答えはいくつになるはずなのかなあ?［「1+2+3+4+5+4+3+2+1」の式はまだ黒板に書かず，その等式の右辺を指して。］

199　KO: 25。

200　教師: どうして，これが分かったんだろう?

201　KI: 四角でやったとき，25 と書いていたから（平方数とピラミッド数が等しいことを使った。）

202　IM: 前，SI 君が言ったように，次を計算すると 25 になるから。

203　TU: 次の式は 1, 2, 3, 4, 5 と 1,2,3,4 なので。

204　教師: うんなるほど，式（の左辺）を考えたんだね・・・。

205　教師: ちょっと混乱したね! じゃあ，式がどうなるかをまず考えようか。

206　YM: 1+2+3+4+5

207　教師: ここまでいいね。次は?

208　KA: 4+3+2+1

209　SI: 違うやり方がある。(1+2+3+4) × 2+5。
210　教師: TU さん, さっきの式をもう一度言ってくれる? ・・・ はい, この式。
211　教師: 他に。
212　KU: 9+7+5+3+1。横に見ました。
213　教師: 他にもあるかもしれないけどね。実は, 先生が思っていたのは, 1 × 1　2 × 2　3 × 3　4 × 4　5 × 5 なんだけど, 知ってた?
214　数人の児童: 知ってた。忘れてた。
215　教師: 他に, この形を横に見てもいいね。そうすると, 別の式ができるね。
216　児童: 1　1+3　1+3+5　1+3+5+7　1+3+5+7+9。
217　教師: これらの答えは, 同じになるね。つまり, ピラミッドの形を縦に見るか, 横に見るかで, 別の式ができるんだね。今日は, どうもありがとう。

《ディスコース分析 4》

教師は, 課題 2 における図 1 から図 4 を縦にみて, 黒板に式をかいた。ライン 194 と 196 から分かるように, 児童は, このことに気が付いている。また, ライン 197 は, そのことを教室の全員が確認し, 理解するための指導である。

ところが, ライン 198 以後は, 児童も教師も, 混乱している。教師は, ピラミッド数が平方数であることから, 5 番目の式の答えが 5 × 5 となることを確認しようとしたのである。児童は, 教師の発問の意図が理解できず, 混乱した。

この原因は, ライン 200 から 205 から分かるように, 教師が 25 になる理由に固執しているからである。これは, 生命論的教室文化においては, 教師の力量が重要である証拠である。

さらに, ライン 212 の児童の発言は, ライン 215 で, 教師が発言した「式の見方」である。つまり, 児童 KU の発言は, ライン 215 の教師の発言にあるように, 「式を横に見る」見方になっている。この発言を, 詳しくとり上げるべきだった。授業中には, これに気が付かなかった。これも, 教師の力量の不足によるものである。

図の見方によって, 異なる式を導けることが, このディスコースにおける算数的活動の目標であった。かなりの児童はこのことを理解していた。そして, 奇数列の和が, 平方数であることを, 理解している児童がいた。これを取り上げなかったのは, 教師の失敗であったものの, そのような小学校 4 年生の児童がいることは, 注目すべきことである。

これは, 次の生命論的教室文化の特徴を示している。

S3. 教室において, 数学的コミュニケーションによる合意領域を形成する。

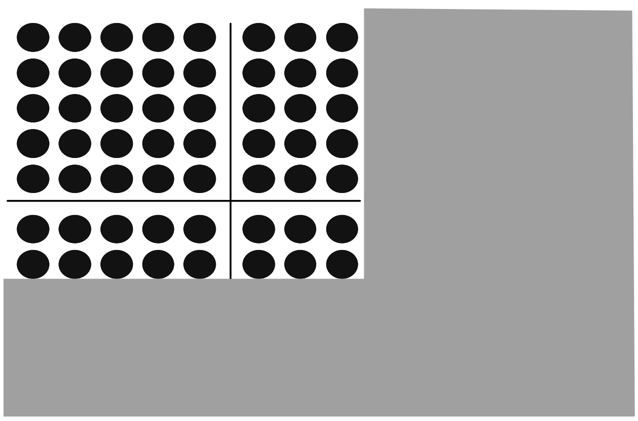
児童は，さまざまな意見を述べて，教師の意図を推測してコミュニケーションを展開しようとしている。ただし，合意領域を形成するには，教師の指導能力が必要である。

３.２　かけ算から２次方程式へ

本質的学習環境は，３.１「平方数とピラミッド数の授業」のように，「数学的な考え方」を育成するための教材になる。しかし，教科書にあるような系統的な指導内容の指導では，どのような教材があるのか。さらに，わが国の算数・数学の指導に，本質的学習環境をどう取り入れるのかという課題がある。Wittmann(2004)は，奈良市において「かけ算から 2 次方程式へ」と題する講演をした。これは，その手がかりを与えてくれる。

小学校 2 年のかけ算指導では，九九表が欠かせない。わが国では，同数累加によって，表を埋めていく指導が多い。もちろん，5 以下の数同士のかけ算では，それは容易である。しかし，6 以上となったときが問題である。わが国の教科書では，丸をならべたアレイ図が利用される。

これに対して，Wittmann(2004)は，図２のように，まず 5 のまとまりに分ける。そして，次のような「かけ算十字(multiplication cross)」を使う。つまり，既習内容である 5 以下の数同士のかけ算を活用して，答えを求めるのである。計算そのものとしては，これが同数累加より簡単な訳ではない。しかし，この指導では，既習の内容を活用し，さらに「分配法則」を暗黙的に使っており，次の乗法の筆算へと発展する可能性をもつことになる。つまり，かけ算十字という工夫によって，九九表が本質的学習環境になるという例である。



$7\times 8 = 25 + 15 + 10 + 6 = 56$

図２（わが国では，これは８×７のアレイ図である。）

小学校 3 年で学習するかけ算の筆算には，分配法則が不可欠である。もちろん，この段階での児童は，ほとんど意識しないものの，筆算の意味を理解するために必要である。それは，図 3 のように「かけ算十字」を，そのまま「10 のかたまり」に適用するからである。図 3 のかけ算の筆算では，右下の 4 × 8 と右上の 20 × 8 を加え，左下の 4 × 30 と左上の 20 × 30 加えて，0 は省略する手続きになる。

わが国の教科書でも，10 のかたまりに着目して，部分積を求め，それらを加えるという指導はある。しかし，九九表からの発展として扱うことはほとんどない。

そして，中学校数学における文字式の展開や因数分解では，分配法則そのものを意識して，利用することになる。ここで，Wittmann（2004）は，図 4 のように「かけ算十字」や「かけ算の筆算」を発展させて利用している。これは，分配法則を図的に理解するためにも有用である。このような指導も，わが国ではほとんどない。

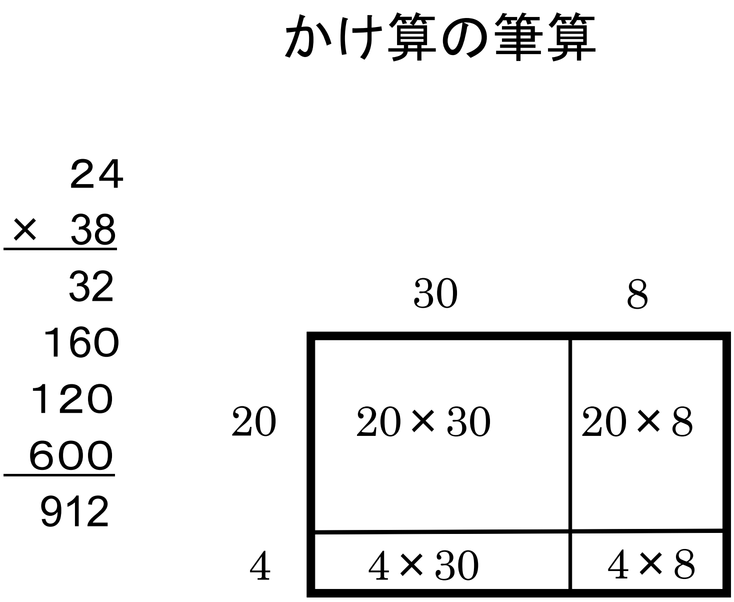


図 3

文字式の計算　　　因数分解

（X＋３）（X－３）　　X^2＋X－6

・	x	+3
x	x^2	+3x
–3	–3x	−9

・	X	3
X	X^2	3X
–2	–2X	−6

図４

図４の展開や因数分解では，左下と右上の対角線上の和が重要になる。さらに，この「かけ算十字」は，次の図５のように，2 次方程式の解法に利用できる。つまり，平方完成のために，右下の定数を調整するのである。

2方程式の解法　$x^2 - 6x = 7$

・	x	–3
x	x^2	–3x
–3	–3x	

・	x	–3
x	x^2	–3x
–3	–3x	9

$x^2 - 6x + 9 = 7 + 9$

$x^2 - 6x + 9 = 16$

$(x - 3)^2 = 16, \quad x - 3 = \pm 4$

$x = 7, x = -1$

図５

小学校 2 年のかけ算が 2 次方程式の解法にまで発展しているのである。そして，分配法則が，その発展の基本になっている。まとめると，次のような展開になっている。

① かけ算の九九表で，6 以上のかけ算の表を埋めるために，5 のまとまりを活用する。ここでは，分配法則を暗的黙に使っている。
② かけ算の筆算で，10 のかたまりによる表を利用して「部分積」を求める。ここでも，分配法則を暗黙に使っている。
③ 文字式の展開の計算で，表を利用し，分配法則を意識して使う。
④ 文字式の展開の逆操作である因数分解に，表を活用する。
⑤ 平方完成のために，表を活用する。
⑥ 平方完成を利用して，個々の 2 次方程式を解く。
⑦ 表を利用して，2 次方程式の解の公式を導く。

①のかけ算の九九表が基盤となっていることに留意しなければならない。わが国では，九九表を求める指導に，「同数累加」によるたし算で計算する。したがって，Wittmann (2004) が，「かけ算十字」と名付けているものは，わが国の指導でも十分に活用できる。

これは，算数から数学へのカリキュラムの展開において，系統的な内容に対する本質的学習環境を例示している。本質的学習環境は，知識のネットワークを構成する役割があることが分かる。

3.3.「算数のリズムをしよう」

全体性の原理による「漠たる全体」の指導は，算数的活動として意義深いものの，その実践例は多くない。手島勝朗 (1987) は，「算数のリズムをしよう」という授業を実践している。これは，まさにそのような事例となっている (pp. 124-128) ので，ここに引用する。

小学校 5 年の「倍数」の単元である。これは，分数の約分や通分，さらに異分母分数の加法を学習するために不可欠な系統的内容である。しかし，児童には学習の意義が分かりにくく，単元の導入や動機づけが難しいところである。「奇数・偶数」から始まる指導内容が，異分母分数の加法を終着点にしているとは，教師も気が付かないことが多い。

そこで，児童の主体的な学習を促し，この単元の全体像を漠然と示すのが，この「算数のリズムをしよう」という授業である。これは，「リズムを叩く」という活動を取り入れ，公倍数から倍数を導入するという学習指導になっている。

《ディスコース》

第１時　　－倍数の意味－

①　導入時の場面設定

始業の合図と共に黙って「算数のリズムをしよう」と板書する。

子どもたちはキョトンとしている。キョトンとした表情の中で「何か始まるのだろう」といった興味・関心が高い。

その雰囲気の中で教師は教卓の前に座り「一緒にやってみましょう」といって「トン　パ　トン　パ……」と２拍子を叩いていく。「トン」で両手で机を軽く叩き「パ」で両手を叩くのである。

2拍子がうまくとれたところで今度は，「３拍子をやってみましょう」といって「トン　トン　パ　トン　トン　パ……」と叩いていく。少しでも手拍子が乱れるところがあれば

「みんなが，心をあわせないとうまく響きあわないよ」

といって，もう一度やり直すとよい。再度やらせると確実にうまくなる。

こうしたリズム打ちを行った上で次頁のような問題場面を板書する。

板　書
2拍子と3拍子を2つのグループにわかれて同時にたたいていきます。 すると，「パッ」という音がそろうところがあるだろうか。

これが導入時の場面設定である。

②　予想し，その根拠を話しあう

問題場面を理解したならば，まず揃うところが「ある」「なし」について予想させるのである。予想にあたっては，メモ用紙を利用し，「わからない」場合は「わからない」と明記させるとよい。

子どもの反応
ある…………23名
ない…………12名
わからない……4名

右記の子どもたちの反応は，昭和61年5月29日に東京都大田区入新井第二小学校で，私が飛び込み授業をした際のものである。

大方の場合は「ある」と予想してくるが，子どもの反応の中には必ず「ない」という反応もみられる。

予想をたてるこの段階での机間巡視やメモ用紙による実態把握では，「ない」「わからない」という反応を温かく見つめることがたいせつである。

なぜなら「揃うところがない」とする反応には。それなりの根拠があるからだ。だから，決して「揃うところがある」という方向に簡単に引っぱられてはならない。

「揃うところが“ない”とした人たちには，それなりのちゃんとした理由があるんだよ」といって，まず「ない」とする反応の根拠をクローズアップするとよい。

すると，子どもたちはその根拠を次のように明確に述べてくる。
雨谷　ずっとくずれないでやれば，ずれないからないと思う。
杉田　2 拍子と 3 拍子は，3 拍子の方が 1 拍子多いからないと思う。
伊藤　2 拍子だと 2 つ目で「パッ」がきて，3 拍子だと 3 つ目で「パッ」がくるのであわないと思う。

これらの反応を受けて，揃うところが「ある」と反応する子どもたちが勢いよく挙手してくる。挙手してその根拠を説明してくる。その説明は，単に「ある」ということだけを主張するものではない。「ない」と反応する考えを説得する形で発表される場合も少なくない。

粕屋　杉田さんたちは「トン，パ」と「トン，トン，パ」を 1 回だけで考えているけど，これはずっと続いていくのだから，パがそろうところがあると思う。

上田　ぼくは，図で考えたのだけど，トンを△パを○にすると，右の図のようになって 6 番目で揃う。

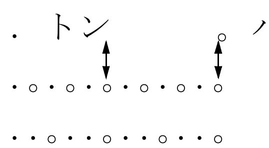
2 拍子…△○△○△○
3 拍子…△△○△△○

清宮　わたしは，かけ算で考えてみました。
2 拍子は，2 × 3 で 6，3 拍子は 3 × 2 で 6 だから，やはり 6 のところで揃うと思う。

2 拍子	2	2	2
3 拍子	3	3	

揃うとする根拠を図表示を伴って説明する子が意外と多い。当然，その図表示もさまざまだ。

次に示すのは，6 番めに揃うことを説明しようとして取りあげられてきた図表示である。



2	・	パ	・	パ	・	パ
3	・	・	パ	・	・	パ

2 拍子	○	●	○	●	○	●	○トン
3 拍子	○	○	●	○	○	●	●パ

2 拍子	.　。	.　。	.　。
3 拍子	.　。　.	.　。　。	

図表示を伴って説明されると「揃うところがない」と判断していた子どもたちも考えを改めざるを得ない。こうして，やがて全員が「揃うところがある」という考えに落ち着いていく。

③　実演し，また考える

話し合いを通して全員が「揃うところがある」という予想に立ったところで，いよいよ実演である。クラスを 2 分し，同時に「トン」から出発する。

トン　パ　　トン　パ　　トン　パ……
トン　トン　パ　　トン　トン　パ……

実演に先だつて,同じ調子で心をこめてリズムをとることを注意するとよい。すると，６番目で「パ」という音が一瞬響きわたる。一瞬のことだから注意して聴かないとよく自覚できない。

だから,「パ」という音が一瞬響きわたところで「やめ！」と声をかけ，もう一度最初からくり返す。

二度目の実演で，子どもたらは確かに 6 番目で揃うことを全身で実感する。

実感して「やった！」という一種の充実感を味わう。

二度目の実演も 6 番目（初めてパが揃うところ）で「やめ！」と声をかける。

6 番目のところで「やめ！」と中止させるには，それなりの理由がある。

次の発問が用意されているからだ。

T　この調子でずっと続けていくと,「パッ」という音はどこで合っていくのだろうか。

この問いに子どもたちは「わかった」という表情で勢いよく挙手してくる。

その結果，取り上げられてくるのが，右記　{6，12，18，24，30 ……}
の数の仲間である。

④　6 の倍数

「6　・12･18･ 24･ 30 ……」で揃うことを見抜いたならば，今度はこれらの数がどんな仲間になっているのか。その観点を明らかにするのである。

観点を明らかにするためには，話し合いに先だって一人ひとりの考えをメモ用紙に記入させるとよい。以下に示すのは，メモ用紙に描かれた子どもたちの反応を基に展開した授業風景である。

C_1　6 とびの数の仲間です。

C_2　質問があります。6 とびといえば,{1，7，13，19 ……}なども 6 とびではありませんか。

T　なるほど｡それでは，どんな数の仲間といえばよいのかな。

C_3　六の段の答え。

C_4　それもおかしいと思にます。六の段は「六九 54」で 54 で終わりだけれども，この数の仲間は，54 よりも大きい数も含まれているからです。

T　「六の段の答」，これもまずいようだね。では，どういえばよいの。
C_5　6を倍にしていった数。
C_6　6を中心に1倍，2倍，3倍………した数。

結局，落ち片いたのはC_6の表現である。私はC_6の表現を右記のように板書し，この表現を軸にして「6の倍数」を引き出していった。子どもたちもC_6の表現が，「6の倍数」として要約されていくのに「なるほど」といった表情で目を見はっていた。

板　書

{6，12，18，24，30……}
⇒⑥を中心に1倍，2倍，3培…した数

6　の　倍　数

最後に, 再びクラスを2分し, 2拍子と3拍子のリズムを叩いて, 確かに6, 12, 18，24 ……で「パ」の音が揃うことを体感させてこの授業を終えた。リズムを叩きながらの楽しい授業であった。

《ディスコース分析》

これは，生命論的教室文化がもつ，次の特徴を中心とした事例である。

S1. カリキュラムや単元の構成において，全体性の原理が考慮されている。

つまり，単元の「漠たる全体」についての算数的活動を実践している。「倍数」の導入は，教科書などでは，倍数のより単純な教材でなされている。例えば，偶数・奇数による組み分け，オリンピックの開催年などである。しかし，本実践では，算数的活動を通して，「最小公倍数の利用」で導入している。単元の到達点となるような豊かな対象の方が，活用に適しているからである。

実際，授業は2拍子と3拍子を叩く練習をした後，次の発問で始まる。

《2拍子と3拍子を2つのグループにわかれて同時にたたいていきす。すると，「パッ」という音がそろうところがあるだろうか。》

これは，2と3の最小公倍数6の倍数となることを，児童が体感することを意図している。

しかも，まずどうなるかを予想させる。ここで，手島(1987)の指導の優れた点は，次のところである。

《「ない」「わからない」という反応を温かく見つめることがたいせっである。なぜなら「揃うところがない」とする反応には。それなりの根拠があるからだ。だから，決して「揃うところがある」という方向に簡単に引っぱられてはならない。「揃うところが“ない”とした人たちには，それなりのちゃんとした理

由があるんだよ」といって，まず「ない」とする反応の根拠をクローズアップするとよい。》(p.125)

つまり，誤りを取り上げて，それを説得するという形で，正答を発表するように指導している。これは，生命論的教室文化の次の特徴を示している。

S7. 児童･生徒の誤りの価値を認める。

次に，このことを実演することで確かめる。さらに，次のように倍数を導入する発問を準備している。

《二度目の実演も 6 番目（初めてパが揃うところ）で「やめ！」と声をかける。

6 番目のところで「やめ！」と中止させるには，それなりの理由がある。》(p.127)

これは，6 の倍数を導入するための布石である。このように，次の指導への布石を打つという，随所に教師としての高い力量が発揮されている。

３.４．正の数・負の数

単元構成において，Lampert(1986)は，整数の乗法の筆算の指導に対して，次の 4 つの知識を適用し，その実践例を示した。

・直観的知識(Intuitive Knowledge)

2 種類のコインを 19 枚用いて，ちょうど 1 ドルにするという「コインの問題」が与えられる。これは，子どもたちの日常生活におけるコイン使用の知識を生かして，100 という数を 5 や 10，25 などの積和に分解する考え方に結びつけようとしている(佐伯胖，1989, pp.83-85)。これは，日常の生活における知識である。

・具体的知識(Concrete Knowledge)

かけ算の問題づくりとその問題の図解である。つまり,「12 × 4」という式になる文章題をつくり，それを図を活用して解くことである(佐伯胖，1989, pp.85-89)。ゲームなどの架空の設定における知識である。

・計算知識(Comutational Knowledge)

計算の意味と手続きである。筆算のアルゴリズムを取り上げる。「部分積」をつかって，段階的にアルゴリズムを作り上げる(佐伯胖，1989, pp.89-92)。

・原理的知識（Principled Knowledge)

交換法則や分配法則を意識させる(佐伯胖，1989, pp.91-92)。

このような実践は，わが国にもある。中学校数学の「正の数・負の数」の単元である。次に紹介する実践例は, 愛知県知立市の中学校教師　三浦祥志(1992)による実践である。

①　具体的知識

《ディスコース１》

温度計を見せる。子どもたちが知っている温度計のマイナスの気温をもとに，その他に目にしているマイナスの記号やマイナスの数について，聞いてみた。

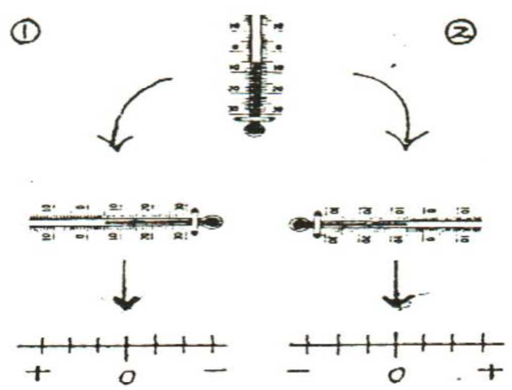
・クイズ番組で間違えたらマイナス点（減点）	・電卓の－記号
・テレビのボリュームのマイナス	・電流の＋，－
・乾電池の＋，－	・ダムの水位
・ゴルフのマイナス（アンダー）とプラス（オーバー）	

C．電卓にもマイナスの記号があるよ。

T．ほー，それじゃ，－計算もできるのかな？

そこで，計算するのにも役立つと思い，数直線を確認しようとした。下記のように，温度計を横にして，幅を狭めて、線にしたものを黒板に示した。

ところが，横にする仕方で，①と②の方法があり，どちらにするか，少し戸惑った。私は，小学校から数直線の名前は知らなくても，実際使ってきたものなので，②の形ですんなりいくと思っていた。でも，この単元で，数直線のよさにふれさせるためには，良い機会だと思い，話し合いをしてみた。



C11．先生、逆に回しても、いいですか。

T.　　いい発想だね。

C12．先生，小学校でもやりましたよ。O からこっち（右）の方へいくと，だんだん数が大きくなっていきます。

T．大きくなっていくということは，右の方をプラスにしようか，マイナスにしようか。

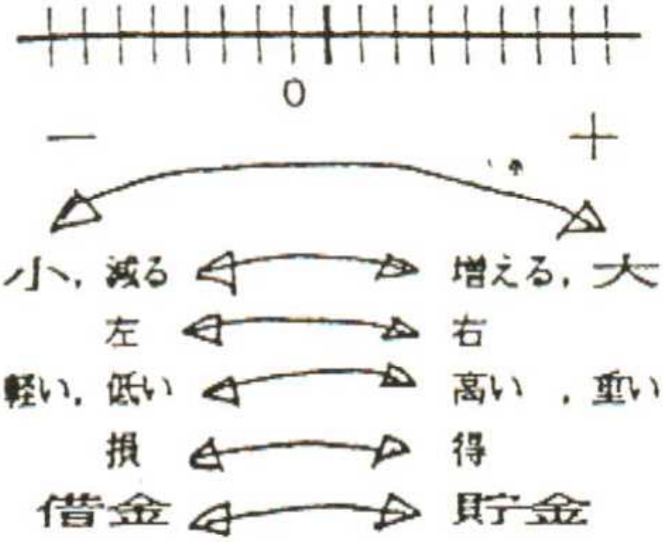
C12．右の方がプラスです。

T．熊田君（C11.）の意見があったので，ここで一度，黒板にある①と②で，どちらをプラス，マイナスにしようか考えてみよう。当たり前だと，思わずにどうして，その方がよいのかな？

C13．小学校から，右の方へ数字を書いているから，書きやすいというか見やすい。
C11．僕がへんなことをいってしまったけど，僕も右の方がプラスの方が見やすい。
T．熊田君（C11.）は，いいと言ってくれたけど，ちょうどいい機会だから，なんでこの②の方がいいのか，みんなで考えてみよう。
C．・・・・・（しーんとしている）
T．見やすいと言ったけど，他にみんなが知っていることで見やすいものは何かあるかな？
C．・・・・・　（しーんとしている）
T．左の方がマイナスで，右の方がプラスになっていくことや関連したものはないかな？
C14．だんだん増えていくイメージがあるから，やっぱりある地点から左はマイナスで、右の方はプラスだな。
T．ある地点というと？
C14．もちろん，中心になる点。基準になる点。
T．この線でいうと？
C14．O（ゼロ）です。
T．そうだね，O からの位置を示すのにいいね。
C15．先生，「だんだん増えていくから」量でもいいですよね。でも，量というと，その線を縦にした方が，やっぱり考えやすいです。縦にすると，高い・低いのイメージがあり，さっき飯倉さん（C10）がいったように，水の量で水位がわかりやすいと思う。
C16．量でいうと，重い・軽いとかもいいですか。
C17．それじゃ，何か反対言葉みたいだな。
T．みんないろいろなことを考えてくれるね。反対言葉か！

この後は、この疑問をみんなの課題として，これからも考えていくことにして，一応賛成が多かった②の形を使つていくことにした。この線のことを，「数直線」と呼ぶことを知らせた。でも，C15 のように，縦にして使うことも認め，自分の考えやすくやりやすい方法をとらせた。

反対言葉ということから，下記のようなイメージを発表してくれた。



《ディスコース分析 1》

生徒は，温度におけるマイナスや温度計の読み方を，理科では小学校 5 年で学習している。また，日常生活の中でマイナスの数や記号を知っている。つまり，Vygotsky 理論の「生活的概念」が直観的知識である。教師は，まずその知識を意識化させている。

以前，小学校 3 年の授業を観察していたとき，児童の一人が負の数の概念をもっていることを知り，驚いたことがある。それは，「1m 30cm － 50cm」などの単位の付いた量の計算であった。その児童は，次のように発言したのである。「30 から 50 を引くことはできないので，20 を借りておく。後で 1m から引いて 80cm になる」。これは明らかに「−20 という負の数」である。この例からも，多くの生徒は負の数の概念を漠然ともっていることが明かである。

次に，教師は温度計を利用して，数直線の概念を活性化させている。数直線は，小学校 3 年から学習している。長さという具体的感覚と数という抽象的概念を仲介する重要なツールである。小数や分数，無理数など，数の拡張では，必ず数直線が利用される。教師は，原点を意識させることで，数直線を導入した。

また，逆に数直線を利用して，正の数と負の数のイメージを豊にするためのディスコースをしている。「借金・貯金」などの「反対言葉」は，重要なイメージなる。これも，数直線という数学的概念との関係において，発達の最近接領域を重視している証拠である。

これは，生命論的教室文化における次の特徴を示している。

S5. 教室において発達の最近接領域が重視されている。

② 具体的知識

《ディスコース２》

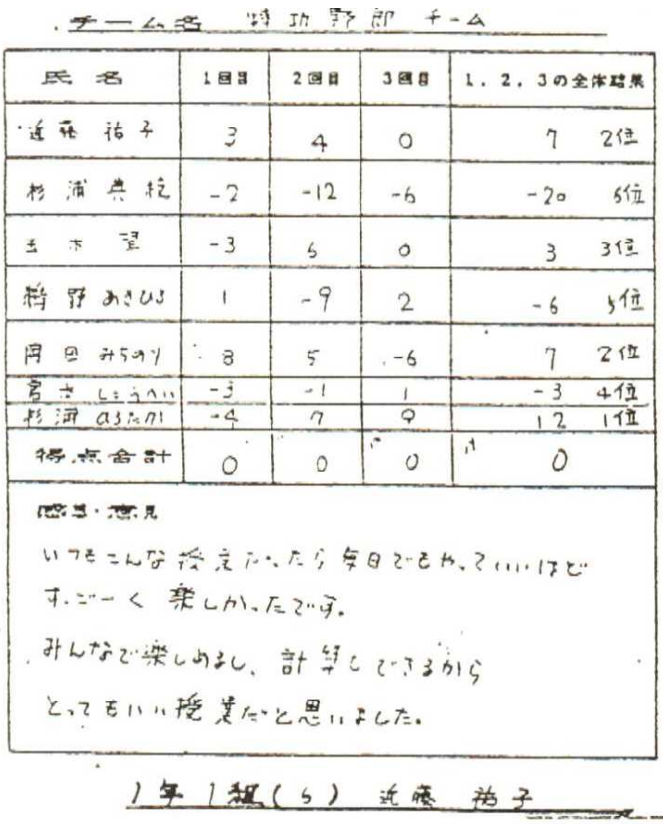
前時の反対言葉の中から，損（借金）と得（貯金）を取り上げ，トランプゲームを行った。カードの色で，黒と赤のどちらを＋・－にするかは，話し合いで決めた。借金は家計簿が赤なので，赤色は危険が多いので，－（マイナス）となった。黒は収人が多いという黒字なので，＋（プラス）とした。

カードは，1 ～ 5 までの 20 枚とジョーカー 1 枚の計 21 枚とした。ジョーカーは，0（ゼロ）とした。

左記のような用紙を作り，記録させた。また，その結果を数学通信『数学の広場』に載せ，意欲化を図った。

トランプゲーム

ばば抜きの要領で，隣りから１枚ずつとる。自分の得点が一番多いと思ったら，ストップをかける。３回行ったらゲーム終了。それぞれの合計点で順位を決める。

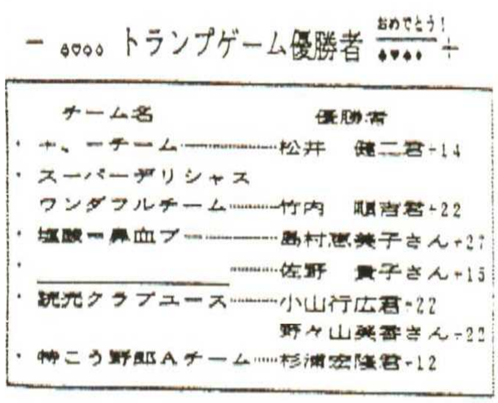

チーム名 [illegible] チーム

氏名	1回目	2回目	3回目	1，2，3の全体結果
近藤 [illegible]	3	4	0	7 2位
杉浦 [illegible]	-2	-12	-6	-20 6位
[illegible] 望	-3	6	0	3 3位
[illegible]	1	-9	2	-6 5位
[illegible]	8	5	-6	7 2位
[illegible]	-3	-1	1	-3 4位
杉浦 [illegible]	-4	7	9	12 1位
得点合計	0	0	0	0

感想・意見

いつもこんな授業だったら毎日でもやっていいけど
すごーく楽しかったです。
みんなで楽しめるし，計算もできるから
とってもいい授業だと思いました。

1年1組（5） 近藤 [illegible]


－ トランプゲーム優勝者 おめでとう！ ＋

チーム名 優勝者
・＋、－チーム……松井 健二君+14
・スーパーデリシャス
ワンダフルチーム……竹内 [illegible]君+22
・[illegible]……島村恵美子さん+27
・……佐野 貴子さん+15
・[illegible]クラブユース……小山行広君+22
野々山美香さん+22
・[illegible]Aチーム……杉浦[illegible]君+12

（感想）

- とっても楽しくできた。こういうやり方だと，楽しみながらできて，＋・－の勉強がよくわかり，よかった。最初は，マイナスの計算ができるかなと思ったけど，黒は黒同志，赤は赤同志集めて，最後にひき算をすれば，できることがわかった。
- 数字が同じカードで，色が違えば，打ち消しあって 0（ゼロ）になる。おもしろいことだ。数直線でいえば，0（ゼロ）を中心にして同じ長さのことだ。

《ディスコース分析２》

トランプゲームという架空的なゲームによって，具体的に正の数と負の数の計算をしている。その中では，借金・貯金や数直線など，前に意識した直観的知識を利用している。この時点では，生徒は計算の仕方を指導されていない。ところが，「黒は黒同志，赤は赤同志集めて，最後にひき算をすれば，できることがわかった」と，計算方法を工夫している。

ここには，次の特徴がみられる。

S2. 児童・生徒の主体性を育成し，算数・数学の意味を構成するように指導する。

「数字が同じカードで，色が違えば，打ち消しあって 0（ゼロ）になる。おもしろいことだ。数直線でいえば，0（ゼロ）を中心にして同じ長さのことだ」という感想を述べた生徒がいる。これは，数直線を利用した絶対値の概念に到達していることを示している。生徒が，計算方法を主体的に工夫した成果である。

③　計算知識

《ディスコース３》

カードを実際の式に直して，計算の意味と方法を考えた。ここでは，個人追究の方法など，課題を考えていく姿勢も育てたいと思い，全体追究として次のような発問をした。

「加法について、3 と 5 の 2 つの数字を使ってできる式のすべてのパターンを作ってみよう」

みんなで，できる式の形を作っていった。

①３＋５　②３＋（－５）　③－３＋５　④－３＋（－５）

⑤５＋３　⑥５＋（－３）　⑦－５＋３　⑧－５＋（－３）

上記の 8 つになった。ここから，3 と 5 という具体的な数字から広く考えて，①と⑤を正＋正の形，②と⑥を正＋負の形，③と⑦を負＋正の形，④と⑧を負＋負の形としてまとめた。

そこで，正と負の加法計算を①～④の具体的な数字をつかって，パターン（形）ごとに考えることにした。生徒には，この 4 つのパターンかできれば，加法については完璧だと励ました。

先ず，＜正＋正の形＞の場合を話し合い，次に＜正＋負の形＞の場合の話し合いになった。

②３＋（－５）＝　について

・トランプの考え方・・・貯金が 3 万円あって，借金を 5 万円したので，借金が 2 万円となる。だから，－２。

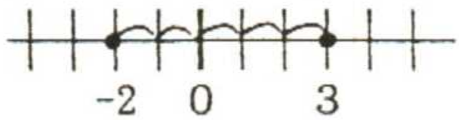
・縦の数直線の考え方・・ダムの水が 3 の線までたまっていて，そこから，5 めもり下がったところ。

・数直線の考え方

CI．正＋正の形でまとめたように考えると，　3　＋（－　5）
3 から右，左へ 5 いく
ことになるけど…。

C2．カッコがあるから，カッコを先に計算するから，3　＋（－　5）
3 から左へ 5 右へいく
になるけど，C1 と同じで意味がはっきりしない。

T．そうだね・・・。でも，答えはいくつ。



C．－ 2。

T．（右記のように、黒板に書く）

C3．左へ 5 いけばいい 4 じゃない。だって，答えが－ 2 になるから，3 から動いて答えが－ 2 になるためには，5 左へいけばなるよ。

C．ほー。

C4．でも，なんかこじつけみたい。

T．では，桐村さん（C3）の予想が正しいかどうか，どうしたらたしかめられるかな。

C．…。

T．みんななら，どうしますか。

C5．別の例でやってみる。

T．いいことだね。では，だれか別の式を言ってくれるかな。

4 ＋（－ 9），7 ＋（－ 3）など，－ 5，4 となり，どの場合も桐村さん（C3）の方法でできた。また，教師の方から，O（ゼロ）は正の数にも負の数にも入れずに特別扱いしたけど，O（ゼロ）を含んだ式も成り立つかなと言って，O ＋（－ 6）を示した。これも，－ 6 となり，同じ方法で成り立つ。

T．いい勉強ができたね。こういうふうに，いろいろな場合を調べて，自分の考えが成り立つかどうか確かめることは，すごく大切です。

T．前に，松井君（C4）が「なんかこじつけみたい」と言ったけど，すっきりしたかな。

C6．さっき，いろいろな場合をやっていて，思ったんだけど，左へいくからはじめから，マイナスで考えてしまえばいいんじゃないかな。

C7．賛成。僕もそう思う。3 ＋（－ 5）を 3 － 5 として。

T．（右記のように黒板に書く）　　3 ＋（－ 5）＝ 3 － 5

C8．そうすると，そこの＋の意味がないんじゃない。

Ｔ．横井君（C7），どうかな。
C7．＋はふえるに決まっているから，なくてもいいんじゃない。
C8．でも，正＋正の場合，数直線で＋は右の方へという意味にしたよ。
C7．うーむ。…塾でも＋（－）＝ － と習ったよ。教科書にもあるよ。
C8．うん。でも，やり方というか方法は横井君（C7）のでいいと思うけど，さっきも言ったんだけど，＋は右の方へという意味がなくなってしまうことが気になります。まあ，公式みたいなものといわれれば，そうだけど，…。やっぱり意味がわかっていないと…。
Ｔ．いい話し合いだね。じゃ，ここで一度，今話し合っていることを整理しよう。＋（－）の場合は，桐村さん（C3）の考えで答えから察すると左へいけばいいことがわかったね。そして，横井君（C7）や玉木さん（C6）たちから，左ならー（マイナス）と考えて，式も 3 ＋（－ 5）＝ 3 － 5 のようにすればよいと言ってくれました。
　でも，そうすると，＋が消えてしまうので，＋の意味がわからないと宮本君（C8）は問題を出してくれました。
　さあ、どう考えようか。
Ｔ．正＋正の形の 3 ＋ 5 でも，本当は正のプラスの記号＋をつけると，
　　＋ 3 ＋（＋ 5）になる。
Ｃ．変なのー。
C10．先生，そうすると，先生が色を変えて書いたように，＋ 3 と＋ 5 の＋（プラス）と，2 つの数字をたす＋とは，意味がちがうんじゃないかな。
Ｔ．ほかの人は，どうですか。
C11．2 つの数字をたす方の＋は，今までどおりのたし算で，ここで習った負の数は，今までの正の数と分けて使っているし，反対言葉だったよね。
C12．それと，縦の数直線じゃないけど，水位のように，ある所からの＋・－にも使ったよ。それに，数字に＋・－がついているから，…。うまく言えないけど，その数字自体に貯金・借金のような意味を持たせればいいんじゃない。
Ｔ．誰かにまとめてもらうといいけど，…。
そうすると，3 ＋（－ 5）は，3 から右へ借金 5 かな。
C13．右へ借金の所を，実際には左へいくので，右の逆へ 5 いくとしたらどうですか。
C14．そうすると，－は逆とよんで，＋は。
C13．＋はそのままでいいのかな。そうすると，反対言葉のような意味になると思います。

Ｔ．（右記のように黒板に書く）

3　＋（－ 5）
3 から右の逆へ 5
3 から左へ 5

なるほどね。賛成の人は。

Ｃ．（ほとんど手があがる）

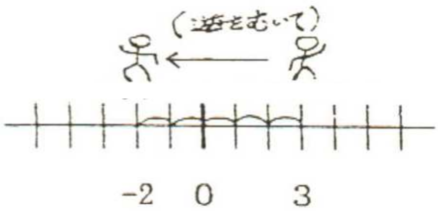
C7．よくわかったけど，－は逆の意味があると思うし，逆とそのままは，反対の言葉だと思うけど，まだ数字だけの意味で，もっと…。

Ｔ．横井君（C7）はまだすっきりしないようだね。他の人はどうですか。

Ｃ．…

Ｔ．じゃ，ものでやってみようか。ここに，走っている人がいます。この人を使って説明してみて下さい。横井君（C7）どぅですか。

C7．鈴木君（C13）のまねをして言うと，3 の所にいて，右へだから右を向て，逆にだから，左を向いて，5 いく。



Ｃ．わかりやすい。

Ｔ．横井君（C7），ありがとう。どぅかな，横井君（C7）。

C7．人が動いて目で確かめられるからわかりやすいけど，やっぱり人を逆にするのが気になります。

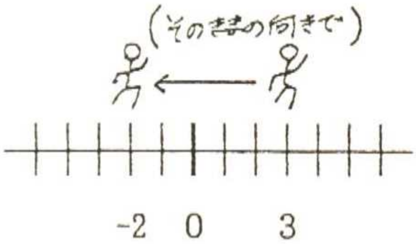
Ｔ．気になるというのは，いい表現だね。岡田君（C12.）が言ってくれたように，数字自体に何か意味があるとすると，逆にならずに動かしたいね。
３から逆にせず、答えの－２まで動かすと、
（黒板の人を動かしながら）どぅみえますか。

Ｃ．左へ動く。

Ｔ．人は。

C7．先生，後ろに下がっている。

Ｔ．じゃ，3 ＋ 5 の場合は。（黒板で同じようにやってみる。）



Ｃ．前へ進んでいる。

Ｔ．そうだね。こういうふうに考えると，＋を前に進む，ちょっとカッコイイ言葉で言うと前進。それでは，－は。

Ｃ．後退。

Ｔ．横井君（C7），どうかな。

C7．前進，後退で，まさに反対言葉になっていて，すっきりしました。

（感　想）

・＋（プラス）が消えるというのは，例えば温度計の気温を読む時でも，プラス 20 度とわざわざプラスは付けません。だから、省略したと考えもいいと思います。 ・塾で覚えたけど，棒の数で数えて，＋（－）や－（＋）の場合は，棒が３本あるから，－（マイナス）となります。だから，奇数本なら－（マイナス），偶数本なら＋（プラス）になる。例えば、＋（＋）や　－（－）なら，4 本と 2 本だから＋（プラス）です。 　でも，これだと，意味はぜんぜん分からない。ただ覚え方だけです。今日のように，みんなで話し合って，意味を考えた方がいいと思うし，本当に勉強したって感じがします。 ・これほど，じっくり話し合いをしたのは，はじめてだ。みんなからいろいろいな意見が出て，よかった。意味を考える勉強はおもしろい。 前進・後退には，びっくりした。

計算の意味を考えていく中で，横井君（C7）のように自分の考えの甘さに気付き，「前進・後退」という新しい事実を見付けていくことのよさを，感想にあるようにそれぞれが全体の場で感じとってくれたと思う。

《ディスコース分析３》

計算の意味と方法のディスコースであるものの，ほとんどが計算の意味を巡る話し合いである。それは，$\underline{3 +（- 5）= 3 - 5}$　という計算の意味を，「数直線の考え方」ではどう説明できるかということである。この式の中で，＋の記号は右辺では消える。左辺の＋の意味は何かということである。

つまり，答えは「－ 2」であることは，生徒は分かっているものの，その計算の意味について話し合いをしているのである。これは，次のような教室文化の特徴である。

S2. 児童・生徒の主体性を育成し，算数・数学の意味を構成するように指導する。

このような話し合いの中で，次の発言は興味深い

C7.　うーむ。…塾でも＋（－）＝ － と習ったよ。教科書にもあるよ。

教師のみならず，生徒にとっても，教科書がいかに権威であるかを示している。しかし，教師は，その権威に帰着させるのではなく，合意を重視する指導を行っている。つまり，次の特徴が見られる。

S3. 教室において，数学的コミュニケーションによる合意領域を形成する。

この問題は，最終的に，教師が演算としての＋と－は，「前進と後退」を示すことで，生徒は納得する。「加数がその移動の方向と量を示してる」と意味づけることで，生徒が納得している。このモデルは，昭和 26 年頃の教科書には見られるものの，教師が，知っていたのか，創案したのかは不明である。しかし，優れたモデルであることに相違ない。<u>3 －（－ 5）＝ 3 ＋ 5</u> といった計算でも利用できるモデルである。

最終的に，教師が計算の意味を与えているものの，それは，生徒が意味を考える数学的コミュニティーへと，参加を促しているので，生徒はそれを積極的に受け入れている。つまり，次の特徴である。

S6. 教室における数学的コミュニティーへ，児童･生徒が参加する。

多くの生徒が，計算の方法のみならず，計算の意味を考えるコミュニティーに参加して，合意を形成している。「こだわり」をもっている生徒を大切にする一方で，「意味を考えるの楽しさ」を多くの生徒が体験したのである。

④　原理的知識

《ディスコース４》

（生徒は乗法については，自分で考えるだけのモデルをもっている。それはトランプや数直線などである。そこで個人追究によって，生徒が乗法の意味と方法を考えて説明する指導がなされている。）

前時までの考え方や方法を参考にして、自分なりの考えをもつことを大切にした。

共 通 課 題

・6 × 2，6 ×（－ 2），－ 6 × 2，－ 6 ×（－ 2）

・6 ÷ 2，6 ÷（－ 2），－ 6 ÷ 2，－ 6 ÷（－ 2）

の意味と計算方法を考えよう。

子どもたちの考えは，…，トランプを使った人，数直線を使った人が多かった。

今までの小学校も含め，知っている乗法のきまりを使いながら，自分の考えをまとめてた人もいれば，自分の考えがなく，（＋）×（－）、（－）×（＋）はー，（＋）×（＋），（－）×（－）は＋になるという覚え方のようなものだけを書いたものもいる。自分で考え，その考えを確かめて，確かなものにしていこうという姿勢が今一歩であった。

次の個人追究を発表する場面で，自分の考えをもってまとめてある人に説明してもらい，今一歩である人を育てたいと願った。

（感　想）

・僕は，みんなの発表を聞いて，恥ずかしくなった。結果を覚えて計算だけできればいいと思っていたけど，計算の意味を一生懸命考えている。特に，山本君の乗法の交換法則には関心した。一つ一つの学んだことを次へ生かしている。僕ももっと勉強しなくては。

《ディスコース分析４》

多くの生徒は，ディスコース３までの指導によって，計算の意味と手続きを工夫するようになっている。乗法・除法の計算において，それらのモデルや考えを発表した。

「山本君の交換法則」というのは，次のことである。

$(-2)\times 3=(-2)+(-2)+(-2)=-6$ これは，同数累加によって成り立つ。ここでも，交換法則が成り立つはずであるから，

$3\times(-2)=-6$　となるということである。このように，計算法則を意識しているのである。

全体として教師は，4 つの知識を順次活性化して，それぞれの知識を次の知識へとつなげるような，知識のネットワークを構成する指導をしている。そして，何より根気強く生徒の意見を引き出し，生徒の疑問を取り上げている。そして，計算の意味を教室において構成している。まさに，生命論的教室文化の事例となっている。

Lampart（1986）が例示しているように，このような 4 つの知識に関する単元構成は，小学校算数，中学校数学を問わず，「数と計算」に関する領域には適応できる。さらに，三浦祥志（1992）は，中学校 3 年の無理数についての実践研究をしている。日常の生活における無理数から，無理数の計算の意味や手続き，計算法則までを，同様に指導している。

第４節　第４章のまとめ

生命論的教室文化では，単元や教材が重要な役割をもっている。この点で，Wittmann（2001）の「本質的学習環境（Substantial Learning Environment）」は意義深い。これは，知識のネットワーク（國本，2006, p. 11）の形成を促し，指導内容や教材の柔軟性・発展性を強調するものである。算数・数学の指導内容が，系統性や体系性をもっていることはよく知られている。重要なことは，そのような知識のネットワークを児童・生徒が形成することである。また，教材がも

つ柔軟性や発展性は，算数・数学の教科の特質である。3 つの例をあげた。

生命論的教室文化に対する研究方法として，ディスコース分析をあげた。ディスコース分析とは，教室におけるディスコースを記述して，それを分析することであり，コミュニケーションにおいてどのような記号や規則が機能しているか分析することである。

Sfard（2002）の研究を参考にすると，数学的ディスコースの主な要素には，次の 2 つがある。

・コミュニケーションを媒介するツールとしての記号的人工物。
・コミュニケーションを形成するためのメタ規則。これは観察者が構成するもので，ディスコースの参加者には暗黙のものである。

また，生命論的教室文化における，単元構成の研究には Lampert（1986）の実験授業がある。これは，「乗法の筆算」の単元について，4 つの知識の設定し，これらが相互に活性化するように単元構成し，授業を実践した研究である。

その 4 つの知識とは，「直観的知識（Intuitive Knowledge）」「具体的知識（Concrete Knowledge）」「計算知識（Computational Knowledge）」「原理的知識（Principled Knowledge）」である。

さらに，生命論的教室文化の重要な先行研究は，國本（2009）の「全体性の原理」に関わるものである。実際に，平林（1987）は，デューイの『数の心理学（1895）』から「漠たる全体」の意義を解明し，単元構成の図式にまとめている。

本質的学習環境は，生命論的教室文化の典型的な事例を提示してくれる。その事例としては，数のパターンがある。ここでは，筆者が実践した「平方数とピラミッド数」の授業を取り上げた。さらに，カリキュラムの観点からの事例には，Wittmann（2004）の研究がある。これは，「かけ算から 2 次方程式へ」と題する系統的内容の教材である。

単元構成における「漠たる全体」の実践事例は，手島勝朗（1987）の「算数のリズムをしよう」という授業がある。また，Lampert（1986）の 4 つの知識を適用した単元構成の実践例は，三浦祥志（1992）による授業がある。

これらの実践事例をディスコース分析することで，生命論的教室文化の特徴を確認した。これらの分析の観点には，Vygotosky の理論や Wittgenstein の言語ゲームの考え方を活用した。

《第４章の引用・参考文献》

和文文献

國本景亀（2006）．『「全体論的」数学教育の理論と実践に関する研究』，平成 15 ～ 17 年度科学研究費補助金（基盤研究(C)）研究成果報告書．

國本景亀（2009）．「生命論に立つ数学教育学の方法論　－自由で個性豊かな算数・数学授業を目指してー」，『全国数学教育学会誌　数学教育学研究』，全国数学教育学会，pp. 1-15.

コークスター，H. & グレイツァー，S.［著］，寺坂英孝［訳］（1970）．『幾何学再入門』，河出書房新社．

佐伯胖（1989）．「子どもの納得世界を探る　－算数の学習の場合－」．佐伯胖・大村彰道・藤岡信勝・汐見稔幸［著］，『すぐれた授業とはなにか　－授業の認知科学ー』，東京大学出版会．

佐藤学（1996）．『教育方法学』，岩波書店．

サリバン，ピーター（2012）．「教師志望者や現職教師の学びを促進するための数学教育の課題（タスク)」，『日本数学教育学会誌　数学教育』，第 94 巻，第 1 号，日本数学教育学会．

杉野本勇気，岩崎秀樹，大滝孝治，岩知道秀樹（2011）．「高校数学における論証指導　－ Sylvester の定理に向けた局所的組織化－」，『日本数学教育学会誌』，第 93 巻，第 9 号，数学教育 65 － 5，日本数学教育学会．

田島信元（2003）．『共同行為としての学習・発達　－社会文化的アプローチの視座』，金子書房．

手島勝朗（1987）．『算数科・楽しい授業の提案』，明治図書．

平林一榮（1961）．「J. Dewey 著「数の心理学」の算術教育史的位置　－ J. Piaget に連なるもの」，『日本数学教育学会誌　数学教育学論究』，Ⅰ， pp.57-67.

平林一榮（1987）．『数学教育の活動主義的展開』，東洋館出版社．

三浦祥志（1992）．「学ぶ喜びを味わい、自ら学ぶ力を育てる数学の授業」，読売教育賞　受賞者論文集－「実践活動の概要」，読売新聞社．

ビットマン，E. H.，シュタインブリング，H.，& ミューラー，G. N.［著］／國本景亀・山本信也［訳］（2004）．『算数･数学　授業改善から教育改革へ　PISA を乗り越えて：生命論的観点からの改革プログラム』, 東洋館出版社．

藤江康彦（2007）．「教室談話の特徴」．秋田喜代美［編］，『改訂版　授業研究と談話分析』，放送大学教材．

（図１，図３，図４，図５は，平成 17 年 2 月 3 日検定済教科書『中学数学２』大阪書籍株式会社から複写）

欧文文献

Bauersfeld, H.（1995）. "Language game" in the mathematics Classroom: Their function and their effects. In P. Cobb, & H. Bauersfeld（Eds.）, *The emergence of mathematical meaning.* Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum.

Flanders, Ned A.（1970）. *Analysing teacher behavior.* MA.: Addison Wesley.

Lampert, M.（1986）. Knowing, doing, and Teaching multiplication. *Cognition and Instruction,* 3（4）, 305-342. Lawrence Erlbaum Associates, Inc.

Mehan, H.（1979）. *Learning lessons: social organization in the classroom*. Cambridge, MA.: Harvard University Press.

Mehan, H.（1985）. The structure of classroom discourse. In van T. A. Dijk（Ed.）, *Handbook of discourse analysis, Vol. 3, Discourse and dialogue.* Academic Press.

Mehan, H., & Wood, H.（1975）. *The reality of ethnomethodology*. New York: Wiley.

Mueller, Gerhard, & Wittmann, Erich Ch.（1984）. Der Mathematikunterricht in der Primarstufe 3., neubearbeitete Auflage. Friedre. Vieweg & Sohn Verlagsgesellschaft mbH, Braunschweig/Wiesbaden.

Sfard, A.（2002）. There is more to discourse than meets the ears: Looking at thinking as communicating to learn more about mathematical learnig. In Carolyn Kieran, Ellice Forman & Anna Sfard（Eds.）, *Learning discourse*（pp.13-57）, Dordrecht, The Netherlands: Kluwer Academic.

Wittmann, E. Ch.（1984）. Teaching units as the integrating core of mathematics education. *Educational Studies in Mathematics, 15,* 25-36. Kluwer Academic Publishers.

Wittmann, E. Ch.（1995）. Mathematics education as a 'design science', *Educational Studies in Mathematics, 29*（pp.355-374）. Belgium: Kluwer Academic Publishers.

Wittmann, E. Ch.（2001a）. Developing mathematics education in a systemic process. *Educational Studies in Mathematics, 48,* 1-20. Kluwer Academic Publishers.

Wittmann, E. Ch.（2001b）. The alpha and omega of teacher education: organizing mathematical activities. In D. Holton（ed.）, *The teaching and learning of mathematics at university level: an ICMI study*（pp.539-552）, The Nertherlands: Kluwer Academic Publishers.

Wittmann, E. Ch.（2004）. From the Multiplication Table to the Solution of Quadratic Equations. The Lecture in Nara University of Education.

Wittmann, E. Ch. & Mueller, G. N. ［Hrsg.］（2002）. *Das Zahlenbuch Mathematik im 1.-4. Shuljahr*, Schulerband. Ernst Klett Grundshulverlag.

第５章　教室文化の文化化

本章は，教室文化の文化化について究明することを目的とする。これは，本研究の主要な結論である。第１節では，「教室文化の文化化」とは何かを定義する。第２節では，数学的活動による教室文化の文化化について述べる。第３節では，記号論的文化化として「意味の連鎖」に基づいて，数学的活動を構想し，教室文化の文化化の事例を示す。第４節では，社会･文化的な学習理論から，「誤り」からの理解，「模倣」としての学習，「参加」としての学習について，事例を示しながら述べる。最後に，「儀式」としての教室文化に着目し，生命論的教室文化への文化化の理論と事例を考察する。

第１節　教室文化の文化化

１.１．教室文化の文化化

一般に，文化は伝統や習慣として受け継がれていくと同時に，常に変化しているものである。文化の変動には，コミュニティーや成員が適応することによって変化することと，文化そのものが変化することがある。つまり一般に，文化変動（culture change）には，文化化（enculturation）と文化変容（acculturation）という二つの概念がある。教室文化も同様であり，規定され構築されながら，変化しているものである。

ここで，文化化とは，「特定の社会内部で，成員をその社会特有の文化のパターンに適応させること。主として幼少の時期の学習を通じて，その社会の衣食住その他の行動様式や思考様式を取り入れ，共有の価値態度を内面化されること」（辰野他，1986, p. 354）である。つまり，集団の成員に着目した概念である。

また，文化変容（acculturation）とは，他の文化との接触という外在的な要因によって，文化が変化することである。つまり，異なる文化をもつ人間の集団が，直接的，永続的に接触することで，その結果として一方または両方の集団の生活様式が変化する現象をいう（下中，1971, p. 1245; 廣松他，1998, p. 1425）。これは，「文化触変」と訳されることもあり，文化そのものの変動を示している。

児童･生徒は数学教育における文化化の過程にあるとともに, 外的要因によって，教室文化は文化変容している。このような中で，本研究では，「文化化」に着目した。教室における成員である教師と児童・生徒が協同で文化化することを意図しているからである。つまり教室における文化化とは，教師と児童・生徒が共に教室文化の変動に参加することを意味している。そして，これを「教室文化の文化化」と呼ぶことにした。

第３章で述べたように，教室そのものが，機械論的教室文化の伝統から創設されたものである。また，教育制度，カリキュラム，教科書なども，機械論的産物である。つまり，生命論的教室文化は，そのような機械論的教室文化を，その一部として包括しているととらえるべきである。

そして，図１のように，教室文化の文化化とは，機械論的教室文化から生命論的教室文化へと，教室の成員である教師と児童・生徒が文化化するという意味である。つまり，数学教育として，文化変容そのものよりも，教師や児童・生徒の成長・発達に着目しているのである。

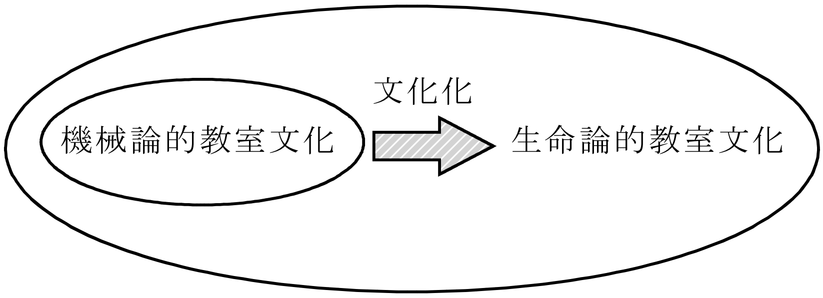


図１　教室文化の文化化

１.２．数学的文化化と教室文化

数学教育における教室文化は，数学的文化化の過程に位置づけられる。我が国の児童･生徒は，学習指導要領の目標にあるような数学的文化への数学的文化化の過程にある。教室文化は，そのような過程に対する分析単位である。

数学教育において，「文化化（enculturation）」に着目したのは，Bishop（1988）である。「数学的文化化（Mathematical Enculturation）」とは，「形式的な数学的文化化の目標は，子どもに，記号化，概念化，そして数学文化の価値を伝えることである 」（p.89）と述べている。そして，数学的文化化に対する観点として、次のものを挙げている。

《第一の観点は，数学的文化化への参加者の非対称性である。これによって，その過程はダイナミックなものとなり，意図的な現実の過程となる。教師と学習者は，対等な関係ではないし，同じ役割をもっているのでもない。》（p. 12）

教師は，学級を経営する責任と権限をもっている。算数･数学の授業においても同じである。ただ，授業において教師が，児童･生徒と対等な学習態度をとる場面はある。しかし，それは学習という場面におけるものであって，学級経営における一つの役割なのである。

しかし，非対称性は，教師が権威主義によって学級を経営することを勧めているのではない。むしろ，そうならないために，Bishop（1988）は，次の 3 つの

原則を示している。
《第一の原則は，教師の指導は，理に適ったものでなければならないということである。
　第二の原則は，学習者が構成的で協同的に数学的文化化に取り組めるように，教師は指導しなければならないということである。
　第三の原則は，教師の指導は支援を中心としたものでなければならない。数学的知識を学習者に押しつけてはならないということである。》（pp. 130-135）
　これらの原則は，構成主義の立場に近い指導のあり方である。Bishop（1988）は，そのような立場をまえて，教室における学習指導を考察した。そしてさらに，次のような第二，第三の観点を示している。
《第二の観点は，数学的文化化には意図や目的があり，目標に則した過程となっているということである。》（p. 135）
《第三の観点は，数学的文化化は概念についての過程であり，考え方や意味を具体化したものであって，行動や技能ではないことである。》（p. 151）
　これらの観点は，数学的文化化が数学の概念形成に対する合目的的な過程であることを示している。

１.３．教室文化の文化化におけるデザイン

　機械論的教室文化から生命論的教室文化への文化化について，デザイン科学の観点から考察する。「教室文化の文化化」は，数学的文化化をより焦点化した部分である。数学的文化化は，数学教育そのものを視野に入れた広い概念である。したがって，Bishop（1988）が述べる数学的文化化の過程を教室文化に適用するだけでは，「教室文化の文化化」を究明できない。
　なぜなら，「教室文化の文化化」は，複雑な学習指導の過程から成り立っているからである。教室における児童・生徒の学習は，Vygotsky の観点から，数学的概念が児童･生徒の生活的概念へと内化している過程を含んでいる（柴田義松，2006）。つまり，「教科内容の材料」としての教材は，数学的文化を生活の文化へと変容させるための材料という見方ができる。もちろん同時に，教材は生活の文化を数学的文化へと，児童・生徒を文化化するための材料である。
　そこで，教師は，算数・数学教育のデザインを念頭においていく必要がある。つまり，教室文化に対して，「デザイン科学（Wittmann, 1995; ビットマン他，2004; 山本，2009）」の観点が必要となる。デザインとは，「現在の状態をより好ましいものに変えるべく行為の道筋を考案（山本，2009, p. 61）する」ことである。つまり，人為的に教室文化における数学的文化化をデザインすることを考慮しなければならない。
　教室文化に対するデザインは，二つの数学教育学的観点からとらえられる。

一つは，Chevallard（1992, 平林一榮[訳]; 2007）の「知識の人類学」である。これは，社会における知識がどのような機能を持っているかを，文化人類学的に考察するものである。

《文化が知識を取り扱う様式は、どんな効果を生ずるかを、見なければならない…。知識の生産は、正面に押し出されてもてはやされるが、知識の利用は、不透明で、無視されたままである。知識の教育は、利用よりも文化的に…見えるが、劣化され、偶発的で、余り必要のない企てとみなされる。…

教えられる知識はどこから来たのであろうか。…それは生産の施設…である。それはいかにして、教授学的施設にまで運ばれたか。それは、教授学的変換の手続きによってである。》

現代社会は「知識基盤社会」と述べられるように，資本主義における資源であった資本と労働力が，知識に取って代わられる社会となっている（ドラッカー，1993）。Chevallard（1992, 平林一榮［訳］）によれば，知識の社会的な機能には，次のようなものがある。

・知識をつくる
・知識を応用する
・知識を教える

そして，これらの中で，従来「知識をつくる」機能が，最も重視されてきた。知識の応用は劣ることとされ，「知識を教える」ことは，さらに軽視されることが多かった。これは，教育学部の教員の間にある，次のような会話からわかる。

《あるディスコース》

ある教科教育学者：教育学部では，教員を目指す学生の手本となるような教師教育を目指さなければならない。

ある科学者：教育，教育というが，教育はだれでもやっていることでないか。私は，大学で教育を受けたし，現に学生を教育をしている。それとどこが違うというのか。

Chevallard（1992, 平林一榮［訳］）が主張するのは，「教授学的変換」の重要性である。これは，「生産された知識」を「教えるための知識」として変換する機能である。教授学的変換とは，カリキュラムや授業の開発を知識人類学としてとらえたものである。

知識人類学における教授学的変換は，教室文化が，教育の実態や社会制度，科学や歴史における文化から規定されていくことを示している。つまり，教室文化のデザインは教授学的変換であり，文化変容の観点に立つことになる。

二つ目の観点は，規範性の観点から，教室文化のデザインを考察することである。これは，数学的活動に着目することである。これは，「人間活動としての数学」という Freudenthal（1973, 1983）の思想が源流になっている。この思想は，オランダ フロイデンタール研究所の現実的数学教育（RME; Gravemeijer & Stephan, 2002）として展開されている。

本研究では，主に後者の観点をとる。これは，教室文化のデザインにおいて数学的活動を重視するからである。さらに，「教室文化の文化化」に適するからである。つまり，「教室文化の文化化」では，児童・生徒による数学的活動を通して，生命論的教室文化へと文化化するためのに，教師が教室文化をデザインすることを含意している。

第２節　数学的活動による教室文化の文化化

２.１．算数・数学的活動と教室文化

児童・生徒は，算数・数学的活動を通して，教室文化の文化化に参加する。教室文化は，日常の教室における学習指導様式である。そこで，教室文化における文化化のデザインとして，数学的活動を考察する。

算数・数学的活動という用語が，初めて学習指導要領に顕れたのは，平成 10 年の小学校・中学校学習指導要領や平成 11 年高等学校学習指導要領であった。また，平成 20 年の小学校・中学校学習指導要領や平成 21 年高等学校学習指導要領では，「算数的活動を通して」「数学的活動を通して」という文言が，目標の冒頭に置かれた。

これらの背景には，活動主義の思想がある。基本的には，J. J. Rousseau や J. H. Pestallozi に始まり，J. Dewey から J. Piaget へと連なる活動性への着目である。この活動性は，子どもが本来持っている本性である（平林一榮，1961）。さらに，「個人的かつ社会的な（平林一榮，1987, p. 113）」活動観は，構成主義として結実した（平林一榮，2000）。

しかし，数学教育における活動主義には，そのような立場とは，別の系譜がある。それは，H. Freudenthal（1973）の数学観である。Freudenthal は，既成の（ready-made）数学と活動（acted-out）数学を区別し，数学教育において後者の意義を強調している（pp. 114-119）。数学的活動とは，経験領域を数学的に体系化する活動であり，数学化（mathematize）という用語も使っている。

この特質は，Freudenthal（1973）による次の記述から分かる。まず，メレの問題（Chvalier de Méré）を紹介している。これは，1 つのさいころで 6 の目を出そうというときは，4 回投げれば，

$$1-\left(\frac{5}{6}\right)^4 = 1 - \frac{625}{1296} = \frac{671}{1296} > \frac{1}{2}$$

となり，確率は$\frac{1}{2}$よりも大きい。

ところが，メレは経験から，2 つのサイコロでソネ（6 の目合わせ）を出そうというときは，24 回投げても，確率が半分よりも小さいことを知っていた。このことから，メレは，数というものには虚偽があることが分かったと言って，友人の Pascal（パスカル）に相談を持ちかけた。というのも， $4\times\frac{1}{6}=24\times\frac{1}{36}$ であり，どちらの期待値も同じだからである。

Pascal は，さらに友人の Fermat（フェルマー）に，彼の原理をもってすれば，その矛盾の理由は明らかだと述べている。つまり，確率を計算すれば，次のようになる。 $1-\left(\frac{35}{36}\right)^{24}=0.49140<\frac{1}{2}$

《このメレの問題は，数学教育上の重要な問題に，突然に予期せぬ光を投げかけている。メレは，おそらく教養人であり，数学を学んでいたであろう。ところが，数学を活用しなければならない事態に立ったとき，それができない。彼は，既知の数学を利用してみた。それは，比であった。［中略］かわいそうなメレは，今日のまじめな生徒と同様に，自分が学んだ数学を利用して，かえって損をしている。おそらく，数学を全く学ばなければよかった良かったであろう。そうすれば，自分が学んだ数学ではなく，自分が創造した数学を活用していたであろうからである。

メレは，決して歴史上の人物ではなく，今日多くの子どもたちの祖先である。現在，数学を学んでいるのに，それを活用できない，すべてのかわいそうなメレたちのパラダイムなのである。だれでも一度は，パスカルの役割を果たせるはずだ。そのために，難解な数学に出会った人に指導されなければならない。》（p. 585）

この記述から分かることは，Freudenthal（1973）の数学的活動とは，数学的価値をもつ創造的活動であるということである。また，それを，本来の人間的活動としてとらえていることである。優れた数学者が指導すれば，だれでもパスカルのようになれると言わんばかりの主張には，必ずしも同意できない。しかし，だれでも数学的価値のある創造的活動を体験できるという観点には，注目しなければならない。

以上のことから，算数・数学的活動には，個人的，社会的，数学的の 3 つの要素があることが分かる。生命論的教室文化へと文化化するには，それらの要素を統合した数学的活動をデザインしなければならない。以後，算数・数学的活動をまとめて，数学的活動と呼ぶことにする。

２.２．数学的活動の段階論

オランダのフロイデンタール研究所の「現実的数学教育」では，「数学の根源は人間活動である」という思想に基づいて，活動の 4 つの段階を設定している

(Gravemeijer, 1999; Gravemeijer & Stephan, 2002)。実際には，4 つの段階がこの順序とは限らないものの，児童・生徒の主体的な活動をデザインするための指針となる。そこで，数学的活動の 4 段階について，それぞれの段階を説明する。そして，生命論的教室文化への文化化に対する意義を述べていく。

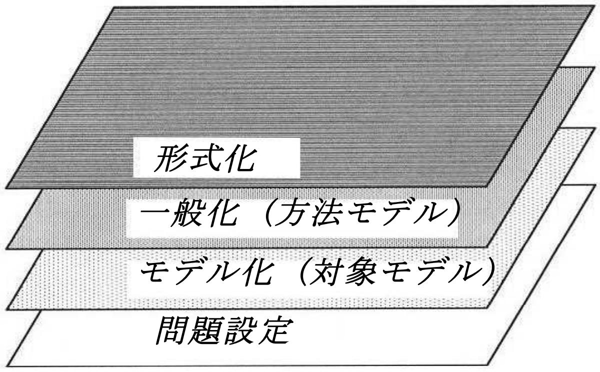


図２　数学的活動の段階

（1）問題設定

問題設定の活動である。数学的活動における目的意識とは，多くが問題意識である。理想的には，生徒が問題を設定することである。少なくとも，児童・生徒が問題を理解しなければならない。この活動は，数学的活動の中でも，最も重要な段階である。したがって，問題設定は，生命論的な教室文化の構築において重要である。

実際，H. Bauersfeld（1992a, 1992b）は，ある教室文化の事例として，課題が曖昧なままに進む授業を例示している。小学校 3 年生の足し算の授業である。

《教師は，黒板に『サンドラとペギー，マーチンが電車で，町へ行きます。そして，ジャンの誕生日プレゼントを買います。』と書く。

教師：何を知りたいですか。

児童：切符はいくら。

［教師が『きっぷのねだんは，2 DM』と板書すると，突然に話し合いが始まった。］

生徒：高すぎる。1,20 DM だよ。いや 1,60 DM か。おかしいよ。切符が 6 枚だったら，もっと安い。

教師：2 DM として計算しよう。

児童：［驚きながら］あー，じゃあ。サンドラとペギー，マーチンは，一人ずつ切符を買う。

多くの児童には，足し算は必要ない。それぞれ料金を払えばいい。普通，電車では，そうする。集団の料金を合計することはない。教師は，次の課題を付け加えて読む。「弟のジャンに誕生日プレゼントを買います」。実はこれは，教師が初めに設定しようとしていた課題であった。しかし，教師は板書するときに，児童たちが兄弟であるというキーワードを忘れていた。このことで，児童が理解した問題とは異なるものとなってしまった。

児童：あー，子どもたちは兄弟なんだ。お，じゃあ，お母さんから，電車賃をもらわなくっちゃね。6 DM か。

［8 DM と答えた児童もいた。というのも，話し合いの中でジャンを入れたことから，それで課題が解けたと思った児童が多かったからである。］

児童：次の問題。

教師：でも，プレゼントを買って，どうやって，町から家に帰るのかな。

児童：あー，おー。

最後は，町への冒険は 12 DM ということに，行き着いた。この事例から，僅かな変化で，子どもたちの文章題理解が変わることが分かる。さらに，子どもの理解を磨き，解き方やストラテジーをまとめるためには，話し合いがいかに重要かということがわかる。典型的ではない問題やオープンで「未確定な」問題を適切に使えば，話し合いを行わせたり，子どもの考えをとらえたりするために役立つ。》（1992b, pp. 471- 472）

このような事例は，わが国でもよく見る。教科書の問題を工夫して，変えたために返って失敗した授業は少なくない。しかし，逆に，児童・生徒が積極的に参加するような授業では，教師が問題の設定を工夫し，丁寧に指導している。この事例は，問題設定の段階が，いかに重要かを示している。

（2）モデル化

問題を解決するには，問題の中の対象に働きかけなければならない。そのために，対象をモデルに置き換え，抽象化する必要となる。そうすれば，児童・生徒は，思考の手段を手に入れることができて，問題を解決できるようになる。これが，参照的活動である。これは，問題状況の構造やパターンを表現することでもあり，モデル化と呼ぶこともできる。そのようなモデルを，「対象モデル（'model of'; Gravemeijer & Stephan, 2002, p. 159）」と呼ぶ。わが国で，「問題解決」というとき，このモデル化を意味している場合が多い。モデルには，教具や絵，図式，表，記号などが用いられる。

（3）一般化

算数・数学の指導は，問題解決だけで終わることは少ない。むしろ，問題解決から始まるとさえいえる。わが国では,「練り上げ」といわれる過程である。特殊な問題ではなく，一般的な問題を解くことが，算数・数学指導の目標となるからである。ただし，児童・生徒が個人だけで，そのような段階の活動に関わっていくことは難しい。他の子どもとの関わりや教師の指導が必要となる。

ここで重要なことは, この段階では問題を解く方法が問題になることである。つまり，解決方法が考察の対象になるのである。「方法の対象化」（平林，1987, p.198）といわれる活動である。このモデルは「方法モデル（model for, Gravemeijer & Stephan, 2002, p. 159）」と呼ばれる。一般的に問題を解く方法を考える段階である（岩崎, 2007）。

（4） 形式化

数学的活動の最終段階では，公式や方程式，関数にまとめ，根拠や証明へと仕上げていく。このような活動は，形式的な数学的推論の活動と呼ばれるが，簡単に形式化と呼ぼう。算数・数学的な技能や推論が必要となるからである。

問題設定やモデル化の活動は，個人的な要素が強い。また，モデル化や一般化の活動では，社会的要素が強くなる。そして，一般化や形式化の活動では，数学的要素が強い。このように，数学的活動の段階論では，個人的，社会的，数学的要素が統合されている。

２.３． 算数的活動における式の指導

数学的活動の段階論を，算数科における式の指導に適用して，具体的に説明する。そして，わが国の算数教育における式指導の問題点を明らかにして,「算数的活動」（算数科に限定した数学的活動は，学習指導要領に従って，このように呼ぶことにする）としての式指導の在り方について述べる。

そのために，ある公立小学校の授業におけるディスコースを事例としてあげる。1 年生の「ひきざん」の授業である。繰り下がりのある引き算であり，わが国の教科書では，減加法と減々法を指導する。次のような問題である。

「かきが　13 こ　なって　います。
　9 こ　とると，　なんこ　のこりますか。」

《ディスコース》

経験豊かで，確実な指導ができる教師である。まず，黒板に木の絵を貼って，「秋の木といえば，何の木だと思う」と発問する。全員が，発言できる発問から始まる。そして，柿の絵を黒板の木に，貼っていく。そして，先生が猿の人形を出すと，教室の歓喜が盛り上がる。そこで，教師は問題を板書する。

「木にかきが 13 こなっています。
　さるが 9 こたべました。」
　ここで，教師は柿の絵と問題を印刷した紙を配り，児童が柿の上に数図ブロックを置くよう指示する。また，全員で黒板の絵にブロックを数えなら，付けていく。さらに，9 このブロックを取り除かせる。ここで，問題の問いの部分を板書する。

「木にかきが 13 こなっています。
　さるが 9 こたべました。
　のこりは　なんこでしょう。」

　そして，次のように発問する

教師：食べちゃったよねえ。食べちゃたってことは，増えた，減ったあ。
　　　じゃあ，聞こう。増えた。

　児童は全員手を挙げない。

教師：減った。

　全員の児童が手を挙げる。

教師：なんだ。ていうことは，あれだね。あれだね。じゃあ，みんな問題っていうところを読むよ。

教師：それじゃあですねえ。あれだよ，みんな。式，書いてみよう。

　ここで，40 秒の時間をとり，各児童が，プリントに式を書く。

教師：じゃあ，式を教えてもらいます。

児童：13 引く 9 は。

教師：そこまででいいよ，ありがとう。13 引く 9 になったのね。みんな見てみて。

　「しき　13 － 9」と板書する。

教師：引き算でいいの。なぜ，引き算。

児童：「残りは」，だから。

教師：というわけで，今日のテーマはですね。これです。引き算です。ぱぱっとできる方法を考えよう。

　ここから，ブロックを操作し，減々法と減加法に相当する操作を導く授業である。

《ディスコース分析と考察》

　これを，数学的活動の段階論からディスコース分析する。問題設定は実に丁寧であり，子どもが主体的に問題を理解できるような工夫があった。児童が自

然に問題意識を持つようになっている。

ところが，急に不自然な展開になるのは，「式を書いてみよう」という発問である。児童の立場からすれば，与えられた問題を理解して，それを解こうとするときに，いきなり，まず「式をたてる」ことが求められているのである。

実際にこの授業を観察したところ，ほとんどの児童が，「13 － 9 ＝ 4」と立式し，既に答えを出している。それにも関わらず，教師は，「13 － 9」までしか取り上げないのである。しかも，次に続く指導過程は，この式をどのように計算するかということであり，「柿の問題」そのものは，直接扱われない。

また，注目すべきことは，引き算の式を立てる理由が，柿の問題における「のこり」というキーワードだったことである。このように文章題のキーワードを理由として立式することは，授業における習慣となり，教室文化となっている。また，そのような教室文化は，それぞれの児童が文章題解決をするときの習慣となっていく。わが国の子どもが文章題を解くときに，いきなり式を立てようとして，式を立てるまでの思考過程を除外する傾向があるのは，このためである（石田一三，1989）。

本来の算数的活動では，問題の仕組みを理解して，それをモデルとして表現し，問題を解決する。式として形式化する活動は，むしろ，最終段階のはずである。ところがわが国の算数指導では，それが問題解決の最初に位置づけられている。

もちろん，それは，教科書がそうなっているからである。わが国の算数の教科書は，例外なく，そのような構成になっている。では，なぜ教科書では，そのような構成になっているか。戦前の国定教科書では，応用問題のみであり，解き方の記述はない。戦後の検定教科書になると，今日と同じように，解き方が記述されており，文章題から立式がされ，それを計算するという構成になっている。しかし，おそらく，このような指導の構成は明治期からの伝統であり，わが国の伝統的教室文化となったものであろう。

伝統的教室文化の目的は，算数教育では，「児童がまず，計算ができる」ように指導すること，つまり計算の手続きを優先して指導するということである。しかし，それだけではなく，ここには，言語の問題があると推測できる。

つまり，例えば「2 ＋ 3 ＝ 5」という式の読み方は，日本語では「2 と 3 を足すと，5 になる」であり，これを記号化すると，「2，3，＋，5，＝」となってしまう。「2 ＋ 3 ＝ 5」は，英語では "2 and 3 is 5" である。

おそらく，わが国では明治期以来，算数指導で，まずこの「式の文法」に児童が慣れる必要があったのだろう。そこで，初めに，文章題から立式するとい

う指導が定着していったものと推測できる。

それでは，数学的活動の段階論に基づいて，式の指導するとどうなるかを説明する。

(1) 問題設定：この段階については，実践事例は良くできている。

(2) モデル化：問題の中の「柿」を数図ブロックや図に置き換えて，問題を解決する。

(3) 一般化：数値を変えて，より効率よく問題を解決するにはどうのような方法があるかを考える。必要なら，次のブロックや図を使わずに，式で表現してもいい。

(4) 形式化：活動のまとめとして，式で表現する。ただし，一般化の中に入れてもいいし，段階を入れ替えてもいい。

このような段階論によれば，児童は，ブロックや図の操作で問題を解決する。そして，数値が変わっても，効率よく解決するにはどのような方法が良いかをを考える。これを，式表現で考えて，形式化して繰り上がりのある引き算の意味を理解する。これは，児童にとっては自然な算数的活動であり，教室文化の文化化となる。

第３節　教室文化の記号論的文化化

３.１．記号論における「意味の連鎖」

記号論的文化化として，教室文化の文化化のために記号論を活用する。第３章第４節で述べたように，Saussure は記号学として，図３のように，能記(signifier)と所記(signified)を設定した。

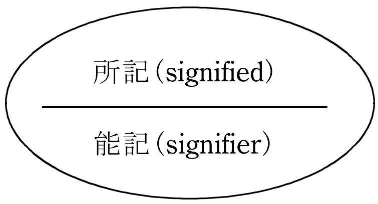


図３　Saussure の記号

さらに，フランスの Freud 派精神科医であり，哲学者であった Lacan(1977)は，それらを入れ換えた。つまり，記号の要素である能記と所記，つまり記号表現と記号内容を交換したのである。記号が何を意味しているかではなく，意味するものを記号化するのである。そして，記号がもつダイナミックで，生産的な機能を強調したのである。(図４)

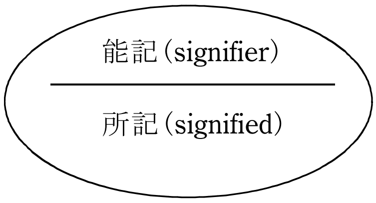


図４　Lacan の記号（Gravemeijer, 2002, p.16）

さらに，Lacan（1977）は，「能記の連鎖（chaining of signifiers）」の発想を得た（Whitson, 1997）。そして，Walkerdine（1988, 1997）は，次の図５のように図式化される「意味の連鎖（chain of　signification）」を構築した。そして，次のスクリプトにあるような母親と子どもの対話対して，記号が意味が変化して数の計算へと形式化する過程を，意味の連鎖として，次の図６ように説明した。

能記 2
能記 1（signifier）　　記号 2
記号 1（signe1）＝所記 2
所記 1（signified）

図５　意味の連鎖（chain of signification）

《スクリプト》

子ども：	お母さん？	
母親：	何？	（母と子どもは昼食を食べている。）
子ども：	7 つのジュースがいる。だって，ジュースが 3 つだもん	（子どもは，庭で友達とピクニックをするため，7 杯のジュースを求めていたが，気が変わって 3 杯になった。）
母親：	3 つ？	
子ども：	うん。	
母親：	友だちは何人くるの？	（母親と子どもは，何人の子どもが庭でジュースとビスケットを食べるかを話している。）
子ども：	3 人	
母親：	ミケルがいる	
小ども：	マーク	
母親：	マーク	
子ども：	キルスティー	

母親：　キルスティー
指でちゃんと数えた？　（子どもは指を折って全部数える。）
ミケル...
指を折って
母親：　ミケル　（母親は一つを除いてすべての指を折る。その一つは，ミケルである。そこで，子どもは，友だちを思い出して，一人に対して一つの指を伸ばす。）
子ども：　うん
母親：　マーク
子ども：　うん
母親：　キルスティー　（子どもはできないので，母親がする。）
子ども：　キルー
母親：　妹のケイトもいっしょ
でしょ。ステファニーも忘れないで。
子ども：　はい
母親：　いくつになった？
子ども：　4 つ
母親：　違う
子ども：　7 つ
母親：　違う。数えて
子ども：　一つ，二つ，三つ…七つ　（子どもは，一つずつ指で数える。しかし，三つの後で七つ数える。）
母親：　四つ
子ども：　四つ
子ども：　五つ　（子どもは最後の指を数える。）
母親：　ふーん
子ども：　五
5 つのジュースと
ビスケットちょうだい
母親：　はい
子ども：　5 つのコップ
母親：　みんなに注ぐんでしょ。　（母親が言っているのは，子どもがピッチャーからジュースを注ぐということである。）

子ども：　何？
母親：　注ぎたかったの？　（子どもー答えない）
　　　　みんなにジュースを注ごう　（子どもーうなずく）
　　　　と思ったの？
　　　　そんなにたくさん注げる？
子ども：　うん　（Walkerdine, 1988, pp. 129, 130.）》

このスクリプトにおける記号には，次のような意味の連鎖がある。

数　能記 3
記号 3
指　能記 2
記号 2= 所記 3
友だちの名前　能記 1
記号 1= 所記 2
友だち　所記 1

図６　意味の連鎖の例

３.２．教室文化を文化化するための「意味の連鎖」

意味の連鎖は，生命論的教室文化へと文化化するための，授業を開発する指針となる。またこれは，前節で述べた数学的活動の段階にも活用できる。ただし，数学的活動の段階が意味の連鎖に形式的に対応しているわけではないことを注意しておく。

小学校 5 学年の「小数のわり算」を事例として，意味の連鎖を活用して，授業開発をする。そして，生命論的教室文化への文化化となっている根拠を明らかにする。

「小数のわり算」の伝統的な指導では，整数のわり算の復習から始まり，「形式不易の原理」によって立式する。そして，その式の計算方法を考えるという指導の展開になっている。

つまり，「2 m で 72 円のリボンでは，1 m の値段は 72 ÷ 2 ＝ 3．6　3．6 円」となることは，既に学んでいる。そこで，

$\boxed{\text{ねだん}}$ ÷ $\boxed{\text{長さ}}$ ＝ $\boxed{\text{1 m のねだん}}$ 　という「ことばの式」が成り立つことを確認する。そこで，「2．4 m で 72 円のリボンでは，1 m の値段は何円でしょう」という問題から，「72 ÷ 2．4 」という式を導くのである。ここで，除法

の意味は変わっても，形式は変えないという形式不易の原理を使っている。次に，この式の計算の仕方を線分図で考える。

児童の誤りは，次のような計算である。72 ÷ 2．4 ＝ 72 ÷ 24 ÷ 10　である。これは，72 × 2．4 ＝ 72 × 24 ÷ 10　という「小数のかけ算」からの類推である。このような類推そのものは価値あることなので，４.２.節で詳しく述べる。

ここで考察することは，初めに児童に与えた現実的な問題状況が解決の基盤になっていないという事実である。そのためには，現実的状況から式への意味の連鎖を明確にしなければならない。

式　　　　　　　　　　　　　能記 3
　　　　　　　　　　　　　　　　　　記号 3
帯図・線分図　　　　　能記 2
　　　　　　　　　　　　　記号 2= 所記 3
リボンの絵　　能記 1
　　　　　　　　　記号 1= 所記 2
リボン　　　　所記 1

図７　「小数のわり算」における意味の連鎖

リボンの 1m の値段という現実的な問題が，児童の問題意識になることがまず重要である。そこから，小数のわり算を計算するという形式的活動になるまでには，2 つの活動が重要である。問題を解決する参照的活動とその過程を反省し，一般化する一般的活動である。

わが国では一般に，単元や授業の展開計画は，指導案として提示される。ここでは，構成主義者 Simon（1995）にならって，「学習軌道（learning trajectory）」によって，指導計画を示す。学習軌道とは，次のようなものである。

《児童・生徒の学習の進むであろうと，教師が仮定する学習の道である。個々の児童・生徒は，それぞれの特徴をもっているものの，よく似た道を通って進むのである。》（p. 135）

次のような学習軌道が想定できる。

１．リボンの実物，あるいはリボンの絵によって学習課題を設定する。
　「リボンがあります。2．4 m で 72 円のリボンがあります。1 m の値段は何円でしょう。」
２．リボンの絵，あるいは帯図を使って，見通しを立てる。
　約 2m あるいは 3m と考えて，値段を概算する。
３．帯図，あるいは線分図を使って，□ m では△円になるか，さまざまな場

合を試してみる。

2．4 m で 72 円であることから，1．2m では 36 円，0．6m では 18 円，0．3m では 9 円，0．1m では 3 円。また，12m では 360 円，24m では 720 円などと考える。

４．上記の結果から，1m の値段を求め，問題を解決する。

0．1m で 3 円から 1m では 30 円，24m で 720 円から 1m では 30 円など。

５．解決の過程を反省して，式で表現する。

72 ÷ 24 × 10 あるいは，72 × 10 ÷ 24 など。

６．解決した結果を，形式不易の原理を使って，「72 ÷ 2．4」という式で表現する。

1 m の値段を求めるのだから，わり算として表現することに合意する。

７．筆算でできる形式的な計算方法を考える。

わる数を整数として計算する。72 ÷ 2．4 ＝ 72 × 10 ÷ 24

「小数のわり算」における意味の連鎖（図７）によって，実物のリボンから，図，式へと表現方法を記号化することで，児童の思考を形式化し，一般化する。そして，問題を解決する。つまり，Vygotsky 理論に従って，児童の表現と思考は対応しており，同型であるという前提に立っているのである。

３.３．記号化における架空性

算数･数学科の学習内容の特徴は，「架空性」である。イギリスの数理哲学者 Bertrand Russell（1904）は，「数学とは，何について語っているのか，また何が正しいのかも分からないような学問である」（p. 84）と述べた。ヒルベルトによる公理主義の思想を揶揄的に表現したものでもある。つまり，「架空性」は，教室文化の文化化における算数・数学科の固有性を考察するために不可欠である。

わが国において学校数学における「架空性」に着目したのは，平林（1975, 1979）である。算数・数学の教材がもつ，そのような特質は，数学的概念そのものの架空性からきていると述べている。

《昔から，学校では「具体的」な指導ということが強調された。抽象性は数学の本性であるが，その抽象的な数学を具体的に説明したり指導したりすることが教授法というものであると考えられてきた。…だが，具体性の極には現実性がある。そこで数学は現実的事例によって説明されなければならないというのであれば，わたくしは断乎として反対せざるをえない。数学は現実を超えたものであり，数学を現実につなぎとめておくことは，数学の自由性に反する。》（1975, pp. 183-184）

《数学の発生する場所は，多くの場合その人にとって一つの現実界であることは，子どもにとっても数学者にとっても同じであろう。ところが，ひとたび生

まれれば，数学はその発生した現実界を超えて架空の世界へと飛躍する。そしてそれによって，別の，さらに広大な世界を支配する可能性を持つ。》（1979, p. 306）

そこで問題となるのは，現実世界から架空世界へと思考対象が移り変わる過程である。まず，思考対象をどのようにとらえるかである。ここでも，思考と表現の様式は不離一体のものであるという Vygotsky の観点に立つ必要がある。つまり，思考過程を記号化の過程として考えるのである。そうすれば，意味の連鎖のなかで，数学の架空性が創発される過程を説明できる。

そのために，一次方程式の解法の授業例をあげて，記号化の過程における架空性について考察する。中学校数学において一次方程式は，架空性の高い内容である。そのため，導入として天秤が利用される。現実世界の天秤を記号化することで, 生徒が一次方程式の意味や解法を理解するように指導するのである。

ここで，2003 年 2 月のある授業研究会で話題となった授業例を紹介する（宮崎・伊藤，2003）。

この授業では，実際に天秤を用意し，これを使って $2x + 1 = x + 4$ の方程式を解くものであった。天秤から方程式を導くために，コインが数を，ホッチキスの針が未知数を表すようことを，生徒と取り決めをした。

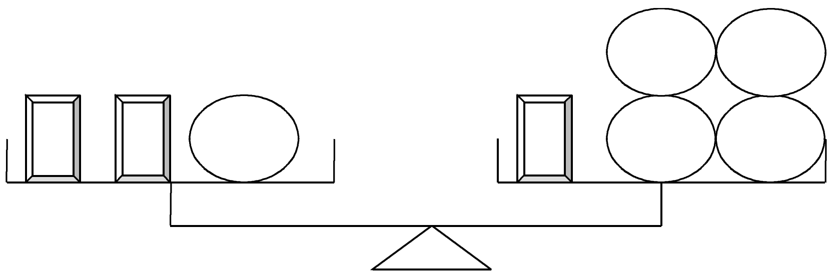


図８　天秤と方程式「$2x + 1 = x + 4$」

単元の指導計画は次のようなものであった。

1.　天秤を使って x の値を求める。（本時の目標）

（1）生徒はホッチキスの針の重さを x で表して，天秤がどういう状態かを示す式を考える。（これは，授業における教師による最初の発問である。）

教師が予想する答えは，「天秤は釣り合っているから，右と左の重さは等しい」。そこで，教師は「天秤の皿の中身は，どういう式になるか」を発問する。生徒の答えは，「$2x + 1 = x + 4$ になります」であろう。ここで，方程式という言葉を教える。

（2）生徒は，天秤のバランスを保ちながら，ホッチキスの針の重さを求める。

教師が予想する生徒の答えは，「皿に 1 つの針を残すために，片一方だけを動かせばバランスが崩れる」。「だから，両方から等しく動かさないとバランスはとれない」，「両側からそれぞれ 1 つの針と 1 つのコインをとれば，釣り合ったままである」というものである。教師は，次のような説明をする計画である。「1 つの針と 3 つのコインが釣り合っているので，このことは，$x = 3$ という式で表せる」というものである。

2.　他の方程式を考える。（次時の授業目標）

教師が予想する生徒の答えは，「両側から同じ数のコインを足したり，引いたりする」，「両側から同じ数の針を足したり，引いたりする」，「コインと針の数を半分にする」等である。教師は，「両側に同じ操作をすれば，バランスがとれる」ことをまとめ，「等式の性質」を示す計画であった。

実際の授業におけるディスコースでは，教師が予想したとおり，次のような解法をする生徒はいた。

・方程式 $2x + 1 = x + 4$ の天秤による解法

①　両側からそれぞれ 1 つの針を取る。

②　両側からそれぞれ 1 つのコインを取る。

③　左辺には 1 つの針が残り，右辺には 3 つのコインが残る。
　　解は，$x = 3$.

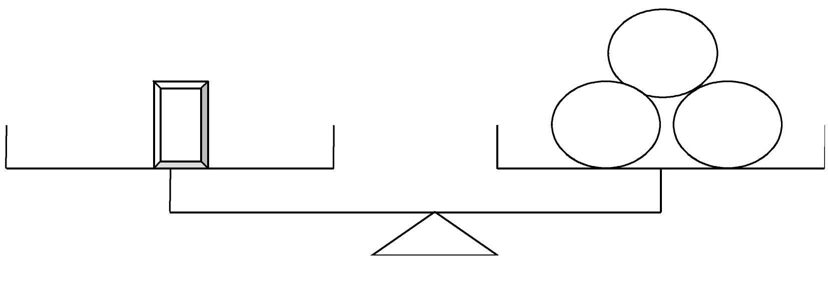
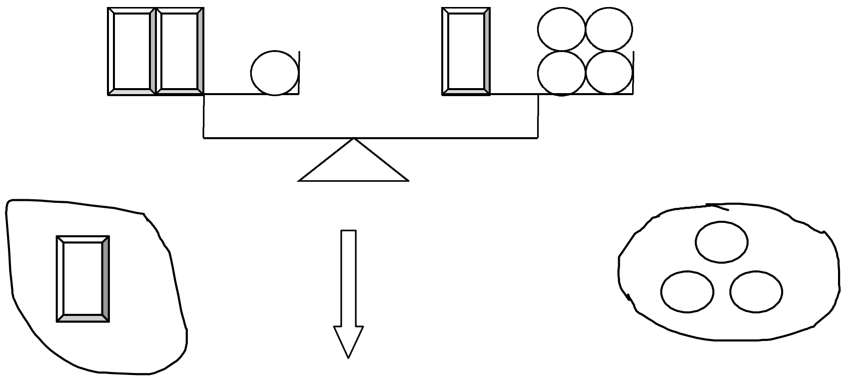


図 9　解 $x = 3$.

ところが，このような解法をしない生徒 A もいたのである。生徒 A は，初め天秤を操作できなかった。しかし，両方の皿を空にして，直接に針の重さを測ろうとした。つまり，片方に針を載せ，他方にコインを一つずつ載せていって釣り合いをとろうとしたのである。

そこで教師は，バランスをとったまま操作するように助言した。すると，A は次のように操作した。



左側から針を，右側から 3 つのコインをとる。なお，これらは等しい重さになっていることに注意したい。

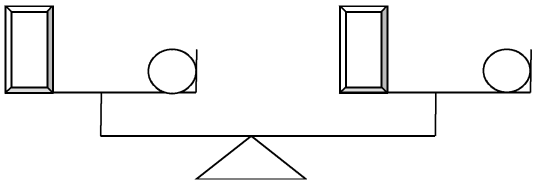


図 10　生徒 A の操作

実際生徒 A は，初めは，未知の重さの針 1 つに対して，コインを 1 つずつ載せて測るという，「現実的操作」を行った。そこで，教師は「バランスをとりながら操作しなさい」と指導した。

そこで，生徒 A は，上記のように「取り去るべき量と残すべき量を逆」にして，操作したのである。しかし，この操作そのものは，方程式の解法には直接つながっていないだけで，物理的には誤った操作ではない。むしろ，教師の指導に忠実に従ったものである。このことは，生徒 A の考えを理解し，指導するために重要である。

そして，この事例は，数学的概念の現実性と架空性を説明するための助言をしている。まず，教師が構想した思考の記号化過程における意味の連鎖は，次の図 11 のようになる。

天秤から一次方程式へと記号化される中で，現実性は弱まり，架空性が強くなっていく。まず記号 1 である。天秤を使って重さを測るとき，天秤の両側から同じものを取っていくというような操作は普通しない。生徒 A が，操作したように，未知な針の重さを測るには，片方に針を載せ，他方に 1 つずつコインを載せていくのが現実的操作である。記号 1 の操作には，すでに架空性が含まれているのである。

《一次方程式の解法》

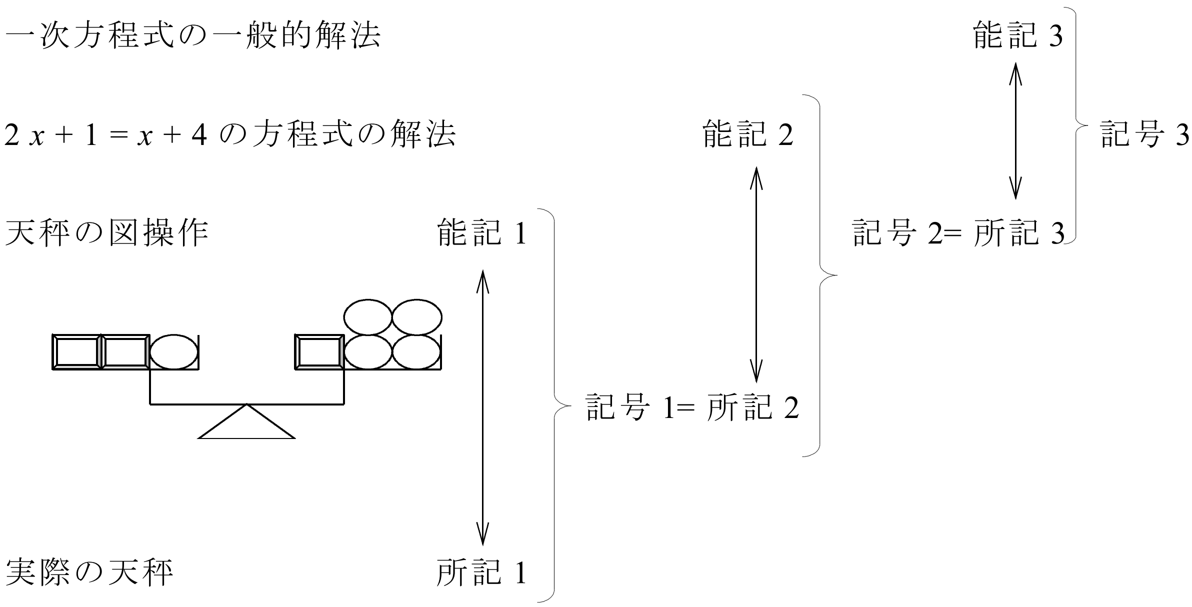


図 11　一次方程式における意味の連鎖

さらに，記号 2 では，「$x=3$ 」という形になるような操作が求められている。これは「方程式を解く」という目的があるからである。生徒 A は「釣り合いを保ったままで」という指導に従ったものの，その目的を理解していなかった。「$2x+1=x+4$」の両辺から「$x=3$ 」を引いて，「$x+1=x+1$」という方程式を導いている。この操作は，数学的には正しくても，教師が想定している操作ではない。しかし，この記号化のなかには「架空性という規則」が含まれていることを，教師も意識していなかった。つまり，生徒 A は，教師の意図した「方程式を解く」という言語ゲームに，参加していなかったのである。

この事例から分かることは，記号化の過程の中で，数学の架空性が創発されているという事実である。算数・数学の授業においては，このような記号化の過程を経る中で，架空性の高い数学の世界に，児童・生徒は導かれていく。しかしながら，事例が示す通り，現実性という制約に束縛され，記号化に困難を抱えている生徒がいることに留意しなければならない。意味の連鎖は，このような生徒の学習を分析するために有用である。

第 4 節　教室文化の文化化の理論と事例

4.1.「誤り」からの理解

一般に，機械論的教室文化では，児童･生徒の誤りは害悪として扱われる。まるで犯罪かのように扱われ，それをいかに未然に防ぐかに苦心している教師も

多い。このような背景には，「伝達としての教育観がある」と，Perkinson（パーキンソン，2000）は指摘する。この教育観は，機械論的教室文化に結びついている。

パーキンソン（2000）は，伝達としての教育観の成立について，次のように述べている。

《伝達としての教育の隠喩に最も責任を負うべき人名の名をあげるとすれば、それはフランシス・ベーコン（F. Bacon, 1561-1626）ということになるであろう。…

教育はもはや若者たちをその文化への禁欲的服従へと導く行為ではなくなった。教育は若者たちに規律を守らせ、彼らを訓練し、社会化することを可能とする伝達の過程となった。伝達という教育についての新しい隠喩は、人間は経験から学ぶ存在であるとする信念にその特質を見い出すことができるのである。

この新しい教育観は、ベーコンとその支持者達の認識論上の楽観主義がもたらしたものである。》（pp.10-13）

伝達としての教育観を実現した Comenius は，「教授の基盤とは，感覚の対象となるものが正しく提示されることである」と述べている（パーキンソン，2000, p.14）。これは，機械論的教室文化における教科書の位置づけとなっている。

《対象物を感覚に訴えるべく正しく提示するために、教授される事柄は単純な構成要素に分解され、また系統化される必要があった。この点で、古典的教科書は近代的教科書に取って代わられることになった。この教科書には生徒が学ぶことになる内容が含まれ、それらは各段階順に配列され、絵や図表が添えられていることもあった。

近代的教科書が古典的教科書に取って代わられたことは、伝達という新しい隠喩によって成し遂げられた教育実践上のごく小さな変化に過ぎなかった。最も顕著な変化は、教師と生徒の役割におけるそれであった。もはや教師は若者たちを文化的遺産へと導く「師匠」ではなく、生徒に知識を伝達する「教授者」となったのである。そして，生徒も古典的な文化遺産を収めた書物を勉強する「学問の研究者」ではなく、今や自らの感覚的経験を通して積極的に知識を獲得しようとする「学習者」となったのである。》（p.14）

19 世紀の終わりから 20 世紀の初頭にかけて，アメリカの Dewey が，この伝達の隠喩を批判的にとらえて，再構築した教育観が，「成長としての隠喩」であると，パーキンソン（2000, p.21）は述べている。さらに，パーキンソン（2000）は，その隠喩を教育のダーウィン的理論として総括し，次のように，その実行可能性について述べている。

《ダーウィン的理論はロマン主義的な教育理論ではない。それは生徒が本質的に善い存在であるとか、賢い存在であるという仮定に立っていない。それは、生徒－すべての人間－は誤り易い存在であるという仮定に立っている。すなわち、私がたちは皆、間違いを犯す存在なのである。しかし、教育のダーウィン的理論は、私たちがいかに学ぶべきか－自らの誤りから－を強調する。つまり、誤りを排除し、少なくすることによって、私たちの行動、自己概念、文化と同様に、私たちの知識も成長するのである。》（p.273）

このように，生徒の誤りに着目することの意義を強調している。数学教育では，児童・生徒の誤りを，積極的に活用することである。つまり，生命論的教室文化へと文化化するためには，児童・生徒の「誤り」の意義をとらえる必要がある。そのことで，数学をより深く理解することになり，これはまた固有な教室文化となっていく。

小学校 5 年の「単位量あたりの大きさ」の授業を事例として取り上げる。富山大学付属小学校曲師政隆(1997)の実践研究である。これは，異種量の割合概念に迫る実践であり，児童の「誤り」へ真摯に向き合い，教室文化の文化化になっている実践である。実践の概要は，次の通りである。

児童は，山小屋での宿泊体験をしている。課題は，その体験に基づいて設定された。また，実際の部屋の広さがイメージ出来るように，ワークスペースで部屋の広さを体験する活動をした。そして教師は，部屋の混み具合について，表 1 のような課題を提示した。

《　課題　》

修学旅行の部屋割りを決めたいと思います。
どの部屋が混んでいるでしょうか。

	部屋の広さ	人数
A 室	8 じょう	6 人
B 室	10 じょう	6 人
C 室	10 じょう	8 人

表 1

まず,「明らかに混んでいない部屋はどれか」を話し合った。子どもたちのだれもが B 室であると言い，理由として，「同じ人数なのに，A 室より広さが広い」「同じ広さなのに，C 室より人数が少ない」ことをあげた。

幸子という児童は，ワークスペースでの体験をもとに，次の表２のことを話した。幸子は畳の数と人の数の差で混み具合を較べたわけである。

1 畳に 1 人ずつ寝たとして，A 室と C 室は 2 畳余るけど，B 室だけは 4 畳余る。

A 室 ･･･ 8 - 6 = 2　　B 室 ･･･ 10 - 6 = 4　　C 室 ･･･ 10 - 8 = 2

B 室は余る畳が多いから混んでいない。

表 2

この考えに対して，賛否両論意見が分かれた。速男という児童は，混み具合を隙間の広さで較べられると考えているので，幸子の考えに賛成した。そして，話し合いの中で，速男は幸子の考えとかかわり，自分の考えに自信をもつようになった。

さらに，速男は幸子の考えを，次のように発展させた。つまり，部屋の面積図をかいたワークシートと人に見立てた玉磁石を具体的に操作して，次の図 12 のように考えたのである。

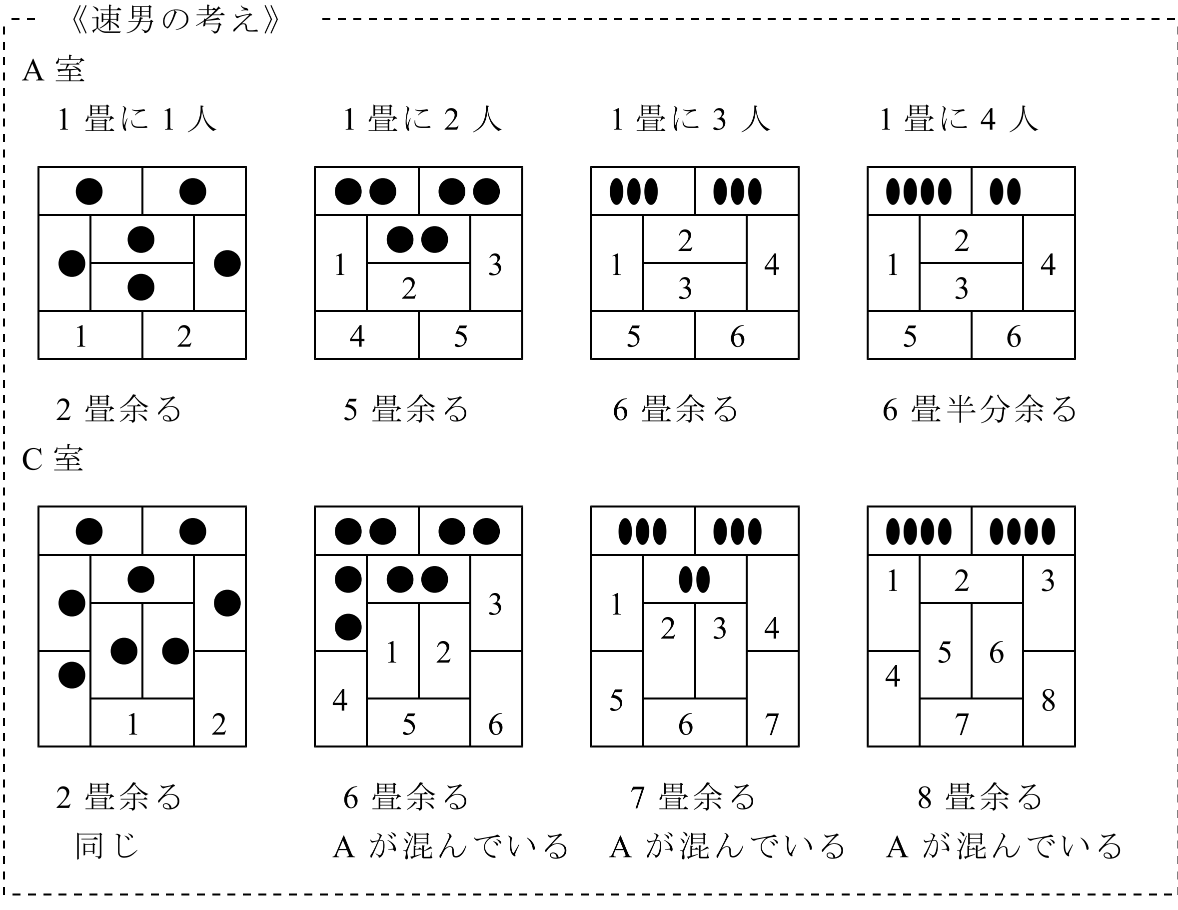


図 12「速男は結果の違いに悩んでいる」

ところが，「1 畳に 1 人」占めることにすると A 室も C 室も 2 畳余ることになり，混み具合は同じということになる。そして，「1 畳に 2 人」とすると A 室は 5 畳あまり，C 室は 6 畳余る。したがって，A 室が混んでいることになる。1 畳に 3 人，4 人のときも同様である。このような結果の違いに速男は悩むことになった。

他の子どもたちは，「2 畳ずつ余るから，混み具合は同じ」だと考えていることが多く，見た目で判断している子どももいた。単位量あたりの考えをしている子どもは一人だった。速男の考えは，1 畳に複数の人が寝るという新しい発想のものであり，また，見た目ではなく，数値で結果を導いている。

ここで，余った畳に着目して，亮子と由里が発言した。亮子の考えは，速男と同じように，まず 1 人に 1 畳ずつ配ることであった。しかしさらに，余った 2 畳に荷物を置くことを考えたのである。すると，図 13 のように，1 人が $\frac{1}{4}$ 畳に荷物を置くことにすると，A 室では $\frac{1}{2}$ 畳余ることになるのに対して，C 室ではいっぱいになって，余りは出なくなる。したがって，C 室の方が混んでいることになる。

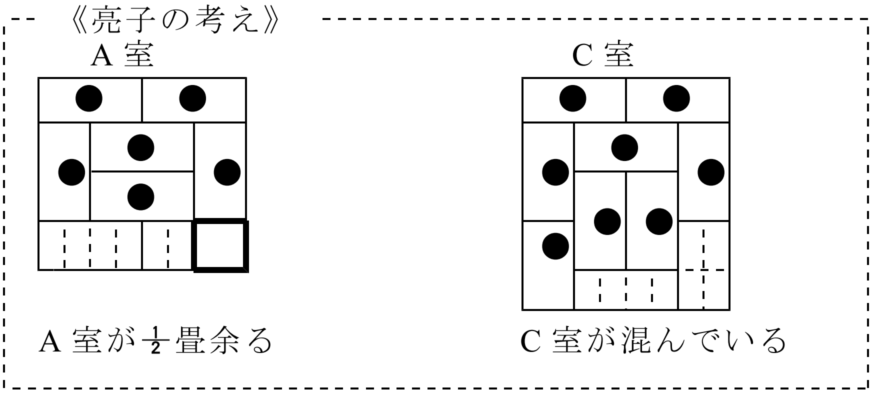


図 13「亮子の荷物を置く考え」

由里は，同じように，1 人に 1 畳ずつ配った。その後，余った 2 畳も人数で分けることを考えた。

A 室 ・・・ 2 ÷ 6 = 0.33・・・，　1 人当たり 1.33・・・畳
C 室 ・・・ 2 ÷ 8 = 0.25　，　1 人当たり 1.25 畳
　C 室が混んでいる。

さらに，洋治が「1 人に何畳使えるか考えればいいのだから」と発言してきた。

A 室　･･･　8 ÷ 6 = 1.33･･･，1 人当たり 1.33･･･　畳
C 室　･･･10 ÷ 8 = 1.25　，　1 人当たり 1.25 畳
　C 室が混んでいる。

　つまり，亮子の考えを発展させ，合理化したのが由里や洋治の考えであった。しかし，速男はこの授業後の学習感想として次のように書いている。

速男の学習後の感想

　今日の学習で，ぼくは，ますます分からなくなってきました。亮子さんや由里さんの考えを聞いて，なるほどと思いました。でも，どうしても，ぼくの考えがちがうとは思いませんでした。だからまだ納得できません。

　次の時間，教師は困っている速男の気持ちを教室全体に広め，速男の考えはまちがっているのか，もう一度考えてみることにした。裕一は，1 畳に 1 人，2 人と入れていった速男とは逆に，1 人に 1 畳，2 畳と与えていき，部屋に入れない人が何人いるかで混み具合を較べることを考えた。その結果，入れない人が多い部屋ほど混んでいるということになり，C 室が混んでいるという結果を出した。

《裕一の考え》

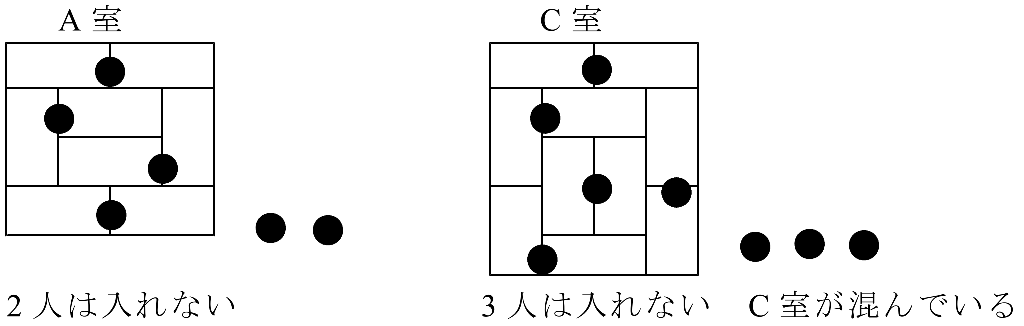


図 14「裕一の考え」

　ここで，速男は裕一の考えを聞いた後，混み具合を比べるときは，畳が余っても，人が余ってもだめで，全員が平等に部屋を使わなければならないことを理解した。自分の考えはまちがっているのだと，がっかりした速男に，次郎はすばらしいことを言ってきた。「1 畳に 2 人，3 人…と人を増やしていってもまちがいではない。余った畳を由里さんが考えたように人数で割れば，由里さんが求めたのと同じ，1 人あたり何畳もらえるかが出る。（中略）ぼくは，A 室も C 室も余った畳の数が同じだから，混み具合も同じで，それでよしと思ったけれど，速男君は，それだけで満足しないで，ずっと考えていたから偉いと

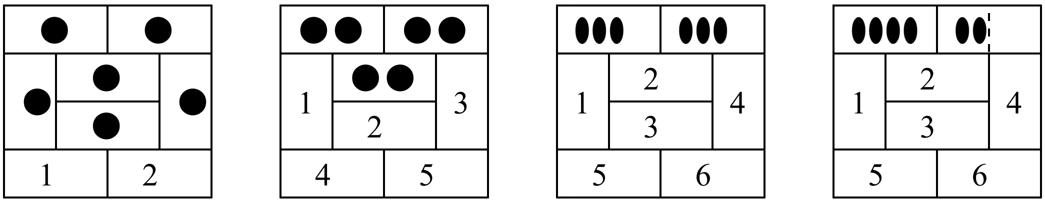
思う」。他の子どもたちも，次郎の意見にうなずき，それを聞いた速男は何ともいえずうれしい顔をした。苦労が報われ，速男は満足感でいっぱいだった。

次郎の考えをまとめると図 15 のようになる。速男の考えそのものは「誤り」である。しかし，亮子や由里の考えを生み出すきっかけになった。さらに，それらの考えにしたがって，余った畳を全員で分ければ，一人あたりの畳の数は同じなる。

《次郎の考え》

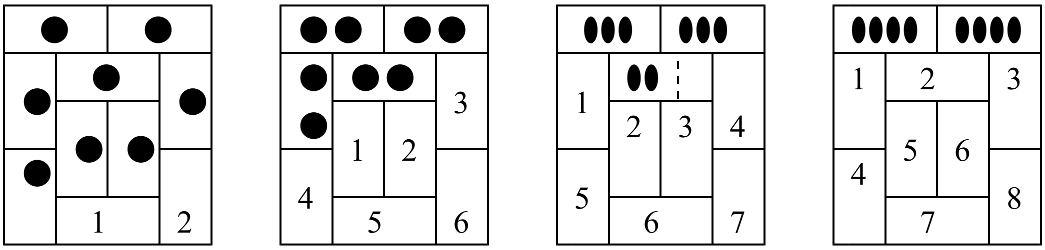
A 室

	1 畳に 1 人	1 畳に 2 人	1 畳に 3 人	1 畳に 4 人



	2 畳余る	5 畳余る	6 畳余る	6 畳半余る
はじめに与えられた畳の数	1 畳	0.5 畳	0.33 畳	0.25 畳
後から分けられる畳の数	2 ÷ 6=0.33	5 ÷ 6=0.83	6 ÷ 6=1	6.5 ÷ 6=1.08
1 人あたりの畳の数	1.33 畳	1.33 畳	1.33 畳	1.33 畳

B 室



	2 畳余る	6 畳余る	7 畳余る	8 畳余る
はじめに与えられた畳の数	1 畳	0.5 畳	0.33 畳	0.25 畳
後から分けられる畳の数	2 ÷ 8=0.25	6 ÷ 8=0.75	7.33 ÷ 8=1.92	8 ÷ 8=1
1 人あたりの畳の数	1.25 畳	1.25 畳	1.25 畳	1.25 畳

図 15「次郎の考え」

次郎の考えは，数学的知識である。また児童の感想は学習の規範を示唆している。これらは，教室文化となっている。教室文化の文化化に対する契機となっているのは，幸子や速男の考えである。教師は誤りに向き合ってアイデアを引き出し，発展させた。この教室における児童は，数学的アイデアを生み出し，教室における社会・数学的規範によって発言しているのである。

授業後における児童の感想は次の通りである。

- 自分の考えにこだわりをもって追究できて楽しかった。また，自信をもって納得できた。
- 友だちに納得してもらえるように説明するのは難しい。言葉だけでなく実物や資料を使って視覚に訴える説明をしていかなくてはいけない。

パーキンソン(2000)は，教育のダーウィン的理論について，次のようにまとめている。
《教育のダーウィン的理論は、…学校における既存の教育的制度の捉え直しを必要とするわけでもない。教育のダーウィン的理論は、成長を試行錯誤による誤りの排除という手続きとして解釈しながら、成長の隠喩に基づいて教育を捉え直すことを要求するのである。…教育をこのように構築することは、教育内容、生徒の役割、教師の役割、教育目的の捉え直しを必然的に伴うものである。しかし、私はこれらすべてについて捉え直しは、多くの学校における既存の制度の中で起こり始めていると確信する。》（p.273）
教育のダーウィン的理論は，数学教育における生命論的教室文化の基盤にある。そのような教室文化への文化化をデザインするための指針となっているのは，この授業例のように，児童の誤りをどう生かすかということである。それは，既存の制度において可能な学習指導である。

４.２.「模倣」としての学習

学習における「模倣」の意義を指摘したのは，ヴィゴツキー(1962)である。「子どもは、〈自分一人でもできる〉ことから〈自分一人ではできない〉ことへ、模倣を通して移行する」「教育は、模倣が可能なところでのみ可能である」（柴田義松，2006, pp. 26, 27）。

しかし，このような考え方は，数学教育において必ずしも一般的ではない。誤解を招きやすいことも事実である。例えば,「教師が子どもに正解を模倣させるような指導をすればよい」,「子どもの創造性を否定している」。これらは典型的な誤解である。Vygotsky は心理学者として，子どもの主体的な模倣に着目しているのである。しかも，Piaget と異なるのは，協同学習という子どもの社会的人間関係を考慮していることである（久原恵子，1965, pp. 58-61）。また，創造性を安易にとらえていないだけで，むしろ尊重している（ヴィゴツキー，1972）。

このような学習における模倣の意義を明確に示しているのは，Sfard(2006, pp. 5-9)である。それは，二人の少女 Roni と Eynat と Roni の母親の間での会話で

ある。これは，Roni の家で交わされたものである。中が見えない同じ箱が 2 つ用意されており，それらの中にはそれぞれ 8 個と 6 個のマーブルが入れてある。

《「マーブルセットを較べる」

話者	内容	行為
1. 母親	二つの箱を買ってきたよ。箱の中に何があるかな？	中身の見えない二つの同じ箱 A と B を少女の前のカーペットにおく。
2. Roni	わかった。マーブル。	
3a. 母親	その通り。箱にはマーブルが入ってる。	
3b.母親	どっちの箱に，たくさんのマーブルが入っているかな？	このとき，Eynat の近くにある箱 A を指し，次に B を指す。
3c. Eynat		自分に近い方の箱 A を指さす。
3d. Roni		箱 A を指す。
4. 母親	これ？どうして分かったの？	箱 A を指す。
5. Roni	こっちの方が大きいので，それが一番大きい。	「これよりも」と言いながら，自分に近い箱 B を指す。
6. 母親	Eynat どうして分かったの？	
7. Eynat	その理由は…。こっちの方が大きいし。	「こっちの方が」と言いながら，Roni 指し示す行為を繰り返す。
8. 母親	そう。これは，あれより大きい？どうして？	「あれより」と言いながら，Roni が箱 B を指す行為を繰り返す。
9. Roni	だって，これはこれよりも大きいもん。	「これより」と言いながら，Roni が箱 B を指す行為を繰り返す。
……	……	……
10a. 母親	開けて，中を見たい？中に何があるか開けてみましょう。さあ，見て。	
10b. Roni		突然に箱 A をつかむ。この箱 A は Eynat に近く，多くのマーブルが入っていると，先に言ったものである。
11. Roni	1…1…1…2, 3, 4, 5, 6, 7, 8.	箱 A を開けて，正確に数える。
12. Eynat	1, 2, 3, 4, 5, 6.	箱 B を開けて，正確に数える。

13. 母親	それで，どうなる？	
14. Roni	6.	
15. 母親	6 何？ 6 って何？ 何が「6」なのか， 教えて。	
16. Roni	これが大きい。	
17. 母親	これが多い。 Eynat，どう？	
18. Eynat	これは少ない。	
19. 母親	それが少ないのね。 マーブルが多いのはどっち？	
20. Roni	こっちだと思う。	今 Roni に近い箱 A を指す。（この中には，8 つのマーブルを見つけた。）
21. 母親	こっち？ Eynat どう思う。	
22. Eynat	やっぱり，こっち。	》（Sfard, 2008, pp. 5-8）

この事例から，数学学習において過去の体験や他者への模倣がもつ意義が，明確になる。二人の少女は既に，「数を数える」ことは知っている。しかし，自分から中が見えない箱を開けて，数えようはしない。母親の問いかけは，本来は無理なことなのである。

つまり，2 つの箱は中が見えないので，どちらのマーブルが多いかは分からないはずである。ところが，「どっちの箱に，たくさんのマーブルが入っているかな？」という母親の問いに対して，二人の少女 Roni と Eynat は，「自分に近い方の箱 A を指さす」という行為をしている。このような実験は，Piaget の研究にはないものであり，Vygotsky 理論に基づいている。

さらに，「どうして分かったの？」という問に対して，Eynat は「その理由は…」と理由まで述べて，「こっちの方が大きい」と述べている。また，Roni も同様に，「だって，これはこれよりも大きいもん」と答えている。従来，Piaget 理論では，このような対話は取るに足らない雑音として扱われてきた（Sfard, 2006, pp. 155, 156）。二人の少女は単なる「当て推量」であり，近年は，メタ認知が未熟であることによる誤りであると解釈されてきた。

しかし，子どもが知識を活用できるように指導するには，このような対話を学習過程として，価値づけていく必要がある。実際，子ども達は，「より多い」「理由は」「だから」といった言葉を文法的に正しく使っている。つまり，意味

論的には不十分なものの，構文論的には正しく活用しているのである。

これを，Vygotsky 理論では，大人や友達が使う言葉つまり「外言」を模倣する過程だと解釈する。まさに，模倣に始まり，自分自身の言葉「内言」へと内化している過程なのである。この学習から，子ども達は，どういう状況の中で，数を数えるのかというメタ知識を獲得する。

この事例のような場面は，算数・数学の授業においてしばしば見かける。第３節で述べた事例にある小学校 5 年の「小数のかけ算・わり算」の授業である。小数の乗法は，次のような問題で導入される。

1m のねだんが 80 円のリボンを，2．4m 買います。 代金は何円ですか。

80 × 2．4 の計算の仕方を考えることになる。

24m の代金… 80 × 24 = 1840

2．4m の代金… 80 × 2．4 = 184

つまり，「80 × 2．4 = 80 × 24 ÷ 10　」と計算する。

そして，小数の除法は，次のような問題である。

リボン 2．4m の代金が 72 円でした。 このリボン 1m のねだんは何円ですか。

72 ÷ 2．4 の計算を考えることになる。児童の中には，かけ算を模倣した類推から，「72 ÷ 2．4 = 72 ÷ 24 ÷ 10　」と計算するものがいる。

しかし，このような考えは，教科書にはもちろん載っていないし，採り上げる教師はほとんどいない。ただ，実際に計算すれば，0．3 となり，誤りであることは分かる。つまり，小数の除法では，乗法の模倣ができないことを児童が経験する必要がある。その類推に混乱している児童は少なくない。

そこで，このような誤りをどのように指導すれば，児童が乗り越えられるかである。そのためには，第３節で述べたように，2．4m というリボンの実物に戻って解決していくしかない。そして，「小数でわる」というのは「1 あたりの量」を求めるとことだという，小数の割り算の意味を理解することである。そこから，まず「0．1m の代金」を求めるか，あるいは「24m の代金」を求めるという考えが生まれる。

算数・数学学習における模倣の過程は，余り重視されてこなかった。しかし，この事例のような場面は多い。つまり，数学教育における教室文化の文化化は，模倣を通して行われる過程を十分考慮しなければならないのである。

しかし，ここで強調しておきたいのは，教師が例題を解いて，それを児童･生徒が模倣して解くような授業を想定しているのではないということである。Vygotosky 理論における「模倣」は，主体的な行為であり，いわば児童・生徒

の主体的な模倣である。教師が模倣を強要しているのではない。この点が重要である。

４.３.「参加」としての学習

学級が学習集団としてどう機能するかは，教室文化の文化化における鍵である。学習集団を実践共同体として，個々人の学習を参加としてとらえる理論がある。Lave & Wenger（1991）は，学習そのものを実践的共同体への参加としてとらえる。そして，正統的周辺参加（legitimate peripheral particepation）から十全参加（full participation）へと変化する中で，アイデンティティー（主体性，自己認識）が形成される過程が学習であるという，正統的周辺参加論（LPP）を提唱した。これは，状況的学習論と呼ばれることもある。

しかし，この状況的学習論は，学校教育にそのままでは適応しにくい。例えば，状況的認知として例示されるハッチンスの航海は，近代の航海術ではなく民族航海術とでもいうべきものである。レイブとウェンガーの事例は，アフリカのヴァイ族の仕立屋のように文化人類学的なものである。近代の学校教育よりも以前の社会や文化を対象にしている。

さらに，避けられない問題は，実践共同体を学校教育にどう位置づけるのかという問題である。状況的学習論で取り上げる共同体は仕事や職業の必要性から形成されたもので，伝統的で強固なものである。明確な実践的目的を持った集団である。ところが，学校における学級は，偶然的で，流動的なものであり，たいていは職業と直接結びついてはないし，必ずしも具体的な目的で組織されている訳ではない。

ところが，教室文化という観点からみると，状況的学習論は，学習の根源は何かを考える鍵を与えてくれる。われわれが主体的に学ぼうとするとき，どういう行為をするかである。同じ目的をもつ組織を選択し，そこに参加するであろう。この点で，状況的学習論は学習の社会的本質をとらえている。

それに比べて，学校での「学習」には，いかにも人為的で，不自然なところがある。レイブ & ウェンガー（1993）は，「学校」そのものを存続させるために「入学試験やテスト」によって，学習の動機づけをしていると批判している。これは，無視できない現実である。

しかし，学級という集団は必ずしも，特定の職業をめざすものではないので，学習の動機づけが重要になってくる。したがって，学習集団としての「学級づくり」がそれぞれの子どもの学習に大きな影響を与えるのである。そのため，状況的学習論を生命論的教室文化の文化化にどう生かすかは，重要である。

わが国で，状況的学習論を教育実践にまで追究したのは，静岡大学の岡本光司（1999）と岡本・静岡大学教育学部附属静岡中学校（1998）である。もちろん，

数学教育として実現するには，子どもや学級の実態や学習内容にも大きく依存するので，この研究は一つの実践事例である。

ここでは，そのような実践例として，授業のディスコースを紹介する。生徒は，単元の始まりで「問い」を設定し，論文を書く。その中では，教科書や図書はもとより，教師，友人とあらゆる「資源(resource)」を利用する。また，論文集をつくり，生徒どうしがこれを読む。その論文の内容に関連して授業が始まる。

この実践研究で想定されている教室の学習集団は,「数学の実践共同体」である。つまり，この教室文化における生徒は「小さな数学者」である。論文集を作成し，授業のなかで発表し，議論を深めていくというのは，まさに「数学をする」実践である。

－－－静岡大学教育学部附属静岡中学校授業記録からの抜粋－－－
対象学年：3 年生
日時：平成 11 年 12 月 2 日，1 限目
「円の接線は，接点を通る半径に垂直である」という教科書の命題についてのディスコースである。
《ディスコース 1》
生徒 A：中心を通る縦の線を 2 本引いて垂直になるように，横の線を引くのですけど，そのあと横の線から平行な線をだんだん描いていって，一番最後にこのところと 1 点で交わるところまでさげてくと，1 点で交わると思うのですけど，平行だから 90 度で錯角が等しいから直角になる。（図 16）

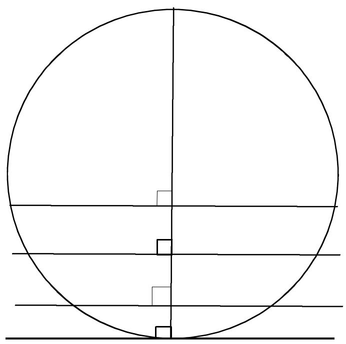


図 16

生徒 B：この説明だと接線がもしかしたら平行でない場合に 90 度にはならないんですよ。例えばいろいろなことが考えられるじゃないですか。だからまだ接線が平行って決まった訳ではないのだから，いろいろな場合が考えられる訳

です。
教師：確認しよう。接線の定義っていうのは，接線って何って聞かれたときにね。円と 1 点でしか交わらない直線を接線という。ということでいいですか。接線の定義だよ。でいま，本当にそうかって確認をしたいことは，円と 1 点でしか交わらない直線が本当にこの半径と，こう 1 点をとる。B さんの疑問は 1 点でしか交わらない直線だから，この 1 点を通る直線があるんだよね。例えばこういう直線があったよ。でこの直線が例えばこの中心とこの点とを結んだときに何でここが直角になるのっていう説明だよねえ。
生徒 C：定義は 1 点でしか交わらないっていうことであって，直角になるっていうのは定義されてないでしよ。なのに，何で直線と直角に下ろしていくと 1 点でしか交わらないっていいきれるのですか？
生徒 D：何で 1 点でしか交わらないかっていったら，２点で交わるとしたら三角形ができるじゃんねえ。そしたらそれは三角形の内角の和って 180 度だから 90 ＋ 90 で，ここが 180 度になっちやうから，もう 1 つは何度になっちゃうかということになるから, 二点でしか交わらないということになるんじゃないの。（図 17）

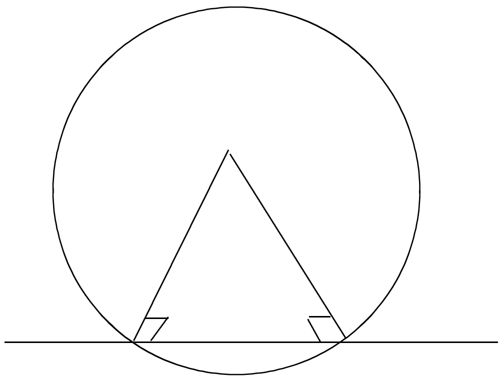


図 17

生徒 E：えっと，話が噛み合っていないと思うのですけど。B さんの言いたいのは，教科書に載っているのはあらかじめ接線は 90 度であることを仮定して述べてるからっていっているんですよ。だから B さんが，A 君がおかしいって言っているのは，A 君があらかじめ半径と直径とを，それに平行にとった。だから A 君は直径をとってそれが直角になるように作っているんだけど，B さんが言いたいのはここが 90 度っていうことを作っているから，ここで 90 度ってことになってきてると思うのですよ。たぶん，そこで 90 度って分かんなかったら，90 度って作らなくていいじやないですか。だけど 90 度っていうの

が分かってるから，ここに 90 度っていうのを持ってきて，これに平行に下ろしてきてここが 90 度だっていっているんですよ。B さんが，言いたいのは，もう初めにここが 90 度って，分かっちゃってから，ここが 90 度って作って，またそれを後で持ってきて，ここが 90 度だっていってるんですよ。最初言っているのを繰り返してるだけなんですよ。説明になってないんですよ。

《ディスコース分析１》

「円の接線は，接点を通る半径に垂直である」という命題について，教科書に記載されている説明は，図 16 の通り「ある直径に対して垂直な直径を引き，これに平行な直線を移動していくと，円の接線になり，接点を通る半径に垂直になっている。」というものである。生徒 A は，それに従って説明している。当然，教科書の記述は直観的な説明であって，その命題の証明にはなっていない。

生徒 B は，初めから直径に対して垂線を引くという仮定することを批判している。この意見を受けて，生徒 C は，改めて「垂直になる」ということは，定義には含まれていないから，証明しなければならないことだと述べている。

生徒 D は，直線が円と 2 点で交わるときは，交点を通る半径と垂直にはならないことを示している。この生徒 D の説明は「円の接線でない直線は，半径と垂直にはならない」ということであり，証明すべき命題の「裏」になっている。そこで，生徒 E は，話がかみ合っていないことを指摘し，生徒 B の意見に戻した。そして，「垂直である」という結論を導くために，垂直であることを仮定した直線を引くのでは証明になっていないと述べている。この発言が議論の中心になっていく。

しかし，生徒 D の「円の接線でない直線は，半径と垂直にはならない」という「裏命題」は，以後の議論で無駄にはならなかった。この逆が「円周上の点を通る半径に垂直でない直線は，接線にはならない」という「対偶命題」になるので，後の議論において，生徒による「背理法」の発想につながっていく。

《ディスコース２》

教師：そう，だから接線の説明だよね。でこの説明はさっき C さんので言うと，何で直角か。B さんが言ったようにね。本当にこれで直角でなかったときには，できないかもしれない。直角で下ろしていくからこういうことができるんでしょって。何で直角なのって，さっき E さんも言ってくれたよね。だから，これは円の接線と直角に交わることの説明になってないから納得できないよ。いまこれとこれが話題になっていますが，これに関してでもいいし，また別に関してでもいいので，接線が 90 度に交わるんだよっていう説明。ちょっ

とだけ考えてみて。じやあちょっとね。D さんとは別にね，90 度になるという説明を。

生徒 F：（下の図 18 を使って）えーと，この円 O に対してこの直線との交点を A とします。それ以外にどこでもいいんですけど，この直線に対してこういう点 B をとったときに，この直線，もうすでに接線ではないですよね。円の中に入っちやってますよね。つまり OB つていうのは接点より短いってことはありませんよね。

（下の図 19 を指して）その次に，この角が 90 度でないとしますよね。例えば，この OA と直線が 90 度でないとしますよね。そしたらこの直線に，こういうふうにちょっと変だけど垂線が引けますよね。そしたらこの OAB つていうのは直角三角形になりますよね。でここが 90 度だからここが斜辺，ここが斜辺以外の一辺になりますよね。で斜辺はこの 1 辺よりは長いですよね。てことは，OB より OA のほうが長くなりますよね。だけどさっきの説明で OA は OB より長くならないと説明したので，こういうふうに垂線を下ろし，直角三角形を書くことはできません。だからつまり，90 度でなかったら，どの場合でも垂線は引けますよね。だから，ここは 90 度以外の場合はありません。

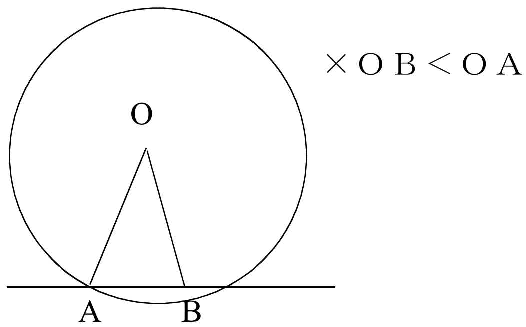


図 18

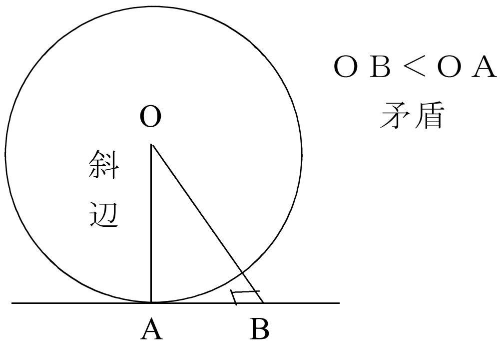


図 19

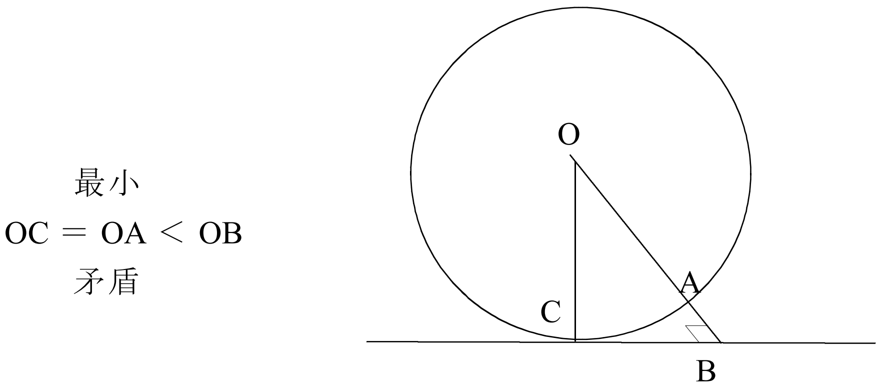


図 20

生徒 G：（図 20 を示して）だから OCB が 90 度より小さい場合を考えてみる。するとそれには中心 O から垂直な線が引けるじゃん。垂直な線つていうのはその OB が最短距離にある訳だけど, OA のほうが短いじゃん。ということは OC とイコールだから短くなっちゃうから。そうすると角 OCB が 90 度になる。

教師：じゃあちょっと G 君の方に飛びましたが，F さんの説明，F さんはこのこと説明してくれたんだよね。１点で交わることが直角になるよっていう説明に対して矛盾はある？これはいい？これは納得？じゃあ G 君の説明とか F さんの説明とかまだ納得できないよっていうとこある？

はいそれじゃあね。今日は接線について話があっちいったりこっちいったりしましたが，まあこのへんが A さんのちょっとよく分からないよ，また B 君のも最初から直角にしているから，ならないんじゃないかってね。もし説明としてここが不十分だというところがあったら，また来週言ってください。で次の時間はとりあえず F さんの説明で接線っていうのは直角になるよっていうのが，ある程度脱出できたようなので，もう１回 H 君の論文に戻ります。じゃあ終わりましょう。ありがとうございました。

－－－－－－－－－－－－－－－－－－－－－－－－－－－－－－－－－－－

《ディスコース分析２》

「円の接線は，接点を通る半径に垂直である」ことを証明しようとする生徒のディスコースである。まず，生徒 F は接点を A とする接線を考える。そして，「中心 O から接点 A までの長さ OA は，中心 O から接線上の他の点 B までの長さ OB よりも短い」ことを示す。つまり，OB ＞ OA である。なぜなら，仮に OB ＜ OA とすれば，点 B が図 18 のように円の内部にあることになり，AB は接線ではなくなるからと説明する。そして，∠ A が 90 度でないとすると，この接線には垂線が引けることになる。その垂線の足を点 B とする。∠ OBA は直角になり，辺 OA は斜辺になる。すると，OB ＜ OA となり，先の命題と矛盾するというのである。

生徒 G は，生徒 F の意見を簡潔に説明している。そして，「半径と接線が垂直でないと仮定すると，中心から接線上に半径よりも短い線分が引けることになり，矛盾となる」ことを，彼らは示している。つまり背理法によって証明しているのである。これは，背理法が命題を証明しようとする議論から，社会的相互作用によって創発していることを示す重要なディスコースとなっている。生徒は，背理法を単なる間接証明法として利用しているのではない。

中学校数学の段階において，参加理論に適合する教室文化から，背理法を創発していることは，大きな成果である。ただ，生徒は事前に論文を作成し，それに従って，発表している。教師は，事前に生徒の意見を把握している。そし

て，問題を焦点化し，議論がかみ合うように調整している。また，教師は，生徒の理解を確認しながら，文脈のある議論の流れをつくっている。生徒は，教室のコミュニティーに参加するための社会・数学的規範を身に付けている。

しかし,「小さな数学者集団」として，学級を数学の実践共同体として設定するのは，一つの理想である。どの学級でも可能なことではない。学級をどのような実践共同体として設定するかは，さまざまなものがあり，今後の研究が必要である。市民としての生活実践や問題解決，数学の活用や応用などである。子どもの「問い」を軸とするような柔軟な設定もある（岡本・両角，2008)。

重要なことは，児童・生徒が授業に出席するだけではなく，授業に参加するということである（吉本，1983)。児童・生徒が授業に参加することが，生命論的教室文化へと文化化することになる。また，学習をアイデンティティーの形成過程としてとらえていることが重要である。授業目標や評価規準の中に，児童・生徒が，学級における自己認識を確立していくということが含まれていなければならない。

４.４.「儀式」としての教室文化

儀式とは，形式化された文化的行為と，それに伴う形式化された言葉の使用からなっている（池上・山中・唐須，1983, p. 186)。数学教育においても,「儀式」としての文化がある。Sfard (2008) は数学的な手続き（ルーチン）を，実行(deed)，探究(exploration)，儀式(ritual)に分けている。この中で儀式的な手続きとは,「目的が他者や社会的承認と整合し，実行や探究のように自立的なものではない(p. 301)」としている。数学学習では，ある形式に則って儀式的に議論したり，記述することはよくあることである。

したがって，数学教育の教室文化における儀式は多い。「２.３節 式の指導」で述べたように，算数において文章題の直後に立式を指導する様式は，一つの儀式である。この他に，数学的規範がそうである。記数法，命数法，表記，定義，論証などである。これらは，自分で定めたものではない。

このことから，数学教育における教室文化そのものが儀式としての役割をもっていることが分かる。そして，機械論的教室文化と生命論的教室文化のどちらも，儀式としての側面をもっている。ここで，両者を分けているのは，儀式の目的である。つまり，儀式が数学教育においてどういう目的をもっているかが，教室文化の性格を分けているのである。

例１　式の指導

「２.３節 式の指導」は，まさに儀式である。次の授業は，文章題の直後に立式を指導するのではなく，操作活動によって答えを求め，その後に式での解き方を考えるものである。

そのような実践例をここで紹介する。愛知県内の公立小学校 3 年を対象として，2008 年 6 月に実践された。この実践研究で，注目されるのは，わり算の答えをブロックを使って求める活動から，かけ算の逆演算として答えを求める活動へと自然に，連続的につながるように指導していることである。後者の内容を，児童から引き出すのは難しい。そのためのに実践された，この教師の指導の工夫は,教室文化としての儀式を考察するために適切な事例となっている。

《ディスコース》
教師：昨日から，どんな勉強をしているか，覚えていますか。
児童全体：「分ける」勉強。
教師：分ける勉強，その通り。
（板書「分ける」，いちごの絵を 18 個黒板に貼り付ける。）
いくつあるかな。
（板書「いちご　18 こ」「みんなで分けてね」）
児童全体：18 個。
児童 A：昨日と同じ。
教師：「昨日と同じ」ってどういうこと？
児童 A：みんなじゃなくて，3 人でわける。同じ数ずつ分ける。
教師：3 人で同じ数ずつ分ける。（板書「同じ数ずつ分ける」）
今日は，先生が分けるんじゃなくて，机の上で，皆に分けてもらおうかな。お皿のページと，ブロックを出して。
昨日は，同じ数ずつ分けて終わっちゃったよね。今日は，1 人分は何個か知りたいです。（板書「1 人分は何こ？」）
ブロックでやった後，やり方を言葉でもいいし，式でもいいし，絵でもいいし，何でもいいので，ノートにどうやってやったか，考え方ややり方を書いて下さい。まず，分けてみようか。はいどうぞ。
（児童全員が操作活動をして，ノートにやり方を書く。12 分）
教師：はい，教えて下さい。B さん。
児童 B：はい。まず，いちごを一つずつやって，そしたら，分けれる。
教師：だれか，ここで B さんのをやってくれる人？ C さんどうぞ。同じ考え方だった？一つずつて，どういうことかな？
（児童 C は，黒板にいちごの絵を一つずつ分けて貼り付ける。）
他の児童たち：面倒くさい。まだある。疲れない方法ある。
教師：一つずつ何？続きが聞きたい。一つずつ？
児童：配る。

教師：1 つずつ配ると，何だか疲れるだって。
（板書「1 つずつ配る　大へん　つかれる」）
もっといい方法を知っている人？ D さん。
児童 D：2 こずつ。
教師：2 こずつ，どうしたの？
児童 D：2 こずつ配る。
教師：（板書「2 こずつ配る」）
2 こずつ配る，分かる人。机の上で，やってみるよ。
（1 分間，児童の操作活動）
はい，解けた？こうやって 2 こずつ配っていけばいいね。
（黒板で実演し，配る行為を続ける。）
児童全体：もうない。
教師：どうして，2 こずつ配って。なくなるまで，配ろうね。
（板書「なくなるまで」）
もっといい方法を知っている人？はい，E さん。
児童 E：皿に 3 こずつ配ります。式は，3+3 = 6 答え 6 こなんだと思います。
どうですか？
他の児童：なるほどね。
教師：（板書「3 こずつ配る　3+3 = 6 」）
もうちょっと，だれかこれ説明してくれる？
じゃあ，みんな 3 こずつ配ってみよう。そうしたら，分かるかな。
はいどうぞ。3+3 て，どういうこと？ A さん。
児童 A：3 こを，はじめに 3 こあって，2 回やるから，3+3 だと思います。
どうですか。
児童全体：なるほどね。
教師：3 こを 2 回配るから，3+3 だと思いますだって？かけ算でできる？
F さん，何か気付いた？どういうこと？
児童 F：まず，3 × 2 かけ算にして，6 だから，1 人に 6 こだと思います。
教師：（板書「3 × 2 = 6 」）
他の児童：3 と 2，どこからきたの？
児童 F：3 こを 2 回配るから，3 × 2 だと思います。どうですか？
児童全体：賛成。
児童 E：G 君は，2 こずつの式でやってたよ。
教師：2 こずつの式でできちゃうの。戻っていい？じゃあ，2 こずつ教えて。
どんな式になったの，G 君。

児童 G:2+2+2 は 6。どうですか？
児童全体：なるほどね。
教師：この 2 って何？ E さん。
児童 E：2 が 2 こずつ，3 回ある。6 は，2 が 3 回。3 人で，2 こずつ配るから，
2 が 3 回ある。
教師：だって，いちごって，いくるあるんだった。
児童全体：18。
児童 H：6，3，18。
教師：6，3，18 ？，H さん，何をいい始めたの？どっから出てきた？
児童 H:1 人 6 こずつだから，6 が 3 つ。
教師：（板書「6 × 3 = 18　1 人が 6 こずつ　6 が 3 つ」）
分かるみんな？ A さん。
児童 A：6 こずつを，3 人に分けるから，6 × 3。
教師：もう少し，分からないので，説明してあげて。分かった子，教えて。
答えは分かったんだね。1 人分何こになったの。
児童全体：6 こ。1 人分は，6 こになったの。
教師：（板書「1 人分は何こ」の下に「6 こ」と書く。）
どうして見つけたの。はい，近くの子と相談してごらん。どうして，見つけたんだっけ？式でみつけた？じゃあ，その式を教えて。
はい，相談して，いいアイデアがいっぱい出てきたようなので，もうちょっと説明して，（「6 × 3 =　18」の考えを指して）これなんかさあ，
一生懸命分けなくていいし，いっぱいたし算しなくていいし，何かいい考えっぽいよね。もう少し，知りたいんだけど，分かった人教えて。
今相談したことでいいよ。間違ってもいいんだよ。ちょっとずつ，みんなで説明したら，分かってくるよ。はい，I さんがんばれ。
児童 I：1 人 6 こずつだから，3 人で分けたと思います。どうですか。
教師：まず，みんな，何をしたかったか思い出そう。「いちご 18 こを，3 人で，同じ数ずつ分けると，1 人分は何こ」が知りたかったんだよね。それで，6 こになったんだよね。それ，どうやってやったんだ。そこが知りたい。
式とかさあ。配ったのはいいけど，はじめにいくつあったの。18 こ。
（黒板の何こずつ分けるかという考えを指しながら，）それどこにも書いてないんだけど。どういうこと？
はい，ブロックしまって。ブロックなしで，どうやって計算しようか。
児童全体：わり算。
教師：難しいことを言うねえ。

児童全体：先生知ってくせに。
教師：配るのは，もうお終い。（黒板に貼ってあるいちごの絵を取り去る。）
配らずに，どうやって式でやったか教えて。はい，J さんどうぞ。
児童 J：18 ÷ 3 をやりました。
児童全体：まだ習ってないよ。
教師：18 ÷ 3 と，訳の分からんことが出てきたぞ。
児童全体：訳がわからん。「÷ 3」って何。
教師：どういうこと？
児童 J：18 こを 3 人で何こ分けるかを。
教師：助けてくれる人？困ってるよ。
児童 K：18 こを 3 人に分けるから，割るというのは，かけ算をやって答えが出せる算数の問題で，18 割る 3 は，答えがちゃんとあるから，算数の仲間だから。
教師：どいういう仲間なんだろう。
児童全体：計算の仲間。
児童 K：計算したら，答えがあって，答えは 6 になるから，分ける数は 6 になる。
教師：何か，算数らしくなってきたぞ。いま K ちゃんがいったのを，もっと説明して。何か，H さんのかけ算に近づいてきたかも。どうぞ，L さん。
児童 L：3 の段の 3 かける 6 は 18 だから，3 人に 6 こずつ，なくなるまで分ける。
児童全体：あの 3 と 6 はかけ算にできるんだ。3 × 6 は 18。
児童全体：なるほどね。
教師：この 3 × 6 = 18 は，3 人に 6 こずつだから。M ちゃん，何かおはなしできる？じゃあ，M ちゃんのお話聞いて終わろ。
児童 M：私は，分ける数は 3 人だから，3 の段で探して，答えが 18 になるのは 6 だから，3 × 6 は 18，答え 18 こで，3 人にあげたいちごは 6 こだと思います。
児童：なるほどね。
教師：M ちゃんが言ってくれたの，もう一度，N ちゃん言ってくれる。
児童 N：いちごが 18 こで，人数が 3 人で，3 の段の九九を探して，答えが 18 になる九九を探して，そしたら，3 × 6 は 18。答え 18 で，3 人にあげたいちごは 6 こです。
児童全体：なるほどね。
教師：みんなの顔がにっこり笑顔で，よく分かった？よく分かった人？分かっ

　　　ちゃった。
児童全体：18 は書いてないんじゃないの？わり算。
教師：（板書「18 = 3 × 6」）わり算の書き方は，明日勉強しようかね。
　　　でも，わり算の書き方が分かって，計算がすぐにできそうだね。
　　　それと，知りたいのは，どこだったっけ。M ちゃんが言ってくれた，
　　　分からないのは，ここだよねえ。（板書の「3 × 6 の 6 の上にチョーク
　　　を塗る」）みんな，そういえば，こんなのやらんかったっけ。
　　　（板書「3 ×□ = 18」）
児童全体：穴あきかけ算？やった，やった。
教師：そうそう。
児童全体：それ，わり算に近い。
教師：同じ数ずつ分ける計算で，わり算っていうのは，これができれば，でき
　　　ちゃうんだ。じゃあ，明日頑張ろうね。よし，終わろう。
－－－－－－－－－－－－－－－－－－－－－－－－－－－－－－－－－－－

《ディスコース分析》

この授業は，２.２.節で述べた数学的活動の段階論に基づいてデザインされた。まず，「18 このいちごを，3 人で同じ数ずつで分けると，1 人分は何こになりますか。」という問題を設定する活動から始まる。次に，ブロックを使った操作的な活動によって答えを求める。これは，モデル化の活動である。ここまでは，自然な流れで授業は進んでいく。

問題は，次の一般化の活動である。ブロックなどの具体物を操作して問題を解決する，モデル化の活動では，解決できる問題の範囲は限定される。いちごの数や人数が変化して，一般的な問題になると対処できない。そこで，解決の方法を一般化する必要がある。つまり，すでに学んでいる乗法の逆演算として，わり算の答えを求めることである。つまり，新たな言語ゲームの段階である。

この段階は，児童たちで自然に移行することは困難である。大抵の教師は教科書に従って，この段階を孤立させて指導する。つまり，前時までの操作活動とかけ算を利用することが関連していないのである。児童たち自身が主体的にこれらの関係を構成することにより，一般化の活動に参加する実践は少ない。

本実践における教師は，児童と安易に妥協することなく，一般化の活動を指導している。その鍵となったのは，「はい，ブロックしまって。ブロックなしで，どうやって計算しようか」という発問であった。このとき，児童の態度は一変した。答えは，ブロック操作で既に分かっている。しかし，問題は計算によって答えを求めることだということが理解できたのである。

「いちごが 18 こで，人数が 3 人，3 の段の九九を探して，答えが 18 になる九九を探して，そしたら，3 × 6 は 18。3 人にあげたいちごは 6 こ」という児童の発言があった。これは，乗法九九を使って答えを求める方法を考えたのである。さらに教師は，児童たちに簡潔な「穴あきかけ算」を想起させている。この考えは，教師と児童たちのの相互作用によって，創発されたものである。この発言によって，児童たちが「分かった」という表情を示した。

ここで重要なことは，教師の「ブロックしまって」という指示は，決して日常的なものではなく，かなり特異なものだということである。教師にとっては，具体物の操作から，式という記号の操作へと，児童の活動を高めるための指示であった。教師にとっては，「乗法九九を使って，わり算の答えを求める」という明確な目標があったものの，児童にとっては，意外な指示であっただろう。

しかしながら，その指示は，生命論的教室文化へと文化化するための鍵となっている。そして，それはまるで「儀式」のように，新たな段階の活動が創発している。このような儀式は，生命論的教室文化においてきわめて重要な役割をもっている。というのも，算数的活動の全体的な繋がりや，児童の主体的学習を進める学習指導になっているからである。

例２　わり算の筆算

2005年 6 月公立小学校で，第 4 学年のわり算の筆算の授業を参観した。中堅の教師による校内研究授業であった。教師も児童も能力は高く，わが国の典型的な「わり算の筆算」指導になっていた。そのディスコースを以下に示す。

－－－－－－－－－－－－－－－－－－－－－－－－－－－－－－－－－－－－－－

《ディスコース》

問題「100 円玉が2個，10 円玉が5個，1円玉が2個あります。

合わせて 252 円です。

これを6人で分けると，一人分は何円になるでしょう。」

T：252円を6人で分けます。さあ，どんな式になりますか。

（机間指導　3分間）

S1：252÷6　（他の児童から「賛成」の声）

T：皆さんこれ，暗算でできます。

S2：というか，100円玉2枚を6枚で分けることができる。というか，それだったら，10円とか100円とかを全部，1円に両替すればいいじゃないの。

S3：分けるの，いつまでかかるかわからん。

T：S2君は，これを筆算でやるのは，絶対無理といっているんだけど。

S2：無理とはいってないんだけど。

T：でも，ちょっと難しいと言いたいの。あ，そうか。どうですか，皆さん，ここに（黒板）にもう筆算と書いてありますけど，今日はこの筆算でやってみませんか。

S（数人）：やる。

T：じゃあ，やってみましょう。じゃ，まず筆算の式に書いてみましょうか。

T：では，今日はこれをどうやって筆算でやるかを考えたいと思います。まず，思い出してください。筆算の法則って，大きい数から分けていくんだっけ，小さい数から分けていくんだっけ。

S（数人）：大きい数から。

T：大きい数から，そうだよね。じゃ，これ（252の百位の2）6人で分けようよ。どうする。

S：分けれない。

T：分けれない。どうしたらいい。

S4：100円を10円玉にする。

T：10円玉にすると，S4君言ってますが，皆さんどうですか。賛成。反対の人いますか。

T：じゃあ，両替してみしょうか。（黒板の絵で，100円玉を10円玉10個の紙に張替える。）どうですか，これで両替されましたか。でも，ここは百円のお部屋です。両替されました。そうすると，20でいいでしょうか。ここ，いてもいい。

S（数人）：いてもいい。

T：じゃあ，20を6人で分ければいいの。

S2：10の部屋の50と足す。

T：そうだね。これ（10円玉20個）は，10の仲間になったから，ここここを合体します。こういうふうに覚えておいて下さい。そうすると，この筆算の一番初めは，200円，100円が2個では分けられませんでした。ということで，10円が何個を6人で分ける。

S5：25個です。

T：25個を6人で分けるのだから，何わる何になるかわかる。これが大ヒントなんです。これがわかると，多分この筆算もできると思います。

S6：25÷6，簡単。

T：皆さん，答えは自分で出したいよね。筆算できる。ということで，自分で考えてやってもらいましょう。筆算の法則，これだけは忘れないでね。立てる，かける，ひく，おろす。（「終わった」という児童もいる。）（以上，10分経過）

各自がプリントに筆算をする。（5分）

その後，数人の児童が筆算の仕方を説明し，確認した。また，つまずきをとりあげ，他の児童に助言を求め，修正した。そして，自分のプリントを手直しする時間をとった。（10分）答え合わせをして，筆算の仕方（立てる，かける，おろす，ひく，おろす）を確認した。（2分）3つのコースに分かれ，それぞれの問題プリントで練習する。グループに分かれて学習。（18分）

－－

ほぼ教科書に即した授業展開であり，多くの内容をまとめ，児童が飽きないように指導が工夫されている。児童がわり算の筆算ができることを主な目標にした教師の指導は効率的だった。それだけに，初めの10分間が問題となる。これは，「252円を6人で分ける」という操作と筆算の過程を対応させて，筆算の仕方を考えるという指導である。つまり，筆算の意味づけをしているのである。

この10分間は，儀式としての教室文化である。この儀式がどのような意義を持つのかだろうか。つまり，機械論的教室文化と生命論的教室文化にどう関係しているかを考察する。

まず，教科書にある，わり算の筆算指導では，お金や紙，鉛筆などの束を分ける操作を，筆算の過程に「対応」させて説明するものとなっている。このように物的操作と視覚的モデルを利用するというアプローチの背後には「写像理論」がある。Gravemeijer (2002) は，写像理論などのモデリング理論をいくつかあげて検討している。

① 写像理論

写像理論は，計算の意味と手続きの指導について，これらの関係や対応を重視する理論である。これは，情報処心理学に基づいている。物的な操作の過程と計算の過程を写像のように対応させて，両者の効果的学習を促すのである。《数学的な関係は操作する教具に埋め込まれている。数学的な意味と筆算の関係は，教具の操作と記号の操作に置き換えられる。結果的に，研究者が与えた規則に従って，ブロックを動かさなければならなくなる。…

実験プログラムの結果は残念なものであった。子どもは混乱し，指導の直後のテストでも，9 人の子どもの中で 2 人しか正しく「上の桁から借りてくる」ことができなかった。》(Gravemeijer, 2002, p.10)

写像理論は，授業デザインへの情報処理アプローチの中で，数学的概念の具体的モデルを使う方法の手本といえる（佐伯，1982, p.54）。その鍵となるアイデアは，数学の概念は触って見られるモデルに埋め込むことができ，それらのモデルを操作することは数学の概念理解につながるということである。この意

味で，写像理論は真理の対応理論によく適合している(Gravemeijer, 2002, p.10)。
② Gal’ perin 理論

Gal’ perin は，条件反射で有名な Ivan P. Pavlov の門弟で，Vygotsky の見解を発展させた内言の研究で有名である。

《操作は，精神活動の段階的形成に関する Gal’ perin 理論の基礎である。その目的は適正な精神活動の構成である。… Gal’ perin は記号表現を使った物的活動を重視する。重要なのは新たな活動のための計画である。彼は，これを活動の方向付けと呼んでいる。…精神活動の形成は，次のような段階の活動の系列からなっている。

(1) 第一段階は，活動の方向付けである。これは活動全体を正確に実行するための新しい活動計画である。
(2) 第二の段階は，「物的あるい具体的活動」の実行である。
(3) 第三の段階は，対象に関わることなく「聴覚言語」に基づいた活動である。
(4) 第四の段階は，「自身への外言」を含む活動である。これが最初の精神活動の形である。
(5) 第五の段階は，精神活動の最高の形であり，この活動は，「内言」を使う。

Gal’ perin 理論には，適正な精神活動の形成を組織的にコントロールすることに焦点を当てていることに，限界がある。… Gal’ perin 理論は，授業デザインにすれば，写像理論とよく似たものになる。》(Gravemeijer, 2002, pp.10,11)

③ 構成主義

Gravemeijer (2002) は，まず写像指導を批判し，構成主義者の立場からの筆算指導の在り方を，次のように述べている。

《Cobb et al.によれば，Dienes ブロックなどの教具は‘transparent’（現われ）であり，生徒はそこに十進法を見とらなければならない。これをもとに，生徒は筆算アルゴリズムの各ステップに意味を与える。しかし，問題は，生徒がその数学的関係が分かっていなければならないばかりか，この関係は，生徒が現時点で理解し，発展させたものでなければならない。…しかし，この関係を構成していない生徒にとっては，Dienes ブロックはただの木片である。教師が，ブロックとアルゴリズムの対応を詳しく説明するしかない。しかし，その結果，指導は理解のためではなく，機械的アルゴリズムのためのものとなる。…

表現論の難点は二元論的メタファーから生じている。つまり，生徒の頭の中の数学（内的表現）と，客観的な知識としての数学（専門家のための外的表現である）とに分けられていることである。

つまり，次の図21のように表現論をまとめられる。

表現論の基礎には真理の対応理論がある。それは，独立に存在する客観的知

識の発展を前提としている。したがって，授業は現実の世界を写す客観的知識の存在を前提としている。さらに，その客観的知識は外的表現によって生徒に伝達できる。また，外的表現から生徒は正確な内的表現を構成する。

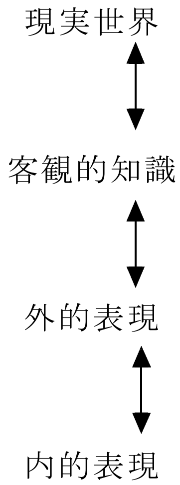


図21　表現論

構成主義の立場では，それらの仮定にこそ，問題があると考える。…

構成主義者は，共有した数式や意味による活動によって，数学の真理性を説明する。生徒は，教室という社会的実践の中で数学的な知り方を構成すると，とらえる。教師の役割の中心は，制度的な数学実践と教室の実践とを関係づけることであり，制度的な数学文化へと生徒を文化化することである。生徒は，それによって，数学を知り，数学をするとはどういうことかを確信するために，教室の社会的規範を確立する。…

構成主義者の核心は，具体化という考えの中にある真理の対応理論を拒否することである。》(Gravemeijer, 2002, p.11-14)

④ 社会・文化理論

Cobb(1995, 2000)や Cobb et al. (1997)などの構成主義者は，Vygotsky 理論など社会・文化理論に強い関心をもっており，これらの相補性を図ろうとしている。Gravemeijer (2002) も同様である。

《社会・文化理論では，記号が重要な役割を担い，文化的道具と呼ばれる。…文化遺産のさまざまな部分が再構成される過程として，教育をとらえるのが特徴である。文化遺産とは，生徒が社会・文化的活動に参加することで成し遂げられる知識の主要な部分である。この過程のなかでは，記号が鍵となる。

重要な点は，大人の指導のもとで，生徒が社会・文化的実践に参加すること

によって，記号やモデルのような文化的道具に適応していくことである。…Vygotsky はこの過程を模倣と呼んだが，これは生徒が教師のすることをただ真似ることを指しているのではない。記号の使用は，社会・文化的活動に意味をもって参加することであり，互いの解釈を交換し，相互に再構成することによって成し遂げられる。…

社会・文化理論では生徒の学習を，文化的道具に自身の活動によって適応し，内化することだと説明する。… Bakhtin の自然言語の研究によって，適応という用語を使うと，次のように説明できる。Bakhtin は，適応を，他者の口や他者の文脈に存在する言葉を獲得して，自分のものにすべき他者の意図を満たすことだと定義している。「言語は，中立の媒体ではなく，他者の意図とともに住むことである。」…他者の記号使用に適応することは，自分の意図で記号に住みつき，自分の目的に利用することである。

…生徒は人類が創造した文化遺産に適応しなければならない。文化遺産は与えらており，教師の仕事は，生徒がそれを把握することを援助することである。この過程で，生徒は最初いわゆる擬数学概念を発達させる。これは，大人との関わりによって，徐々に十分に発達した数学の概念になる。

この点は，多くの構成主義者が支持するアプローとは対照的である。それは，生徒や教室のコミュニティーが数学の真理を発展させる責任をもっているということである。この考え方は，数学の真理が数学的ディスコースによって生まれるということである。そのディスコースの中で，生徒は数学的アイデアを批判し，説明し，正当化する。教師は，間接的に学習過程を指導する。つまり，課題を選び，話し合いの話題をしぼり，生徒が社会数学的規範を発展させるよう援助し，数学の規則を教える。

しかしながら，記号の使用によって活動が基本的に変化するという社会・文化的概念は別な形にも解釈できる。…

弁証法において，指導系列を考えることができる。それは，生徒が非形式的知識やストラテジーを反映する非形式的記号を使うことから始め，より形式的（慣習的）記号やより形式的な数学的知識で終わるものとなる。…

数学教育コミュニティーの合意として，構成主義と社会文化理論では，記号の静的な表現論の考え方に違いがあることが強調されている。》(pp.14-16)

写像指導の背景にある，真理の対応理論や表現論には限界があると，構成主義は批判する。それに代わって真理の文脈理論や記号の体系を強調する構成主義や社会・文化理論には，生命論的教室文化へと連なる観点がある。

《ディスコースの分析と考察》

わり算の筆算，つまり長除法の計算手続きは整数の計算の中で到達点の一つである。加法や乗法などの筆算が1桁の方から始めるのに対して，大きい桁から始める。その手続きは，わが国では，

①たてる　②かける　③ひく　④おろす

といわれるように，4つの段階からなっている。しかし，商の見当をつけ，仮商の修正を要する場合などは，さらに多くの段階になる。わが国の指導では，ほとんどの時間がこの手続きの習得と練習に費やされる。

ところが，この筆算の計算過程は実際的な操作的活動とよく対応している。「わが国の実践」でも，「252円を6人で分けます。」という問題で，百円，十円，一円の貨幣を分けるという操作をもとに，筆算の手続きを考えるという10分間の指導が設けられている。ここには，写像理論が使われている（Gravemeijer, 2002；佐伯，1982）。

この部分は，次のようなディスコースで始まっている。

S1：252÷6　（他の児童から「賛成」の声）

T：皆さんこれ，暗算でできます。

S2：というか，100円玉2枚を6枚で分けることができる。というか，それだったら，10円とか100円とかを全部，1円に両替すればいいじゃないの。

S3：分けるの，いつまでかかるかわからん。

T：S2君は，これを筆算でやるのは，絶対無理といっているんだけど。

S2：無理とはいってないんだけど。

T：でも，ちょっと難しいと言いたいの。あ，そうか。どうですか，皆さん，ここに（黒板）にもう筆算と書いてありますけど，今日はこの筆算でやってみませんか。

S（数人）：やる。

教師は，「252÷6」の計算を「筆算で計算する」という言葉を，児童から引き出したいと思っている。そこで，逆に「暗算でできますか」と発問した。それに対して，S2は「全部1円に両替すればいい」というアイデアを出した。これは，教師の意図に反する発言である。そこで，教師は，「分けるの，いつまでかかるか分からん」というS3の発言を受けて，「これを筆算でやるのは，絶対無理といっている」と発言する。ところが，S2が「無理とはいってないんだけど」という発言に変えても，教師は「ちょっと難しいと言いたいの」と返している。そして，「筆算でやってみませんか」と提起する。つまり，教師の意図に反するS2のアイデアは却下された。

これは，もしS2の発言を授業に取り上げれば，10分間には納まらなかったからである。また同時に，この10分間があまり有効ではなかったことは，次の結果からもわかる。授業における，児童の答えには，次のようなものがあった。

```
6 ）２５２
    0
    ２５２
```

```
    ００４
6）２５２
    ００
    ２５２
      ４８
      1
```

また，授業のなかで，教師が取り上げた答えには，正答以外に，次のようなものが含まれていた。これらには短除法に結びつくものもあり，主として書き方の問題なので，教師も取り上げたのであろう。しかし，10分間の指導が，あまり有効に機能しなかったことは確かである。

```
    ４２
6 ）２５２
    ２４
    １２
    １２
```

```
        ４
6）２５２
    0
    ２５
    ２４
```

わが国の教師が筆算の意味の指導に10分間しか取れなかったのは，致し方ないことである。教科書の配分もそうなっているし，筆算手続きの習得に要する時間を考えれば，ぎりぎりの選択である。「除法の筆算ができる」ことを授業目標とするなら，限られた指導時間の中では，それ以外の選択はない。むしろ，その10分間を筆算手続きの説明と練習に当てた方が，児童の「でき」はいいだろう。

そこで問題にしたいのは，この「10 分間」は短いだけはないということである。写像理論など，わが国の教室文化の前提を考えれば，わが国の実践が，そこに上手く納められているとはいえ, 実は写像理論そのものに問題があると，Gravemeijer (2002) は指摘している。

つまり，この 10 分間の指導を，生命論的教室文化へと文化化するための儀式にするにはどうするかという問題である。米国ミシガン大学の Lampert(1992) は，除法の筆算，つまり長除法のについて，次のように述べている。

《カリキュラムや授業の改革を目指す数学教育者にとって，現在指導されているような長除法は，数学の創造性とはあまり関係なく，「子どもの考えの流れ」を邪魔している。そのアルゴリズムを教えることは，計算の手続きを記憶させるという誤りの典型例となっている。これを重視することは，理解のための指導とは真反対である。教育学者と数学者の議論では，学校カリキュラムの中心に計算の手続きが位置づけられているために，生徒や教師は本質的な数学概念に注目しなくなっているとしている。》(p.222)

つまり，彼女は長除法の手続きだけでは価値がないとして，むしろ長除法と数学的概念の関係を分析した。それは，次のようなものである。

《除法という演算は,「乗法構造」の一つである。…乗法構造とは比例によってモデル化される状況における数学的な考え方であり，乗法の問題とは比例的推論によって解かれる。それに対して，加法構造は数えることによってモデル化され，加法の問題は量の結合や分離によって解かれる。》(pp.226-227)

つまり，乗法構造の理解という観点から，わり算の筆算への概念アプローチを実践している。Lampert(1992)は，筆算手続きの指導については全く触れていない。しかし，除法の概念指導と筆算の手続きとの調整の必要性を唱えて，次のように述べている。

《生徒が除法を理解するように，数学的概念に結び付けて計算を指導するためには，計算の手続きに方向づけられている算数の教室文化との厳しい調停が必要となる。》(p.275)

これは，機械論的教室文化からの文化化を示唆している。わが国において，わり算筆算の手続き，つまり長除法の指導は，これからも不可欠であろう。電卓が普及した現代でも，整式の除法にそのまま適用できる長除法は，除法の数学的構造を理解するためにも必要である。しかし，Lampert(1992)の述べているように，ただ手続きを記憶，訓練するだけでは教育的価値はない。

10 分間のディスコースについては，S2 のアイデアが重要である。「全部1円に両替すればいい」というS2の発言は，一見すれば，面倒で無駄な操作的活動のように思える。しかし，乗法の筆算では10の「まとまり」をつくるのに対して，除法の筆算では10を「くずしていく」という操作が必要になる。これは，長除法の基本的アイデアを含んでいるのである。

生命論的教室文化のためのデザインをするには，S2 のアイデアを受け入れて，活用することである。実際に試してみれば，面倒な操作であることを児童たち自身が実感する。そこで，どうするかである。つまり，できる限り「くずさず」に，「10 にまとめて」分配した方がいいことが分かる。それが，上の位から分けていくという，長除法の手続きにつながることを，この教室の児童た

ちは合意するであろう。

このように，Gravemeijer (2002)が言及する構成主義や社会・文化理論からデザインすることにより，10 分観のディスコースを，生命論的教室文化へと文化化するための儀式にすることが可能なのである。

第５節　第５章のまとめ

一般に，文化変動（culture change）には，文化化（enculturation）と文化変容（acculturation）という二つの概念がある。教室文化も同様であり，規定されながらも構築され，変化しているものである。

文化化とは，「特定の社会内部で，成員をその社会特有の文化のパターンに適応させること。主として幼少の時期の学習を通じて，その社会の衣食住その他の行動様式や思考様式を取り入れ，共有の価値態度を内面化されること」（辰野他，1986, p. 354）である。つまり，集団の成員に着目した概念である。

文化変容とは，他の文化との接触によって，文化そのものが変化することである。つまり，異なる文化をもつ人間の集団が，直接的，永続的に接触することで，その結果として一方または両方の集団の生活様式が変化する現象をいう（下中弘，1971, p. 1245; 廣松他，1998, p. 1425）。これは，文化そのものの変動を視点としている。

児童･生徒は，数学教育における文化化の過程にあるとともに，教室文化は文化変容していく。そして，教室文化の文化化とは，児童・生徒が教室文化の変動に参加することである。

このような中で，本研究では，「文化化」という用語を使うことにした。教室における成員である教師と児童・生徒が協同で文化化することを意図しているからである。そして，これを「教室文化の文化化」と呼ぶことにした。

つまり，教室文化の文化化とは，機械論的教室文化から生命論的教室文化へと，教室の成員である教師と児童・生徒が文化化するという意味である。そして，数学教育としては，文化変動そのものよりも，教師や児童・生徒の成長・発達に着目しているのである。

数学教育における教室文化は，「数学的文化化」の過程の中にある。我が国の児童･生徒は，学習指導要領の目標に明示されているような数学的文化への文化化の過程にある。教室文化は，そのような過程における分析単位である。

数学教育において，「文化化」に着目したのは，Bishop（1988）である。「数学的文化化（Mathematical Enculturation）」について，次のように述べている。

《形式的な数学的文化化の目標は，子どもに，記号化，概念化，そして数学文化の価値を伝えることである。》（p.89）

しかし，Bishop（1988）が述べる数学的文化化の過程を教室文化に適用するだ

けでは，教室文化の文化化を実現できない。数学的文化化は，数学教育そのものを視野に入れた広い概念だからである。そこで，機械論的教室文化から生命論的教室文化への文化化について，デザインの観点から考察した。

つまり，教室文化に対して，「デザイン科学（Wittmann, 1995; ビットマン他，2004; 山本，2009）」の観点を取り入れる。デザインとは，「現在の状態をより好ましいものに変えるべく行為の道筋を考案 する」（山本，2009, p. 61）ことである。つまり，人為的に教室文化における文化化をデザインすることを考慮しなければならない。

そこで，本研究では，規範性の観点から，教室文化の在り方を考察するために，教室文化のデザインにおける数学的活動を重視する。これは，「教室文化の文化化」という用語を使う根拠でもある。つまり，教室文化の文化化とは，児童・生徒による数学的活動を通して，教室文化が文化変容することであり，そのためのに，教師が教室文化をデザインすること意味している。

算数・数学的活動には，個人的，社会的，数学的の 3 つの要素がある。生命論的教室文化へと文化化するには，それらの要素を統合した数学的活動をデザインしなければならない。オランダ フロイデンタール研究所の「現実的数学教育」では，活動の 4 つの段階を設定している(Gravemeijer & Stephan, 2002)。その数学的活動の 4 段階は「問題設定」「モデル化」「一般化」「形式化」である。

そこで，この段階論を算数科における式の指導に適用して，わが国の算数教育における式指導の問題点を明らかにした。そして，算数的活動としての式指導の在り方について述べた。

次に，教室文化の文化化のために，記号論的文化化として「意味の連鎖」を活用した。これを，小学校 5 学年の「小数のわり算」を事例として，適用した。そして，生命論的教室文化への文化化となる根拠を示した。また意味の連鎖によって，算数・数学の学習内容の特徴である「架空性」が生ずる過程を説明できることを示した。中学校の一次方程式の指導を事例として取り上げた。

最後に，教室文化の文化化のための理論とその事例をあげた。

まず，「誤り」からの理解である。これは，小学校 5 年の「単位量あたりの大きさ」の授業を事例として取りあげて，示した。次に，「模倣」としての学習である。学習における「模倣」の意義を指摘したのは，ヴィゴツキー（1962）である。このような模倣の事例は，Sfard（2006, pp. 5-9）が明確に示している。

「参加」としての学習は，Lave & Wenger（1991）の正統的周辺参加論（LLP）である。これは，状況的学習論と呼ばれることもある。その実践例として，わが国における静岡大学の岡本光司（1999）と岡本・静岡大学教育学部附属静岡中学校（1998）の実践を示した。

「儀式」としての教室文化は，形式化された文化的行為と，それに伴う形式化された言葉の使用からなっている。つまり，教室文化そのものが儀式としての役割をもっている。小学校 3 年の「わり算」の授業と小学校 4 年の「わり算の筆算」を事例として，教室文化における儀式の役割を示した。

《第５章の引用・参考文献》

和文文献

池上嘉彦・山中桂一・唐須教光(1983).『文化記号論への招待　言葉のコードと文化のコード』, 有斐閣選書.

石田一三(1989).『文章題指導の定石』, 明治図書.

岩崎秀樹(2007).『数学教育学の成立と展望』, ミネルバ書房.

ヴィゴツキー, L. S.［著]／柴田義松[訳］(1962).『思考と言語』, 明治図書.

ヴィゴツキー, L. S.［著]／福井研介[訳］(1972).『子どもの想像力と創造』, 新読書社.

岡本光司 (1999).「｢状況的学習」を志向した数学学習」,『静岡大学教育学部研究報告（教科教育学篇)』, 第 30 号.

岡本光司・静岡大学教育学部附属静岡中学校数学科(1998).『生徒が「数学する」数学の授業　－わたしも「論文」を書いた』, 明治図書.

岡本光司・両角達男 (2008).『子どもの「問い」を軸とした算数学習』, 教育出版.

曲師政隆 (1997).「算数をつくり上げていくことに喜びを感じる子供をめざして」, 日本数学教育学会　全国算数・数学研究（群馬）大会発表資料.

佐伯胖(1982).『教育学大全集 16　学力と思考』, 第一法規.

柴田義松 (2006).『ヴィゴツキー入門』, 寺子屋新書 020, 子どもの未来社.

下中弘[編］(1971).『哲学事典』, 平凡社.

辰野千寿・高野清純・加藤隆勝・福沢周亮［編］(1986).『多項目　教育心理学事典』, 教育出版.

ドラッカー, P. F. (1993).『ポスト資本主義社会－ 21 世紀の組織と人間はどう変わるか』, ダイヤモンド社.

パーキンソン, H. J.［著］／平野智美・五十嵐敦子・中谷幸夫［訳］(2000).『誤りから学ぶ教育に向けて　20 世紀教育理論の再解釈』, 勁草書房.

久原恵子 (1965).「表象の発生」, 波多野完治［編],『ピアジェの発達心理学』, 国土社, pp. 58-61.

平林一榮 (1961).「J. Dewey 著「数の心理学」の算術教育史的位置－ J. Piaget に連なるもの－」,『日本数学教育学会誌　数学教育学論究』, 第 1 号, pp. 57-67.

平林一榮 (1975).『算数・数学教育のシツエーション』, 広島大学出版研究会.

平林一榮 (1979).「第Ⅶ章　教具論」, 赤攝也［編],『算数・数学教育の理論と構造』, 教育学講座第 11 巻, 学習研究社.

平林一榮 (1987).『数学教育の活動主義的展開』, 東洋館出版社.

平林一榮（2000）.「数学教育における構成主義の素性－とくに急進的構成主義について－」,『近畿数学教育学会会誌』, 第 13 号, pp.14-21.

廣松渉・子安宣邦・三島憲一・宮本久雄・佐々木力・野家啓一・末木文美士［編］（1998）.『岩波哲学・思想事典』, 岩波書店

ビットマン, E. H., シュタインブリング, H., & ミューラー, G. N.［著］／國本景亀・山本信也［訳］（2004）.『算数･数学　授業改善から教育改革へ PISA を乗り越えて：生命論的観点からの改革プログラム』, 東洋館出版社.

宮崎祐二・伊藤優理子（2003）.「論理的な考え方の育成～中学 1 年の方程式～」, 平成 15 年度学校数学.

山本信也（2009）.『生命論的デザイン科学としての数学教育学の課題と展望 E. Ch. ヴィットマンの数学教育学の基本的視角』, 熊本大学教育学部　数学教育学研究室.

吉本均（1983）.『授業の構想力』, 明治図書.

レイブ, ジーン／無藤隆・山下清美・中野茂・中村美代子［訳］（1995）.『日常生活の認知行動』, 新曜社.

レイブ, ジーン & ウェンガー, エティエンヌ（1993）.『状況に埋め込まれた学習正統的周辺参加』, 産業図書.

欧文文献

Bauersfeld, H.（1992a）. Integrating theories for mathematics education. *For the Learning of Mathematics* **12**, 2, 19-28.

Bauersfeld, H.（1992b）. Classroom cultures from a social constructivist's perspective. *Educational Studies in Mathematics,* 23, 467-481.

Bishop, A. J.（1988）. *Mathematical enculturation -A cultural perspective on mathematics education-,* Dordrecht, The Netherlands: Kluwer Academic Publishers,

Chevallard, Y.（1992）. La transposition dicactique: du savoir savant au savoir enseigne, *Recherches en didactique des Mathématiques*, Vol. 12, N°1, pp. 73-112. ; 平林一榮［訳］

Chevallard, Y.（2007）. Implicit mathematics. In U. Gellert, & E. Jablonka（Eds.）, *Mathematisation and demathematisation: Socila, philosophical and educational ramifications*. Rotterdam, The Netherlands: Sense Publishers.

Cobb, P.（1995）. Cultural tools and mathematical learning: A case study, J*ournal for Research in Mathematics Education,* Vol.26, No.4, pp.362-385.

Cobb, P.（2000）. Constructivism in Social Context. In L. P. Steffe, & P. W. Thompson（Eds.）, *Racical Constructivism in Action Building on the Pioneering Work of Ernst von Glasersfeld.* London: Routledge Falmer.

Cobb, P., Boufi, A., McClain, K., & Whitenack, J.（1997）. Reflective discourse and collective reflection, *Journal for Research in Mathematics Education,* Vol.28, No.3, pp.258-277.

Freudenthal. H.（1973）. *Mathematics as an educational task*. Dordrecht, The Netherlands: D. Reidel Publishing Company.

Freudenthal. H.（1983）. *Didactical phenomenology of mathematics structures*. Dordrecht, The Netherlands: Reidel.

Gravemeijer, K.（1999）. How emergent models may foster the constituion of formal mathematics, *Mathematical Tinking and Learnig*, 1（2）, 155-177.

Gravemeijer, K,（2002）. Preamble: From models to modeling. In K. Gravmeijer, R. Lehrer, B. van Oers, & L. Verschaffel（Eds.）, *Symbolizing, modeling and tool use in mathematics education*（pp.7-22）. Dortrecht, The Netherlands: Kluwer Academic Publishers.

Gravemeijer, K., & Stephan, M.（2002）. Emergent models as an instructional design heuristic. In K. Gravemeijer, R. Lehrer, B. van Oers, & L. Verschaffel（Eds.）, *Symbolizing, Modeling and Tool Use in Mathematics Education*（pp. 145 － 169）. Dortrecht, The Netherlands: Kluwer Academic Publishers.

Lacan, J.（1977）. *Ecrits: A selection*. London: Travistock.

Lampert, M.（1992）. Teaching and learning long division for understanding in school. In G. Leinhardt, R. Putnam & R. Hattrup（Eds.）, *Analysis of Arithmetic for Mathematics Teaching*, Lawrence Erlbaum Associates, Publishers.

Lave, Jean, & Wenger, Etienne,（1991）. *Situated Learning: Legitimate Peripheral Partici-pation,* Cambridge University Press.

Russell, B.（1904）. Recent works on the principles of mathematics. *International Monthly,* 4, 84.

Sfard, A.（2006）. Participationist discourse on mathematics learning. In J. Maasz, & W. Schloeglmann（Eds.）, *New mathematics education research and practice*（pp. 153-170）. Rotterdam, The Netherlands: Sense Publishers.

Sfard, A.（2008）. *Thinking as communicationg: human development, the growth of discourses, and mathematizing*. Cambridge Universit Press.

Simon, Martin A.（1995）. Reconstructing mathematics pedagogy from constructivist perspective, *Journal for Research in Mathematics Education,* Vol. 26, No. 2, pp. 114-145.

Walkerdine, V.（1988）. *The mastery of reason: Cognitive development and the production of rationality.* London: Routledge.

Walkerdine, V.（1997）. Redefining the subject in situated cognition theory. In D. Kirsher, & J. A. Whitson（Eds.）, *Situated Cognition: social, semiotic and psychological perspectives*（pp. 57-70）. Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum Associates, Inc, Publishers.

Whitson, James, A.（1997）. Cognition as a semiostic process: from situated mediation to critical reflective transcendence. In D. Kirsher, & J. A. Whitson（Eds.）, *Situated Cognition: social, semiotic and psychological perspectives*（pp. 57-70）. Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum Associates, Inc, Publishers.

Wittmann, E. Ch.（1995）. Mathematics education as a 'design science', *Educational Studies in Mathematics, 29*（pp.355-374）. Belgium: Kluwer Academic Publishers.

終　章　本研究の総括と今後の課題

第１節　本研究の総括

第１章「数学教育における教室文化の基礎的考察」では，数学教育における教室文化の意義を明らかにし，教室における学習集団性や複雑性などの特徴を考慮して，4 つの特性を示した。

第１節では，教室文化の意義を述べた。一般に「教室文化とは，学校教育での日常の教室における，児童･生徒と教師による学習と指導の様式」である。数学教育では，「算数・数学授業における教室での学習指導の様式」であると定義した。

つまり，数学教育では，算数・数学の授業において，教師や児童・生徒が算数・数学に関わる活動によって形成される教室の日常的現実や慣習，そして学校制度やカリキュラム，教科書などにおける公の意味構造が教室文化である。そして，Lakatos の数理哲学から，教室文化は数学学習において本質的な意義をもっていることを示した。

第２節では，教室文化の相補性について述べた。これは，教室文化がもつ複雑性を認識するための特性である。また，数学学習においても，「構成」と「模倣」という背反する視点を与える。また，クラス編成も，同質性を重視するものと異質性を重視するものがある。これらの背反する教室現象を解釈しなければならない。教室における複雑な現象を解釈するために，矛盾するかのような理論や説明を，全体的な枠組みの中で相互に補完するものとして受け入れる立場が必要がある。これが相補主義である。そして，教室文化が本来そのような特性をもっているというのが，相補性である。

第３節では，教室文化の相互反映性について述べた。教室文化は，教室における教師と児童・生徒が協同で構築する文化という側面と，教育文化や学校文化から規定される分析単位としての側面がある。このような関係は，個々の児童･生徒の数学学習と教室文化の相互関係にも当てはまる。個々の児童･生徒の数学学習は，教室文化に参加することを通じてなされ，同時に教室文化は，児童･生徒の学習により形成されるということである。また，教室文化と学校文化や教育制度，教育環境や一般の文化などとの相互関係も同様である。これを，教室文化の相互反映性と呼ぶ。

第４節では，教室文化の規範性である。これは，数学教育として教室の在るべき姿を追究するものとしての特性である。規範とは，信念や価値観であり，評価の規準となるものである。教室は学校教育の目標を達成するための場である。教育目標があるというこは，文化としての規範性があるということである。

これを，教室文化の規範性と呼ぶ。
第５節では，教室文化の創発性である。これは，学級という教室の学習集団の特質である。教室では社会的相互作用によって，数学的な意味や概念，信念，習慣が創発される。これを，教室文化の創発性と呼ぶ。
第２章「教室文化への学級経営の観点」では，学級経営と数学教育思想から教室文化を対比的に分類し，それぞれの教室文化の特徴を明らかにした。
第１節では，学級経営と教室文化について述べた。学級経営は，わが国では学級づくりと呼ばれ，教師の重要な仕事である。米国では，これを教室文化の構築という。これを経営分析の観点から考察した。教科教育学においては，西川（2006）はリッカート（1964）の経営分析を参考にして，「独善的専制型」「集団参画型」など，4 つの学級経営スタイルをまとめている。そしてこれらを，Wittmann（2001）の数学教育学を参考しして，機械論と生命論という二つの思想からまとめた。
第２節では，機械論教室文化について明らかにした。機械論は，17 世紀コメニウスの『大教授学』に見られるものであり，学校をその当時のハイテク機械であった時計と印刷機になぞらえ，スピーディな大量の庶民教育を実現しようとした思想である。カリキュラムや教科書のみならず，教室そのものがその産物である。さらに，今日の進歩主義的教育や数学教育の現代化，ブルームの理論などにも，機械論の教育思想は含まれている。
機械論的教室文化の特徴は，次の通りである。
M1. 指導内容を単純な部分に分割して，スモールステップで指導する。
M2. それぞれの部分を指導するために孤立した指導法を使う。
M3. 有能な児童・生徒を中心に授業を進める。
M4. 教科書を教える授業。
M5. ドリル練習。
M6. 児童・生徒の出来に対して，報賞を与える。
第３節では，生命論的教室文化について述べた。生命論は，機械論の限界から，それを批判的に包括する思想である。ルソーやペスタロッチの教育思想やデューイの思想も，これに含まれる。また，ピアジェの発生的認識論は，子どもの思考や数学的概念の発達過程を科学的に説明した。そして，ヴィゴツキーは，社会や文化の理論をふまえて，ピアジェの心理学を批判的に発展させた。つまり，生命論は，人間性を原理として多様な観点を相補主義的に考察する特質がある。
生命論的教室文化の特徴は，次の通りである。
S1. カリキュラムや単元の構成において，全体性の原理が考慮されている。

S2. 児童・生徒の主体性を育成し，算数・数学の意味を構成するように指導する。
S3. 教室において，数学的コミュニケーションによる合意領域を形成する。
S4. 一般化など数学的活動，数学化や問題解決過程を重視した指導をする。
S5. 教室において発達の最近接領域が重視されている。
S6. 教室における数学的コミュニティーへ，児童･生徒が参加する。
S7. 児童･生徒の誤りの価値を認める。
S8. ドリル練習だけでなく，数学的に価値のある練習をする。

第３章「数学学習における生命論的教室文化の意義」では，数学学習において生命的教室文化がどのような意義をもっているか，について考察した。

第１節では，構成主義的観点から，数学学習における教室文化の意義について考察した。数学的知識は，生徒が主体的に構成するものとするのが構成主義である。構成主義から教室文化を考察するために不可欠なのは，教室におけるコミュニケーションである。

つまり，コミュニケーションが成立するには，お互いに相手のイメージを構成しながら，相互に作用し合っているのである。つまり，「相互反映性」は他人との間だけでなく，自己の思考の中でさえ成立しているということである。そしてコミュニケーションによって形成されるのが，「合意領域」である。つまり，構成主義の立場では，教室における合意領域が生命論的教室文化である。

第２節では，数学教育における社会･文化理論から教室文化を考察した。その源流である Vygotsky 理論の特徴は，学習における「模倣」や「内化」を重視している点にある。そのために，「発達の最近接領域」が重要になる。

さらに，Vygotsky 理論には，二つの主張がある。その一つは，人間の高次精神活動は，「文化的道具（cultural tools）」を媒介にして，直接的な心理過程が間接的過程に転化するということである。文化的道具とは，言語や記号である。したがって，思考と言語・表現は一体のものであり，単純に分離することはできない。二つ目の主張は，人間の高次精神機能は，精神間から精神内への内化によって働くということである。

そして，その思想から，生活的概念と科学的概念の対立的な発達方向の中で，発達の最近接領域という概念を位置づけることもできる。このような発達の最近接領域が，生命論的教室文化である。

第３節では，算数･数学科に固有な生命論的教室文化ついて述べた。数学教育における生命論的教室文化の数学観は，「社会的構成としての数学」であり，これは①数学的コミュニケーションによる知識獲得と②数学的コミュニケーションへの参加という 2 つの観点から成っている。

さらに，この数学観の数理哲学として，Lakatos の数学論を再び取り上げた。

そして，この数学観を，教室文化として実践したのはランパート(1995)であり，数学の知識を獲得する活動にとって，「勇気と謙虚さ」が重要な道徳的資質であるとまとめている。

第４節では，生命論的教室文化に対する言語学的観点について述べた。教室文化は，教室における言葉づかいの習慣であるとも定義できる(Bauersfeld, 1995)。また，数学は言語としての機能をもっており，コミュニケーションの手段である。

そして，言語の相対性を確立したことから，Saussure の言語学の重要な概念として，記号の恣意性を採り上げた。そして，記号学として，能記（signifiant, signifier)と所記(signifié，signified）として，図式的にまとめている点を示した。

さらに，本研究における教室文化の記述は，「言語ゲーム」の思想に従った。つまり，教室におけるディスコースについて，規則性を記述した。数学教育の固有性そのものが，生命論的教室文化から創発されるのである。これは，算数・数学の教室文化がもつ相互反映性や創発性である。

第４章「数学教育における生命論的教室文化の事例」では，生命論的教室文化の事例をあげた。

第１節では，生命論的教室文化では，単元や教材の事例をあげた。Wittmann (2001)の「本質的学習環境」と Lampert(1986)の単元構成の研究，平林(1987)の「漠たる全体」による単元構成について述べた。本質的学習環境は，知識のネットワーク（國本，2006, p. 11)，内容の発展性や教材の柔軟性をもっている。Lampert(1986)は，4 つの知識を設定している。それは，「直観的知識」「具体的知識」「計算知識」「原理的知識」である。

第２節では，実践事例を紹介した。國本(2009)の実践に関わる「平方数とピラミッド数」の授業，Wittmann(2004)の「掛け算から 2 次方程式へ」，「漠たる全体」の実践例としては手島勝朗(1987)の「算数のリズムをしよう」，そして Lampert(1986)の 4 つの知識を適用した単元構成の実践例として，三浦祥志(1992)による「正の数・負の数」の授業を取り上げた。

「第５章　教室文化の文化化」では，教室文化の文化化の定義とそのためのデザインについて述べた。

第１節では，教室文化の文化化を定義する。一般に，文化変動には，文化化と文化変容という二つの概念がある。教室文化も，文化変容している。児童・生徒は，数学教育における文化化の過程にあるとともに，教室文化は文化変動していく。教室文化の文化化とは，教師や児童・生徒が教室文化の変容に参加することを示している。つまり，「文化化」という用語を使うのは，教室における成員である教師と児童・生徒が協同で文化化することを意図している。

教室文化において，機械論的教室文化から生命論的教室文化へと，教室の成員である教師と児童・生徒が文化化するという意味である。つまり，数学教育として，教師や児童・生徒の成長・発達に着目した概念である。

数学教育における教室文化は，数学的文化化の過程の中にある。我が国の児童･生徒は，学習指導要領の目標に明示されているような数学的文化への文化化の過程にある。教室文化は，そのような過程に対する分析単位である。

数学教育において,「文化化」に着目したのは, Bishop（1988; ビショップ, 2011）である。しかし，その数学的文化化の過程を教室文化に適用するだけでは，不十分である。数学的文化化は，数学教育そのものを視野に入れた広い概念だからである。そこで，機械論的教室文化から生命論的教室文化への文化化について，デザインの観点から考察した。つまり，人為的に教室文化における文化化をデザインするのである。

第２節では，教室文化のデザインにおける数学的活動を考察した。算数・数学的活動には，個人的，社会的，数学的の 3 つの要素がある。生命論的教室文化へと文化化するには，それらの要素を統合した数学的活動をデザインしなければならない。オランダの「現実的数学教育」では，そのような活動の 4 つの段階を設定している(Gravemeijer & Stephan, 2002)。その数学的活動の 4 段階は,「問題設定」「モデル化」「一般化」「形式化」である。この段階論を，算数科における式の指導に適用して，わが国の算数教育における式指導の問題点を明らかにした。そして，算数的活動としての式指導の在り方について述べた。

第３節では，教室文化の文化化のために，記号論的文化化として「意味の連鎖」を活用した。これを，小学校 5 学年の「小数のわり算」を事例として，当てはめた。そして，生命論的教室文化への文化化となる根拠を示した。さらに，算数・数学の学習内容の特徴である「架空性」が生ずる過程を説明できる。中学校の一次方程式の指導を例として，それを示した。

第４節では，教室文化の文化化のための理論とその事例を 4 つあげた。

「誤り」からの理解として，小学校 5 年の「単位量あたりの大きさ」の授業を事例として取りあげた。

「模倣」としての学習の事例は，Sfard（2006, pp. 5-9）が明確に示している。学習における「模倣」の意義を指摘したのは，ヴィゴツキー（1962）である。「参加」としての学習は，Lave & Wenger （1991）の正統的周辺参加論 （LLP）である。これは状況的学習論と呼ばれることもある。その実践例として，静岡大学の岡本光司（1999）, 岡本・静岡大学教育学部附属静岡中学校（1998）の実践を示した。

「儀式」としての教室文化は，形式化された文化的行為と，それに伴う形式化された言葉の使用からなっている。つまり，数学教育における教室文化その

ものが儀式としての役割をもっている。小学校 3 年の「わり算」の授業と小学校 5 年の「わり算の筆算」を事例として示した。

本研究の研究課題に対する成果と意義は，次のようにまとめられる。

数学教育における教室文化を定義した。そして，Vygotsky 理論から数学学習への教室文化の意義を示した。また，Lakatos の数学論から，数学教育における固有な教室文化を明らかにした。またその特性として，教室文化の相補性，相互反映性，規範性，創発性を示した。

これらの成果は，教室文化がもつ複雑性を理論的に究明する基盤となる。また，数学学習において，教室は本質的意義をもっており，教師と児童・生徒からなる学習集団の意義を示したことになる。

また，学級経営の観点から，リッカートの経営分析や Wittmann （2001）の数学教育思想を参考にして，2 つの教室文化を対比した。それは，機械論的教室文化と生命論的教室文化である。機械論は，カリキュラムや教科書のみならず，教室そのものがその産物である。それに対して，生命論は，機械論の限界から，それを批判的に包括する思想である。

この成果は, 教師が学級経営を実践していくための指針を与えるものになる。また，教師が学級づくりの現状を把握するためにも有用である。

数学学習における生命論的教室文化の意義について，構成主義，Vygotsky 理論などの社会文化理論，数学観，言語学的観点から明らかにした。それは，「合意領域」「発達の最近接領域」「社会的構成としての数学」「言語の相対性」である。

この成果は，生命論的教室文化とは何か。またどのような数学学習を志向しているのかを理論的に解明したことになる。

数学教育における生命論的教室文化の事例として，Wittmann（2001）の「本質的学習環境」，Lampert（1986）の 4 つの知識による単元構成，平林（1987）の「漠たる全体」をあげた。また，これらに対応する 4 つの実践例を例示した。これらは，教師教育において，生命論的教室文化のための教材や指導事例となる。

数学教育における教室文化の文化化を定義した。そして，デザインの観点から，教室文化の文化化のための理論として，数学的活動の段階論と記号論における「意味の連鎖」を取り上げた。これらは，式の指導や「架空性」の考察に有効である。その他に 4 つの理論や事例を示した。

教室文化の文化化という用語は，独自に創案したものであり，文化の担い手としての教師の役割や児童・生徒の学習指導を考察するために有用な概念となる。また，文化化のための理論や実践例は，教師教育において，授業改善のための指針を示している。

第２節　今後の課題

本研究は，教室文化やその文化化に対する数学教育研究の端緒となるものであって，この後の発展が期待される。教育学において文化という用語は，曖昧で多義的であり，扱いにくい言葉である。しかし，その用語を使わなければ表現できないような人間の教育活動があることは確実である。

そのことを踏まえて，数学教育における教室文化やその文化化を定義した。また本研究では，規範的な立場に立って研究を進めた。しかし，文化人類学のような記述的立場も重要であり，歴史の変遷や文化比較をふまえた教室文化の研究は大きな課題である。

今後の課題は，次の 4 つにまとめた。

・課題１

文化人類学のような記述的立場（Bishop,　1988）から，数学教育における教室文化の事例を収集し，分類・整理することである。そして，文化や地域のみならず，比較教育学の立場から国際的に比較し，考察することである。

近年，教師教育の立場から，各国の授業を比較教育学的に分析する研究が増えてきた（Clarke, 2010）。また，各国の授業にさまざまな教育文化が深く影響していることが明らかとなっている。教育文化の分析単位として，教室文化への文化人類学的研究の重要性が認識されている。

この際，Chevallard（1992）の"anthropological theory of the didactic"（ATD と略され，教授人間（人類）学理論と訳される）を参考にする。それは，文化人類学の視点を数学教育の研究に活用する方法を与えている。

・今後の課題２

数学教育における教室文化の文化変容を考察することである。文化変容とは，他の文化との接触によって，文化そのものが変化することである。これは，数学教育の文化そのものに着目することである。一つには，児童･生徒の就学における学校教育の算数･数学の教室文化の変容に着目することである。二つ目は，数学教育の歴史的変遷を踏まえ，それが教室文化の変容にどのように影響していたかを調べることである。つまり，教室単位での数学教育史を考察することである。

・今後の課題３

数学教育における相補主義を深化・発展させると，「ポストモダン」の思想になる。この思想は，単一の理論や観点に還元するのではなく，多様な理論や観点を受け入れるものである（Walshaw, 2004）。ポストモダンの思想から，数学教育の在り方を考察することである。これは，生命論的数学教育の範疇に入る研究となろう。

・課題４
　数学教育における「式の指導」のように具体的な教室文化の問題について，文化化の立場から実践研究をデザインする。これは，教師教育における授業開発をすることである。教室文化の文化化について，実践的に研究を進めていく課題である。

終章の引用・参考文献

和文文献

ヴィゴツキー，L．S．［著］／柴田義松［訳］（1962）．『思考と言語』，明治図書．

岡本光司（1999）．「「状況的学習」を志向した数学学習」，『静岡大学教育学部研究報告（教科教育学篇）』，第 30 号．

岡本光司・静岡大学教育学部附属静岡中学校数学科（1998）．『生徒が「数学する」数学の授業　－わたしも「論文」を書いた』，明治図書．

國本景亀（2006）．『「全体論的」数学教育の理論と実践に関する研究』，平成 15 ～ 17 年度科学研究費補助金（基盤研究（C））研究成果報告書．

國本景亀（2009）．「生命論に立つ数学教育学の方法論　－自由で個性豊かな算数・数学授業を目指して－」，『全国数学教育学会誌　数学教育学研究』，全国数学教育学会，pp. 1-15.

コメニウス，J．A.［著］／井之口淳三［訳］（1962）．『大教授学（世界教育学選集第 24）』，明治図書．

手島勝朗（1987）．『算数科・楽しい授業の提案』，明治図書．

西川純（2006）．『「勉強しなさい！」を言わない授業　－年間を通して、クラス全員の成績を上げ続けるなんて簡単だ！－』，東洋館出版社．

ビショップ，アラン J.［著］／湊三郎［訳］（2011）．『数学的文化化』，教育出版．

平林一榮（1987）．『数学教育の活動主義的展開』，東洋館出版社．

三浦祥志（1992）．「学ぶ喜びを味わい、自ら学ぶ力を育てる数学の授業」，読売教育賞　受賞者論文集－「実践活動の概要」，読売新聞社．

ランパート，M.［著］／秋田喜代美［訳］（1995）．「真正の学びを創造する数学がわかることと数学を教えること」，佐伯胖／藤田英典／佐藤学［編］，『学びへの誘い　シリーズ学びと文化①』，東京大学出版会．

リッカート，三隅二不二訳（1964）．『経営の行動科学』，ダイヤモンド社．

欧文文献

Bauersfeld, H.（1995）. "Language game" in the mathematics Classroom: Their function and their effects. In P. Cobb, & H. Bauersfeld（Eds.）, *The emergence of mathematical meaning.* Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum.

Bishop, A. J.（1988）. *Mathematical enculturation -A cultural perspective on mathematics education-,* Dordrecht, The Netherlands: Kluwer Academic Publishers,

Chevallard, Y.（1992）. Fundamental concepts in didactics. In R. Douady et al.（Eds.）, *Research in Didactique of Mathematics: Selected papers* (pp.131-168), Grenoble: La Pensé*e Sauvage.*

Clarke, David (2010). The cultural specificity of accomplished practice: Contingent conceptions of excellence, *The 5th East Asia Regional Conference on Mathematics Education EARCOME 5 Proceedings,* Vol.1 (pp.14-28).

Gravemeijer, K., & Stephan, M. (2002). Emergent models as an instructional design heuristic. In K. Gravemeijer, R. Lehrer, B. van Oers, & L. Verschaffel (Eds.), *Symbolizing, Modeling and Tool Use in Mathematics Education* (pp. 145 － 169). Dortrecht, The Netherlands: Kluwer Academic Publishers.

Lampert, M. (1986). Knowing, doing, and Teaching multiplication, *Cognition and Instruction,* 3(4), 305-342. Lawrence Erlbaum Associates, Inc.

Lave, Jean, & Wenger, Etienne, (1991). *Situated Learning: Legitimate Peripheral Participation,* Cambridge University Press.

Sfard, A. (2006). Participationist discourse on mathematics learning. In J. Maasz, & W. Schloeglmann (Eds.), *New mathematics education research and practice* (pp. 153-170). Rotterdam, The Netherlands: Sense Publishers.

Walshaw, Margaret (2004). Mathematics education within the Postmodern (International perspectives on mathematics education), Information Age Pub Inc; illustrated edition.

Wittmann, E. Ch. (2001). Developing mathematics education in a systemic process, *Educational Studies in Mathematics, 48,* 1-20. Kluwer Academic Publishers.

Wittmann, E. Ch. (2004). From the Multiplication Table to the Solution of Quadratic Equations, The Lecture in Nara University of Education.