

平成25年度 博士論文

メッシュフリー法を用いた板構造物の
非線形解析に関する研究

(Nonlinear analyses of folded-plate structure using meshfree method)

平成26年3月

広島大学大学院工学研究科
輸送・環境システム専攻
構造システム研究室

D115754 貞本 将太

要旨

題目 メッシュフリー法を用いた板構造物の非線形解析に関する研究
(Nonlinear analyses of folded-plate structure using meshfree method)

氏名 貞本 将太

船舶や航空機などの大型の輸送機器は、その構造部材の多くが薄板を組み合わせた構造によって構成されている。局所的に大きな力が働く場合は当然ながら、板の面方向に荷重が加わり耐力に影響を及ぼす場合も少なくない。面方向の圧縮荷重がある値まで達したとき板は座屈し、大きなたわみを発生させる。さらに大きな力が加われば座屈変形が進展し材料が塑性状態となり、やがて最終強度に到達し破壊に至る。従って、大変形問題である板の座屈/座屈後挙動を推測し、材料特性を考慮することは機器の信頼性の観点から非常に重要なことであり、高精度なシミュレーションが行えることは必須である。このことから本研究では板構造物の非線形問題に着目した。

メッシュフリー法、あるいは粒子法は、その名の通り有限要素解析 (Finite Element Analysis, FEA) における計算格子 (メッシュ) を用いない数値解析手法であり、連続体内部に節点や粒子と呼ばれる離散的な評価点を配置してモデル化を行い、その変形をラグランジュ的に表現する。このため、FEA においてはメッシュの影響を受けやすい流体挙動や大変形問題の表現、あるいは破壊現象の取り扱いに対して比較的有利な手法として知られている。しかしながら、一般的な固体/構造解析については未だ FEA と同程度の精度を得ることができておらず、本来の利点を活用しきれていない。これは板構造物の構造解析においても同様であり、板理論に基づいて簡単な例題を解いた例はいくつかあるものの、様々な曲面の問題や一般的な板構造物の非線形問題を取り扱った例は著者の知る限りでは無い。種々の条件下の板構造物の解析において FEA に劣らない高精度な計算が実施できるようになれば、本来メッシュフリー/粒子法が得意とする大規模な有限変形問題や破壊後の挙動の表現、また構造流体連成問題などの発展に大きく寄与できる可能性がある。このことから本研究では、弱形式を用いたメッシュフリー/粒子法の一手法である Reproducing Kernel Particle Method (RKPM) を用いて、種々の板構造物の非線形解析を高精度に実施することを目的とし、手法開発を行った。

以下に各章で得られた要点を示す.

第1章では, 本研究の目的と背景について述べた. 板構造は様々な機器に用いられる構造部材であり, 高精度なシミュレーションが行えることは必須である. 一般的に板構造の解析には FEA が用いられるが, FEA はメッシュが破綻するような大変形問題や破壊現象の取り扱いにはあまり得意ではない. 一方でメッシュフリー/粒子法はこれらの現象の表現を得意とするが, 肝心の構造解析の精度においては近似方法や積分方法などの問題により十分な精度が得られていない. 従来メッシュフリー/粒子法で板を取り扱った研究例自体はあるものの, 解かれる例題は計算手法の精度確認のための単純な問題が多く, 構造解析に対するアプリケーションという観点からの研究例はほとんど無い. 従って本研究では, 種々の条件のもとで板構造物の非線形解析を高精度に実施することを目的とし, 手法開発を行った.

第2章では, RKPM を用いた平板の線形解析について説明した. RKPM では Reproducing Kernel (RK) 近似と呼ばれる関数近似方法を用いて離散化を行う. RK は全体の節点に配置されたスプライン関数を節点分布に従って補正し, FEA で言うところの Partition of Unity (PU) 条件に代わる特性を持たせた形状関数である. 本章では板曲げ問題において RK を構成するための条件について示し, 得られた RK を用いて板の微小変形問題における仮想仕事式を離散化した. また, メッシュフリー/粒子法では節点や粒子によって連続体が離散化されるため, 数値積分方法を工夫しなければ境界値問題が厳密に成立しない. RKPM においてはスムージングを用いる Stabilized Conforming Nodal Integration (SCNI) という節点積分法がこれを満たす高精度な数値積分手法としてしばしば用いられる. しかしながら, 構造解析の観点からこの積分手法を見てみると, 従来の研究例では十分な検討がなされていないことがわかった. 本章の数値解析例では, 微小変形問題の定式化の妥当性の確認と共に, この節点積分法に関する問題を検証した.

第3章では, メッシュフリー/粒子法における多点拘束 (Multiple-Point Constraint, MPC) 法による境界条件の取り扱いについて説明した. メッシュフリー/粒子法の形状関数は各々が FEA においてクロネッカー・デルタ特性と呼ばれる性質を持っていないため, 境界条件の規定方法にも様々な方法がある. 板の構造解析では, 一般的な基本境界条件に加えて構造の連続性や周期性を考慮した特殊な境界条件がしばしば課されるが, これらの特殊な境界条件には自由度のタイイングが必要となる. こ

の条件を規定するために本手法では MPC 法を用いた。MPC 法では近似値の拘束や同期などの拘束条件式に基づいて節点変位ベクトルを書き換えることで種々の条件が規定できる。ただし、MPC 法の定式化は従来提案されているものの、方法の適用に関する詳細な検討はなされておらず、本手法に導入した際に適用箇所近傍で応力が振動する問題が生じた。本章ではこの問題について原因を究明し、回避策及び実際の構造解析に適用する際に留意すべき点について述べた。また、MPC 法による自由度の同期を応用した例として、複数の板による組み合わせ構造のモデル化を提案した。三次元的な自由度の整合性のために 3 軸回りの面内回転剛性を導入し、複数の板による構造系をモデル化するための自由度の変換方法について示し、数値解析例によって組み合わせ構造に関する MPC 法適用の妥当性を検証した。

第 4 章では、第 2 章に示した平板の微小変形問題の定式化を、有限変形を取り扱うための幾何学的非線形問題へと拡張した。微小変形問題において用いられる応力テンソルやひずみテンソルは変位に関して線形であるが、有限変形問題において基礎となる仮想仕事式は変位に関して非線形となる方程式である。従って、方程式の増分分解と線形化によって解くべき増分系の方程式を導いた後に RK 近似による離散化を行った。定式化の妥当性を検証するため数値解析例を示し、また座屈解析のための周期的な境界条件や直線保持などの条件を MPC 法により与え、改めて MPC 法の適用に関する評価を行った。

第 5 章では、任意曲面のための曲面座標系を用いたシェルの定式化を示した。これまでに示した定式化は平板の変形に限定されたものであり、数値積分方法や基本境界条件について基礎的な検討を実施して妥当性を確認したものの、曲面を表現することを考えると不便である。FEA であれば 1 つのメッシュが連続体として考えられているため、その平板要素を連ねて近似的に曲面を表現できるが、メッシュフリー/粒子法においては基本的に 1 枚の板全体を 1 つの連続体として考えるため、この方法は当てはまらない。従って本章では、曲面内に埋め込まれた曲面座標系を用いて幾何学的非線形問題の定式化を行った。また、非線形問題の増分制御法の一種である弧長増分制御について示した。単純な問題では荷重増分制御や変位増分制御などが用いられるが、これらの方法は荷重増分、もしくは変位増分を制御変数とするため、変形が進むにつれて荷重や変位が下がるスナップという現象が起こる問題では計算が破綻してしまう。この問題を解消するために弧長増分制御を導入した。さらに第 3 章に示した平板の定式化における面内回転剛性を曲面座標系における定式化

に書き換えることで，曲面座標系においても複数の板による組み合わせ構造物の解析を取り扱えるようにした．数値解析例ではFEAにおいてシェル要素のベンチマークとなる種々の問題を解き，また組合せ構造物の非線形問題を解くことで，提案手法の妥当性を確認した．

最後に第6章では，本研究の総括及び今後の課題について示した．微小変形問題において数値積分方法や境界条件の規定方法，三次元的な板の組合せ構造のモデル化について種々の検証を実施し，得られた知見を曲面座標系を用いたシェルの定式化に反映することで，板による任意の構造系を高精度に解くための手法が開発された．以上をもって，本研究の目的は達成されたといえる．今後は，本手法に対して更なる拡張を施し，より汎用的な手法へと発展させていく必要がある．具体的には以下の3点が挙げられる．

1. 幾何学的な非線形性に加えて，材料的な非線形問題である弾塑性構成式の適用．
2. メッシュフリー/粒子法が本来得意とするところである破壊力学分野への適用．
3. 水や空気などの流体や板構造などを含む計算対象全体を節点/粒子でモデル化した流体構造連成問題への適用．

謝辞

本論文は、私が広島大学大学院工学研究科輸送・環境システム専攻博士課程後期在学中(2011年4月～2014年3月)に、本学工学研究院 機械システム・応用力学部門 構造システム研究室 岡澤重信准教授、田中智行助教のもとで行った研究成果をまとめたものです。学部4年次から本課程修了までの6年間に多くの方々からのご指導・ご支援を頂きました。ここに感謝の意を表します。

本研究室の岡澤先生、田中先生には、研究を行うにあたって大変お世話になりました。お二人の日頃の尽力のおかげで当研究室が整った研究環境であったことで、不自由なく研究を進めることができました。岡澤先生には本研究の補助に加えて、HPCI戦略プログラム第3分野「防災・減災に資する地球変動予測」の研究グループにも加えて頂き、自身の研究のみでは経験することのできない貴重な機会を頂きました。また当該グループにおいて経済的な支援を受けられたことで経済的な不安なく研究に努めることができました。田中先生には主たる指導教員として、6年間で非常に多くのことを学ばせて頂きました。問題の見方や論文執筆の指導など、研究を進めていく上で必須となる基礎を叩き込んで頂きました。先生は私がD1の頃にノルウェー科学技術大学に客員研究員として赴任されておりましたが、海外からもご多忙の合間を縫ってミーティングなどの様々なケアを行ってくださいました。

本学工学研究院 機械システム・応用力学部門 構造設計研究室 北村充教授、輸送・環境システム総合工学研究室 濱田邦裕教授、システム安全研究室 新宅英司准教授には、本論文の審査をお引き受け頂き、また多くのご助言により本論文の質の向上を促して頂きました。

本学工学研究院 機械システム・応用力学部門 システム安全研究室 田中義和助教には、計算手法としては本研究と同様のメッシュフリー法に関する研究をなさっていることもあり、日頃から議論や相談にのってくださったおかげで、悩んだ状況を打破するきっかけを度々頂きました。

また、本学以外の先生方にも学会活動などの様々な場で大変良くして頂きました。佐賀大学 萩原世也教授、東京大学 越塚誠一教授、横浜国立大学 酒井譲教授には、国内外の講演会で先生方の主催するOSに参加させて頂き、数多くのアドバイスを頂きました。また、東京工業大学 大西有希助教、茨城大学 車谷麻緒講師には講演の際やその後の議論などで様々なご意見を頂きました。

学内外を問わず多くの先生方にサポートして頂いたことで今の私があると考えております。皆様のご指導・ご助力に、深く感謝申し上げます。

また、身近には博士課程後期まで残る者はいないという環境でしたが、地元である広島の友人、今も交流のあるバイトの仲間たち、卒業していった大学の同期、本研究室の先輩・後輩たちのおかげで孤独を感じることなく研究に励むことができました。皆さん、本当に有難うございました。

最後に、私のことを信じて見守り、ここまで一つのことを追求できる大変貴重な機会を与えてくれた両親、親族に心からの感謝を申し上げます。

平成 26 年 3 月 貞本 将太

目次

第1章 緒言	1
1.1 研究背景	1
1.2 メッシュフリー/粒子法の既往研究と本研究の意義	2
1.2.1 粒子法	2
1.2.2 メッシュフリー法	4
1.2.3 PUFEM	4
1.3 本論文の概要と構成	6
第2章 RKPMによる平板の線形解析	9
2.1 平板の変形と仮想仕事式	9
2.2 RKPM	11
2.2.1 平板の変形の近似	12
2.3 数値積分法	15
2.3.1 ボロノイ分割を用いたガウス積分	16
2.3.2 SCNI	17
2.3.3 SSCI	19
2.3.4 仮想仕事式の離散化	21
2.4 数値解析例	23
2.4.1 等分布荷重を受ける周辺単純支持正方形板	24
2.4.2 集中荷重を受ける周辺単純支持正方形板	26
2.4.3 等分布荷重を受ける長方形板	31
2.4.4 提案方法に関する考察	33
2.5 第2章結言	35
第3章 MPC法	36
3.1 MPC法を用いた基本境界条件の処理	36

3.1.1	基本境界条件の付与	36
3.1.2	自由度同期の条件の付与	38
3.1.3	剛性方程式の縮退	39
3.1.4	MPC法の適用に関する評価	40
3.2	複数の板の組合せ構造への適用	47
3.2.1	面内回転剛性の導入	47
3.2.2	板構造物の三次元的なモデル化	48
3.3	数値解析例	51
3.3.1	T型はりの曲げ解析	51
3.3.2	折れ曲がりを持つ板構造物の曲げ解析	53
3.4	第3章結言	56
第4章	平板の幾何学的非線形問題	57
4.1	幾何学的非線形解法	58
4.2	仮想仕事式の離散化	59
4.3	数値解析例	63
4.3.1	矩形パネルの座屈解析	63
4.3.2	防撓パネルの座屈解析	66
4.4	第4章結言	69
第5章	曲面座標系を用いたシェルの定式化	70
5.1	曲面座標系を用いた RKPM によるシェルの幾何学的非線形問題の定式化	71
5.1.1	板の変形と RKPM における曲面座標系	71
5.1.2	仮想仕事式の増分分解	74
5.2	RK による構成式の離散化	78
5.2.1	初期変位マトリクス	79
5.2.2	幾何剛性マトリクス	81
5.2.3	内力ベクトル	82
5.2.4	接線剛性方程式	82
5.2.5	有限回転を考慮した定式化	83

5.3	弧長増分制御の導入	86
5.3.1	超平面型拘束条件	88
5.3.2	超球面型拘束条件	90
5.3.3	radial-return による超球型拘束	91
5.3.4	scaled arc-length method	92
5.4	曲面座標系を用いた定式化による数値解析例	93
5.4.1	正方形板の座屈解析	93
5.4.2	長方形板の座屈解析	96
5.4.3	円筒シェルの座屈解析	99
5.4.4	Shallow-roof の飛び移り座屈解析	100
5.4.5	捩ったはりの曲げ解析	101
5.4.6	長方形板の巻き上げ解析	102
5.5	組合せ構造のための回転角成分の一般化	103
5.5.1	曲面上の回転自由度の一般化	103
5.5.2	曲面座標系の定式化における面内回転剛性	106
5.6	曲面座標系による定式化を用いた組合せ構造の幾何学的非線形解析	108
5.6.1	T型はりの曲げ解析	108
5.6.2	捩ったT型はりの曲げ解析	109
5.7	第5章結言	111
第6章	結言	112
	参考文献	114

第1章 緒言

本論文では、メッシュフリー/粒子法の一つである Reproducing Kernel Particle Method (RKPM) [1,2] を用いた板構造物の非線形解析に関する研究について報告する。本章では、本研究の背景、これまでのメッシュフリー/粒子法の研究と本研究の意義について述べ、本論文の概要と構成について示す。

1.1 研究背景

船舶、航空機、鉄道車両などの大型の輸送機器は、その構造部材の多くが薄板を組み合わせた構造によって構成されている。構造に大きな外力が働く場合は当然ながら、板の面方向に荷重が加わり耐力に影響を及ぼす場合も少なくない。面方向の圧縮荷重がある値まで達したとき板は座屈し、大きなたわみを発生させる。さらに大きな力が加われば座屈変形が進展し材料が塑性状態となり、やがて最終強度に到達し構造全体の崩壊に至る。従って、大変形である板の座屈/座屈後挙動を精確に予測し、材料や構造特性を評価することは機器の信頼性の観点から非常に重要なことであり、高精度な数値シミュレーションが行えることは必須である。

従来より固体/構造解析には有限要素解析 (Finite Element Analysis, FEA) [3-9] が一般的に用いられてきた。FEA では、連続体を細かい計算格子 (メッシュ) で分割し、その挙動を表現する。一方、メッシュフリー/粒子法はその名の通りメッシュを用いない数値解析手法であり、連続体内部に離散的に配置された節点や粒子と呼ばれる評価点によって連続体を離散化し、それらの点を用いて物理量の評価を行う。FEA においては極端にメッシュが歪んだとき精度に大きく影響を与える可能性や、破壊現象を表す際に逐一メッシュを要するなど、メッシュがあることに依存する難点があるが、メッシュフリー/粒子法ではそれらの問題をあらかじめ回避することができ、材料の破壊後の挙動の高精度な表現や構造流体連成問題などへの適用が期待できる。また、これまでのメッシュフリー/粒子法を用いた構造解析では、単純な

板一枚の解析を対象とした研究報告が多く、組合せ構造などのより現実的な構造物の解析があまりなされていない。このような背景から、本研究ではメッシュフリー/粒子法を用いた板構造物の非線形解析に着目した。

1.2 メッシュフリー/粒子法の既往研究と本研究の意義

Belytchko らによって Element Free Galerkin Method (EFGM) [10] が提案された 1990 年代半ばより、多くの研究者によってメッシュフリー/粒子法に関する研究が精力的に行われており、新しい解析手法の提案、数値積分法や境界条件の取り扱いに関する検討、そして様々な理工学分野への応用研究などが報告されてきた。これまでのメッシュフリー/粒子法に関する一連の研究は文献 [12-23] にまとめられている。これらのレビュー論文や参考書をもとに、メッシュフリー/粒子法に関する研究の概要についてまとめる。また、メッシュフリー法はメッシュレス法とも呼ばれるが、本研究ではメッシュフリー法と呼ぶことにする。

メッシュフリー/粒子法とは、従来の有限要素法 (Finite Element Method, FEM) や差分法、境界要素法などの従来用いられてきた解析手法と異なり、物体を節点や粒子で表現して固体、構造、熱流体問題を解析するための数値解析手法の総称である。近似関数の構成方法や離散化方法によってさまざまな解析手法に分類できるが、ここでは Smoothed Particle Hydrodynamics (SPH) [24-26] や Moving Particle Semi-implicit (MPS) [27] などの粒子法、EFGM [10], RKPM [1,2], H-P Clouds [11] や Meshless Local Petrov-Galerkin Method (MLPG) [28] などのメッシュフリー法、Partition of Unity (PU) 条件 [29,30] をもとに FEM の枠組みの中で近似関数を再構成する eXtended Finite Element Method (X-FEM) [31-33] などの Partition of Unity Finite Element Method (PUFEM) の三つに分類して説明を行う。

1.2.1 粒子法

粒子法の歴史は古く、Lucy [24], Gingold と Monaghan [25] によって提案された SPH が起源であり、天体シミュレーションへの適用が行われた。その後、非圧縮性流体、粘性流体問題、固体/構造解析への適用が行われてきている。SPH の利点として、流体解析では取扱いが困難とされる対流項を含まず解析を行えること、また固体

解析では粒子の相対的な挙動により物体の変形を表現することができるため破壊を含む大変形問題に利点を持つということが報告されている。物体の変形を Lagrange 的に表現できるためこれまでの解析手法と比較しても利点が多い一方、偏微分方程式を直接離散化するため、解析精度が必要とされる理工学の問題に適用するためにさまざまな修正が行われてきた。

SPH では、局所的に連続した流れの中だけで運動量、質量、エネルギー保存則が成立しているため、定常流れの連続性から生じる数値振動が発生する。この振動を防ぐために、人工粘性項、人口密度拡散などを連続の式に組み込んだ δ -SPH 法 [34] などが提案されている。また、SPH がカーネル関数の重ね合わせにより空間分布を構築するのに対して、越塚ら [27] の考案した MPS 法では各々の粒子が近傍の粒子に対して重み関数を持つ方法を用いる粒子間相互作用モデルによってこれを表現し、流体や固体の問題を陽的に解く。近年では、SPH はさまざまな修正や改良が加えられ流体解析を行うための現実的な解析手段となってきた。SPHysics [35] や ISPH [36] などのフリーソフト、Particleworks [37]、MPS RYUJIN [38] などの商用ソフトも充実してきており、今後の流体解析の分野において粒子法はますます発展を遂げるものと思われる。

一方で、固体/構造解析においては以下のような研究例がある。粒子法を用いた固体解析の例として、Libersky ら [39] が SPH を用いた高速衝突問題の解析を実施した。しかし、SPH を用いた固体解析では、tension instability と呼ばれる数値不安定性のために高精度な応力評価が難しいことが報告されている。この問題に対して、Randles ら [40,41] は新たに stress point を用いる新しい手法の提案を行っている。また、Dilts ら [42] は移動最小自乗法を用いたカーネル関数を SPH に導入する研究や、Bonet ら [43] は tension instability を回避するために corrected SPH (CSPH) を提案している。酒井ら [44] は SPH を用いた構造解析の基礎的検討を行い、関数近似や動的解析における精度検証について報告している。また、Shao ら [45] は MPS を用いて Reissner-Mindlin シェルの解析モデルに関する基礎的検討を実施している。しかし、粒子法を用いて具体的な構造物を高精度に解くまでには至っておらず、粒子法を用いた固体/構造解析は研究段階にある。

1.2.2 メッシュフリー法

Nayroles らは、メッシュを用いない解析手法として Diffused Element Method (DEM) [46] を提案した。DEMは移動最小自乗法 (Moving Least Square, MLS) を用いて物体中の物理量の近似を初めて行った解析手法である。その後、Belytchko らにより EFGM [10] が提案されてから、RKPM [1,2] やMLPG [28] など MLS 近似や Reproducing Kernel (RK) を用いたさまざまな数値解析手法が提案されている。また、前節で述べた粒子法では強形式を用いて離散化を行うことが多いが、これらのメッシュフリー法では弱形式を用いることが多く、応力やひずみなど微分量の高精度な評価が必要となる固体/構造解析に比較的多く用いられる方法である。このような、MLS 近似や RK を用いる解析手法の特徴として、FEM で用いられる内挿関数では要素間で不連続になるのに対して、連続な関数を用いるため高精度に応力やひずみを高精度に評価できること、一方で、FEA でのいわゆるクロネッカーデルタ特性を持たず、変位境界条件を規定する場合に節点を拘束することができない点がある。弱形式を用いることで低次の微分量を用いて解析を行うことができるため、解析精度が必要とされる構造問題にはメッシュフリー法の方が有利と思われる。

また、EFGM や RKPM に関する論文などは SPH で用いるカーネル関数と関連づけて議論しているものも多く、偏微分方程式を強形式、弱形式で解析するという違いはあるもののカーネル関数を用いて物体の変形を近似するという意味では粒子法とメッシュフリー法は類似の手法であると考えられる。

1.2.3 PUFEM

前節で示してきた粒子法やメッシュフリー法では、物体を点や粒子で表現して解析を行う解析手法であり、これらの方法は狭義のメッシュフリー法、または Intrinsic meshless methods [18] と呼ばれる。一方、それとは別に、FEM のモデル生成を軽減させるという意味で広義のメッシュフリー法、また Extrinsic meshless methods と呼ばれる解析手法も提案されてきた。広義のメッシュフリー法として、固定直交格子を用いて物体の離散化を行う方法としてボクセル法 [47] や、局所的に三角形や四面体要素により自動メッシュ分割を行い局所的に要素を生成するフリーメッシュ法 [48,49] などがある。これらの方法では、メッシュは用いるものの、従来型 FEM

で問題となるメッシュ生成を大幅に軽減できる方法である。

Babuška と Melenk ら [29,30] は PUFEM を提案し、解析領域内での近似関数の総和が 1 となる PU 条件を満足させることで近似精度を局所的に高精度できることを示した。この方法は、あらかじめ解の性質が既知である問題に対して、その特性を考慮した内挿関数を局所的に用いることができることを意味している。Belytchko らは、PUFEM の考えをもとに X-FEM [31–33] を提案した。線形破壊力学ではき裂先端ではある特異な変位場、応力場を持つこと、き裂面では変位が不連続になることが知られている。この特性を利用して、PU 条件に基づき拡充関数と呼ばれる新しい関数を導入することで解の高精度化を行うことを可能とした。X-FEM では、従来困難であったき裂進展解析も容易にできることから、三次元問題 [50]、弾塑性問題 [51]、動的問題 [52,53]、他の数値解析手法とのカップリング [54–56] など様々な研究が実施されている。

これまでに行われたメッシュフリー/粒子法を概観してみると、離散的な連続体である流体解析に関しては実現象を高精度に表現できる手法が確立されつつある一方で、固体/構造解析の分野では FEA に比べてあらゆる問題を一般的かつ定量的に高精度に評価するまでには至っていない。板構造物の解析についても同様であり、手法開発の観点から単純な問題を解いた例はいくつかあるものの、構造解析的な様々な問題や複数の板を組み合わせたようないわゆる板構造物の一般的な解析に関して詳細な検討はほとんどなされていない。これらのことから、本研究ではメッシュフリー/粒子法による板構造物の非線形解析を高精度に評価するための手法開発を行った。また本研究では、先に挙げたメッシュフリー法の中でも RK を用いた関数近似を採用した。RK は、SPH で用いるカーネル関数をもとに近似関数を構成する数値解析手法である。通常の SPH において、カーネル関数を配置するだけでは計算領域境界で PU 条件を満足することはできない。弱形式を用いた定式化において、PU 条件を満足しない関数を用いる場合、境界において解析精度の大幅な劣化が生じる。そこで、RKPM では SPH のカーネル関数に対していわゆる Consistency condition [1,2] を満足するように関数を再構成して PU 条件を満足させる関数 (RK) を用いる。RKPM が提案された後、その近似関数 RK の持つ数学的性質に関する研究 [57,58] や、RK を用いた新しい数値解析手法の提案 [59–62] などが行われている。

1.3 本論文の概要と構成

板構造の数値解析では、古くからある数理モデルである古典的なはりや板の理論 [63] に基づいて定式化が行われる。ただし、板の釣合方程式はたわみに関する 4 階微分の方程式であり、近似関数の高階な偏微分が要求されるため通常は弱形式の仮想仕事式に基づいて離散化が行われる。FEA でもこれは同様であり、メッシュフリー/粒子法を用いた研究では以下のような研究例がある。Krysl らは EFGM を用いた板曲げ解析 [64]、シェルの解析 [65] を行い、Long らは MLPG を用いた薄板の曲げ問題 [66] を行った。Wang らは Hermite 近似を用いる Hermite Reproducing Kernel Particle Method (HRKPM) [67–69] を提案した。また、板を直接三次元的な連続体として取り扱う方法なども提案されている [70–72]。本研究では古典的板理論に基づく研究例に倣い、Mindlin-Reissner 板理論に基づいて RKPM による定式化を行った。単純な板曲げ問題についてのみの定式化は Wang らによって行われており [73]、本研究でも同様の定式化を用いた。微小変形の板曲げ問題のみについて考えれば、面内変形成分は面外変形成分に対して非常に微小と考えることができるため、面内変形の自由度は考慮されることが無い。しかし板の一般的な変形を取り扱うことを考えればこれらの自由度も考慮する必要があるため、初めに面内変形成分 2 自由度、面外変形成分 3 自由度の合わせて 5 自由度を有する平板の線形解析のための定式化を行った。

一般的に、メッシュフリー/粒子法の形状関数は FEA でのいわゆる Kronecker-Delta 特性を持たず、単純に自由度を縮退するのみでは基本境界条件が定義できない。そのため、基本境界条件を定義するための方法が種々提案されており、ペナルティ法 [74] [75]、ラグランジュの未定乗数法 [10]、FEA との連成 [76–78]、Full Transformation Method [79]、Mixed Transformation Method と Singular Kernel [80] などがある。ここで板構造の計算モデルに課される基本境界条件について考えれば、単なる変位の拘束に限らず構造の周期性や対称性などを考慮した特殊な基本境界条件が与えられることがしばしばある。これらの条件を一般的に取り扱うために、本手法では多点拘束 (Multiple-Point Constraint, MPC) 法を用いることにした。これまでにメッシュフリー解析において MPC 法を用いた例は文献 [81–84] などのようにいくつかあるものの、適用に関する詳細な検証は行われていないため、本研究ではその検証を行った。さらにはこの方法を応用することで複数の板を組み合わせた構造系のモデル化

を可能にした。

次に有限変形，つまり幾何学的な非線形挙動について考えた。本来，物体にある荷重が加われば，その物体は時々刻々と変形していくため，その都度エネルギーが釣合を保った平衡状態でなければならない。そのため，有限変形を考慮した構造解析では構造の時々刻々の変形に追従するひずみテンソル，応力テンソルを用いて仮想仕事式が構成される。本研究でもこの厳密な仮想仕事式を用いて定式化をすることで，平板の線形問題の定式化から幾何学的非線形問題への拡張を行った。ただし，一般的な構造物は様々な曲面を有しており，また座屈/座屈後解析などの計算モデルでは座屈変形のための初期不整として僅かにたわんだ初期形状を持たせて計算を行う。このことから次に，面内に埋め込まれた曲面座標系を導入して任意曲面を解くための定式化を行った。

以上により，RKPMを用いて一般的な板構造物の非線形解析を扱うことができる手法を開発した。本論文の構成を以下に示す。

第2章では，RKPMを用いた平板の線形解析について説明する。RK近似を用いた関数近似方法，線形問題における仮想仕事式の定式化と離散化を示し，本手法における節点積分方法について示す。節点積分については計算モデルに課される境界条件による応力状態を考慮する必要がある，この点に関する検討を含めて数値解析例を示す。

第3章では，メッシュフリー/粒子法におけるMPC法による境界条件の取り扱いについて説明する。基本境界条件の付与方法，自由度の同期方法について示した後，MPC法を扱う際に留意すべき事項を数値解析例による検証と共に示す。また，自由度を同期する方法の応用として，複数の板の組合せ構造の計算を扱うための方法と数値解析例を示す。

第4章では，先に示した平板の微小変形の定式化を有限変形を取り扱うための幾何学的非線形問題へと拡張する。基礎となる仮想仕事式は変位に関して非線形となる方程式であるため，方程式の増分分解と線形化によって解くべき増分系の方程式を導いた後にRK近似による離散化を行う。定式化の妥当性を検証するため数値解析例を示す。

第5章では、任意曲面のための曲面座標系を用いたシェルの定式化を示す。第4章に示した定式化は平板に限定されたものであり、曲面を表現することを考えると不便である。FEAであれば1つのメッシュが連続体として考えられているため、それを連ねて近似的に曲面を表現できるが、メッシュフリー/粒子法においては基本的に1枚の板全体を1つの連続体として考えるため、この方法は当てはまらない。従って本章では、曲面内に埋め込まれた曲面座標系を用いて幾何学的非線形問題の定式化を行い、数値解析例によってその妥当性を検証した。

第6章では、本論文に示した内容のまとめを行う。

第2章 RKPMによる平板の線形解析

本章では板構造物の線形問題を扱うための平板の定式化について示す。また本研究ではメッシュフリー/粒子法的一种である RKPM に基づいた関数近似を行い、板の変形を表現する。RKPM における近似関数の構成方法や構成式の離散化方法、数値積分手法などについて説明し、数値解析例によって定式化の妥当性を示すと共に数値積分方法に関する考察を行う。

2.1 平板の変形と仮想仕事式

古典的な板曲げ問題における微小変形理論に基づく板理論では、面内変形方向の変形は面外変形に対して微小なものとして無視されるが、現実的な板構造物の解析を行うためには、当選ながら面内方向の変形と面外方向の変形の双方を考慮し、それらを連成させた定式化を行う必要がある。本手法では、面内変形は平面応力問題として取り扱い、面外変形はせん断変形を考慮した Mindlin-Reissner の板曲げ問題として取り扱う。図 2.1 に x_1x_2 平面に接する平板の板曲げ解析でのモデルを示す。ここで、 S は表面積、 t_h は板厚、 $V = (S \times t_h)$ は体積、 L は板の境界を表す。また、 P は平板に加わる圧力、 m は曲げモーメント、 σ と τ はそれぞれ平板に加わる直応力とせん断応力である。面内変形成分は x_1, x_2 方向の 2 成分 u_{1mid}, u_{2mid} 、面外変形成分はたわみ u_3 及び x_1, x_2 軸回りの回転角 θ_1, θ_2 の 3 成分を用いる。これより、板内の変位 $\mathbf{u}(\mathbf{x})$ は次式のように表すことができる。

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}) = \begin{Bmatrix} u_1(\mathbf{x}) \\ u_2(\mathbf{x}) \\ u_3(\mathbf{x}) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} u_{1mid}(\mathbf{x}) + z\theta_2(\mathbf{x}) \\ u_{2mid}(\mathbf{x}) - z\theta_1(\mathbf{x}) \\ u_3(\mathbf{x}) \end{Bmatrix} \quad (2.1)$$

u_i ($i = 1, 2, 3$) はカーテシアン座標系 x_i に関する変位成分であり、 z は板厚内の中立軸からの座標 ($|z| \leq t_h/2$) を表す。また、 θ_i ($i = 1, 2$) は図 2.1 にそれぞれ示す x_i 軸

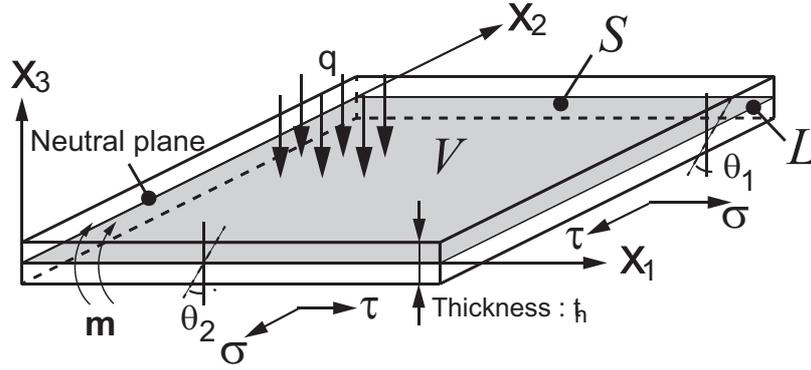


Fig. 2.1: Plate bending problem

回りの回転角である．次に，ひずみテンソルを定義する．ここでは板構造物の線形解析のためのひずみとして次式を用いる．

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \frac{1}{2} \left\{ \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \mathbf{x}} + \frac{\partial \mathbf{u}^T}{\partial \mathbf{x}} \right\} = \frac{1}{2} \left\{ \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right\} \mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j \quad (2.2)$$

ここで， \mathbf{e}_i ($i = 1, 2, 3$) はカーテシアン座標系における直交基底ベクトルである．応力テンソル $\boldsymbol{\sigma}$ はひずみテンソル $\boldsymbol{\varepsilon}$ とせん断成分を含む構成則テンソル \mathbf{D} の積として次式のように表される．

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{D}\boldsymbol{\varepsilon} \quad (2.3)$$

平面応力場の仮定から，構成則テンソルは次式に表される 5 成分の弾性マトリクスとなる．

$$\mathbf{D} = \frac{E}{1-\nu^2} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 & 0 & 0 \\ \nu & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \kappa \frac{1-\nu}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \kappa \frac{1-\nu}{2} \end{bmatrix} \quad (2.4)$$

ここで， E は弾性係数， ν はポアソン比， κ はせん断補正係数である．式 (2.2) の応力-ひずみ関係を用いて仮想仕事式は次のように表される．

$$\int_V \boldsymbol{\sigma} : \delta \boldsymbol{\varepsilon} dV = \int_L \bar{\mathbf{t}} \cdot \delta \mathbf{u} dL + \int_S \bar{q} \cdot \delta u_3 dS + \int_L \bar{\mathbf{m}} \cdot \delta \boldsymbol{\theta} dL \quad (2.5)$$

ここで， $\bar{\mathbf{t}}$ ， \bar{q} ，及び $\bar{\mathbf{m}}$ はそれぞれ境界上での引張力，分布荷重，曲げモーメントの規定値である．式 (2.1) を式 (2.2) に代入し次節に示す関数近似や節点積分を行うことで式 (2.5) を離散化し，剛性方程式を得る．

2.2 RKPM

本節では RKPM を用いた関数近似について示す。RKPM では Reproducing Kernel (RK) を近似関数に用いた RK 近似により空間に配置された関数の近似を行う。RK は解析領域内に分散された節点上に定義され座標の関数として与えられる。物理量は評価点からある一定距離 (サポート) 内に存在する RK と値 (係数) との重ね合わせとして次のように表される。

$$a^h(\mathbf{x}) = \sum_{I=1}^{NP} \psi_I(\mathbf{x}) a_I \quad (2.6)$$

ここで、 $a(\mathbf{x})$ は近似される物理量であり、 a_I は各節点における係数であるが、クロネッカーデルタ特性を持たないという性質上、関数 $a(\mathbf{x})$ そのものと各節点における値は一致せず $a(\mathbf{x}_I) \neq a_I$ である。NP は近似に用いる総節点数であり、各節点のサポート外に存在するカーネル関数の値はゼロとなる。また、式 (2.6) の I 番目の節点に位置する RK $\psi_I(\mathbf{x})$ は基本となるカーネル関数 $\phi_I(\mathbf{x})$ に対して基底 $\mathbf{h}(\mathbf{x})$ および係数ベクトル $\mathbf{b}(\mathbf{x})$ を用いて次式のように表される。

$$\psi_I(\mathbf{x}) = \mathbf{h}^T(\mathbf{x}_I - \mathbf{x}) \mathbf{b}(\mathbf{x}) \phi_I(\mathbf{x}_I - \mathbf{x}) \quad (2.7)$$

本研究において RK は二次元平面内の座標による関数であり、 $\mathbf{h}(\mathbf{x})$ は n 次の基底を表すベクトル、 $\mathbf{b}(\mathbf{x})$ は次式に示される Reproducing Condition (RC) [1] [2] を満たすための係数ベクトルである。

$$\sum_{I=1}^{NP} \psi_I(\mathbf{x}) x_1^i x_2^j = x_1^i x_2^j, \quad (0 \leq i + j \leq n) \quad (2.8)$$

また RK の基本となるカーネル関数 $\phi_I(\mathbf{x}_I)$ には次式の Cubic spline を用いる。

$$\phi_I(\mathbf{x}_I - \mathbf{x}, h) = \frac{10}{7\pi h^2} \begin{cases} 1 - \frac{3}{2}s^2 + \frac{3}{4}s^3 & (0 \leq s \leq 1) \\ \frac{1}{4}(2-s)^3 & (1 \leq s \leq 2) \\ 0 & (2 \leq s) \end{cases} \quad (2.9)$$

ここで、 h は影響半径を決定するパラメータであり、 $s(=|\mathbf{x}_I - \mathbf{x}|/h)$ は h に応じて一般化された評価点からの節点間距離である。Cubic spline の形状は 図 2.2(a) に示され、また RK の形状は節点配置により形状は異なるが、一般的な形状は 図 2.2(b) に示される。

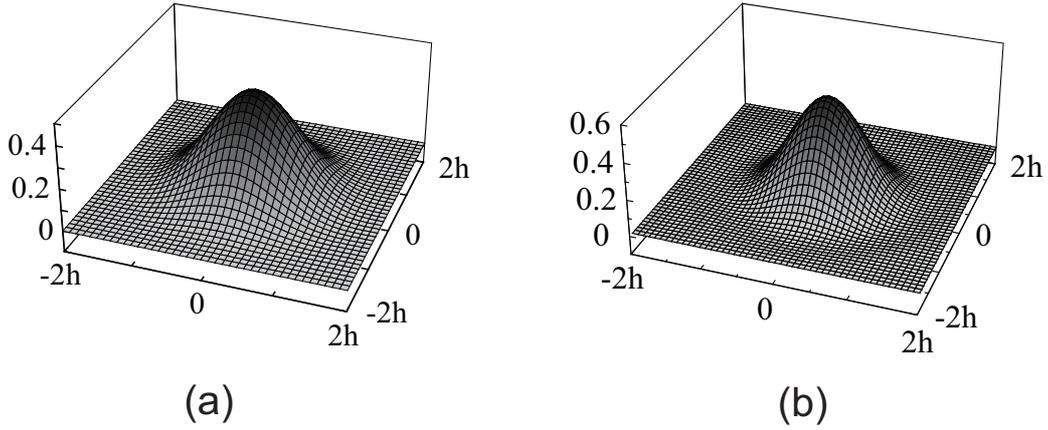


Fig. 2.2: Shape of kernel function [(a) Cubic spline, (b) General RK]

ここで RK を構成するための条件 RC について考える.

$$\sum_{I=1}^{NP} \psi_I(\mathbf{x}) x_{1I}^i x_{2I}^j = x_1^i x_2^j, \quad (0 \leq i + j \leq n) \quad (2.10)$$

この式を操作しベクトル形式で書き直すと,

$$\sum_{I=1}^{NP} \psi_I(\mathbf{x}) \mathbf{h}(\mathbf{x}_I - \mathbf{x}) = \mathbf{h}(\mathbf{0}) \quad (2.11)$$

と表せる. 式 (2.11) に式 (2.7) を代入すると次式の係数 $\mathbf{b}(\mathbf{x})$ についての方程式が得られる.

$$\mathbf{M}(\mathbf{x}) \mathbf{b}(\mathbf{x}) = \mathbf{h}(\mathbf{0}), \quad (2.12)$$

$$\mathbf{M}(\mathbf{x}) = \sum_{I=1}^{NP} \mathbf{h}(\mathbf{x}_I - \mathbf{x}) \mathbf{h}^T(\mathbf{x}_I - \mathbf{x}) \phi_{aI}(\mathbf{x}_I - \mathbf{x}) \quad (2.13)$$

式 (2.12) を解くことで $\mathbf{b}(\mathbf{x})$ が求まり, すなわち次式の RK $\psi_I(\mathbf{x})$ の一般形を導くことができる.

$$\psi_I(\mathbf{x}) = \mathbf{h}^T(\mathbf{0}) \mathbf{M}^{-1}(\mathbf{x}) \mathbf{h}(\mathbf{x}_I - \mathbf{x}) \phi_{aI}(\mathbf{x}_I - \mathbf{x}) \quad (2.14)$$

2.2.1 平板の変形の近似

RK 近似を用いた平板の離散化を図 2.1(b) に示す. 中立平面に節点を分散し, これらの節点分布に基づいて RK を導き, 各物理量の近似を行う. 図 2.4(a) に示すように, それぞれの節点は面内変形成分 (u_{1mid}, u_{2mid}) , 面外変形成分 $(u_3, \theta_1, \theta_2)$ の計 5 自

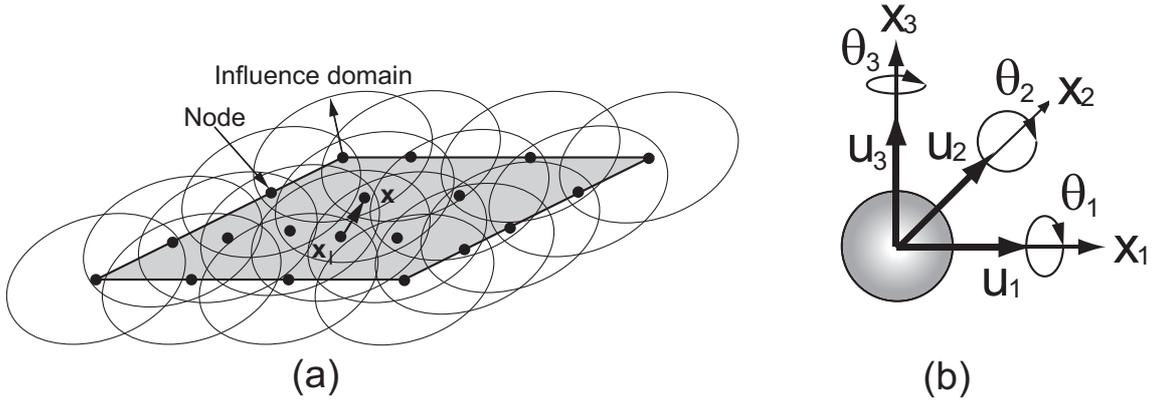


Fig. 2.3: Descretization using a meshfree method [(a) meshfree discretization for a rectangular plate, (b) Degrees of freedom]

自由度を持ち，全ての自由度に対して RK 近似を行う．表記の簡略化のため，それぞれの成分をまとめて $\mathbf{d} = \{ d_1 \ d_2 \ d_3 \ d_4 \ d_5 \}^T = \{ u_{1mid} \ u_{2mid} \ u_3 \ \theta_1 \ \theta_2 \}^T$ と表し，各成分 $d_i (i = 1, \dots, 5)$ を次のように RK を用いて近似する．

$$d_i^h(\mathbf{x}) = \sum_{I=1}^{NP} \psi_I(\mathbf{x}) d_{iI} \quad (2.15)$$

ここで， $d_{iI} (I = 1, \dots, NP)$ は各節点におけるそれぞれの変形成分に対する係数ベクトルである．さて，ここで改めて式 (2.8) の条件 RC について考える．

$$\sum_{I=1}^{NP} \psi_I(\mathbf{x}) x_{1I}^i x_{2I}^j = x_1^i x_2^j, \quad (0 \leq i + j \leq n) \quad (2.16)$$

単純に連続体の変位成分を近似することのみを考えれば，RK の基底 $\mathbf{h}(\mathbf{x})$ には 1 次基底を用い， $n = 1$ とすれば十分であるが，本手法は板曲げ問題を取り扱う．板曲げ問題では RC に加えて Kirchhoff Mode Reproducing Condition (KMRC) [67] [73] という薄板の曲げモードを保証する条件を満たす必要がある．

薄板の純曲げモードを \bar{w} とすると，次のように座標に関する 2 次式で表せる．

$$\bar{w}_I = \sum_{i+j=0}^2 c_{ij} x_{I1}^i x_{I2}^j, \quad (2.17)$$

ここで， c_{ij} は曲げモードに応じた任意の定数であり， I は I 番目の節点上における値を示す．Kirchhoff の仮定が成り立つとき，純曲げモード \bar{w} の偏微分形としてたわ

み角 $\bar{\beta}_{I1}$ と $\bar{\beta}_{I2}$ が次式のように表せる.

$$\bar{\beta}_{I1} = \sum_{i+j=1}^2 i c_{ij} x_{I1}^{(i-1)} x_{I2}^j \quad (2.18)$$

$$\bar{\beta}_{I2} = \sum_{i+j=1}^2 j c_{ij} x_{I1}^i x_{I2}^{(j-1)} \quad (2.19)$$

なお, $x_1 x_2$ 平面に接する平板について考え軸回りの回転角 θ_i を用いてたわみ角 β_i を表せば, $\beta_1 = \theta_2$, $\beta_2 = -\theta_1$ である. KMRC は Kirchhoff の仮定が成り立つこと, すなわち曲率が一樣であり, せん断ひずみが 0 となるという次式を満たすものである.

$$\bar{\kappa}_{Iij}^h = \sum_{I=1}^{NP} \frac{1}{2} (\psi_{I,j} \bar{\beta}_{Ii} + \psi_{I,i} \bar{\beta}_{Ij}) = \text{const.} \quad (2.20)$$

$$\bar{\gamma}_{Ik}^h = \sum_{I=1}^{NP} (\psi_{I,k} \bar{w}_I - \psi \bar{\beta}_{Ik}) = 0 \quad (2.21)$$

where $\{i, j\} = \{1, 2\}$, $k = \{1, 2\}$

ここで, $\bar{\kappa}_{Iij}^h$, $\bar{\gamma}_{Ik}^h$ はそれぞれ節点 I における曲率とせん断ひずみであり, $\psi_{I,i}$ ($i = 1, 2$) は ψ_I の x_i ($i = 1, 2$) 方向の偏微分を表す. 文献 [73] によれば, 式 (2.20), (2.21) より次式が導かれる.

$$\sum_{I=1}^{NP} \psi_{I,i} [(x_1^k x_2^l)_{,j}]_I = (x_1^k x_2^l)_{,ij} = \text{const.} \quad (2.22)$$

for $k + l = 0, 1, 2$

表 2.1 は厳密なモードに基づいて近似されたモードの誤差を示している. 計算モデルは 11×11 の節点を規則的に配置したものを用いた.

Table 2.1: Error norms of the pure bending mode

	(i)	(ii)	(iii)
Linear	7.84E+00	9.52E-01	9.52E-01
Bi-linear	2.79E+00	8.53E-01	8.53E-01
Quadratic	0	0	0

ここで、 \mathbf{h}_L , \mathbf{h}_{BL} , \mathbf{h}_Q はそれぞれ 1 次基底, 2 元 2 次基底, 完全 2 次基底を示す.

$$\mathbf{h}_L^T = \{ 1 \quad x_1 \quad x_2 \} \quad (2.23)$$

$$\mathbf{h}_{BL}^T = \{ 1 \quad x_1 \quad x_2 \quad x_1x_2 \} \quad (2.24)$$

$$\mathbf{h}_Q^T = \{ 1 \quad x_1 \quad x_2 \quad x_1^2 \quad x_1x_2 \quad x_2^2 \} \quad (2.25)$$

表 2.1 において (i) は純曲げモード \bar{w} , (ii), (iii) は偏微分 $\partial\bar{w}/\partial x_i$ ($i = 1, 2$) についての誤差である. RK が 1 階微分可能であれば式 (2.22) が満たされることは自明であるが, 完全 2 次基底を用いなければ純曲げモードを表現するに足りず, 関数近似上の誤差が生じてしまうことが表 2.1 からわかる. このことから, 本研究では RK の基底 \mathbf{h} には完全 2 次基底を用いることとする.

2.3 数値積分法

式 (2.5) に示される仮想仕事式に対して, 一般的なメッシュフリー/粒子法では節点上で形状関数を直接足し合わせる節点積分法で剛性マトリクスの数値積分を行う. しかしながら, 連続体が節点や粒子のみによってモデル化されるメッシュフリー/粒子法では連続体の明確な境界が存在せず, 通常 of 節点積分法を取った場合にはいわゆる積分拘束を満足できないため, 偽の剛体変位モードを持つ解が存在する. 積分拘束とは次式によって表される系のエネルギーの発散を抑える divergence-free 条件である.

$$\int_{\Omega} \bar{\mathbf{B}}_I d\Omega = \mathbf{0} \quad (\text{for } I \text{ in interior nodes}) \quad (2.26)$$

$$\int_{\Omega} \bar{\mathbf{B}}_I d\Omega = \int_{\Gamma} \mathbf{n}_I d\Gamma \quad (\text{for } I \text{ in exterior nodes}) \quad (2.27)$$

ここで, $\bar{\mathbf{B}}_I$ は点 (\mathbf{x}_I) を中心とする RK による面内, 及び面外方向に関わる変位-ひずみ変換マトリクス, \mathbf{n}_I は点 (\mathbf{x}_I) を母点とする領域の法線ベクトルである.

このような理由から, メッシュフリー/粒子法における剛性マトリクスの数値積分には従来から様々な方法が提案されている. 例えば EFGM では, 一般的にバックグラウンドセルと呼ばれる領域を用いて数値積分を行う. 一方, RKPM の数値積分法としては Stabilized Conforming Nodal Integration (SCNI) [85] [86] や SCNI の積分領域をさらに細かくした Sub-domain Stabilized Conforming Integration (SSCI) [67]

が提案されており，本研究でもこれに倣い SCNI，及び SSCI を用いて数値積分を実施している．SCNI，SSCI では節点配置に対応したボロノイ分割による仮想的な積分領域を配置することで連続体領域を適切に定義し，これに加えてガウスの発散定理を適用する．

本節では本手法における数値積分に関して，(1) ボロノイ分割により分割された領域にガウス積分を実施する方法，(2) (1) にガウスの発散定理を用いる SCNI，(3) SCNI における積分領域をさらに細かくした SSCI，の 3 種の積分方法について説明する．

2.3.1 ボロノイ分割を用いたガウス積分

板の中立面上に節点を配置してボロノイ分割によって積分領域を配置すると，図 2.4 のように分割することができる． \mathbf{x}_K は K 番目の節点の座標であり，各々の積分領域 Ω_K を三角形に分割して値を重ね合わせ，最終的な重みを Ω_K の面積 A_K とすれば領域 Ω_K の形状に関わらず適切に積分を実施できる．式 (2.2) に定義されるひずみの各成分には変位とその偏微分についての項が存在する．これらをそれぞれ $d^h(\mathbf{x})$ ， $d_{,i}^h(\mathbf{x})$ ($i = 1, 2$) として，各々の領域について積分すると，それぞれ次のように表せる．

$$\begin{aligned}
\tilde{d}_{j,k}^h(\mathbf{x}_K) &= \frac{1}{A_K} \int_{\Omega_K} d_{j,k}^h(\mathbf{x}_K) d\Omega \\
&= \frac{1}{A_K} \sum_{i=1}^{NC} \int_{\Omega_{K_i}} d_{j,k}^h(\mathbf{x}_{K_i}) d\Omega \\
&= \frac{1}{A_K} \sum_{i=1}^{NC} \sum_{I=1}^{NP} \int_{\Omega_{K_i}} \psi_{I,j} d_{kI} d\Omega
\end{aligned}$$

where $j = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, $k = \{1, 2\}$ (2.28)

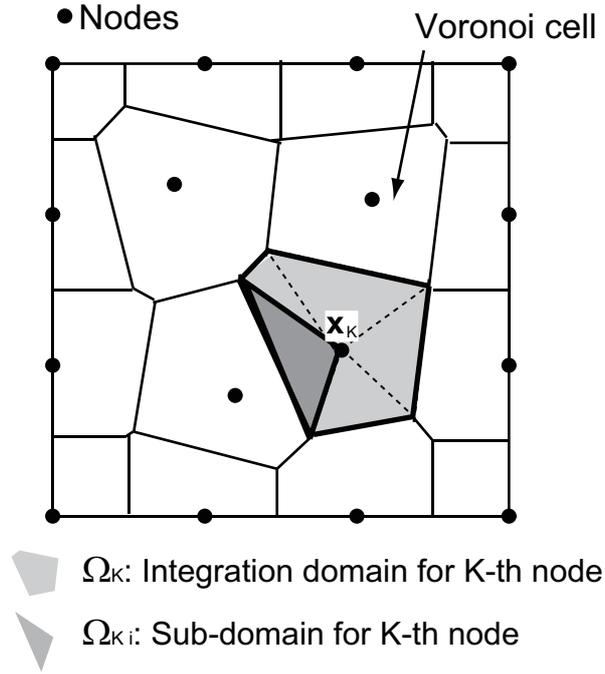


Fig. 2.4: Voronoi diagram for Gauss integration

$$\begin{aligned}
 \tilde{d}_j^h(\mathbf{x}_K) &= \frac{1}{A_K} \int_{\Omega_K} d_j^h(\mathbf{x}_K) d\Omega \\
 &= \frac{1}{A_K} \sum_{i=1}^{NC} \int_{\Omega_{K_i}} d_j^h(\mathbf{x}_{K_i}) d\Omega \\
 &= \frac{1}{A_K} \sum_{i=1}^{NC} \sum_{I=1}^{NP} \int_{\Omega_{K_i}} \psi_I d_{jI} d\Omega
 \end{aligned}$$

$$\text{where } j = \{1, 2, 3, 4, 5\} \quad (2.29)$$

ここで、 NC は Ω_K 内の三角形領域 Ω_{K_i} の数であり、各々の三角形の面積分にはガウス積分を用いる。

2.3.2 SCNI

本節ではSCNIについての説明を行う。変位の偏微分項 $\tilde{d}_{i,j}^h$ に関する式式 (2.28) においてガウスの発散定理を適用すれば、次式のように面積分を領域境界上の線積分

へと変換することができる.

$$\begin{aligned}
 \tilde{d}_{i,j}^h(\mathbf{x}_K) &= \frac{1}{A_K} \int_{\Omega_K} d_{i,j}^h(\mathbf{x}_K) d\Omega = \frac{1}{A_K} \int_{\Gamma_K} d_i^h(\mathbf{x}_K) n_j d\Gamma \\
 &= \sum_{I=1}^{NP} \frac{1}{A_K} \int_{\Gamma_K} \psi_I(\mathbf{x}_K) n_j d_{iI} d\Gamma \\
 &= \sum_{I=1}^{NP} b_{Ij}(\mathbf{x}_K) d_{iI}, \quad \text{where } i = \{1, 2, 3, 4, 5\}, j = \{1, 2\} \quad (2.30)
 \end{aligned}$$

スカラー $b_{Ii}(\mathbf{x}_K)$ は次のように表される.

$$b_{Ii}(\mathbf{x}_K) = \frac{1}{A_K} \int_{\Gamma_K} \psi_I(\mathbf{x}_K) n_i d\Gamma, \quad i = \{1, 2\} \quad (2.31)$$

ここで, n_i ($i = 1, 2$) は図 2.5 に示される Γ_K 上の法線ベクトル \mathbf{n} の x_1, x_2 軸方向成分である. 式 (2.31) の線積分にはガウス積分を適用する. RK は 5 次多項式となるが, ガウス積分では n 個の積分点数につき $2n - 1$ 次の精度が保証されることから, 各線分に対して 5 点のガウス積分を実施し十分な積分精度を確保する.

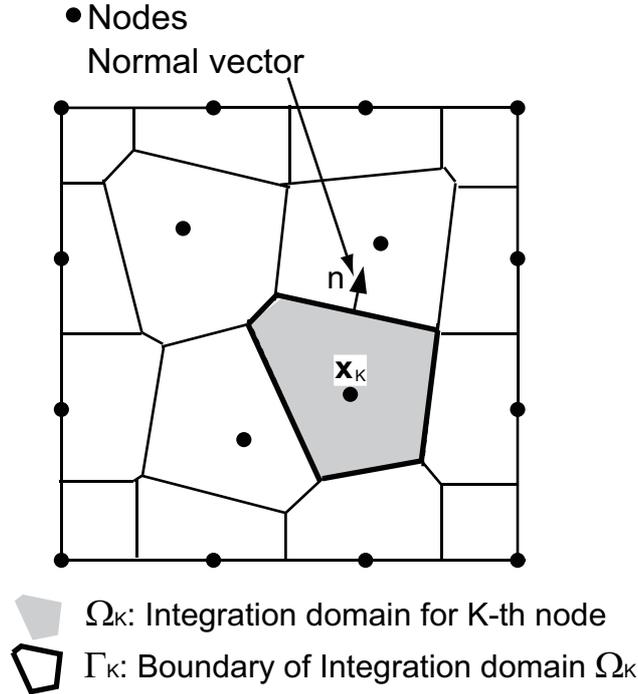


Fig. 2.5: Schematic illustration of SCNI

前項で示した方法と SCNI は基本的には等価なものであるが, 形状関数の偏微分を省くことができ積分領域境界の積分のみで済むことなどの利点から, RKPM を用

いた数値解析ではしばしば用いられる．また SCNI を用いれば，図 2.6 にも見られるとおり，連続体領域内では隣り合う領域同士で逆向きの法線を持つため式 (2.26) は満たされ，境界領域においては式 (2.27) が満たされる．

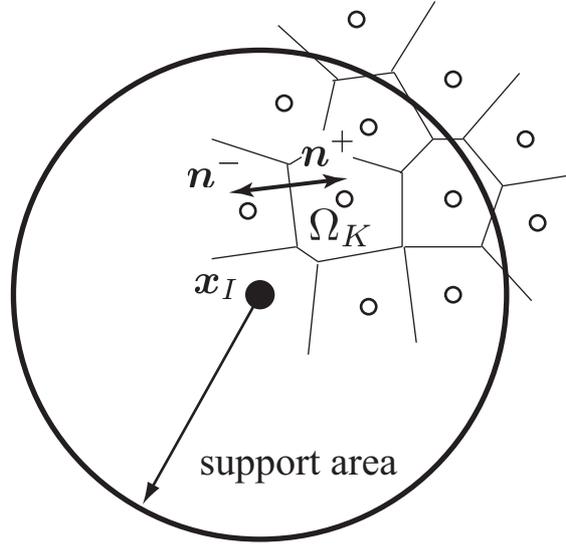


Fig. 2.6: Geometry of nodal domain Ω_K

前項の方法は SCNI と等価であり，また次項の SSCI についても SCNI の領域を細分化したものであるから，これらの方法は全て積分拘束を満足することがわかる．なお，参考とした文献 [73] では関数の偏微分形でない \tilde{d}_i^h は節点上で直接形状関数の値を足し合わせているが，これについては不規則配置の際の空間的補間の観点から前 2.3.1 項の方法をそのまま用いる．

2.3.3 SSCI

本項では SSCI について説明する．SSCI は SCNI を拡張した方法として，Wang ら [99] によって提案された．Wang らは薄板の挙動を高精度に表すために Hermite 補間に基づき C^1 連続となる HRK 近似を提案したが，HRK は基底ベクトルにその偏微分形を含むため，関数形状は通常の RK に比べてやや複雑である．これに加えて弱形式は 2 階の導関数であることから，偏微分の階数を落として数値積分の精度を確保するために SCNI の領域を細分化した SSCI が用いられている．HRKPM と SSCI を用いた研究例では他にも，薄板の自由振動問題 [68] や過渡応答解析 [69] などへの適用に関する議論も行われている．このように SSCI は HRK 近似の性質を考慮して

提案された数値積分法であるため、RK 近似を用いた解析の数値積分に SSCI を用いた例は著者の知る限りでは存在しない。なぜなら、剛性マトリクスの数値積分を実施するという目的のみにおいては SCNI で十分な精度が得られるからである。メッシュフリー/粒子法による固体/構造解析でこれまでに取り扱われた例題について考えてみると、矩形板や円板について全体の応力状態が一様となる基礎的な問題が多い。一方で、本研究で取り扱う一般的な板構造物の解析について考えると、その構造物が板の内部で集中荷重や変位拘束を受けることにより局所的に応力が変化することが予想される。このとき、これまで用いてきた SCNI のみではその応力状態を正確に表現することができず、精度が不十分となることが確認された。これは節点が計算領域内の中心に位置し、そのうえで急激にひずみや応力が変化することによるメッシュフリー/粒子法特有の問題であり、要素境界上に節点が存在する FEA では考慮されない問題である。形状関数の基底に高次関数を適用することにより回避することも考えられるが、その方法は計算コストの面からもよい手段とは言えない。本研究ではこの数値積分方法に関する問題の回避策の 1 つとして RK 近似に SSCI を適用することを提案する。

SSCI ではその名の通り 2.3.1, 2.3.2 項で用いた積分領域 Ω_K を図 2.7 に示されるような細かい領域 Ω_{K_i} に分割し、その領域を計算単位として領域の重心 \mathbf{x}_{K_i} を評価点とする積分を実施する。

$$\tilde{d}_{j,k}^h(\mathbf{x}_{K_i}) = \sum_{I=1}^{NP} b_{Ik}(\mathbf{x}_{K_i}) d_{jI}$$

where $j = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, $k = \{1, 2\}$ (2.32)

スカラー $b_{Ij}(\mathbf{x}_{K_i})$ は次のように表される。

$$b_{Ij}(\mathbf{x}_{K_i}) = \frac{1}{A_{K_i}} \int_{\Gamma_{K_i}} \psi_I(\mathbf{x}_K) n_j d\Gamma \quad j = \{1, 2\} \quad (2.33)$$

ここで、 A_{K_i} は Ω_{K_i} の面積であり、 n_i ($i = 1, 2$) は Γ_{K_i} 上の法線ベクトル \mathbf{n} の各軸方向成分である。式 (2.31) の線積分には SCNI と同様にガウス積分を用いる。 $\tilde{d}_{j,k}^h(\mathbf{x}_{K_i})$ の項の積分は前項と同様であるが、積分単位が Ω_{K_i} であるため、その重みは面積 A_{K_i} となる。

Physical value evaluation points

Normal vector

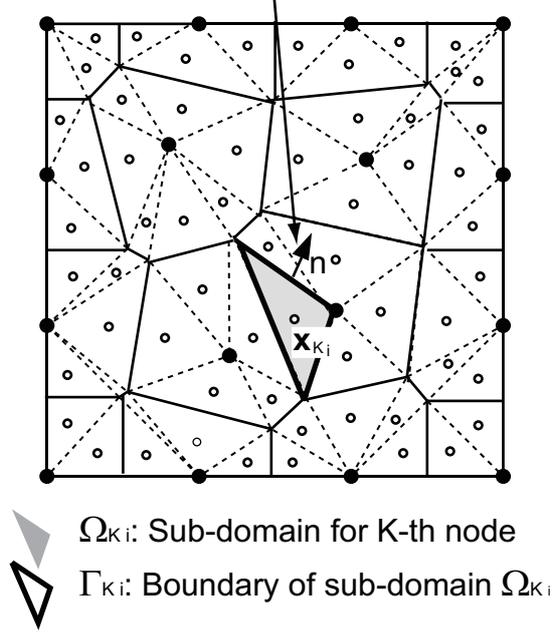


Fig. 2.7: Schematic illustration of SSCI

2.3.4 仮想仕事式の離散化

式(2.15)で示したRK近似による変位の近似式を用いて式(2.2)に示されるひずみテンソルの5成分について考えると、ひずみ-節点変位変換マトリクスは次のように表される。

$$\left\{ \varepsilon_{11} \quad \varepsilon_{22} \quad 2\varepsilon_{12} \quad 2\varepsilon_{31} \quad 2\varepsilon_{23} \right\}^T = \sum_{I=1}^{NP} \mathbf{B}_I \mathbf{U}_I \quad (2.34)$$

ここで、 \mathbf{B}_I , \mathbf{U}_I は変位-ひずみ変換マトリクス、変位の係数ベクトルであり以下のように表すことができる。

$$\mathbf{B}_I = \begin{bmatrix} b_{I1} & 0 & 0 & 0 & zb_{I1} \\ 0 & b_{I2} & 0 & -zb_{I2} & 0 \\ b_{I2} & b_{I1} & 0 & -zb_{I1} & b_{I2} \\ 0 & 0 & b_{I,1} & 0 & \psi_I \\ 0 & 0 & b_{I,2} & -\psi_I & 0 \end{bmatrix} \quad (2.35)$$

$$\mathbf{U}_I = \left\{ d_{1I} \quad d_{2I} \quad d_{3I} \quad d_{4I} \quad d_{5I} \right\}^T \quad (2.36)$$

ここで, $b_{Ii}, (i = 1, 2)$ は SCNI や SSCI により得られた線積分の項であり, ψ_I は RK である. ただし, ψ_I については本節に示した通り節点辺りに与えられた領域について面積分を行う. ここでは基本境界条件はペナルティ法によって与えることとし, これにより式 (2.5) は次式に書き換えられる.

$$\int_V \boldsymbol{\sigma} : \delta \boldsymbol{\varepsilon} dV + \alpha \int_V \delta \mathbf{d}(\mathbf{d} - \bar{\mathbf{d}}) dV = \int_L \bar{\mathbf{t}} \cdot \delta u dL + \int_S \bar{\mathbf{q}} \cdot \delta u_3 dS + \int_L \bar{\mathbf{m}} \cdot \delta \theta dL \quad (2.37)$$

ここで $\bar{\mathbf{d}}$ は各自由度に関して基本境界条件を付与するための規定値であり, α はペナルティ係数である. ペナルティ係数には通常, 剛性マトリクスの対角項の値の 100 ~ 1000 倍程度の値を適用する. 得られた変位-ひずみ変換マトリクスを用いて仮想仕事式 (2.37) を離散化すると, 次の剛性方程式が得られる.

$$(\mathbf{K} + \mathbf{K}_\alpha) \mathbf{U} = \mathbf{F} + \mathbf{F}_\alpha \quad (2.38)$$

\mathbf{K} は剛性マトリクス, \mathbf{F} は外力ベクトルであり, 下付きの α があるものは基本境界条件のためのペナルティ法による項である. 剛性マトリクスの成分, 及びペナルティ項について示せば次式のようになる.

$$\mathbf{K}_{IJ} = \sum_{K=1}^{NP} \mathbf{B}_I^T(\mathbf{x}_K) \mathbf{D} \mathbf{B}_J(\mathbf{x}_K) A_K \quad (2.39)$$

$$\mathbf{K}_{\alpha IJ} = \alpha \sum_{K=1}^{NP} \boldsymbol{\Lambda}_I^T(\mathbf{x}_K) \boldsymbol{\Lambda}_J(\mathbf{x}_K) A_K \quad (2.40)$$

$$\mathbf{F}_{\alpha I} = \alpha \sum_{K=1}^{NP} \boldsymbol{\Lambda}_I^T(\mathbf{x}_K) \bar{\mathbf{d}}(\mathbf{x}_K) A_K \quad (2.41)$$

ここで、 Λ_I は変位境界条件を規定するためのマトリクスであり、RK 形状関数によって構成される。

$$\mathbf{d}^h = \sum_{I=1}^{NP} \begin{bmatrix} \psi_I & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \psi_I & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \psi_I & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \psi_I & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \psi_I \end{bmatrix} \mathbf{d}_I = \sum_{I=1}^{NP} \Lambda_I \mathbf{U}_I \quad (2.42)$$

体積分において板厚方向は以下に示すように解析的に積分する。

$$\int_V \cdots dV = t \int_S \cdots dS, \quad \int_V z \cdots dV = 0, \quad \int_V z^2 \cdots dV = \frac{t^3}{12} \int_S \cdots dS \quad (2.43)$$

なお、SSCI を用いる際には \mathbf{B} マトリクスの積分領域と重みを A_{K_i} へと置き換える。

2.4 数値解析例

本節では、前節で示した SCNI と SSCI を用いて数値計算を行う。Case1: 周辺単純支持の正方形板に等分布荷重を加える問題、Case2: Case1 と同様な周辺単純支持板の面中央部に集中荷重を加える問題、Case3: アスペクト比 2 の長方形板の長辺方向中央の辺を完全拘束し等分布荷重を加える問題について示す。それぞれの問題について本手法の精度を検証すると共に、積分方法の違いによる差異や問題点を考察する。共通するパラメータとして、弾性係数 $E = 206 \text{ GPa}$ 、ポアソン比 $\nu = 0.3$ 、せん断補正係数 $k = \pi^2/12$ 、ペナルティ係数 $\alpha = 1 \times 10^8$ 、基底関数パラメータ $h = 1.2a$ (a : 節点間距離) とする。ペナルティ係数は剛性マトリクスの対角項に対して十分に大きな値、基底関数パラメータは形状関数の独立性を保ちつつ近似精度を得られる値を用いている。参照解には十分な要素分割による汎用ソフト MSC.Nastran [87] による FEA の解を用い、解の分布を示すグラフにおいて実線は参照解を表す。

2.4.1 等分布荷重を受ける周辺単純支持正方形板

等分布荷重を受ける周辺単純支持正方形板の解析例を示す。板の面積 $S = 1000 \times 1000 \text{ mm}^2$ ，板厚 $t_h = 10 \text{ mm}$ であり，境界条件は図 2.8 に示されるもので，等分布荷重の荷重値は $q = 1.0 \text{ MPa}$ である。用いた解析モデルを図 2.9(a)-(d) に示す。

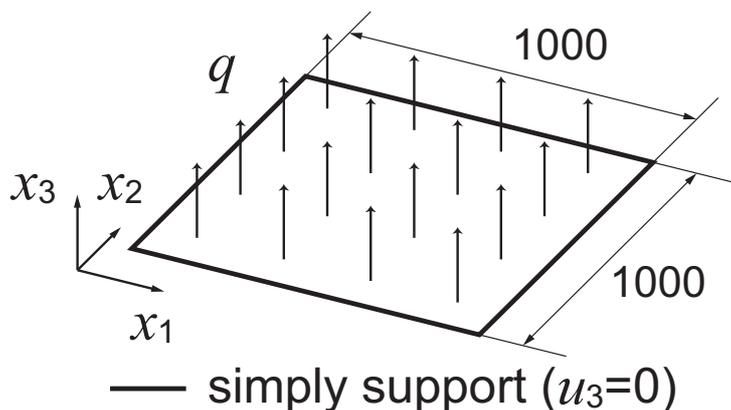


Fig. 2.8: Numerical model (Case1)

図 2.9(a), (b) は規則的配置に対して SCNI と SSCI を適用したモデル，図 2.9(c), (d) は不規則的配置に対して SCNI と SSCI を適用したモデルである。それぞれのモデルの節点数は $21 \times 21 = 441$ である。剛性マトリクスの数値積分には SCNI，及び SSCI をそれぞれ使い，せん断項の積分には図 2.9(a), (c) の領域分割を用い，各三角形領域あたり 13 点の面積分を実施する。また SCNI, SSCI における線積分ではそれぞれ 5 点のガウス積分を実施する。参照解の計算には $100 \times 100 = 10000$ 分割の大きさの等しい四辺形要素 (CQUAD4) を用いた。 $x_2 = 500 \text{ mm}$ におけるたわみ，および曲げモーメントを図 2.10, 2.11 に示す。それぞれの積分方法について，共に高精度な解が得られていることが確認できる。また，節点を規則的に配置したモデルでのたわみの収束を図 2.12 に示す。横軸は節点間距離であり，節点数は右から順に $11 \times 11 = 121$ ， $21 \times 21 = 441$ ， $51 \times 51 = 2601$ の解を用いている。SCNI と SSCI による収束傾向は漸近しており，解の精度にも問題は見られないことから，本項に示した問題のような全体で応力状態が一樣となる問題の評価のためには SCNI で十分な精度であることがわかる。

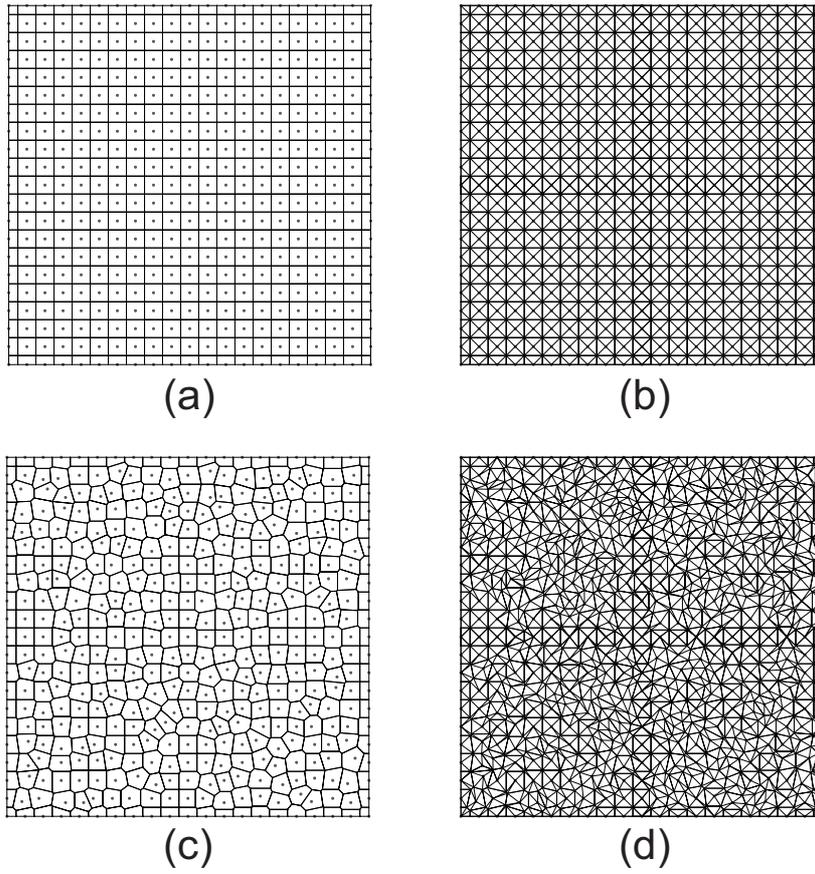


Fig. 2.9: Distribution of nodes and integration domains [(a) regular/SCNI, (b) regular/SSCI, (c) irregular/SCNI, (d) irregular/SSCI]

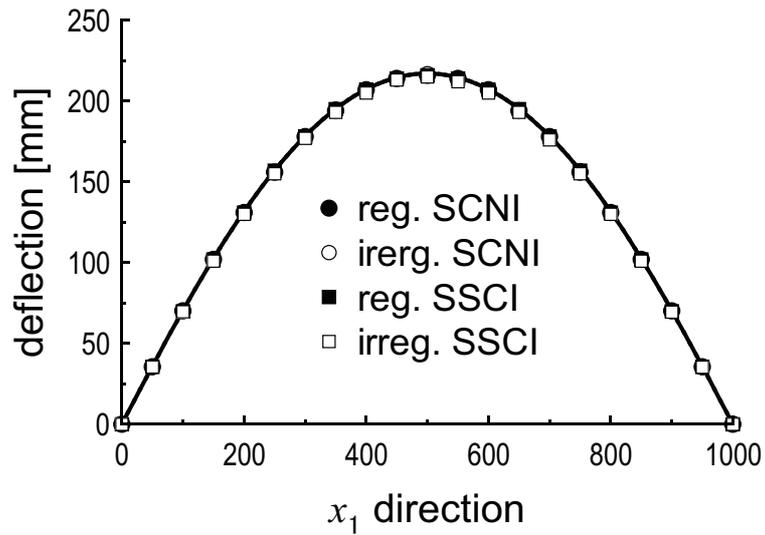


Fig. 2.10: Deflection ($x_2 = 500$ mm)

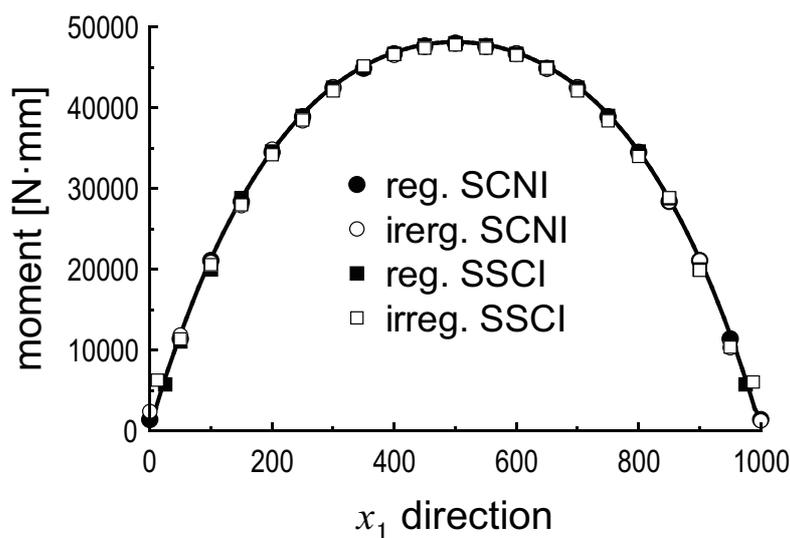


Fig. 2.11: Moment ($x_2 = 500$ mm)

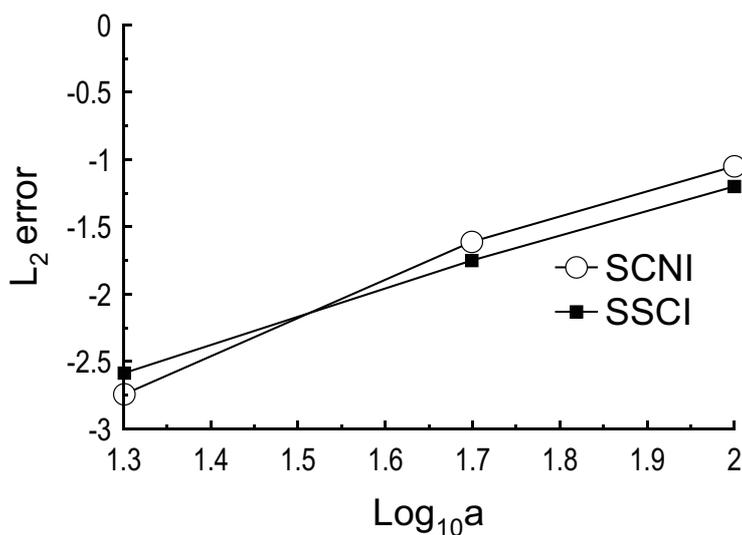


Fig. 2.12: Convergence of solution (deflection)

2.4.2 集中荷重を受ける周辺単純支持正方形板

本項では前項と同様のモデルの中央 ($x_1 = 500$ mm, $x_2 = 500$ mm) に一点集中荷重を加えた問題について考察を行う。解析対象を図 2.13 に示す。節点分布、参照解の要素分割などは前項と同様である。荷重値は $P = 1 \times 10^4$ N とした。積分方法には SCNI と SSCI の 2 つを用いる。 $x_2 = 500$ mm におけるたわみ、および曲げモーメントを図 2.14, 2.15 に示す。それぞれの結果より、SSCI による解析では高精度な解が得られていることがわかる。SCNI による解析の解が劣化している原因として、

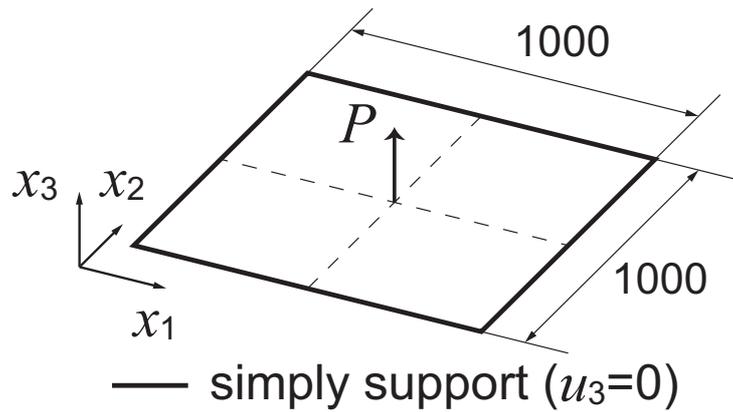


Fig. 2.13: Numerical model (Case2)

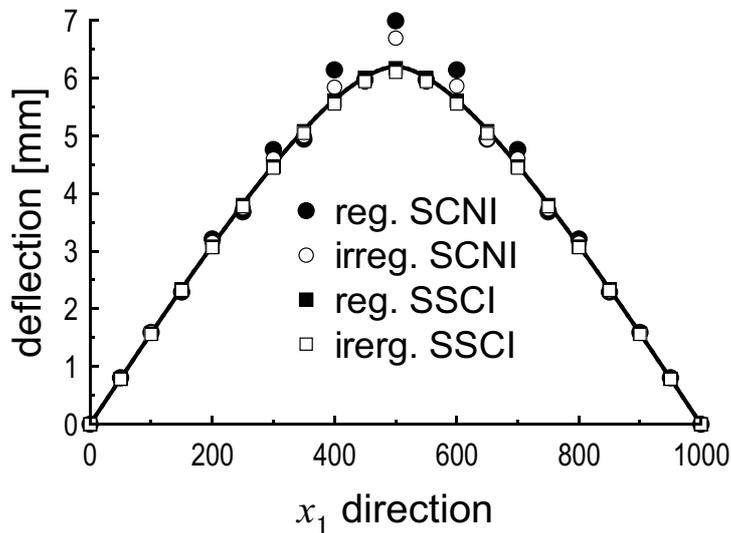


Fig. 2.14: Deflection ($x_2 = 500$ mm)

図 2.15 に見られるように荷重点近傍で急激に曲げモーメントが変化するため、各節点を中心とする計算領域を一様な応力の評価箇所とする SCNI ではその変化を正しく表現できないということが考えられる。また、スプライン関数は影響半径内で連続となる関数であるため、ある一点での局所的な解の劣化がその周りに伝播し、解が振動していると考えられる。一方で SSCI では応力が局所的に変動する点の周りに計算領域が配置されているため、変形を高精度に表すことができ曲げモーメントの精度についても良好な値が得られている。図 2.16 に前項と同様に規則配置モデルにおける解の収束を示す。

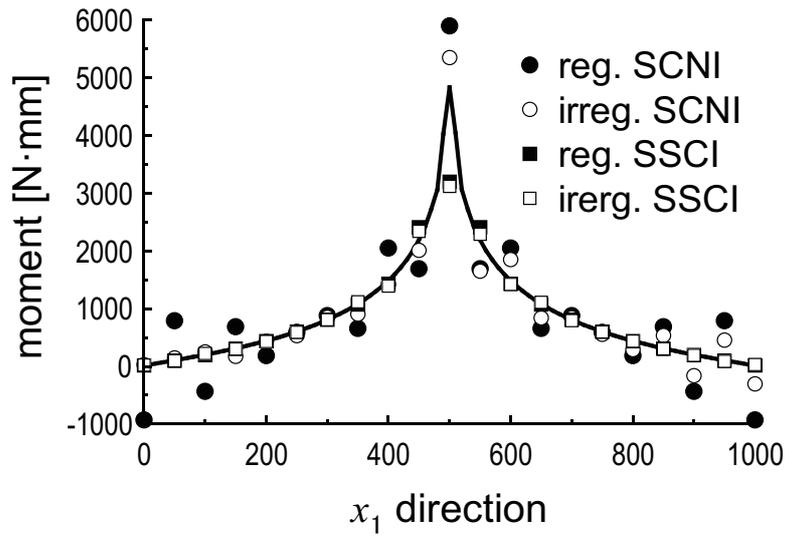


Fig. 2.15: Moment ($x_2 = 500$ mm)

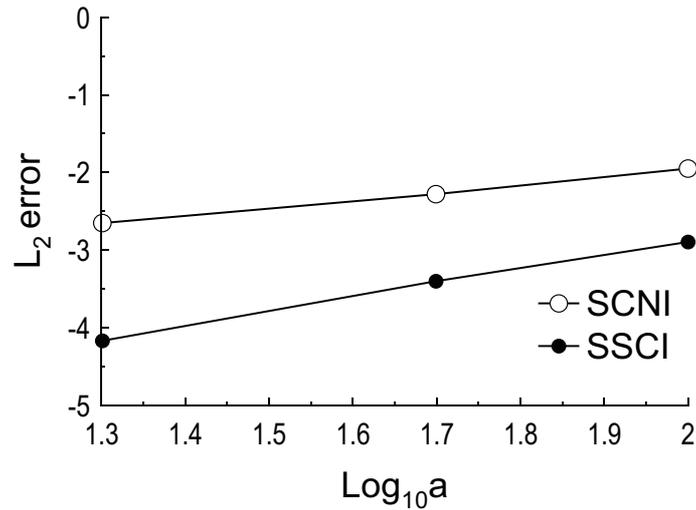


Fig. 2.16: Convergence of solution (deflection)

SSCIによる解と比較してSCNIの解では誤差が大きく収束の傾きも違うことから、本項の例題のような積分領域内で応力が急激に変化する問題においては、SSCIによる数値積分が有効であることがわかる。

しかしながら、図 2.5, 2.7 にも見られるように、SSCIは同じ節点配置でも剛性マトリクスの計算の回数がSCNIと比べて明らかに増加する。全ての領域をSSCIで積分するのはあまり効率の良い方法とは言えず、より効率的な手段としてSCNIとSSCIの双方の利点を活用し、局所的に積分領域を細分化する方法を提案する。具体

的には全体は SCNI のための領域分割を行い，応力が一様でない変化をするような領域にのみ SSCI を適用する．分割方法は図 2.17 のように変化する方向に合わせて分割するものと，単純に領域間の交点と節点を結んだ三角形で分割する通常の SSCI と同様の方法の 2 種類のアプローチについて考える．たわみ・モーメントの分布を図 2.18, 2.19 に，解の収束を図 2.20 に示す．どちらのアプローチを用いても，解の分布や収束具合に大きな差は見られない．

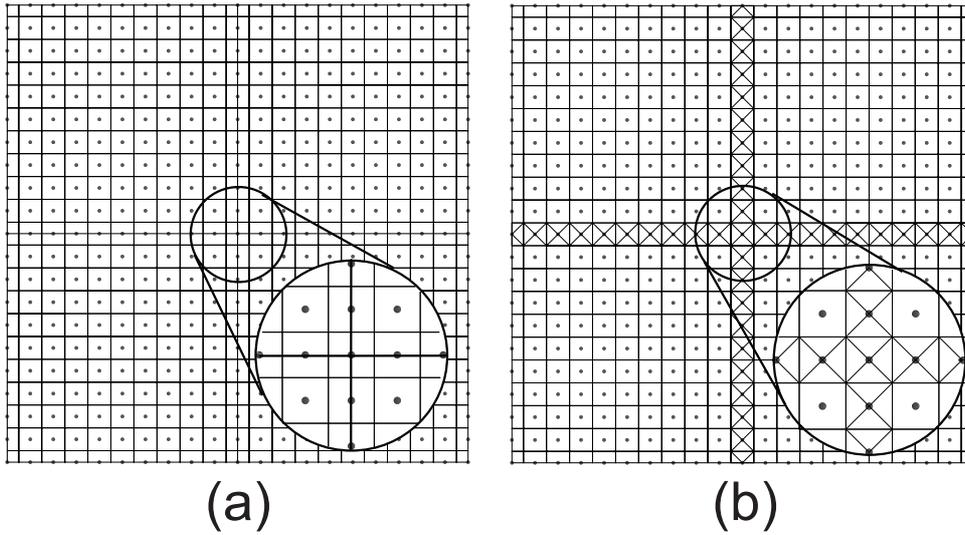


Fig. 2.17: Two approaches for nodal integration [(a) approach 1 (b) approach 2]

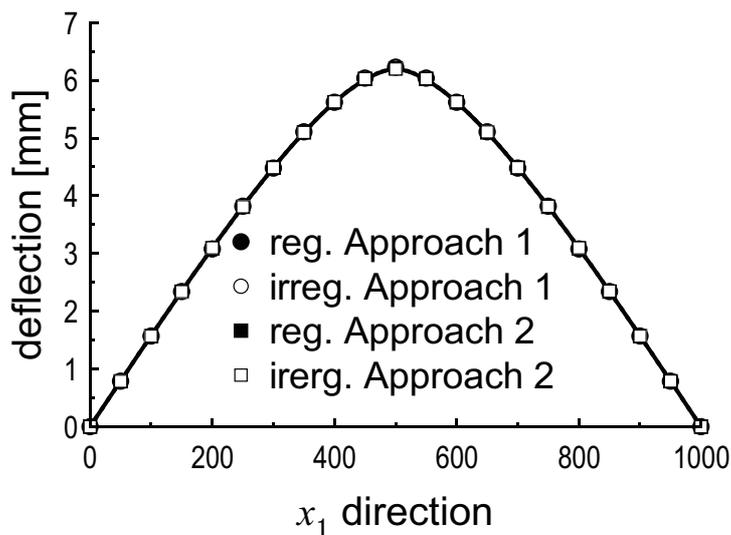


Fig. 2.18: Deflection ($x_2 = 500$ mm)

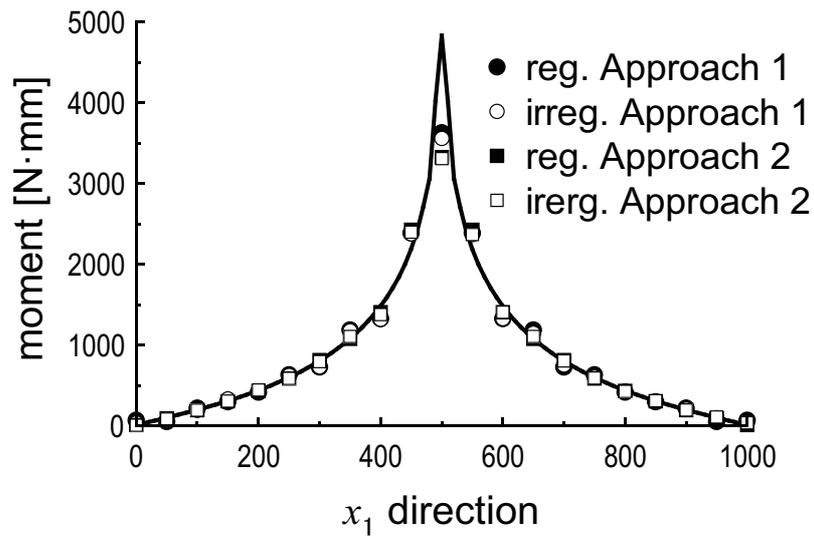


Fig. 2.19: Moment ($x_2 = 500$ mm)

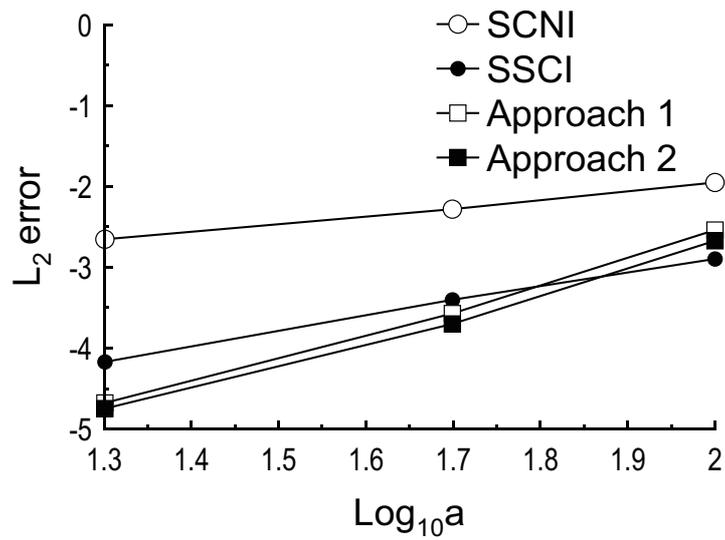


Fig. 2.20: Convergence of solution (deflection)

これらの結果から、部分的に SSCI を用いることで高精度な解析を効率的に実施できることが確認できた。

2.4.3 等分布荷重を受ける長方形板

等分布荷重を受ける長方形板の解析例について示す。板の面積 $S = 1000 \times 500 \text{ mm}^2$, 板厚 $t_h = 10 \text{ mm}$ である。境界条件は図 2.21 に示すように長辺方向の中央を完全拘束する。等分布荷重 $q = 1 \text{ MPa}$ を板全体に加える。節点数は $41 \times 21 = 861$ として、図 2.9(a)-(d) と同様に規則的な配置と不規則な配置のモデルを用いて解析を実施する。数値積分は SCNI, SSCI, および局所的に領域を細分化する 3 つの方法によって実施する。参照解の計算には $200 \times 100 = 20000$ 分割の大きさの等しい四辺形要素 (CQUAD4) を用いた。前項では荷重点に応力が集中した場合について議論したが、本項では変位拘束を受ける箇所では応力が集中する問題について同様の方法が適用できるか考察する。提案する積分方法における領域分割は、図 2.17(b) に示したものと同様の方法で応力が局所的に変化するであろう変位拘束箇所に対して適用する。 $x_2 = 250 \text{ mm}$ におけるたわみ、曲げモーメントを図 2.22, 2.23 に示し、節点分割数による規則配置モデルの解の収束を図 2.24 に示す。前項と同様に純粋な SCNI のみによる積分では拘束箇所周りでのモーメントの集中を表現できておらず、一方で SSCI や局所的に積分領域を細かくしたアプローチでは高精度な解析が実施できていることが確認できる。また解の収束傾向からも同様の議論を行うことができる。

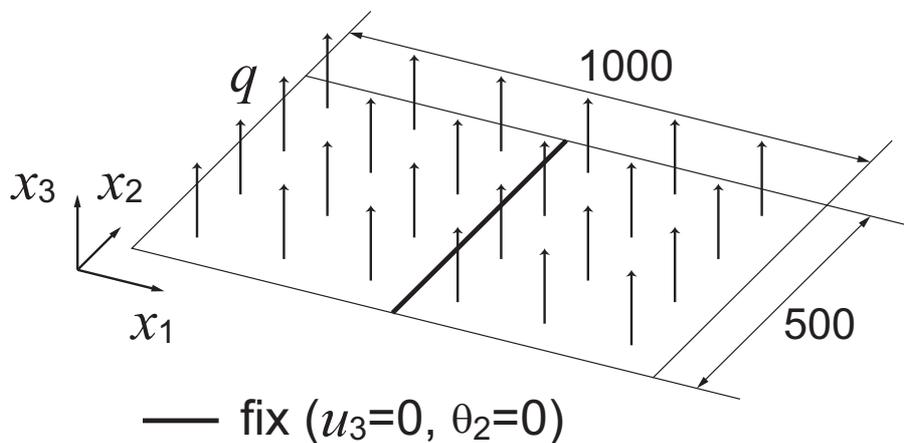


Fig. 2.21: Numerical model (Case3)

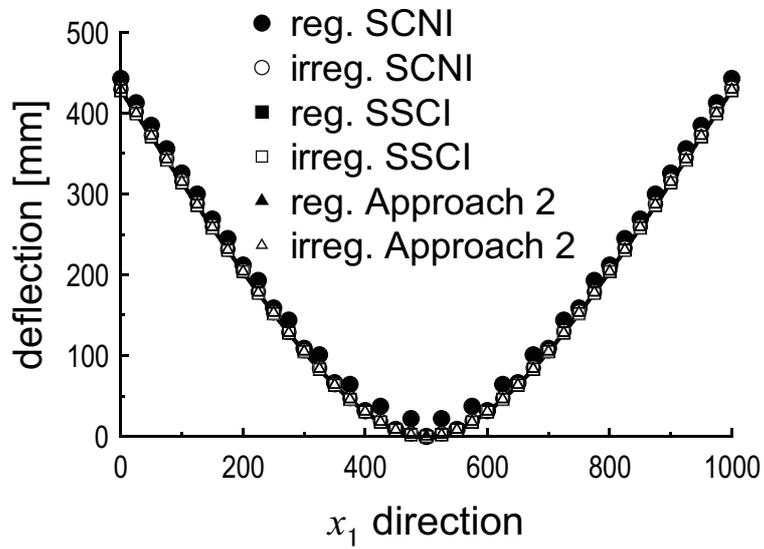


Fig. 2.22: Deflection ($x_2 = 250$ mm)

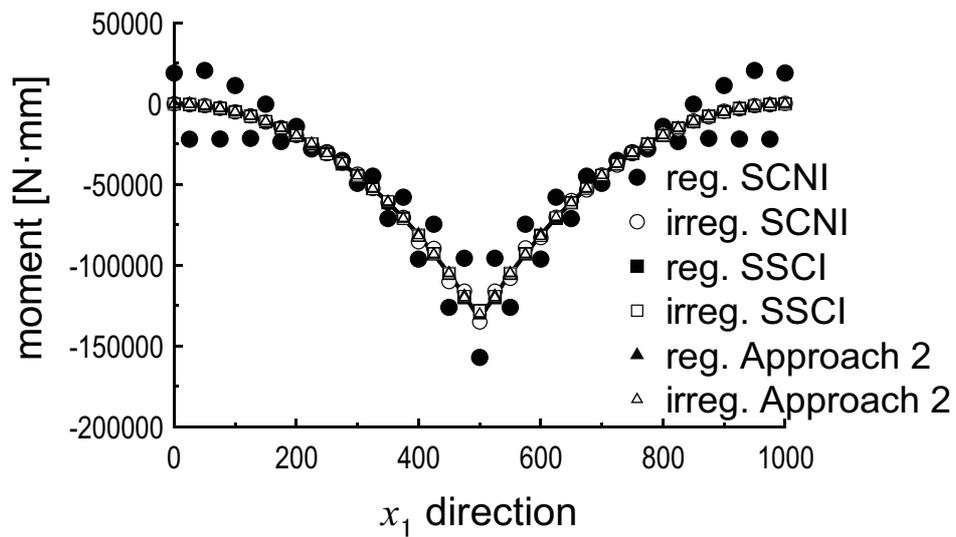


Fig. 2.23: Moment ($x_2 = 250$ mm)

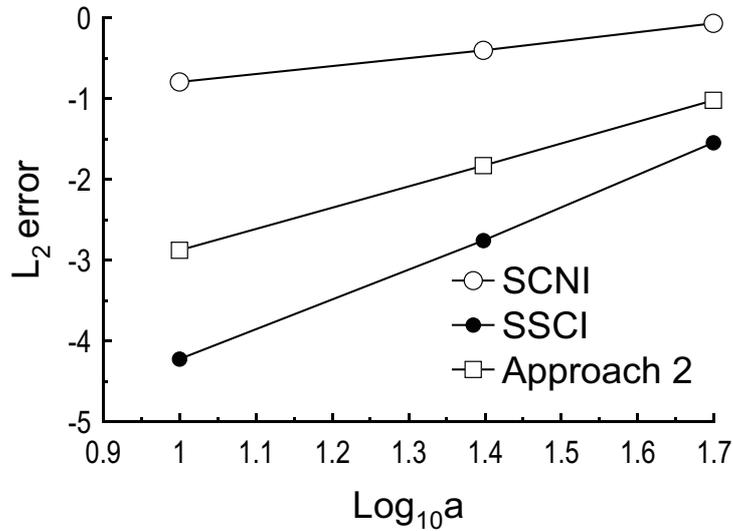


Fig. 2.24: Convergence of solution (deflection)

2.4.4 提案方法に関する考察

本項には連続な構造の内側で応力・ひずみ分布が急激に変動する際に積分領域を適切に定義することで解の精度が得られることを示した。この問題は不連続な関数について陽に積分を実施する際にも問題となることである。本項では簡単な例題によってこのことを示す。

一次元の座標において図 2.23 のような中央で変位拘束を受けた際の応力分布を模したある関数 $f(x)$ を次式のように定義する。

$$f(x) = \begin{cases} -(x+2)^2 + 4, & (-1 \leq x \leq 0) \\ -(x-2)^2 + 4, & (0 < x \leq 1) \end{cases} \quad (2.44)$$

この関数を解析的に積分するとき、積分の範囲は次式のように $x = 0$ を境に分割されることとなる。

$$\begin{aligned} \int f(x) dx &= \int_{-1}^0 \{-(x+2)^2 + 4\} dx + \\ &\quad \int_0^1 \{-(x-2)^2 + 4\} dx \\ &= 3.33\dot{3} \end{aligned} \quad (2.45)$$

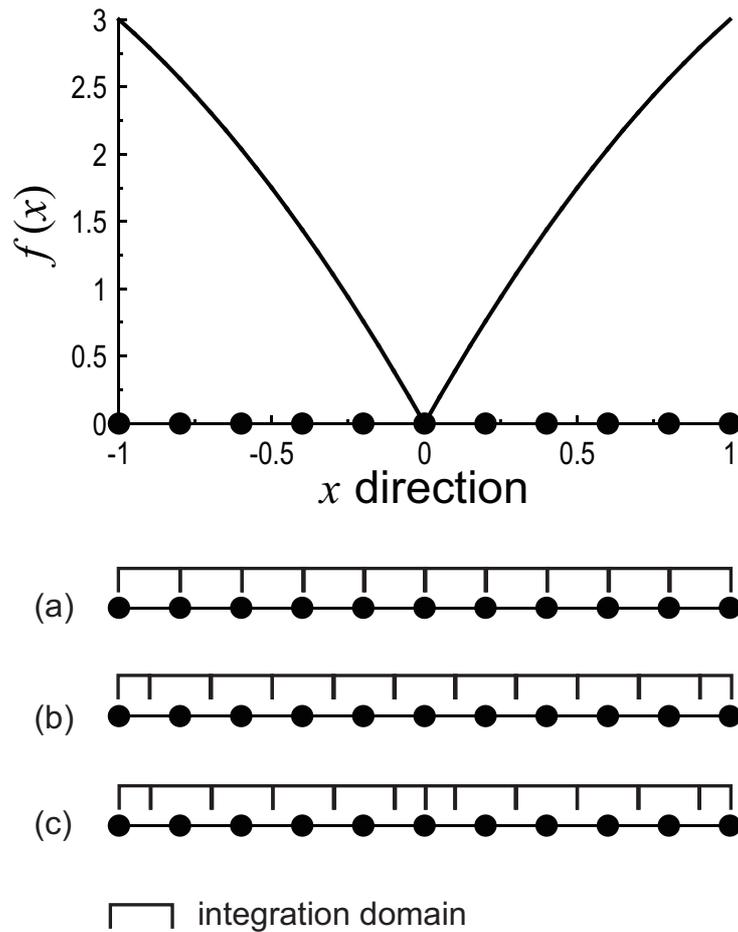


Fig. 2.25: Integration domain [(a) FEA, (b) SCNI, (c) SCNI with SSCI]

ラグランジュ的に連続体を離散化する問題の多くは節点上で変位の拘束を受けるが、FEAにおいては図 2.25(a) に示されるように節点によって結ばれる要素内が積分領域であるため、適切にモデル化されたものであればこのような問題は生じない。一方で本手法のようなメッシュフリー/粒子法に基づく方法に対して SCNI のような積分領域を図 2.25(b) のように配置した場合、局所的な応力の変動が積分領域内を直に横切ることになるため、領域内を一様に評価する SCNI においては図 2.25(c) のように SSCI と組み合わせることにより領域の分割を工夫することで精度が改善できる。それぞれの分割についてガウス積分による線積分を実施すると、図 2.25(a), (b), (c) の解はそれぞれ $3.33\bar{3}$, $3.3311\dots$, $3.33\bar{3}$ となり提案方法である (c) においては正解が得られていることが確認できる。

以上より、本手法の精度と共に、集中荷重や変位拘束を受けることによって応力が急激に変化することが予測される箇所に対して局所的に積分領域を細分化するア

アプローチは有効な方法であることが確認できた。

2.5 第2章結言

本章には，板曲げ問題における RKPM の概要を示し，面内変形成分と面外変形成分を併せ持つ5自由度の平板の線形問題の定式化を行った。また，メッシュフリー/粒子法における節点積分手法である SCNI と SSCI について示し，これらの適用方法について数値解析例により検証を行った。あらかじめ基本境界条件や荷重条件から予測される応力場に対して適切に各々を適用することで高精度な解が得られることを示した。

第3章 MPC 法

2章に示した通りメッシュフリー/粒子法では、Kronecker delta 特性を有さない釣鐘型の形状関数を用いて関数近似を行うため、通常は節点ごとの係数ベクトルと実際の近似値の値は異なるものになる。このため、FEA では単純に自由度の縮退を行うことで規定できる基本境界条件を定義することにも工夫が必要である。前章では基本境界条件の定義方法としてペナルティ法を用いたが、本章では板構造解析における種々の問題を取り扱うためのメッシュフリー/粒子法における MPC 法の定式化と、その導入に関する検証、及び組合せ構造への応用について示す。

3.1 MPC 法を用いた基本境界条件の処理

本節では基本境界条件や自由度の同期を定義するための MPC 法の概要について説明する。また MPC 法をメッシュフリー/粒子法に適用する際に生じる問題について検証する。MPC 法による境界条件定義の説明のためのモデルとして、図 3.1(a) の二次元の平面応力問題を考える。左端、及び下方の辺には一様引張りとなるための基本境界条件を与え、右端では自由度の同期により直線保持を定義し点荷重による引張り荷重を与える。

3.1.1 基本境界条件の付与

MPC 法による基本境界条件の付与について図 3.1(c) Case1 の境界を例に説明する。図に示される辺には座標 $\boldsymbol{x}_K, \boldsymbol{x}_L, \boldsymbol{x}_M, \boldsymbol{x}_N$ に位置する 4 つの節点 K, L, M, N があり、それぞれの x_1 方向の変位を拘束することを考える。これらの変位はそれぞれ

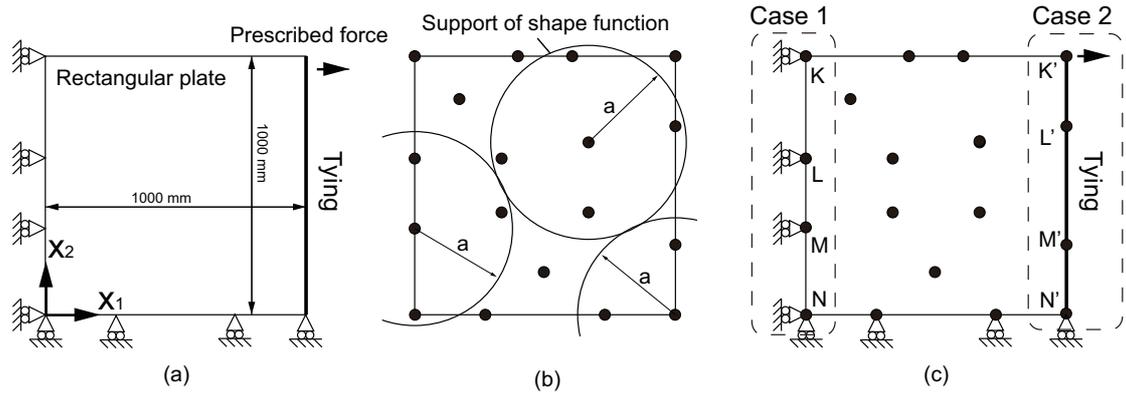


Fig. 3.1: Schematic illustrations of the two-dimensional rectangular plate model [(a) Dimensions of the rectangular plate model, (b) Meshfree discretization, (c) BC enforcement using the MPC technique]

次式のように近似される.

$$\begin{aligned}
 u_{1K}^h &= \sum_{I=1}^{NP} \psi_I(\mathbf{x}_K) u_{1I}, & u_{1L}^h &= \sum_{I=1}^{NP} \psi_I(\mathbf{x}_L) u_{1I}, \\
 u_{1M}^h &= \sum_{I=1}^{NP} \psi_I(\mathbf{x}_M) u_{1I}, & u_{1N}^h &= \sum_{I=1}^{NP} \psi_I(\mathbf{x}_N) u_{1I}
 \end{aligned} \quad (3.1)$$

図 3.1 (b) に示される影響半径外では RK 形状関数 $\psi_I(\mathbf{x}_K), \psi_I(\mathbf{x}_L), \psi_I(\mathbf{x}_M), \psi_I(\mathbf{x}_N)$ ($I = 1, \dots, NP$) はそれぞれ 0 となる. 式 (3.1) の関係式をまとめると

$$\mathbf{u}_1^h = \mathbf{N}_1 \mathbf{U}_1 = \mathbf{c} \quad (3.2)$$

となり, $\mathbf{u}_1^h = \{u_{1K} \quad u_{1L} \quad u_{1M} \quad u_{1N}\}^T$, $\mathbf{U}_1 = \{u_{11} \quad \dots \quad u_{1NP}\}^T$ はそれぞれ近似変位のベクトル, 及び節点変位ベクトルの x_1 方向の変位成分についてのものである. \mathbf{c} は近似変位の規定値ベクトルである. \mathbf{N}_1 は RK 形状関数によるマトリクスであり, 次式のように表される.

$$\mathbf{N}_1 = \begin{bmatrix} \psi_1(\mathbf{x}_K) & \dots & \psi_{NP}(\mathbf{x}_K) \\ \psi_1(\mathbf{x}_L) & \dots & \psi_{NP}(\mathbf{x}_L) \\ \psi_1(\mathbf{x}_M) & \dots & \psi_{NP}(\mathbf{x}_M) \\ \psi_1(\mathbf{x}_N) & \dots & \psi_{NP}(\mathbf{x}_N) \end{bmatrix} \quad (3.3)$$

式(3.2)をピボット処理することにより、この変位拘束条件に基づく独立自由度と従属自由度の関係式を導ける。

$$[\mathbf{I}|\mathbf{T}] \left\{ \begin{array}{c} \mathbf{U}_D \\ \mathbf{U}_I \end{array} \right\} = \tilde{\mathbf{c}} \quad (3.4)$$

ここで \mathbf{I} は単位マトリクス、 \mathbf{T} はピボット処理後に残った項をまとめたマトリクスである。また \mathbf{U}_D 、 \mathbf{U}_I はそれぞれ独立自由度と従属自由度によるベクトルである。式(3.4)を従属自由度を表す式へと書き換えると次式のようなになる。

$$\mathbf{U}_D = -\mathbf{T}\mathbf{U}_I + \tilde{\mathbf{c}} \quad (3.5)$$

$\tilde{\mathbf{c}}$ は変形後の規定値ベクトルである。

3.1.2 自由度同期の条件の付与

板構造の解析では構造の連続性や周期性を考慮した特殊な境界条件として、直線保持や周期境界条件などがしばしば与えられる。その方法は多岐に渡るが、基本的にはその条件に関わる自由度に何らかの操作を加えるものが一般的である。本手法ではMPC法を用いて自由度を同期することでこれらの条件を付与しており、前項と同様に図3.1(c) Case2の境界を例にこの方法について説明を行う。図に示される辺には4つの節点 K' 、 L' 、 M' 、 N' があり、節点 K' を直線保持のための主節点、その他の節点を従属節点として考える。それぞれの節点の近似変位は式(3.1)と同様の形で与えられ、 \mathbf{u}_1^h を次式のように近似値同士の差のベクトルとして表す。

$$\mathbf{u}_1^h = \left\{ \begin{array}{c} u_{1L'}^h - u_{1K'}^h \\ u_{1M'}^h - u_{1K'}^h \\ u_{1N'}^h - u_{1K'}^h \end{array} \right\} \quad (3.6)$$

式(3.6)の関係に基づき x_1 方向の近似変位ベクトルと節点変位ベクトルとの関係式を導くと次式のようなになる。

$$\mathbf{u}_1^h = \mathbf{N}'_1 \mathbf{U}'_1 = \mathbf{c}' \quad (3.7)$$

ここで \mathbf{c}' , \mathbf{U}'_1 はそれぞれ x_1 方向成分の規定値ベクトル及び節点変位ベクトルである。近似値の差を 0 にすることで自由度の同期を行うため, $\mathbf{c}' = 0$ である。マトリクス \mathbf{N}'_1 は次式に示す通りである。

$$\mathbf{N}'_1 = \begin{bmatrix} \psi_1(\mathbf{x}_{L'}) - \psi_1(\mathbf{x}_{K'}) & \cdots & \psi_{NP}(\mathbf{x}_{L'}) - \psi_{NP}(\mathbf{x}_{K'}) \\ \psi_1(\mathbf{x}_{M'}) - \psi_1(\mathbf{x}_{K'}) & \cdots & \psi_{NP}(\mathbf{x}_{M'}) - \psi_{NP}(\mathbf{x}_{K'}) \\ \psi_1(\mathbf{x}_{N'}) - \psi_1(\mathbf{x}_{K'}) & \cdots & \psi_{NP}(\mathbf{x}_{N'}) - \psi_{NP}(\mathbf{x}_{K'}) \end{bmatrix} \quad (3.8)$$

前項と同様に式 (3.7) に対してピボット処理を行えば, 従属自由度 \mathbf{U}'_D を独立自由度 \mathbf{U}'_I によって表す式が導かれる。

$$\mathbf{U}'_D = -\mathbf{T}'\mathbf{U}'_I \quad (3.9)$$

\mathbf{T}' は式 (3.5) の \mathbf{T} と同様に基本変形後の \mathbf{U}'_D と \mathbf{U}'_I の関係を表すマトリクスである。ここでは 1 成分の直線保持に関する記述のみではあるが, 回転角の項なども含めた複数の主節点と従属節点による周期境界条件なども同様の方法で付与できる。

3.1.3 剛性方程式の縮退

式 (3.5), (3.9) の独立自由度と従属自由度の関係により剛性方程式の自由度を縮退する。式 (3.5), あるいは式 (3.9) より, 全体の節点変位ベクトルは次式のように書き換えられる。

$$\mathbf{U} = \begin{Bmatrix} \mathbf{U}_D \\ \mathbf{U}_I \\ \mathbf{U}_O \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{I} & -\mathbf{T} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{I} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{I} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \tilde{\mathbf{c}} \\ \mathbf{U}_I \\ \mathbf{U}_O \end{Bmatrix} = \mathbf{C}\mathbf{U}_c \quad (3.10)$$

ここで, \mathbf{C} は縮退マトリクス, \mathbf{U}_O は拘束条件式に無関係なその他の自由度である。式 (3.10) を剛性方程式 (2.38) に適用すれば次式のように自由度が縮退できる。

$$\delta\mathbf{U}_c^T \mathbf{C}^T \mathbf{K} \mathbf{C} \mathbf{U}_c = \delta\mathbf{U}_c^T \mathbf{C}^T \mathbf{F} \quad (3.11)$$

$$\mathbf{K}_c \mathbf{U}_c = \mathbf{F}_c \quad (3.12)$$

$\mathbf{K}_c (= \mathbf{C}^T \mathbf{K} \mathbf{C})$, $\mathbf{F}_c (= \mathbf{C}^T \mathbf{F})$ はそれぞれ全体剛性マトリクス, 外力ベクトルである。ただし, $\tilde{\mathbf{c}} \neq \mathbf{0}$ である場合はこれに関する項が加わることとなる。

3.1.4 MPC 法の適用に関する評価

本節に示した MPC 法により基本境界条件や自由度の同期を行ったとき，適用箇所である境界付近において応力が振動する．ここではこの問題について原因の究明を行い，精度改善の方法を示す．検討のためのモデルとして図 3.1(a) の一軸引張りを受ける寸法 1000×1000 の正方形板を用い， 11×11 の節点により図 3.2 (a)，(b)，(c) のように離散化を行う．

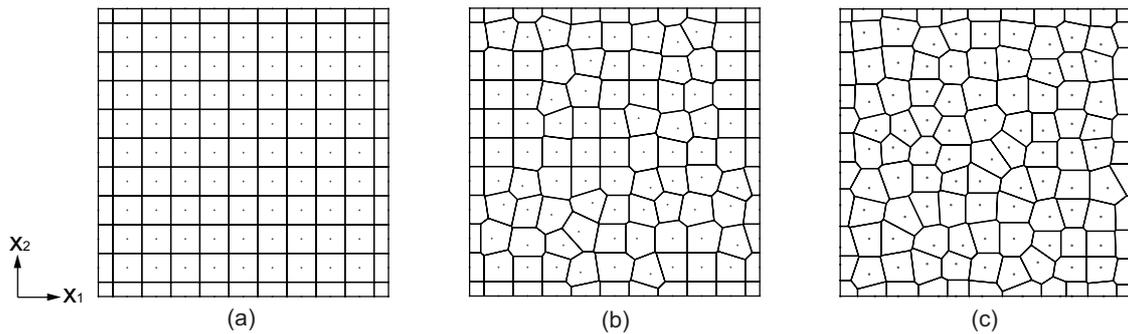


Fig. 3.2: RK models (11×11 nodes) [(a) Model A1, (b) Model B1, (c) Model C1]

節点周りの格子は節点積分 SCNI のための仮想的な積分領域である．モデルは A1 ; 規則配置，B1 ; 境界を除く内部の不規則配置，C1 ; 境界を含め全体を不規則配置としたものの 3 種類を用いる．影響半径決定パラメータは $h = 1.15a$ (a : 節点間距離) として計算を実施する．

問題の確認のため $x_2 = 0$ における変位成分 u_1 について理論解との誤差を図 3.3 に示す．式 (2.9) に示される RK 形状関数の基本となるカーネル関数 $\phi(\mathbf{x})$ として Cubic spline function を用いる．両端 ($x_1 = 0, 1000$) においては正解が得られているが，全てのモデルにおいて境界最近傍の解から徐々に振動していることが確認できる．誤差の大小は節点配置によるが，最も小さい規則配置の解でも誤差は残っている．拘束条件式より導かれる独立自由度と従属自由度の関係式 (3.5)，(3.9) は確かに拘束条件を満足するものであるため，拘束条件に含まれる節点の自由度に関しては問題なく求めることができる．しかしながらスプライン関数である RK 形状関数を用いるメッシュフリー/粒子法では，この拘束条件式そのものが全ての節点変位ベクトルを一意的に決定するには不足しており，式 (3.5)，(3.9) における変換マトリクス \mathbf{T} は正則なマトリクスとならない．このことが境界近傍の節点における解の振動の原因と考えられる．

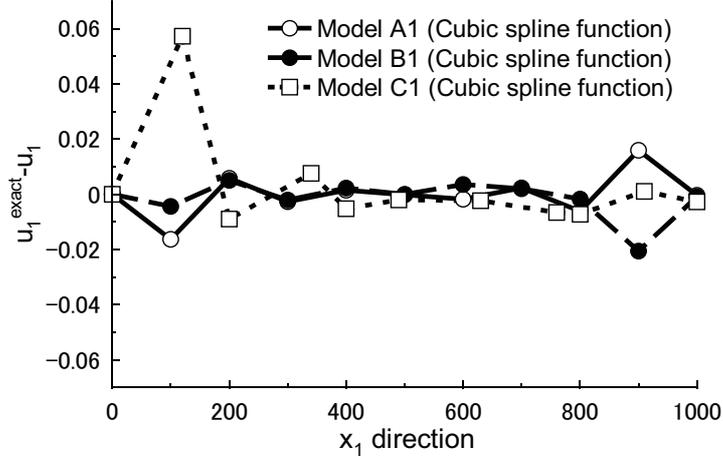


Fig. 3.3: Error in displacement u_1 along the x_1 direction ($x_2 = 0$) employing a cubic spline function ($h = 1.15a$)

そこでRK形状関数の基本となるカーネル関数 $\phi(\mathbf{x})$ を Cubic spline (3次) より高次にすることによる解の精度の変化を検討した. 一次元の n 次のスプライン関数は次式により表される.

$$\phi^{(n)}(x) = \frac{1}{n!} \sum_{k=0}^{n+1} (-1)^k {}_{n+1}C_k (x-k)_+^n \quad (3.13)$$

$$x_+ = \max[0, x] \quad (3.14)$$

$$x_+^n = (x_+)^n \quad (3.15)$$

$$\text{supp } \phi^{(n)} = [0, n+1] \quad (3.16)$$

Cubic spline (3次) に加え, 5次, 7次, 9次のスプライン関数を用いて解の精度について検証する. 式(3.16)によるとスプライン関数の次数が増えるにつれて影響半径は広がるが, 影響半径を一定のものとし計算を行う. 各々のスプライン関数の形状は図3.4に示される. 剛性マトリクスの積分の精度を十分に保障するため, ここではSCNIにおける線積分には10点のガウス積分を実施する.

9次スプライン関数を適用した際の $x_2 = 0$ における u_1 の誤差を図3.5に示す. 3次関数の解である図3.3に比べて誤差が収束していることが確認できる. また図3.6,3.7,3.8にはそれぞれモデルA,B,Cの応力成分 σ_{11} の全体の誤差 ($\sum |\sigma_{11} - \sigma_{11}^{exact}| / NP$) の収束具合を示す. ただし, A2, B2は 21×21 節点のモデル, A3, B3は 41×41 節点のモデルであり, それぞれ図3.9(a), (b), (c)及び(d)に示される.

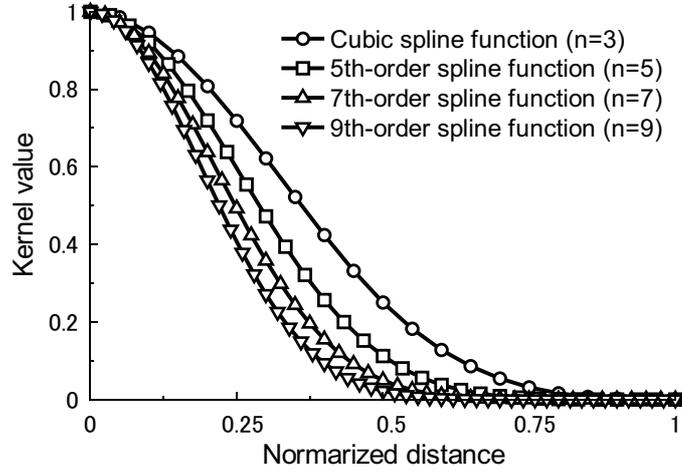


Fig. 3.4: Shape of n -th-order spline functions ($n=3, 5, 7$ and 9)

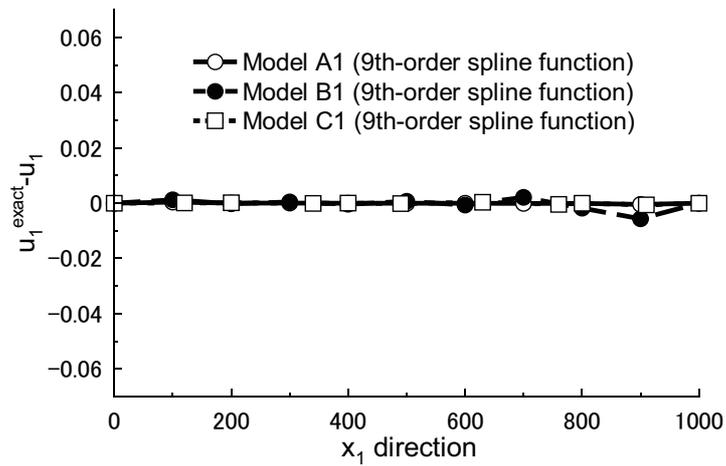


Fig. 3.5: Error in displacement u_1 along the x_1 direction ($x_2 = 0$) employing a ninth-order spline function ($h = 1.15a$)

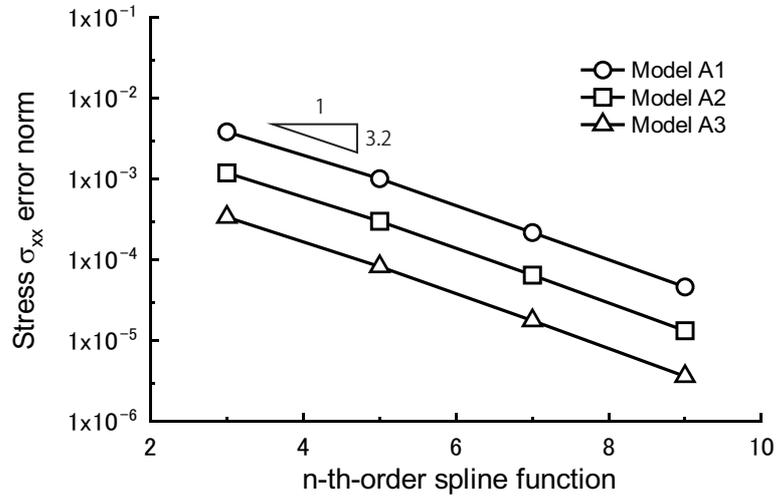


Fig. 3.6: Error norm of stress σ_{11} for model A ($h = 1.15a$)

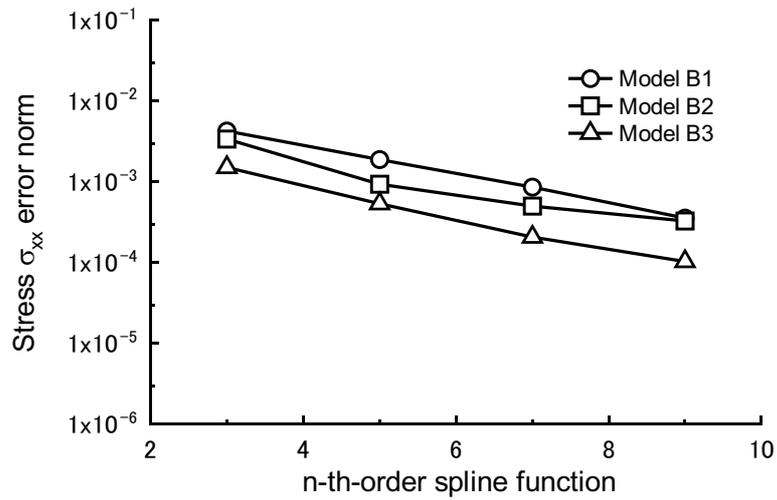


Fig. 3.7: Error norm of stress σ_{11} for model B ($h = 1.15a$)

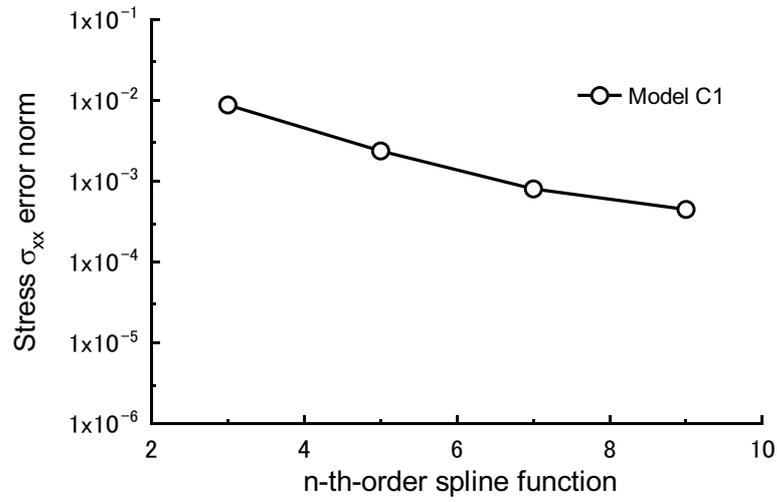


Fig. 3.8: Error norm of stress σ_{11} for model C ($h = 1.15a$)

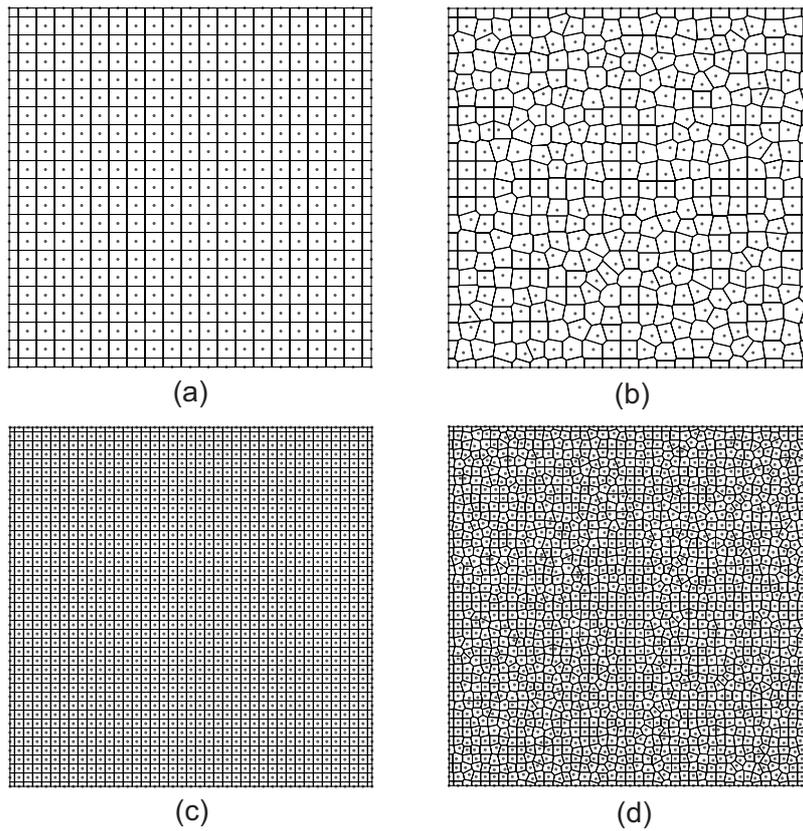


Fig. 3.9: RK models [(a) Model A2, (b) Model B2, (c) Model A3, (d) Model B3]

この収束傾向からも節点数によらず次数を上げることで解の精度が向上することが確認できる。

さらに全体の誤差の分布を図 3.10 (a), (b), (c), 及び図 3.11 (a), (b), (c)に示す。モデルはそれぞれ A1, B1, C1 であり, 図 3.10 は 3 次関数による解, 図 3.11 は 9 次関数による解である。表 3.1 にはモデル A1, B1, C1, A2, B2, A3, B3 の各次数における最大の誤差を示す。本項では影響半径決定パラメータとして $h = 1.15a$ を用いているが, 影響半径の大きさによる影響の検証のためにさらに表 3.2 に $h = 1.30a$ としたときの最大誤差について示す。全体の誤差の分布より, MPC 法の適用された境界近傍で誤差が大きくなっていることがわかるが基底関数の次数を上げたことで誤差が収まっていることが確認できる。各々のモデルの最大誤差についても高次関数を用いることで誤差は収束している。また影響半径を広げたとき解が若干ながら劣化する傾向にあることが確認できる。一方でモデル A1, A2, A3 において最大誤差の変化は確認できないことから, この誤差が節点分布の粗密によるものではないことがうかがえる。

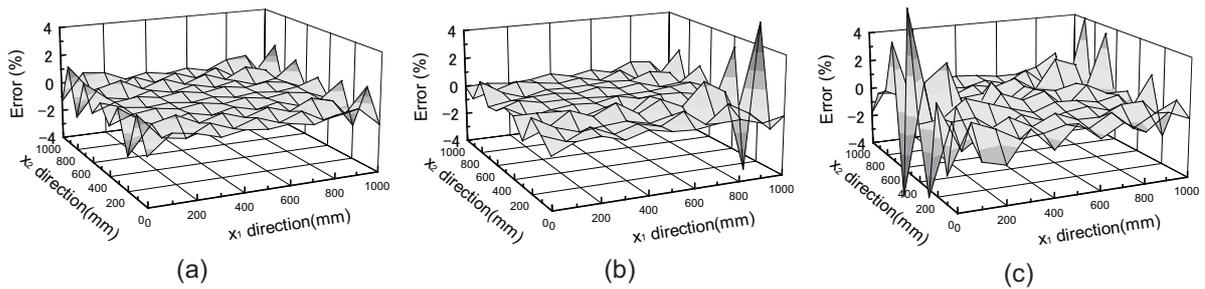


Fig. 3.10: Error distribution of σ_{11} (Cubic spline function, $h = 1.15a$) [(a) Model A1, (b) Model B1, (c) Model C1]

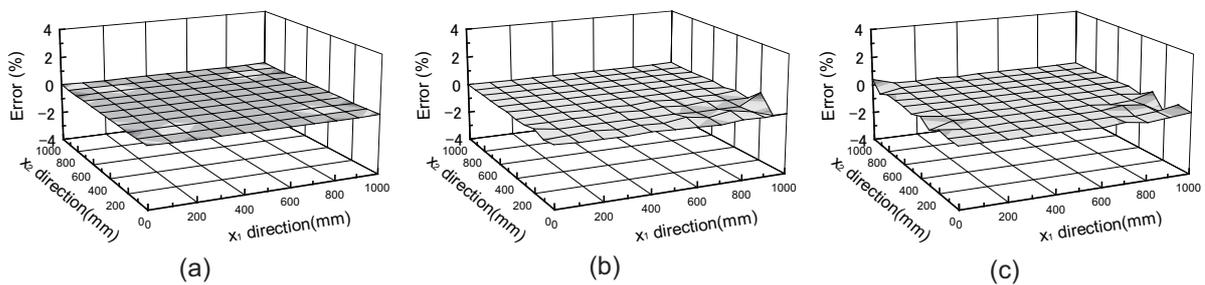


Fig. 3.11: Error distribution of σ_{11} (Ninth-order spline function, $h = 1.15a$) [(a) Model A1, (b) Model B1, (c) Model C1]

Table 3.1: Maximum error (%) of stress σ_{11} ($h = 1.15a$)

	$n=3$	$n=5$	$n=7$	$n=9$
Model A1	1.70E+00	7.45E-01	1.37E-01	4.92E-02
Model B1	5.55E+00	2.44E+00	1.22E+00	7.06E-01
Model C1	7.07E+00	2.91E+00	1.21E+00	7.14E-01
Model A2	1.75E+00	7.36E-01	1.35E-01	4.92E-02
Model B2	6.11E+00	2.90E+00	1.30E+00	1.24E+00
Model A3	1.76E+00	7.34E-01	1.35E-01	4.92E-02
Model B3	8.16E+00	2.42E+00	7.12E-01	5.11E-01

Table 3.2: Maximum error (%) of stress σ_{11} ($h = 1.30a$)

	$n=3$	$n=5$	$n=7$	$n=9$
Model A1	2.24E+00	5.88E-01	1.74E-01	1.16E-01
Model B1	3.33E+00	3.66E+00	3.10E+00	2.18E+00
Model C1	8.29E+00	5.54E+00	3.08E+00	2.07E+00
Model A2	2.23E+00	6.02E-01	1.72E-01	1.16E-01
Model B2	4.02E+00	3.15E+00	2.34E+00	1.35E+00
Model A3	2.25E+00	6.04E-01	1.71E-01	1.16E-01
Model B3	5.35E+00	4.04E+00	2.07E+00	1.15E+00

以上のことから、高次関数を RK 形状関数の基底に用いることは MPC 法による境界条件の適用における解の振動の抑制に有効な方法であることが確認できた。ただし表 3.1 において、モデル B2 の最大誤差も同様に収束する傾向にあるものの最も収束したものでも 1% を超えていることから節点配置の不規則具合による影響に

関してはさらに検討が必要なことと言える。また、解の誤差が生じる箇所は境界周りのみと局所的なものであり、節点数の増加による全体的な解の収束は図 3.6, 3.7, 3.8 からも確認できることから、MPC 法による境界条件の付与が板構造解析全体に与える影響は少ないと考えられる。

3.2 複数の板の組合せ構造への適用

これまでに、メッシュフリー/粒子法を用いて三次元的な板構造を解いた例としては、以下のような研究例がある。Peng, Liew らは横荷重を受ける補剛板の解析や、板の折れ曲がり構造の座屈解析や自由振動解析などを行っている [88–93]。本手法における板の組合せ構造のモデル化について考えると、前節では MPC 法を用いた自由度の同期について示したが、同一節点を共有させることのできないメッシュフリー/粒子法においても、この方法を複数の板が交わる断面上に適用してやれば、板を組み合わせて 1 つの構造系として取り扱うことが可能となる。本節では平板の定式化を用いて三次元的な板構造系のモデル化を行うための方法について示す。

3.2.1 面内回転剛性の導入

第 2 章には RK を用いた面内変形 2 自由度、面外変形 3 自由度の計 5 自由度の平面シェルの定式化について示した。シェル理論は一般的には 5 自由度の定式化に基づいており、本来面内回転成分の自由度 θ_3 を有していない。しかしながら、補剛板構造のように構造物に折れ曲がりや複数の板が交差する箇所が存在するような立体的な組合せ構造物の解析を考えると、変形の連続性の観点から面内回転 θ_3 を考慮しなければならない。Simo [94] は 5 自由度の定式化のまま構造の不連続部にのみ局所的に 6 自由度にするアプローチを提案しているが、本研究では以下の Kanok [95] の定式化に基づき、全ての領域について面内回転自由度 θ_3 を含めた 6 自由度の定式化とした。

$$W_T = \kappa_T G t_h A_K \left[\theta_3 - \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_2}{\partial x_1} - \frac{\partial u_1}{\partial x_2} \right) \right]^2 = 0 \quad (3.17)$$

ここで、 W_T はペナルティエネルギー、 G はせん断弾性係数、 t_h は板厚、 A_K は節点単位に定義される SCNI のためのボロノイセルの面積 Ω_K である。 κ_T はペナルティ

エネルギーの大きさを決定するパラメータであり、Kanokは望ましくない振りモードを抑制できる値として0.1以上の値を用いることを推奨している。この方法によれば、剛体回転に関してはペナルティエネルギーがゼロとなることが保障される。ここで面内回転 θ_3 に関するひずみ ε_{θ_3} を次式のように定義する。

$$\varepsilon_{\theta_3} = \theta_3 - \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_2}{\partial x_1} - \frac{\partial u_1}{\partial x_2} \right) \quad (3.18)$$

このひずみに対して、 $R_{\theta_3} = 2\kappa_T G \varepsilon_{\theta_3}$ となる応力を定義すると式(3.17)は次のように表せる。

$$W_T = \frac{1}{2} R_{\theta_3} \varepsilon_{\theta_3} t_h A_K \quad (3.19)$$

ペナルティエネルギーを仮想ひずみ $\delta\varepsilon_{\theta_3}$ による仮想エネルギー δW_T として仮想仕事式(2.5)左辺の内力項に加えると、

$$\int_V \boldsymbol{\sigma} : \delta\varepsilon dV + \delta W_T = \int_L \bar{\mathbf{t}} \cdot \delta u dL + \int_S \bar{\mathbf{q}} \cdot \delta w dS + \int_L \bar{\mathbf{m}} \cdot \delta\theta dL \quad (3.20)$$

となり、RKによる ε_{θ_3} の離散化を次のように行う。

$$\varepsilon_{\theta_3} = \sum_{I=1}^{NP} \left\{ \frac{1}{2} b_{I2} \quad -\frac{1}{2} b_{I1} \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad \psi_I \right\} \mathbf{U}_I = \sum_{I=1}^{NP} \mathbf{B}_{\theta_3 I} \mathbf{U}_I \quad (3.21)$$

上式(5.130)を考慮して式(3.20)離散化すると、次の剛性方程式が得られる。

$$\mathbf{K} \mathbf{U} = \mathbf{F} \quad (3.22)$$

\mathbf{K} は剛性マトリクス、 \mathbf{F} は外力ベクトルであり、剛性マトリクスの成分について示せば次式のようになる。

$$\mathbf{K}_{IJ} = \sum_{K=1}^{NP} \mathbf{B}_I^T(\mathbf{x}_K) \mathbf{D} \mathbf{B}_J(\mathbf{x}_K) A_K + \sum_{K=1}^{NP} \mathbf{B}_{\theta_3 I}^T(\mathbf{x}_K) \alpha_K \mathbf{B}_{\theta_3 J}(\mathbf{x}_K) \quad (3.23)$$

右辺第2項は式(3.20)の δW_T を離散化したものであり、 $\alpha_K = 2\kappa_T t_h A_K$ である。

3.2.2 板構造物の三次元的なモデル化

RK近似を用いたMPC法による板構造物のモデル化複数の板が組み合わされた構造の解析を取り扱う際、FEAの場合は板同士の接合線上の節点を共有して同じ自由

度を持たせることでモデル化が可能となる．一方で，本解析で用いている RK はいわゆるクロネッカーデルタ特性を持たず変形の近似は板毎に独立して行うため，直接的に節点を共有することはできない．したがって本研究では，接合線上ではそれぞれの板について節点を存在させ，これらの自由度の近似値を等値させることでモデル化を行う．ここでは，三次元的な板構造物のモデル化のための座標変換について示した後に MPC 法による自由度の同期を適用し，複数の板による三次元的な構造系を解く方程式を導く．

図 3.12 に示す Plate 1, Plate 2 の 2 枚の板を T 型に接合させる板構造物を例に，三次元的なモデル化のための座標変換について説明する．

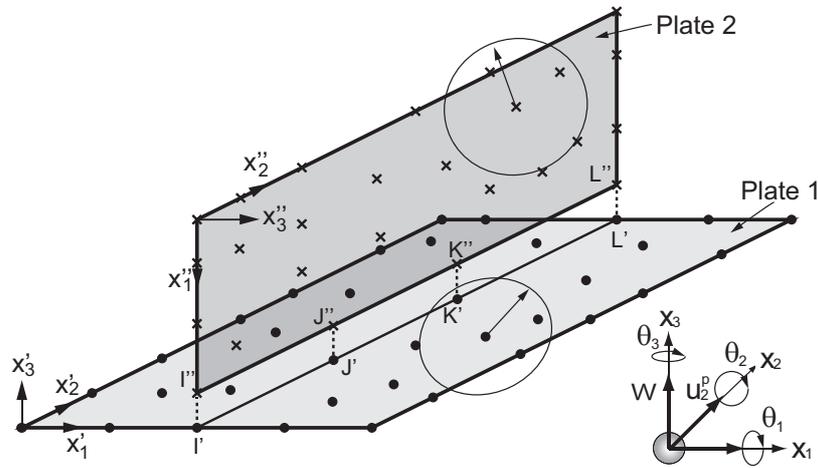


Fig. 3.12: Modeling of T-shaped plate structure

カーテシアン座標系を x_1, x_2, x_3 ，Plate 1 の面内座標系を x'_1, x'_2, x'_3 ，Plate 2 の面内座標系を x''_1, x''_2, x''_3 とする．カーテシアン座標系に基づいてそれぞれの自由度の拘束や等値を行えば，種々の板構造物の変形を一般的に取り扱うことができる．図 3.12 において，Plate 1 の面内座標系の単位ベクトルはカーテシアン座標系の単位ベクトルと一致しており，Plate 2 の面内座標系はカーテシアン座標系に対して x_2 軸回りに垂直に回転された座標系となる．カーテシアン座標系における成分を用いて各々の座標系の単位ベクトルを次のように e' ， e'' とする．

$$e' = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad e'' = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (3.24)$$

RK は各々の板について独立に作成されるため，Plate 1 内座標系における変位 \mathbf{v}^h ，及び Plate 2 内座標系での変位 $\mathbf{v}^{h''}$ は互いに無関係であり，各々の節点変位ベクトル \mathbf{U}' ， \mathbf{U}'' についても同様のことが言える．このことから変位ベクトル \mathbf{u}^h ，節点変位ベクトル \mathbf{U} ，あるいはその他の応力・ひずみ成分などに関してカーテシアン座標系での成分との間に次の関係が成り立つ．

$$\mathbf{u}^h = \begin{bmatrix} \mathbf{T}' & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{T}'' \end{bmatrix}^T \begin{Bmatrix} \mathbf{u}^{h'} \\ \mathbf{u}^{h''} \end{Bmatrix} \quad (3.25)$$

$$\mathbf{U} = \begin{bmatrix} \mathbf{T}' & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{T}'' \end{bmatrix}^T \begin{Bmatrix} \mathbf{U}' \\ \mathbf{U}'' \end{Bmatrix} \quad (3.26)$$

また， \mathbf{T}' ， \mathbf{T}'' は式 (3.24) の基底ベクトルに基づきそれぞれ次のように表される．

$$\mathbf{T}' = \begin{bmatrix} \mathbf{e}' & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{e}' & \cdots & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{e}' & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} & \mathbf{e}' \end{bmatrix}, \quad \mathbf{T}'' = \begin{bmatrix} \mathbf{e}'' & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{e}'' & \cdots & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{e}'' & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} & \mathbf{e}'' \end{bmatrix} \quad (3.27)$$

この関係を用いて各々の板について構成された剛性方程式を次のようにカーテシアン座標系へと写像する．

$$\begin{Bmatrix} \delta \mathbf{U}' \\ \delta \mathbf{U}'' \end{Bmatrix}^T \begin{bmatrix} \mathbf{K}' & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{K}'' \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{U}' \\ \mathbf{U}'' \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \delta \mathbf{U}' \\ \delta \mathbf{U}'' \end{Bmatrix}^T \begin{Bmatrix} \mathbf{F}' \\ \mathbf{F}'' \end{Bmatrix} \\ \rightarrow \delta \mathbf{U}^T \mathbf{K} \mathbf{U} = \delta \mathbf{U}^T \mathbf{F} \quad (3.28)$$

ただし，カーテシアン座標系における \mathbf{K} ， \mathbf{F} はそれぞれ次式のように表す．

$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} \mathbf{T}' & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{T}'' \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} \mathbf{K}' & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{K}'' \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{T}' & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{T}'' \end{bmatrix}, \quad \mathbf{F} = \begin{bmatrix} \mathbf{T}' & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{T}'' \end{bmatrix}^T \begin{Bmatrix} \mathbf{F}' \\ \mathbf{F}'' \end{Bmatrix} \quad (3.29)$$

前節で示した自由度の拘束，あるいは同期はカーテシアン座標系における自由度の近似に基づき変換マトリクスを構成し，カーテシアン座標系に写像済みの剛性方程式に対して適用することで一般化が可能である．また他の組合せ形状の接合を考える場合には板毎の単位ベクトルを置き換えることで一般的にモデル化を行える．

3.3 数値解析例

本節では板の組合わせ構造物の線形解析を実施し，考察を行う．全ての解析例についてせん断補正係数 $k = \pi^2/12$ ，影響半径決定パラメータ $h = 1.2a$ (a : 粒子間距離)，面内回転剛性のペナルティエネルギーの係数 $\kappa_T = 0.1$ として計算を行う．

3.3.1 T型はりの曲げ解析

図 3.13(a) に示す T 型はりの曲げ解析について示す．

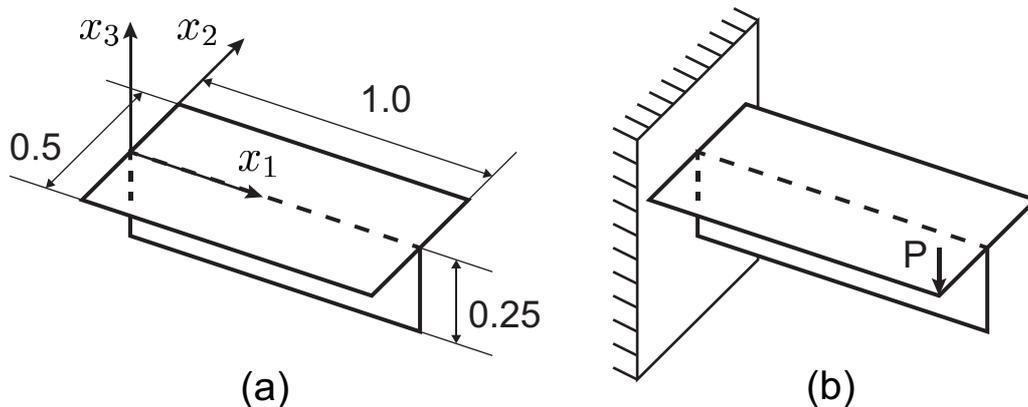


Fig. 3.13: Numerical model for T-shaped plate structure [(a) Dimensional diagram, (b) Boundary condition]

物性値は弾性係数 $E = 2.06 \times 10^5$ ，ポアソン比 $\nu = 0.3$ であり，板厚は $t_h = 0.01$ である．節点間距離は 1 : 0.05, 2 : 0.025, 3 : 0.0125 の 3 種を考え，節点配置は図 3.14(a) のような規則的な配置 (A1, A2, A3) と，図 3.14(b) のような不規則配置 (B1, B2, B3) について解析する．また自由度の等値のために，板が重なる境界上ではそれぞれ同位置に節点が配置されるようなモデル化を行う．境界条件は図 3.13(b) に示されるように x_2x_3 平面に接する辺を完全拘束し $x_1 = 1.0$, $x_2 = -0.25$ の端部に点荷

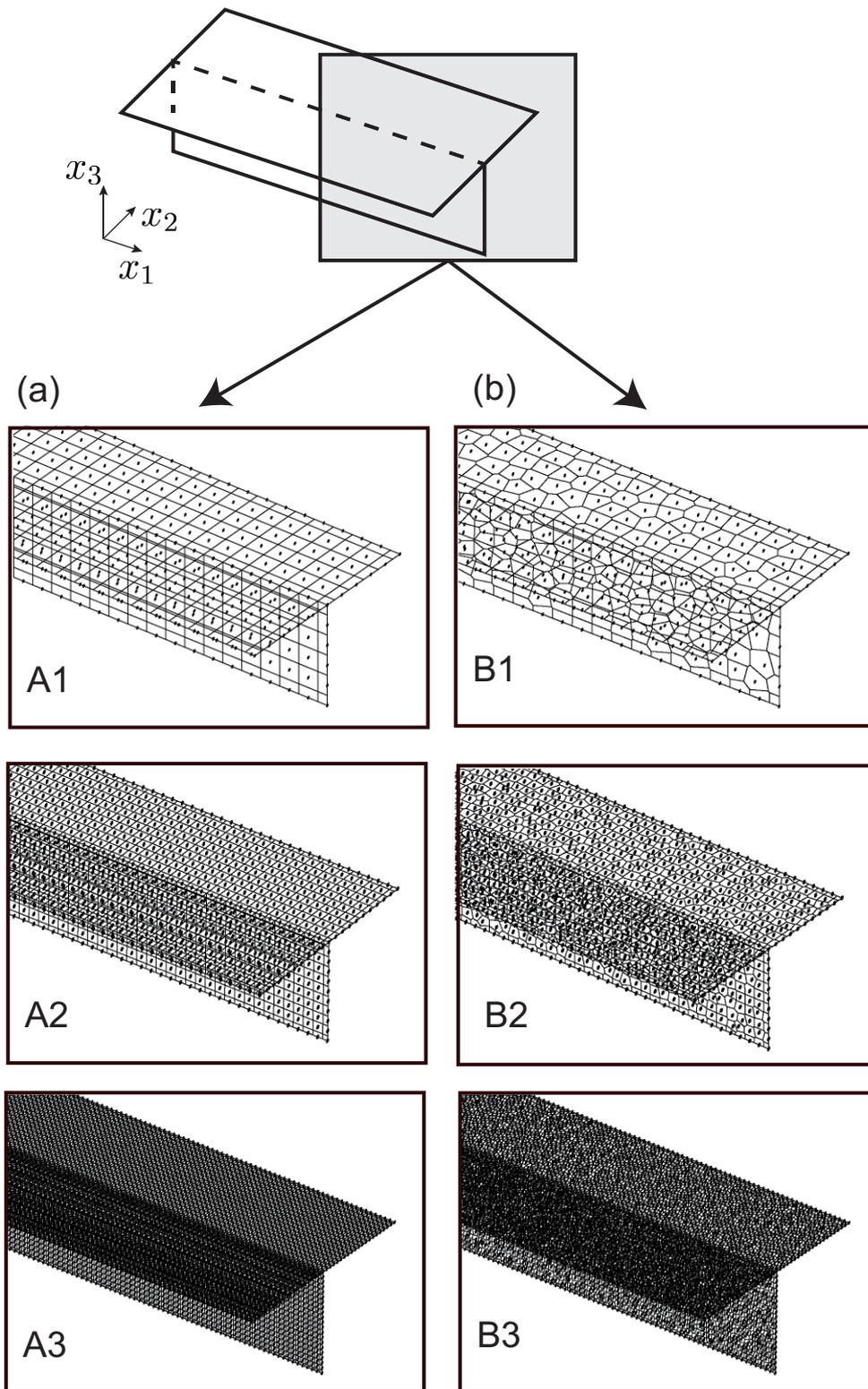


Fig. 3.14: Discretization of T-shaped plate structure by SCNI [(a) Regular arrangement, (b) Irregular arrangement]

重 $P = 1.0$ を加える．参照解には汎用ソフト MSC.Marc [96] による FEA の値を用いる．FEA で用いる要素は非適合要素である要素番号 75 番の四節点厚肉アイソパラメトリックシェル要素である．要素分割は均等に行い，要素数による解が十分に収束したとみなせる分割数を用いている．

$x_2 = -0.25$ におけるたわみの分布，板中立面の面内方向の x_1 軸方向応力分布を図 3.15 (a), (b) にそれぞれ示す．本手法による解は参照解に対してよく一致しており，高精度な解析が実施できていることが確認できる．

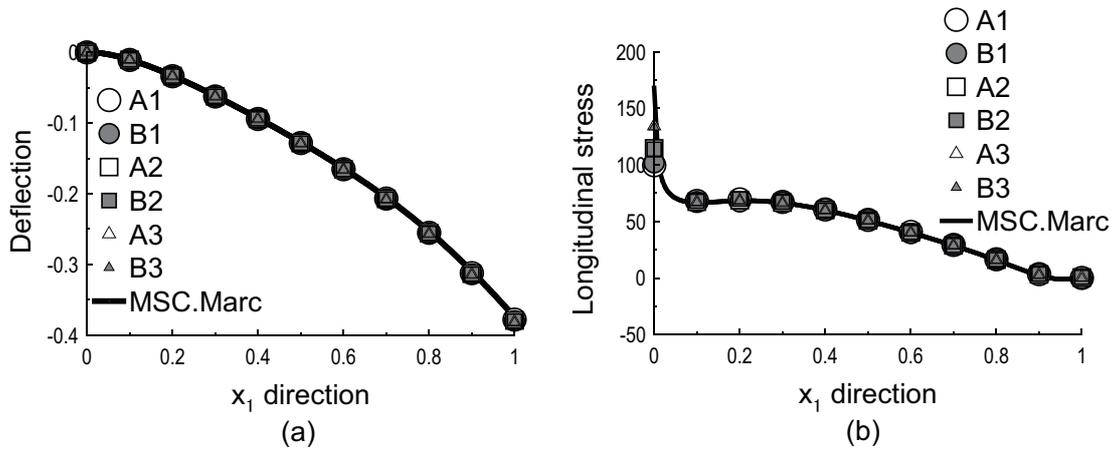


Fig. 3.15: Numerical results along $x_2 = -0.25$ [(a) Deflection, (b) Longitudinal stress]

3.3.2 折れ曲がりを持つ板構造物の曲げ解析

図 3.16(a) に示す折れ曲がり構造モデルの解析について示す．

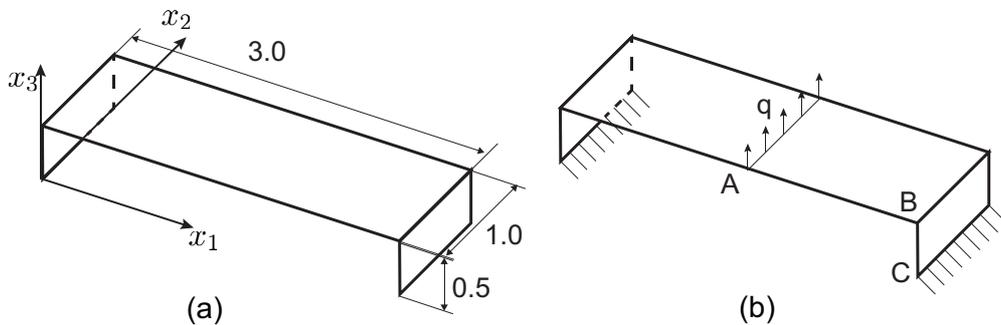


Fig. 3.16: Numerical model for folded plate structure [(a) Dimensional diagram, (b) Boundary condition]

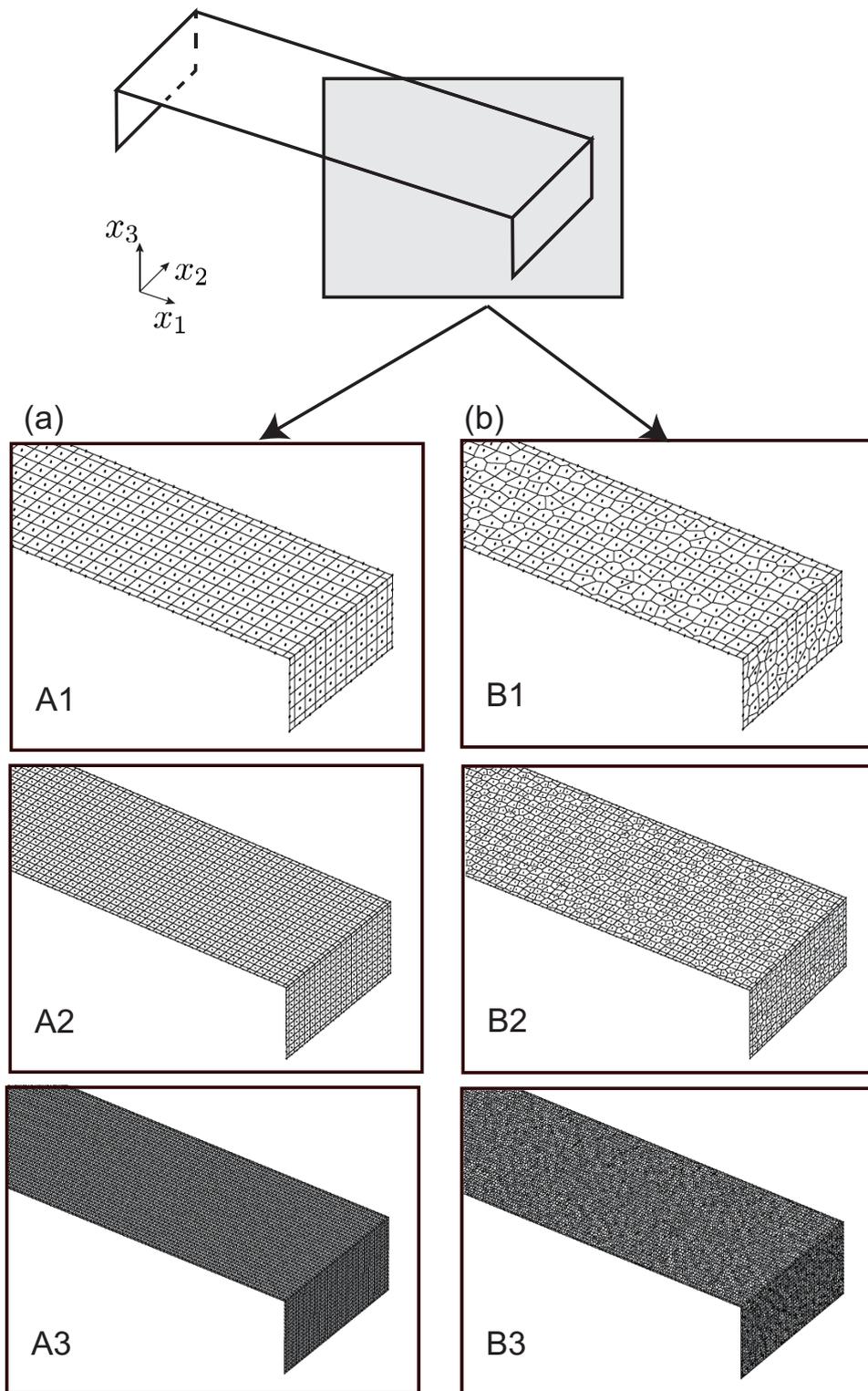


Fig. 3.17: Discretization of folded plate structure by SCNI [(a) Regular arrangement, (b) Irregular arrangement]

本解析例は Bathe ら [97] の行った例を比較対象とした解析例であり，参照解には前項と同様の MSC.Marc による解に加え Bathe らによる解との比較も行う．Bathe らは構造の対称性から 1/4 モデルで解析を実施しているが，本手法による組合せ構造物のモデル化の検証のため，本例題では全体モデルでの解析を実施した．物性値は弾性係数 $E = 2.0 \times 10^{11}$ ，ポアソン比 $\nu = 0.3$ であり，板厚は $t_h = 0.01$ である．節点間距離は 1 : 0.1, 2 : 0.05, 3 : 0.025 の 3 種を考え，節点配置は前項と同様に図 3.17(a) のような規則的な配置 (A1, A2, A3) と，図 3.17(b) のような不規則配置 (B1, B2, B3) について解析する．前項と同様に，板が重なる境界上ではそれぞれの板に属する節点が同位置に配置されるようモデル化を行う．境界条件は図 3.16(b) に示す通りで， x_1x_2 平面に接する辺を完全固定し天板中央の $x_1 = 1.5$ の辺に分布荷重 $q = 2.0$ を作用させる．

被荷重箇所 $x_1 = 1.5$ におけるたわみの分布，点 ABC に沿った辺上での板上面及び下面の x_1 軸方向応力分布を図 3.18, 3.19 (a), (b) にそれぞれ示す．粗い分割では誤差が見られるものの，節点数を増やすことで解が収束しており，参照解に対してよく一致していることが確認できる．また，図 3.19 (a), (b) の点 B 周りを拡大したものをそれぞれ図 3.20 (a), (b) に示す．2 枚の板の接合部であるため特異な分布になっているが，節点数の増加に伴い解が収束していく様子が確認できる．以上より，組合せ構造物の線形解析に MPC 法が適用できることが示された．

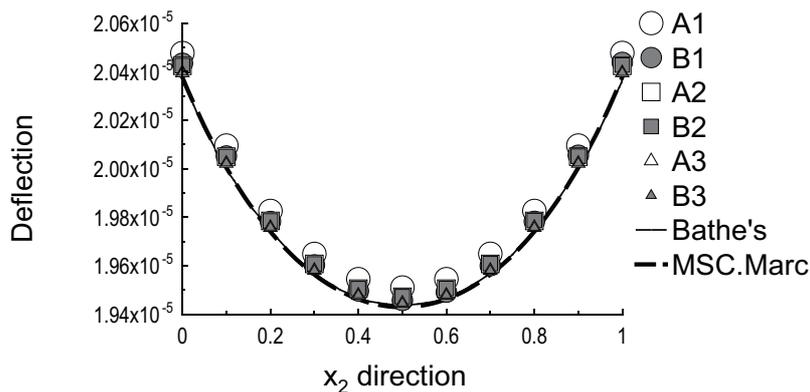


Fig. 3.18: Convergence of deflection along $x_1 = 1.5$

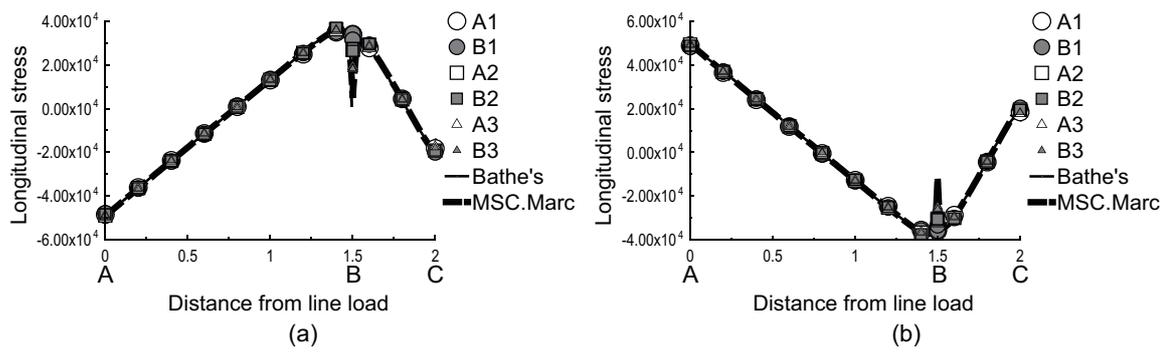


Fig. 3.19: Convergence of longitudinal stress along ABC [(a) Top surface, (b) Bottom surface]

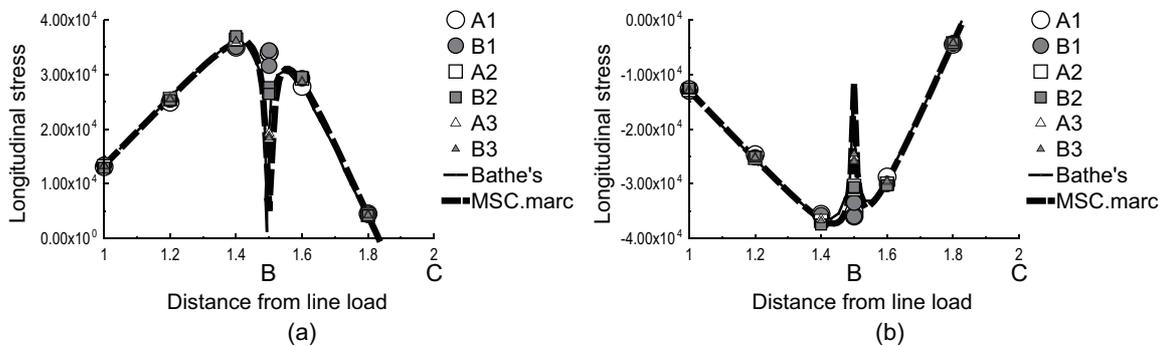


Fig. 3.20: Convergence of longitudinal stress along ABC (distance:1-2) [(a) Top surface, (b) Bottom surface]

3.4 第3章結言

本章にはメッシュフリー/粒子法において基本境界条件を取り扱うための一手法である MPC 法について示した。定式化の概要について示し、MPC 法を適用する上で問題点について究明し、回避策を検証した。問題の根本的な解決には再考の余地があるものの、グローバルな計算精度に与える影響は少ないものと考えられることがわかった。また、自由度を同期する手段を応用して三次元的な組合せ構造物のモデル化を行い、参照解と高精度に一致する解を得ることで提案手法の妥当性を確認した。

第4章 平板の幾何学的非線形問題

有限変形問題においては，材料線形であっても仮想仕事式は変位に関して非線形となるため，通常は接線剛性を導いて反復法による解析を行う必要がある．反復解析はある小さな荷重増分に対して区分的に行われ，この積み重ねによって最終的な物体の形態へと至る増分解析と呼ばれる手法が一般的に用いられる．

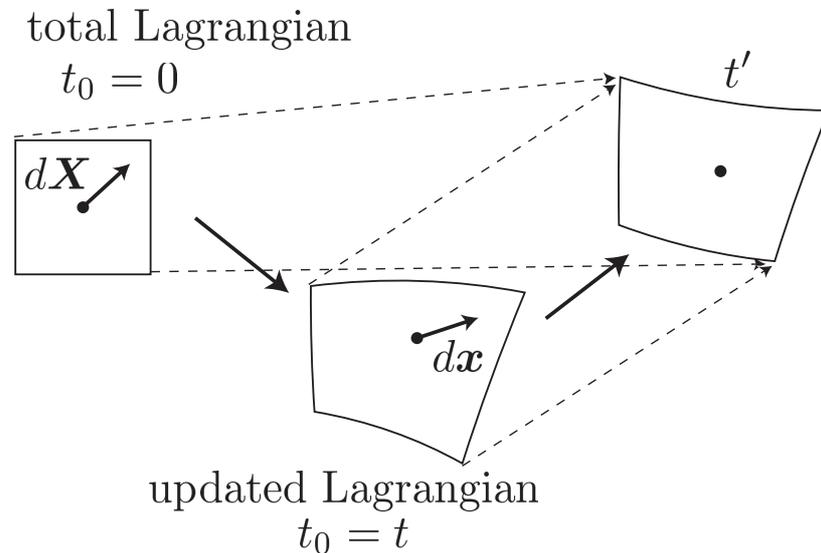


Fig. 4.1: Concept of nonlinear analysis

物体の運動について，変形前の時刻0における物質点 (Lagrange型解析においては節点) の配置を初期配置 \mathbf{X} とする．また，各物質点の時刻 t における座標を ${}^t\mathbf{x}$ とする．増分解析では，現時刻 t から有限な時間増分 Δt 経過後，つまり時刻 $t' = t + \Delta t$ における物質点の配置を逐次求める．その際の基準配置として，時刻 $t_0 = 0$ の初期配置 \mathbf{X} を用いるものを total Lagrange 法と呼び，変形中の時刻 $t_0 = t$ の現配置 ${}^t\mathbf{x}$ を用いる方法を updated Lagrange 法と呼ぶ．本手法では幾何学的非線形問題の仮想仕事式に対して平板の変形を適用することで線形問題から幾何学的非線形問題への拡張を行った．ただし，第2章で示した RK は二次元の座標の関数として与えられており，先に示した通常の平板の定式化を拡張しようとも，時々刻々三次元的に配

置の変わる updated Lagrange 法を単純に適用することは容易ではないため，本章では total Lagrange 法に基づいた定式化を行っている．なお，基本境界条件の定義方法には前章に示した MPC 法を適用する．

4.1 幾何学的非線形解法

幾何学的非線形解析を実施するために，初期配置を参照する total Lagrange 法に基づいた定式化，離散化を行った．初期配置 \mathbf{X} から時刻 t における現配置 ${}^t\mathbf{x}$ までの変位を ${}^t\mathbf{u}(= {}^t\mathbf{x} - \mathbf{X})$ とし，ひずみ，応力テンソルには時刻 0 の初期配置を基準配置とする Green-Lagrange ひずみテンソルと第 2 Piola-Kirchhoff 応力テンソルを用いる．

$${}^t_0\mathbf{E} = \frac{1}{2} \left\{ \frac{\partial^t\mathbf{u}}{\partial\mathbf{X}} + \frac{\partial^t\mathbf{u}^T}{\partial\mathbf{X}} + \frac{\partial^t\mathbf{u}^T}{\partial\mathbf{X}} \cdot \frac{\partial^t\mathbf{u}}{\partial\mathbf{X}} \right\} \quad (4.1)$$

$${}^t_0\mathbf{S} = \mathbf{C} : {}^t_0\mathbf{E} \quad (4.2)$$

時刻 $t' = t + \Delta t$ における仮想仕事式は次式のように表される．

$$\int_V {}^t_0\mathbf{S} : \delta {}^t_0\mathbf{E} dV = {}^t\delta R \quad (4.3)$$

$${}^t\delta R = \int_{S_t} {}^t_0\bar{\mathbf{t}} \cdot \delta \mathbf{u} dS \quad (4.4)$$

ここで， ${}^t_0\mathbf{S}$ ， ${}^t_0\mathbf{E}$ ， ${}^t\delta R$ ， ${}^t_0\bar{\mathbf{t}}$ はそれぞれ左下付きの基準時刻を $t_0 = 0$ とする左上付きの時刻 t' における第 2 Piola-Kirchhoff 応力テンソル，Green-Lagrange ひずみテンソル，外力の仮想仕事，公称表面力ベクトルであり， V ， S_t は物体の体積および表面力を受ける面積を指す．

変位増分を \mathbf{u} とすれば時刻 t' における変位 ${}^t'\mathbf{u}$ は，

$${}^t'\mathbf{u} = {}^t\mathbf{u} + \mathbf{u} \quad (4.5)$$

これを踏まえて ${}^t_0\mathbf{E}$ ， ${}^t_0\mathbf{S}$ を分解すると，

$${}^t_0\mathbf{E} = {}^t_0\mathbf{E} + {}_0\mathbf{E}_L + {}_0\mathbf{E}_{NL} \quad (4.6)$$

$${}^t_0\mathbf{S} = {}^t_0\mathbf{S} + {}_0\mathbf{S} \quad (4.7)$$

ここで, ${}_0\mathbf{E}_L$, ${}_0\mathbf{E}_{NL}$ はそれぞれ Green-Lagrange ひずみ増分の線形項, 非線形項である. これを仮想仕事式に代入すると, 次のような増分分解式が得られる.

$$\begin{aligned} & \int_V {}_0\mathbf{S} : (\delta_0\mathbf{E}_L + \delta_0\mathbf{E}_{NL})dV + \int_V {}^t_0\mathbf{S} : \delta_0\mathbf{E}_{NL}dV \\ & = {}^t\delta R - \int_V {}^t_0\mathbf{S} : \delta_0\mathbf{E}_LdV \end{aligned} \quad (4.8)$$

この増分分解式 (4.8) について考えると, 左辺は \mathbf{u} に関して非線形となるため左辺の線形化を行うと,

$$\begin{aligned} & \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \{ \text{式 (4.8) 左辺} \} / \Delta t \\ & = \int_V {}^t_0\dot{\mathbf{S}} : \delta_0\mathbf{E}_LdV + \int_V {}^t_0\mathbf{S} : (\delta_0\mathbf{E}_{NL})dV \end{aligned} \quad (4.9)$$

となる. $\Delta t \rightarrow 0$ において $\mathbf{u} \rightarrow 0$ となることから \mathbf{u} に関して 2 次以上となる ${}_0\mathbf{S} : \delta_0\mathbf{E}_{NL}$ の項は無視され, 線形化が行われる. 以上の線形化を行うことで, 最終的に以下の変位増分 \mathbf{u} についての増分分解式を得る.

$$\begin{aligned} & \left[\int_V {}^t_0\dot{\mathbf{S}} : \delta_0\mathbf{E}_LdV + \int_V {}^t_0\mathbf{S} : (\delta_0\mathbf{E}_{NL})dV \right] \Delta t \\ & = {}^t\delta R - \int_V {}^t_0\mathbf{S} : \delta_0\mathbf{E}_LdV \end{aligned} \quad (4.10)$$

4.2 仮想仕事式の離散化

仮想仕事式 (4.10) に基づいて RK 近似による仮想仕事式の離散化を行う. まず, 時刻 t の変位 ${}^t\mathbf{u}(\mathbf{x})$ について考える. 回転が微小であることを前提に, 平板の変位増分は次のように表される.

$$\mathbf{u}(\mathbf{X}) = \begin{Bmatrix} u_1(\mathbf{X}) \\ u_2(\mathbf{X}) \\ u_3(\mathbf{X}) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} u_{1mid}(\mathbf{X}) + z\theta_2(\mathbf{X}) \\ u_{2mid}(\mathbf{X}) - z\theta_1(\mathbf{X}) \\ u_3(\mathbf{X}) \end{Bmatrix} \quad (4.11)$$

第 2 章の線形問題の定式化と同様, u_i ($i = 1, 2, 3$) は時刻 t におけるカーテシアン座標系 X_i ($i = 1, 2, 3$) に対応する変位増分, z は板厚内の座標 ($|z| \leq t_h/2$, θ_i ($i = 1, 2$))

は X_i ($i = 1, 2$) 軸回りの回転角増分である．式 (4.11) に RK 近似を適用すると，変位増分は次式のように近似できる．

$$\mathbf{u}^h(\mathbf{x}) = \sum_{I=1}^{NP} \Psi_I(\mathbf{x}) \mathbf{U}_I \quad (4.12)$$

ここで， \mathbf{u}^h は変位増分の近似値ベクトル， \mathbf{U}_I は節点変位増分ベクトル， Ψ_I は \mathbf{u}^h と \mathbf{U}_I を関連づける RK によるマトリクスであり，それぞれ次のように表される．

$$\mathbf{u}^h = \left\{ u_1^h \quad u_2^h \quad u_3^h \right\}^T \quad (4.13)$$

$$\mathbf{U}_I = \left\{ d_{1I} \quad d_{2I} \quad d_{3I} \quad d_{4I} \quad d_{5I} \right\}^T \quad (4.14)$$

$$\Psi_I = \begin{bmatrix} \psi_I & 0 & 0 & 0 & z\psi_I \\ 0 & \psi_I & 0 & -z\psi_I & 0 \\ 0 & 0 & \psi_I & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (4.15)$$

次に，次式に示される Δt 間の Green-Lagrange ひずみテンソルの増分 ${}_0\mathbf{E}$ について考える．

$$\begin{aligned} {}_0E_{ij} &= \frac{1}{2} \left\{ \frac{\partial u_i}{\partial X_j} + \left(\frac{\partial u_j}{\partial X_i} \right) + \left(\frac{\partial u_k}{\partial X_i} \right) \cdot \left(\frac{\partial^t u_k}{\partial X_j} \right) + \left(\frac{\partial^t u_k}{\partial X_i} \right) \cdot \left(\frac{\partial u_k}{\partial X_j} \right) \right\} \\ &\quad + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_k}{\partial X_i} \right) \cdot \left(\frac{\partial u_k}{\partial X_j} \right) \\ &= {}_0E_{Lij} + {}_0E_{NLij} \end{aligned} \quad (4.16)$$

ここで， ${}_0E_{Lij}$ ， ${}_0E_{NLij}$ はそれぞれひずみ増分の変位増分についての線形項，及び非線形項である．式 (4.12) の変位増分の近似式を代入すれば，変位-ひずみ変換マトリクスは次式のように表される．

$$\begin{aligned} &\left\{ {}_0E_{L11} \quad {}_0E_{L22} \quad 2{}_0E_{L12} \quad 2{}_0E_{L31} \quad 2{}_0E_{L23} \right\}^T \\ &= \sum_{I=1}^{NP} {}_0^t \mathbf{B}_{LI} \mathbf{U}_I \end{aligned} \quad (4.17)$$

${}^t_0\mathbf{B}_{LI}$ はひずみ増分の線形項 ${}_0E_{Lij}$ と節点変位増分ベクトル \mathbf{U}_I を関連付けるマトリクスであり，次式のように表される．

$${}^t_0\mathbf{B}_{LI} = \begin{bmatrix} b_{I1}F_{11} & b_{I1}F_{21} & b_{I1}F_{31} & -zb_{I1}F_{21} & zb_{I1}F_{11} \\ b_{I2}F_{12} & b_{I2}F_{22} & b_{I2}F_{32} & -zb_{I2}F_{22} & zb_{I2}F_{12} \\ b_{I1}F_{12} + b_{I2}F_{11} & b_{I1}F_{22} + b_{I2}F_{21} & b_{I1}F_{32} + b_{I2}F_{31} & -z(b_{I1}F_{22} + b_{I2}F_{21}) & z(b_{I1}F_{12} + b_{I2}F_{11}) \\ b_{I1}F_{13} & b_{I1}F_{23} & b_{I1} & -\psi_I F_{21} & \psi_I F_{11} \\ b_{I2}F_{13} & b_{I2}F_{23} & b_{I2} & -\psi_I F_{22} & \psi_I F_{12} \end{bmatrix} \quad (4.18)$$

ここで， b_{Ii} , ($i = 1, 2$) は第 2 章に示した SCNI による線積分， ψ_I は RK であり，線形解析と同様に SCNI のボロノイ分割を用いて面積分を行う．また， F_{ij} は次式に示す時刻 t における変形勾配テンソルである．

$$F_{ij} = \delta_{ij} + \frac{\partial^t u_i^h}{\partial X_j} \quad (4.19)$$

ここで， $\partial^t u_i^h / \partial X_j$ は式 (4.12) で示す i 番目の RK による近似変位 ${}^t u_i^h(\mathbf{x})$ の X_j ($j = 1, 2, 3$) に関する一階偏微分であるが，たわみ角成分は微小として無視する．同様にして Green-Lagrange ひずみ増分の非線形項の離散化に関するマトリクス ${}^t_0\mathbf{B}_{NLI}$ を示す． \mathbf{u}_i^{hT} ($i = 1, 2, 3$) を以下に示す変位の一階微分に関するベクトルとすると，次のように表すことができる．

$$\mathbf{u}_i^{hT} = \{u_{1,i}^h \quad u_{2,i}^h \quad u_{3,i}^h\} \quad i = \{1, 2, 3\} \quad (4.20)$$

$$\left\{ \mathbf{u}_{,1}^{hT} \quad \mathbf{u}_{,2}^{hT} \quad \mathbf{u}_{,3}^{hT} \right\}^T = \sum_{I=1}^{NP} {}^t_0\mathbf{B}_{NLI} \mathbf{U}_I \quad (4.21)$$

$${}^t_0\mathbf{B}_{NLI} = \begin{bmatrix} b_{I1} & 0 & 0 & 0 & zb_{I1} \\ 0 & b_{I1} & 0 & -zb_{I1} & 0 \\ 0 & 0 & b_{I1} & 0 & 0 \\ b_{I2} & 0 & 0 & 0 & zb_{I2} \\ 0 & b_{I2} & 0 & -zb_{I2} & 0 \\ 0 & 0 & b_{I2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \psi_I \\ 0 & 0 & 0 & -\psi_I & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (4.22)$$

以上で得られた変位-ひずみ変換マトリクスを用いて式 (4.10) を離散化すると、時刻 t から時刻 t' への変位増分を求める接線剛性方程式が得られる。

$${}^t_0\mathbf{K}\mathbf{U} = {}^{t'}_0\mathbf{F} - {}^t_0\mathbf{Q} \quad (4.23)$$

${}^t_0\mathbf{K}$ は剛性マトリクス、 ${}^t_0\mathbf{Q}$ は内力ベクトルであり、 ${}^{t'}_0\mathbf{F}$ は時刻 t' での外力ベクトルである。剛性マトリクス及び内力ベクトルの各成分を次に示す。

$${}^t_0\mathbf{K}_{IJ} = {}^t_0\mathbf{K}_{L I J} + {}^t_0\mathbf{K}_{N L I J} \quad (4.24)$$

$${}^t_0\mathbf{K}_{L I J} = \sum_{K=1}^{NP} {}^t_0\mathbf{B}_{L I}^T(\mathbf{x}_K) \mathbf{D} {}^t_0\mathbf{B}_{L J}(\mathbf{x}_K) A_K \quad (4.25)$$

$${}^t_0\mathbf{K}_{N L I J} = \sum_{K=1}^{NP} {}^t_0\mathbf{B}_{N L I}^T(\mathbf{x}_K) {}^t_0\bar{\mathbf{S}}(\mathbf{x}_K) {}^t_0\mathbf{B}_{N L J}(\mathbf{x}_K) A_K \quad (4.26)$$

$${}^t_0\mathbf{Q}_I = \sum_{K=1}^{NP} {}^t_0\mathbf{B}_{L I}^T(\mathbf{x}_K) {}^t_0\hat{\mathbf{S}}(\mathbf{x}_K) A_K \quad (4.27)$$

${}^t_0\mathbf{K}_L$, ${}^t_0\mathbf{K}_{NL}$ はそれぞれ、剛性マトリクス ${}^t_0\mathbf{K}$ の初期変位項、初期応力項である。また、 A_K は SCNI の領域 Ω_K の面積である。構成則マトリクスは線形解析に示したものと同様の弾性マトリクスであり、第2Piola-Kirchhoff 応力テンソルによる応力マトリクス、ベクトルは次のように定義する。

$${}^t_0\bar{\mathbf{S}} = \begin{bmatrix} {}^t_0S_{11}\mathbf{I} & {}^t_0S_{12}\mathbf{I} & {}^t_0S_{13}\mathbf{I} \\ {}^t_0S_{21}\mathbf{I} & {}^t_0S_{22}\mathbf{I} & {}^t_0S_{23}\mathbf{I} \\ {}^t_0S_{31}\mathbf{I} & {}^t_0S_{32}\mathbf{I} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \quad (4.28)$$

$${}^t_0\hat{\mathbf{S}}^T = \left\{ {}^t_0S_{11} \quad {}^t_0S_{22} \quad {}^t_0S_{12} \quad {}^t_0S_{23} \quad {}^t_0S_{31} \right\} \quad (4.29)$$

平面応力場の仮定より ${}^t_0S_{33}\mathbf{I}$ は 0 とみなされている。 \mathbf{I} は 3×3 の単位ベクトルである。また、体積積分についても線形解析と同様に板厚方向の積分は解析的に積分している。時刻 t から $t + \Delta t$ の線形化された式 (4.23) を解き、荷重増分制御の Newton-Raphson 法による反復計算により未知配置 t' における解の収束を得る。

4.3 数値解析例

本節では平板の幾何学的非線形問題の数値解析例として矩形パネルの座屈解析と防撓パネルの座屈解析を示す. 共通のパラメータとして弾性係数 $E = 206\text{GPa}$, ポアソン比 $\nu = 0.3$, せん断補正係数 $\kappa = \pi^2/12$, 影響半径決定パラメータ $h = 1.15a$ (a : 節点間距離) を用いる. 参照解には十分に細かいメッシュ分割の FEA による解を用いる. 先の定式化に示した通り, 幾何学的非線形問題では残差力の収束, つまりは応力の評価が重要な問題となる. 基本境界条件の規定方法として MPC 法を用いるが, RK の基本となるカーネル関数には Cubic spline (3次), 5次, 7次, 9次のスプライン関数を用い, 手法の精度の確認と共に 3.1.4 項にて行った MPC 法の局所的な解の誤差についての検証を改めて行う.

4.3.1 矩形パネルの座屈解析

面内方向の軸圧縮を受ける矩形パネルの座屈解析について示す. 板の寸法は $1000 \times 1000 \text{ mm}^2$, 板厚は $t_h = 5 \text{ mm}$ の薄板とする. 境界条件は図 4.2 (a), (b) に示す通りであり, 単純支持される板に対して初期ステップ (図 4.2 (a)) で初期不整導入のための等分布圧力を载荷したまま以降のステップ (図 4.2 (b)) で面内方向の一軸圧縮を加える.

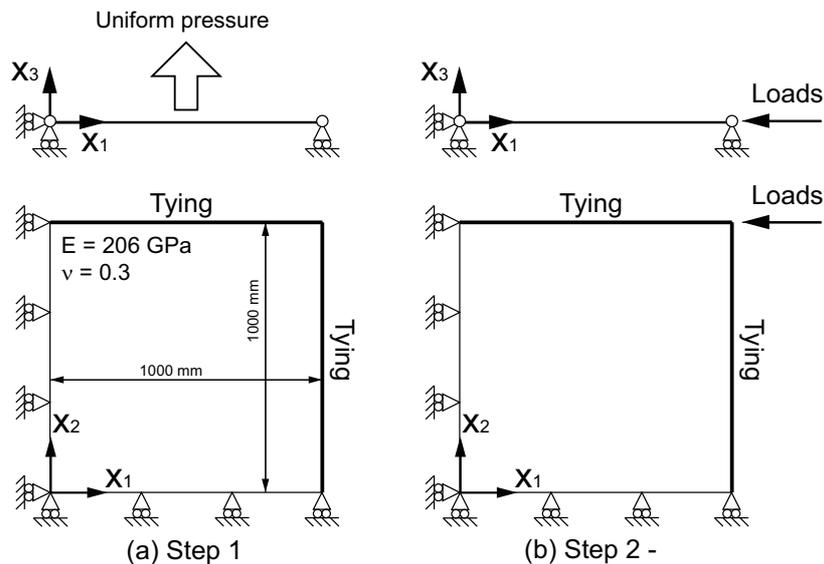


Fig. 4.2: Model for the buckling analysis of a rectangular plate [(a) Step 1 (Uniform pressure), (b) Step 2 (Point loads)]

初期ステップでの等分布荷重値は初期不整の最大たわみ A_0 と板厚 t_h の比が $A_0/t_h=0.01$, 0.05, 0.1 となる荷重値を用いている. 以降のステップで直線保持された辺 ($x_1=1000$ mm) に加えられる圧縮荷重値は 2.0×10^5 N である. 変位の拘束及び直線保持のための同期は MPC 法を用いて規定する. 離散化モデルは 3.1.4 項で用いたモデル A1, A2, A3, B1, B2, B3 を用いる. 初期不整感度を確認するため FEA による $A_0/t_h = 1.0 \times 10^{-4}$ の初期不整を導入した解を併せて示す. モデル A3, 及び B3 の 3 次, 9 次関数を用いた面中央の荷重-変位曲線をそれぞれ図 4.3, 4.4 に示す. また

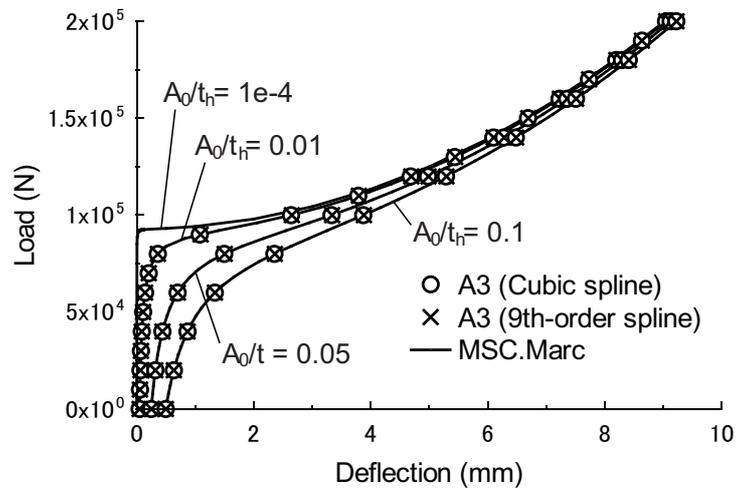


Fig. 4.3: Load-deflection curve for Model A3 (regularly distributed model)

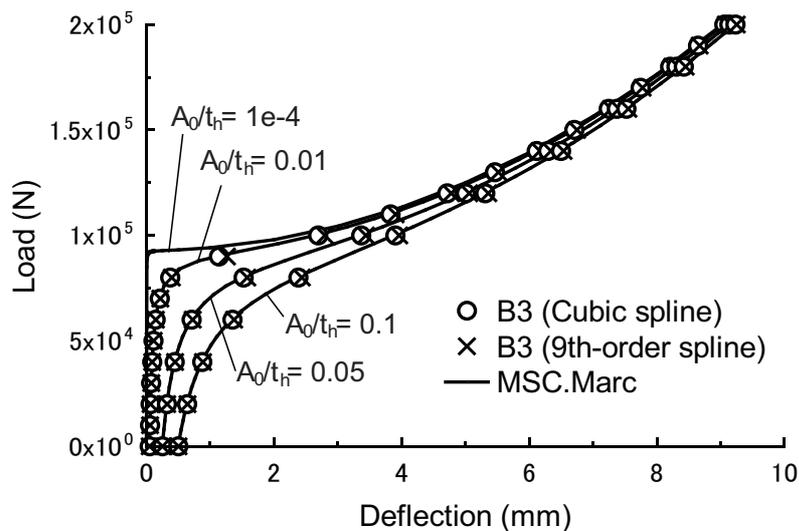


Fig. 4.4: Load-deflection curve for Model B3 (irregularly distributed model)

スプライン関数の次数による影響を確認するため、それぞれの次数での最大たわみの収束傾向を図 4.5 に示す。モデルは A1, A2, A3 であり $A_0/t_h=0.01$ の条件における解を示している。さらにモデル A3, B3 の最終ステップでの $x_2=500$ mm における応力 S_{11} , S_{22} の分布を図 4.6 に示す。各々の結果から、本手法の解は参照解と高精度に一致していることが確認できる。また最大たわみや応力の分布に関してスプライン関数の次数による影響はほとんど見られないことから、MPC 法適用による解の誤差が解析全体に与える影響は少ないことがうかがえる。次項の例題でも同様の検証を行う。

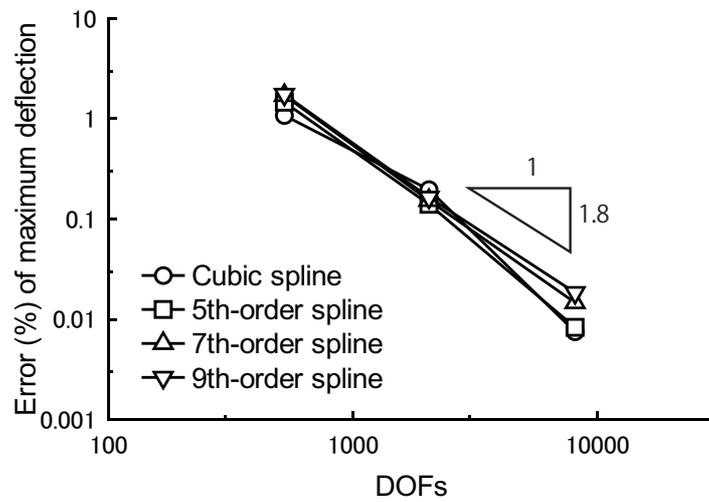


Fig. 4.5: Convergence study ($A_0/t_h=0.01$)

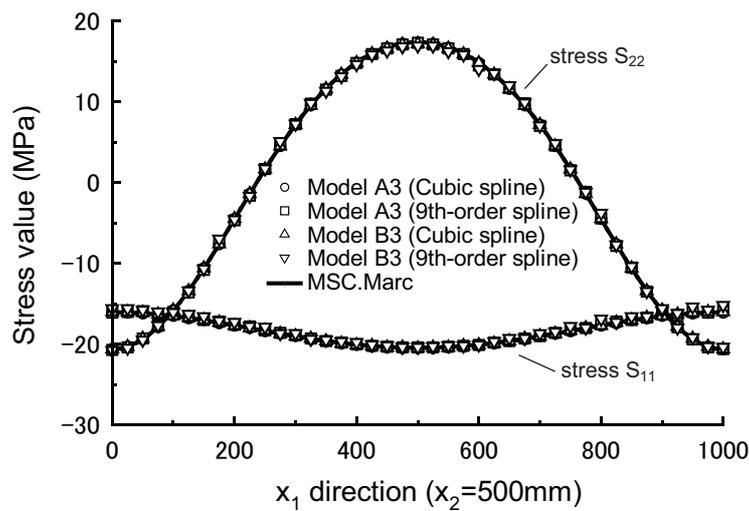


Fig. 4.6: Stress distribution along the x_1 direction ($x_2=500$ mm)

4.3.2 防撓パネルの座屈解析

防撓パネルの座屈解析について示す。防撓パネルは船体や海洋構造物中によく用いられる座屈を防ぐための構造であり [98], ここでは図 4.7 (a) に示されるモデルを取り扱う。

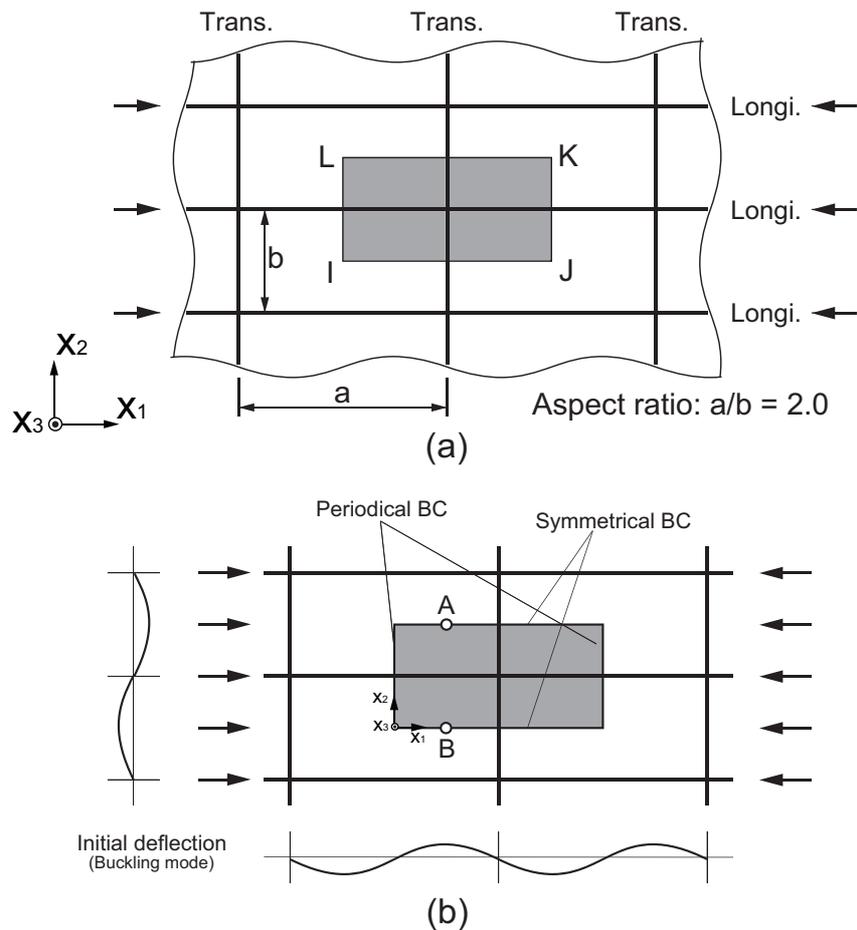


Fig. 4.7: Analysis model for buckling analysis of a stiffened plate [(a) Stiffened plate structure ($a/b=2.0$), (b) Double-bay double-span model]

板の寸法は長軸方向に $a=1000$ mm, 短軸方向に $b=500$ mm とし, アスペクト比 a/b は 2.0 である. 板厚は 10 mm とする. 計算モデルはガーダーとフレームで補強される周期的な構造の一部 ($IJKL$) であり, 境界条件として直線保持に加えて対称条件と周期境界条件を課す必要がある. このモデルは一般にダブルスパン-ダブルベイモデルと呼ばれるものである. 離散化モデルは 61×31 の節点分割の A4, B4 として図 4.8(a), (b) に示されるものを用いる.

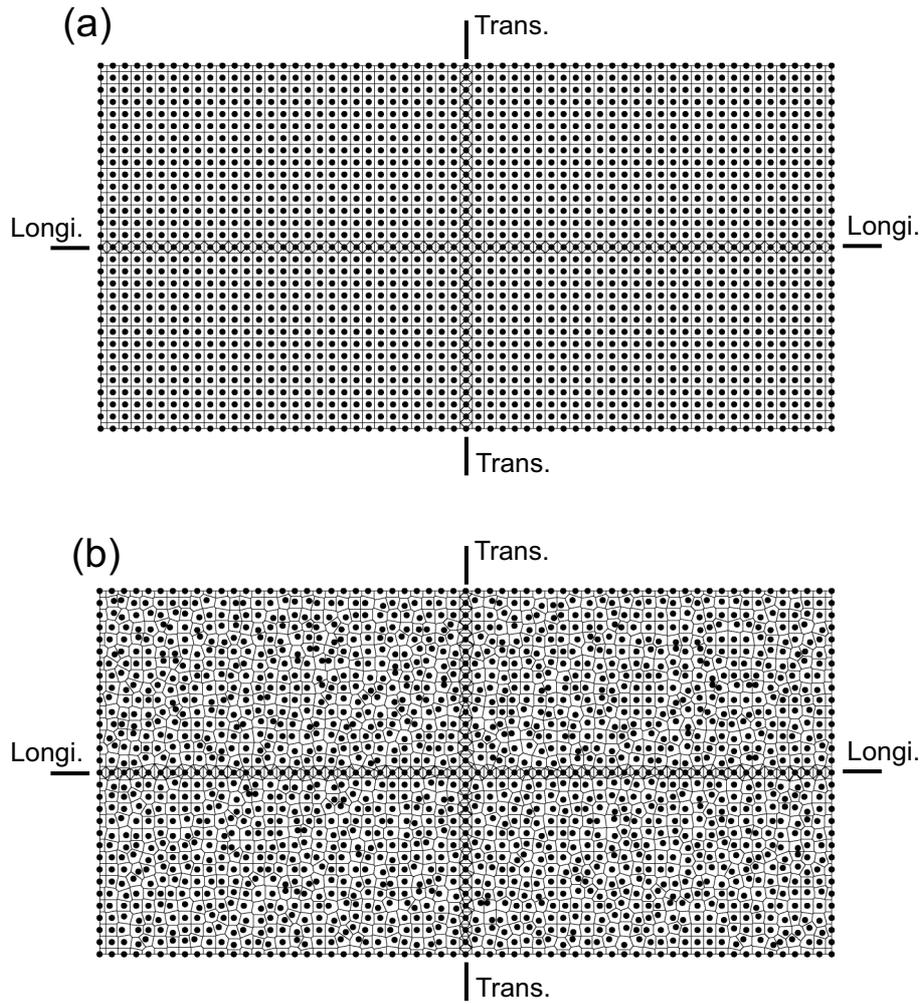


Fig. 4.8: RK models (61×31 nodes)[(a) Model A4, (b) Model B4]

本例題では荷重方向に2半波の初期不整を設け、その最大たわみ量 A_0 は0.1 mm である ($A_0/t_h=0.01$). FEA では一般にこの形状は初期座標として与えられるが、平板の定式化となる本手法ではこの形状を平板の状態からの変形モード \mathbf{U}_0 として与える. \mathbf{U}_0 が与えられたとき平衡状態と仮定するためにその時点での内力ベクトルを初期の外力ベクトルとして定義することで初期応力を考慮した上で同様の計算を実施できる.

$${}^t_0 \mathbf{K} \mathbf{U}_0 = {}^t_0 \mathbf{F} - {}^t_0 \mathbf{Q} = \mathbf{0} \quad (4.30)$$

ここで t_0 は初期不整が与えられた時点での時刻であり, ${}^t_0 \mathbf{K}$, ${}^t_0 \mathbf{F}$, ${}^t_0 \mathbf{Q}$ はそれぞれこの時の接線剛性マトリクス, 外力ベクトル, 内力ベクトルである. 実際に加えられる荷重は式 (4.30) の状態を保存した後に進められる. 境界条件は図 4.7 (b) に示さ

れる． ガーダー・フレーム上でのたわみは剛に拘束され， 初期不整モードに依存する構造の連続性と周期性のため MPC 法により対称条件を辺 IJ , KL に， 周期境界条件を辺 IL , JK に課す． 荷重条件として初期ステップで水圧を想定した 4 ケースの等分布荷重 ($w_p = 0.0, 0.1, 0.2, 0.3$ MPa) を， 以降のステップで長軸方向の端部 $x_1=1000$ mm に一軸圧縮力 2.5×10^6 N を加える． 計算結果を図 4.9, 4.10 に示す．

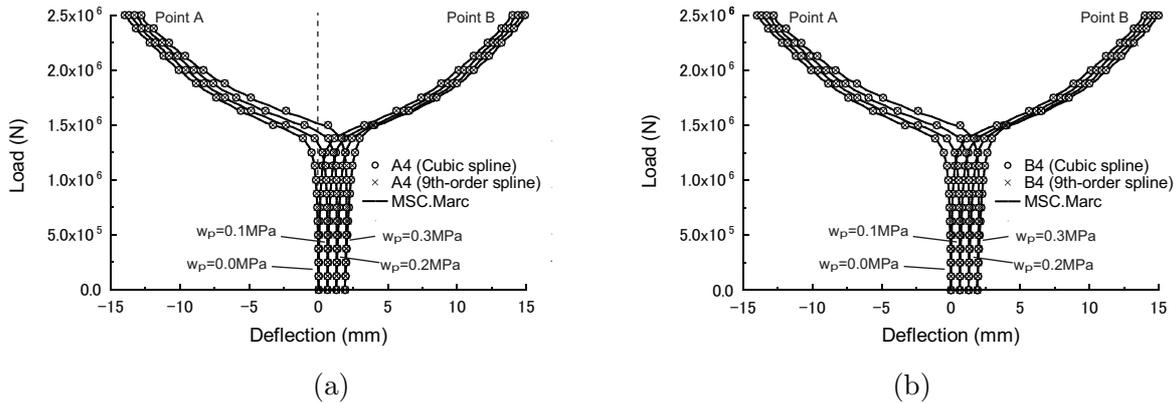


Fig. 4.9: Load-deflection curve [(a) Model A4 , (b) Model B4]

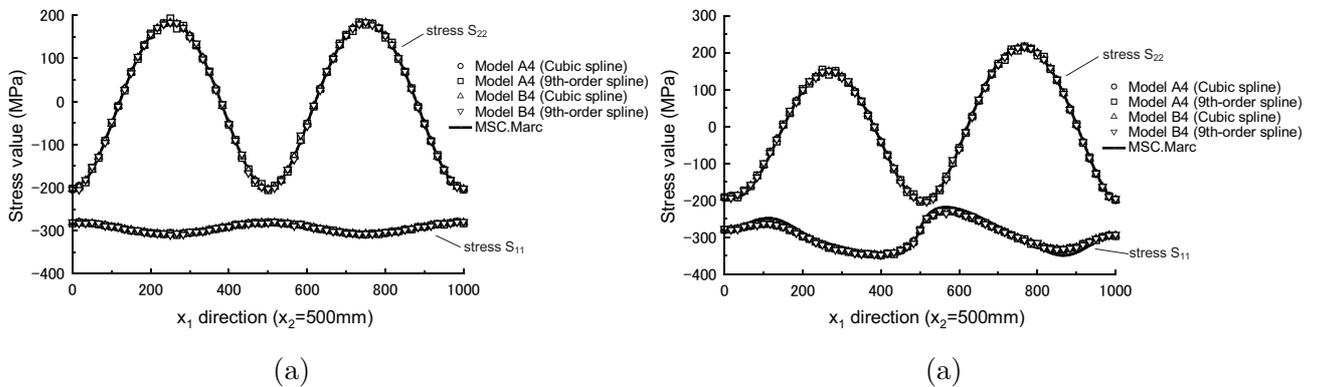


Fig. 4.10: Stress distribution along the x_1 direction ($x_2=500$ mm)[(a) $w_p=0.0$ MPa, (b) $w_p=0.3$ MPa]

図 4.9(a),(b) はそれぞれモデル A4, B4 の点 A, B における荷重-変位曲線であり， 水圧の影響を受ける座屈挙動を良く表し初期不整モードに依存する変形が確認できる． また， 辺 KL における最終ステップでの応力分布を図 4.10(a),(b) に示す． 図 4.10(a) は $w_p = 0.0$ MPa, 図 4.10(b) は $w_p = 0.3$ MPa の解であり， 参照解に対する高精度な一致と周期境界条件による応力の連続性が確認できる． また， この例題においてもやはり 3 次， 9 次関数による違いはほとんど無く， 本節で取り扱ったような一般的な

座屈解析において全体的な評価を行う場合には、MPC法の適用に依存する局所的な解の振動はほとんど問題にならないことがわかった。

4.4 第4章結言

本章にはRKPMにより離散化された平板の幾何学的非線形問題の定式化について示した。本手法の解は汎用FEAソフトウェアによる解と高精度に一致しており、定式化の妥当性が確認できた。また、第3章にて提案したMPC法に関する応力が振動するという問題に関して数値解析例で改めて検証を行ったが、少なくとも局所的な誤差が問題とならないグローバルな変形に悪影響を与えうるものではなく、直線保持や周期連続境界条件などの自由度を同期する境界条件が適切に与えられていることが確認できた。

第5章 曲面座標系を用いたシェルの定式化

前章ではカーテシアン座標系の座標に基づいた平板の幾何学的非線形問題の定式化を示した。数値解析例では汎用 FEA ソフトウェアによる解と高精度に一致し手法の妥当性は確認できたが、あくまでも計算できる対象は平板のみで取り扱える問題が限定される。初期たわみを導入した座屈解析を実施したが、初期形状として与えるのではなく やや複雑な方法を要し、かつ微小回転を前提とする初期たわみ程度の曲面しか表現できないことなどから一般的な曲面を扱うことはできない。また従来のメッシュフリー/粒子法を用いた板構造解析は、先述の通り古典的な板理論に基づいた手法が多いため平板を計算対象としたものがほとんどであり、EFGM を用いた Krysl ら [65] や Noguchi ら [74] の研究以外では任意曲面の曲げ解析などはほとんど行われていない。一般的な FEA ではアイソパラメトリックシェル要素を曲面に連続して配置することで近似的な曲面として取り扱うが、メッシュフリー/粒子法においては一枚の板全体を一つの曲面形状として取り扱うため、このような方法を用いることができない。また、カーテシアン座標系に基づく三次元の近似関数により曲面形状の問題を取り扱った研究例 [99] もあるが、近似関数の構成や数値積分に関して大きな計算コストや煩雑さが要求される。そこで、Krysl ら [65] や Noguchi ら [74] らの方法を参考に、共変基底ベクトル、反変基底ベクトルを基底とする曲面内に埋め込まれた曲面座標系を用いることで、任意曲面を一般的に取り扱えるシェルの定式化を行った。

本章には、曲面座標系を用いた RKPM によるシェルの幾何学的非線形問題の定式化を示す。また、増分制御方法として新たに組み込んだ弧長法の概要と、第3章に示した組合せ構造のための面内回転剛性を曲面座標系上で取り扱うための方法について説明する。

5.1 曲面座標系を用いた RKPM によるシェルの幾何学的非線形問題の定式化

本章では曲面座標系を用いた RKPM による一般シェル定式化について示す．初めに板の変形と曲面座標系を用いるための基底ベクトルやカーテシアン座標系との関係について示し，仮想仕事式における応力・ひずみテンソルや構成則テンソルの成分や積分方法について説明する．

5.1.1 板の変形と RKPM における曲面座標系

板の初期配置 \mathbf{X} ，及び時刻 t における配置 ${}^t\mathbf{x}$ はそれぞれ次のように表せる．

$$\mathbf{X} = \mathbf{X}_{mid} + \frac{r^3}{2} t_h {}^0\mathbf{V}_3 \quad (5.1)$$

$${}^t\mathbf{x} = {}^t\mathbf{x}_{mid} + \frac{r^3}{2} t_h {}^t\mathbf{V}_3 \quad (5.2)$$

ここで， \mathbf{X}_{mid} ， ${}^t\mathbf{x}_{mid}$ はそれぞれカーテシアン座標系における板の中立面の座標であり， t_h は板厚， ${}^0\mathbf{V}_3$ ， ${}^t\mathbf{V}_3$ はそれぞれ初期配置と時刻 t でのシェルのディレクターである． r^3 はディレクター方向の一般化座標である．式 (5.2) より，現配置 t から未知配置 t' への $\Delta t = t' - t$ 間の変位増分ベクトル \mathbf{u} は次式で表される．

$$\begin{aligned} \mathbf{u} &= {}^{t'}\mathbf{x} - {}^t\mathbf{x} \\ &= {}^{t'}\mathbf{u}_{mid} - {}^t\mathbf{u}_{mid} + \frac{r^3}{2} t_h ({}^{t'}\mathbf{V}_3 - {}^t\mathbf{V}_3) \end{aligned} \quad (5.3)$$

ここでディレクターの回転について微小と仮定すると，ディレクターに直交する局所直交基底ベクトル $\mathbf{V}_i (i = 1, 2)$ と \mathbf{V}_i に分解された回転角 $\beta_i (i = 1, 2)$ を用いて \mathbf{u} は次のように書き換えられる．

$$\mathbf{u} = \mathbf{u}_{mid} + \frac{r^3}{2} t_h (-\beta_1 {}^t\mathbf{V}_2 + \beta_2 {}^t\mathbf{V}_1) \quad (5.4)$$

つまり，並進変位 3 成分と回転 2 成分の 5 自由度を持つ変形となる．なお，物性は等方性材料を仮定するため， $\mathbf{V}_i (i = 1, 2)$ は面に接し互いに直交してさえいれば良く，それぞれ次のように表すことで任意点においてディレクター \mathbf{V}_3 から容易に求まる．

$$\mathbf{V}_2 = \frac{\mathbf{V}_3 \times \mathbf{e}_1}{|\mathbf{V}_3 \times \mathbf{e}_1|} \quad (5.5)$$

$$\mathbf{V}_1 = \mathbf{V}_2 \times \mathbf{V}_3 \quad (5.6)$$

ここで、 \mathbf{e}_1 はカーテシアン座標系の直交基底ベクトルの第1成分である。

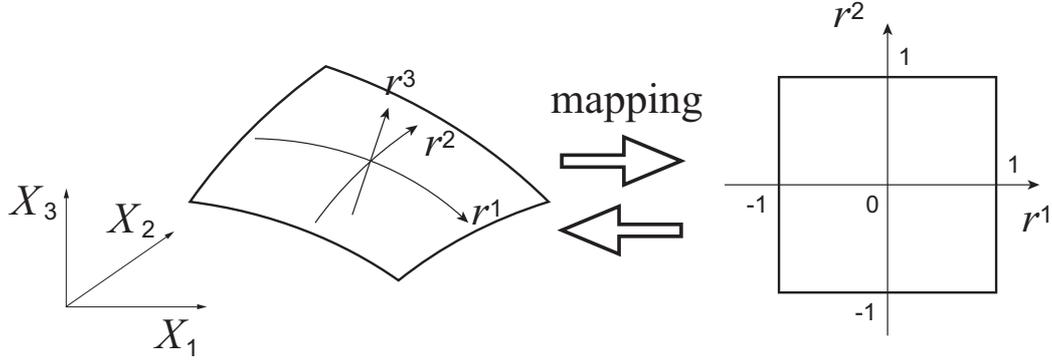


Fig. 5.1: Schematic illustration of convected coordinate system

さて、本手法では図 5.1 に示されるようにカーテシアン座標系 $\mathbf{X} = (X_1, X_2, X_3)$ における曲面に対して、その面内に曲面座標系 $\mathbf{r} = (r^1, r^2, r^3)$ を定義することで曲面を取り扱う。曲面を定義するための複数の点はそれぞれの座標系における座標を有しており、座標 \mathbf{X} は曲面座標系内の座標 \mathbf{r} による関数によって定義することも可能であるし、あるいは直接の入力とすることもできる。このとき面内の任意点のカーテシアン座標系における座標は曲面座標によって次のように表せる。

$$\mathbf{X}_{mid}(r^1, r^2) = \sum_{I=1}^K N_I(r^1, r^2) \mathbf{X}_I \quad (5.7)$$

$$\mathbf{X}(r^1, r^2) = \sum_{I=1}^K N_I(r^1, r^2) \left(\mathbf{X}_I + \frac{r^3}{2} t_h^0 \mathbf{V}_3 \right) \quad (5.8)$$

K は曲面を定義するために必要な点数である。 N_I はその補間関数であり、Noguchi ら [74] は曲面座標系を一般化座標系として N_I にはラグランジュ型の関数を用いている。この方法は total Lagrange 法に基づく幾何学的非線形解法への適用であるため、この曲面の定義は初期配置についてのみ用いられ、また適用例は二次曲面などの低次の関数により表されたものであるため効率的な計算が実施できている。しかしながら、初期たわみのような指数型関数で表される曲面の表現や時々刻々曲面が変形する updated Lagrange 法への適用を考えたとき、その都度適切な数 K を導きラグランジュ型の補間関数 N_I を定義するのは有効ではない。そこで本研究では、Krysl ら [65] の方法に倣いこの曲面の定義においても K を総節点数 NP 、 N_I を RK ψ_I とすることで、初期形状や変形途中の状態を問わずある程度複雑な関数によって表さ

れる曲面でも表現することができるようにした．またこのことから曲面座標系には特に一般化座標系を用いる必要はない．すなわち，式(5.7)，(5.8)は次式

$$\mathbf{X}_{mid}(r^1, r^2) = \sum_{I=1}^{NP} \psi_I(r^1, r^2) \mathbf{X}_I \quad (5.9)$$

$$\mathbf{X}(r^1, r^2) = \sum_{I=1}^{NP} \psi_I(r^1, r^2) \left(\mathbf{X}_I + \frac{r^3}{2} t_h^0 \mathbf{V}_3 \right) \quad (5.10)$$

となり，変位増分 \mathbf{u} は RK を用いて次のように表される．

$$\begin{aligned} \mathbf{u} &= \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} u_1 - \frac{t_h}{2} r^3 \beta_1 {}^t \mathbf{V}_{2(1)} + \frac{t_h}{2} r^3 \beta_2 {}^t \mathbf{V}_{1(1)} \\ u_2 - \frac{t_h}{2} r^3 \beta_1 {}^t \mathbf{V}_{2(2)} + \frac{t_h}{2} r^3 \beta_2 {}^t \mathbf{V}_{1(2)} \\ u_3 - \frac{t_h}{2} r^3 \beta_1 {}^t \mathbf{V}_{2(3)} + \frac{t_h}{2} r^3 \beta_2 {}^t \mathbf{V}_{1(3)} \end{Bmatrix} \\ &= \sum_{I=1}^{NP} \begin{bmatrix} \psi_I & 0 & 0 & -\frac{t_h}{2} r^3 \psi_I {}^t \mathbf{V}_{2(1)} & \frac{t_h}{2} r^3 \psi_I {}^t \mathbf{V}_{1(1)} \\ 0 & \psi_I & 0 & -\frac{t_h}{2} r^3 \psi_I {}^t \mathbf{V}_{2(2)} & \frac{t_h}{2} r^3 \psi_I {}^t \mathbf{V}_{1(2)} \\ 0 & 0 & \psi_I & -\frac{t_h}{2} r^3 \psi_I {}^t \mathbf{V}_{2(3)} & \frac{t_h}{2} r^3 \psi_I {}^t \mathbf{V}_{1(3)} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_{1I} \\ u_{2I} \\ u_{3I} \\ \beta_{1I} \\ \beta_{2I} \end{Bmatrix} \\ &= \sum_{I=1}^{NP} \Psi_I \mathbf{U}_I \quad (5.11) \end{aligned}$$

ここで，局所直交基底ベクトル ${}^t \mathbf{V}_i$ の右下付きの括弧内の値 j ($= 1, 2, 3$) はそれぞれカーテシアン座標系の基底ベクトル \mathbf{e}_j で ${}^t \mathbf{V}_i$ を分解したときの第1，第2，第3成分である．以降でベクトルについて右下付きの括弧がある場合，特に断りが無い限りは全て同様の成分を表す．任意点での ${}^t \mathbf{V}_i$ は式(5.9)や(5.10)の座標と同様に RK によって表される．

$${}^t \mathbf{V}_i(r^1, r^2) = \sum_{I=1}^{NP} \psi_I(r^1, r^2) {}^t \mathbf{V}_{iI} \quad (5.12)$$

またこのとき，曲面上の基底ベクトルとして次式の共変基底ベクトルを用いる．

$$\mathbf{G}_i = \frac{\partial \mathbf{X}}{\partial r^i} = \sum_{I=1}^{NP} \frac{\partial \psi_I(r^1, r^2)}{\partial r^i} \left(\mathbf{X}_I + \frac{r^3}{2} t_h^0 \mathbf{V}_{3I} \right), \quad (i = 1, 2) \quad (5.13)$$

$$\mathbf{G}_3 = \frac{\partial \mathbf{X}}{\partial r^3} = \sum_{I=1}^{NP} \psi_I(r^1, r^2) \frac{1}{2} t_h^0 \mathbf{V}_{3I} \quad (5.14)$$

一般的なカーテシアン座標系における基底ベクトル同士は互いに直交するため、

$$\mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}_j = \delta_{ij} \quad (5.15)$$

となるが、曲面上の共変基底ベクトル同士は基本的には必ずしも互いに直交するベクトルではないためこの通りでない。

$$\mathbf{G}_i \cdot \mathbf{G}_j \neq \delta_{ij} \quad (5.16)$$

従って、このような条件を満たすよう反変基底ベクトル \mathbf{G}^i を定義する。

$$\mathbf{G}_i \cdot \mathbf{G}^j = \delta_i^j \quad (5.17)$$

反変基底ベクトル \mathbf{G}^i は式 (5.17) の関係より、共変基底ベクトル \mathbf{G}_i を用いて次のように表すことができる。

$$\mathbf{G}^i = \frac{\mathbf{G}_j \times \mathbf{G}_k}{\mathbf{G}_i \cdot (\mathbf{G}_j \times \mathbf{G}_k)} \quad (5.18)$$

$$(i, j, k) = (1, 2, 3), (2, 3, 1), (3, 1, 2)$$

また、時刻 t における共変基底ベクトル ${}^t\mathbf{g}_i$ は、変位 ${}^t\mathbf{u}$ と初期配置の共変基底ベクトル \mathbf{G}_i を用いて次のように表せる。

$${}^t\mathbf{g}_i = \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial r^i} = \frac{\partial (\mathbf{X} + {}^t\mathbf{u})}{\partial r^i} = \mathbf{G}_i + \frac{\partial {}^t\mathbf{u}}{\partial r^i} \quad (5.19)$$

5.1.2 仮想仕事式の増分分解

ひずみテンソルとして Green-Lagrange ひずみテンソル ${}^t_{t_0}\mathbf{E}$ 、応力テンソルとして第 2Piola-Kirchhoff 応力テンソル ${}^t_{t_0}\mathbf{S}$ を用いると、未知配置 $t' = t + \Delta t$ における仮想仕事式は次のように表せる。

$$\int_V {}^t_0 \mathbf{S} : \delta {}^t_0 \mathbf{E} dV = {}^t \delta R \quad (5.20)$$

$$\int_{{}^t v} {}^t \mathbf{S} : \delta {}^t \mathbf{E} d{}^t v = {}^t \delta R \quad (5.21)$$

応力・ひずみテンソルの左下付きの添え字は参照配置を示し、式 (5.20) は参照配置を初期配置 $t_0 = 0$ とする total Lagrange 法、式 (5.21) は参照配置を現配置 $t_0 = t$ と

する updated Lagrange 法の仮想仕事式である．また ${}^t\delta R$ は仮想外力項， V は初期配置の解析領域の体積， ${}^t v$ は現配置の解析領域の体積である．未知配置 t' 及び現配置 t における Green-Lagrange ひずみテンソルを曲面座標系における基底ベクトルによって分解したとき，式 (5.20) について考えるとそれぞれ次式のように反変基底ベクトルによって分解された共変成分として表される．

$${}^t_0\mathbf{E} = \frac{1}{2} \left({}^t\mathbf{g}_i \cdot {}^t\mathbf{g}_j - \mathbf{G}_i \cdot \mathbf{G}_j \right) \mathbf{G}^i \otimes \mathbf{G}^j \quad (5.22)$$

$${}^t_0\mathbf{E} = \frac{1}{2} \left({}^t\mathbf{g}_i \cdot {}^t\mathbf{g}_j - \mathbf{G}_i \cdot \mathbf{G}_j \right) \mathbf{G}^i \otimes \mathbf{G}^j \quad (5.23)$$

Green-Lagrange ひずみの増分 ${}_0\mathbf{E}$ を考えると，

$$\begin{aligned} {}_0\mathbf{E} &= {}^t_0\mathbf{E} - {}^t_0\mathbf{E} = {}_0E_{ij} \mathbf{G}^i \otimes \mathbf{G}^j \\ &= \frac{1}{2} \left({}^t\mathbf{g}_i \cdot {}^t\mathbf{g}_j - {}^t\mathbf{g}_i \cdot {}^t\mathbf{g}_j \right) \mathbf{G}^i \otimes \mathbf{G}^j \end{aligned} \quad (5.24)$$

変位増分 \mathbf{u} と ${}^t\mathbf{g}_i$ を用いて ${}^t\mathbf{g}_i$ を表すと

$${}^t\mathbf{g}_i = {}^t\mathbf{g}_i + \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial r^i} \quad (5.25)$$

であり，ひずみ増分の成分 ${}_0E_{ij}$ は，

$$\begin{aligned} {}_0E_{ij} &= \frac{1}{2} \left\{ \left({}^t\mathbf{g}_i + \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial r^i} \right) \cdot \left({}^t\mathbf{g}_j + \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial r^j} \right) - {}^t\mathbf{g}_i \cdot {}^t\mathbf{g}_j \right\} \\ &= \frac{1}{2} \left({}^t\mathbf{g}_i \cdot \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial r^j} + {}^t\mathbf{g}_j \cdot \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial r^i} \right) + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial r^i} \cdot \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial r^j} \right) \\ &= {}_0E_{Lij} + {}_0E_{NLij} \end{aligned} \quad (5.26)$$

と表せる．ここに， ${}_0E_{Lij}$ ， ${}_0E_{NLij}$ は ${}_0E_{ij}$ の変位増分についての線形項，及び非線形項であり，その変分をとると，

$$\begin{aligned} \delta_0 E_{ij} &= \frac{1}{2} \left({}^t\mathbf{g}_i \cdot \frac{\partial \delta \mathbf{u}}{\partial r^j} + {}^t\mathbf{g}_j \cdot \frac{\partial \delta \mathbf{u}}{\partial r^i} \right) \\ &\quad + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \delta \mathbf{u}}{\partial r^i} \cdot \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial r^j} + \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial r^i} \cdot \frac{\partial \delta \mathbf{u}}{\partial r^j} \right) \\ &= \delta_0 E_{Lij} + \delta_0 E_{NLij} \end{aligned} \quad (5.27)$$

となる. 現配置 t での状態量が既知であることを考えると ${}^t_0\mathbf{E}$ の変分は ${}_0\mathbf{E}$ の変分であると見なすことが出来るので,

$$\begin{aligned}\delta_0^t \mathbf{E} &= \delta_0 \mathbf{E} \\ &= \delta_0 E_{ij} \mathbf{G}^i \otimes \mathbf{G}^j \\ &= (\delta_0 E_{Lij} + \delta_0 E_{NLij}) \mathbf{G}^i \otimes \mathbf{G}^j\end{aligned}\quad (5.28)$$

一方, 時刻 t' の第2Piola-Kirchhoff 応力を曲面座標系における共変基底ベクトルを用いて分解すると,

$$\begin{aligned}{}^t_0 \mathbf{S} &= {}^t_0 \mathbf{S} + {}_0 \mathbf{S} \\ &= ({}^t_0 S^{ij} + {}_0 S^{ij}) \mathbf{G}_i \otimes \mathbf{G}_j\end{aligned}\quad (5.29)$$

以上をまとめると, 式 (5.20) を増分分解した次式が得られる.

$$\begin{aligned}\int_V {}_0 S^{ij} (\delta_0 E_{Lij} + \delta_0 E_{NLij}) dV + \int_V {}^t_0 S^{ij} \delta_0 E_{NLij} dV \\ = {}^t \delta R - \int_V {}^t_0 S^{ij} \delta_0 E_{Lij} dV\end{aligned}\quad (5.30)$$

ただし, 式 (5.30) 左辺は変位増分 \mathbf{u} について非線形であるから, Δt で除して $\Delta t \rightarrow 0$ として速度系に線形化を行う. ${}_0 S^{ij}/\Delta t \rightarrow {}^t_0 \dot{S}^{ij}$, $\mathbf{u}/\Delta t \rightarrow {}^t \dot{\mathbf{u}}$ を考慮し, また $\mathbf{u} \rightarrow \mathbf{0}$ から \mathbf{u} に関して2次以上となる ${}^t_0 \dot{S}^{ij} \delta_0 E_{NLij}$ を無視できることを考えると, 次式が得られる.

$$\begin{aligned}\lim_{\Delta t \rightarrow 0} (\text{L.H.S. of Eq.(5.30)}/\Delta t) \\ = \int_V {}^t_0 \dot{S}^{ij} \delta E_{Lij} dV + \int_V {}^t_0 S^{ij} (\delta E_{NLij}) dV\end{aligned}\quad (5.31)$$

ここで, 応力速度-ひずみ速度関係を次のように定義する.

$${}^t_0 \dot{\mathbf{S}} = {}_0 \bar{\mathbf{C}} : {}^t_0 \dot{\mathbf{E}}\quad (5.32)$$

各点における曲面内の局所直行基底ベクトル \mathbf{V}_i を用いて構成則マトリクス ${}_0 \bar{\mathbf{C}}$ を分解すると,

$$\bar{\mathbf{C}} = {}_0 \bar{C}_{ijkl} \mathbf{V}_i \otimes \mathbf{V}_j \otimes \mathbf{V}_k \otimes \mathbf{V}_l\quad (5.33)$$

となり，曲面内では通常のシェルの弾性マトリクスとして次のように定義される．

$$\begin{aligned}
{}_0\bar{\mathbf{C}} &= \begin{bmatrix} {}_0\bar{C}_{1111} & {}_0\bar{C}_{1122} & {}_0\bar{C}_{1112} & {}_0\bar{C}_{1123} & {}_0\bar{C}_{1131} \\ {}_0\bar{C}_{2211} & {}_0\bar{C}_{2222} & {}_0\bar{C}_{2212} & {}_0\bar{C}_{2223} & {}_0\bar{C}_{2231} \\ {}_0\bar{C}_{1211} & {}_0\bar{C}_{1222} & {}_0\bar{C}_{1212} & {}_0\bar{C}_{1223} & {}_0\bar{C}_{1231} \\ {}_0\bar{C}_{2311} & {}_0\bar{C}_{2322} & {}_0\bar{C}_{2312} & {}_0\bar{C}_{2323} & {}_0\bar{C}_{2331} \\ {}_0\bar{C}_{3111} & {}_0\bar{C}_{3122} & {}_0\bar{C}_{3112} & {}_0\bar{C}_{3123} & {}_0\bar{C}_{3131} \end{bmatrix} \\
&= \frac{E}{1-\nu^2} \begin{bmatrix} 1 & \nu & & & \\ & 1 & & 0 & \\ & & \frac{1-\nu}{2} & & \\ & \text{sym.} & & \kappa \frac{1-\nu}{2} & \\ & & & & \kappa \frac{1-\nu}{2} \end{bmatrix} \quad (5.34)
\end{aligned}$$

一方でこれを共変基底ベクトル \mathbf{G}_i を用いた曲面座標系内の反変成分で表すと，

$${}_0\bar{\mathbf{C}} = {}_0C^{ijkl} \mathbf{G}_i \otimes \mathbf{G}_j \otimes \mathbf{G}_k \otimes \mathbf{G}_l \quad (5.35)$$

となり，構成則マトリクスの反変成分 ${}_0C^{ijkl}$ は次のように式 (5.34) の成分から求まり，応力テンソルとひずみテンソルを関連付ける．

$${}_0C^{ijkl} = {}_0\bar{C}_{mnop} (\mathbf{V}_m \cdot \mathbf{G}^i) (\mathbf{V}_n \cdot \mathbf{G}^j) (\mathbf{V}_o \cdot \mathbf{G}^k) (\mathbf{V}_p \cdot \mathbf{G}^l) \quad (5.36)$$

$${}^t_0\dot{S}^{ij} = {}_0C^{ijkl} {}^t_0\dot{E}_{Lkl} \quad (5.37)$$

従って，線形化された式 (5.30) は次のように成分表記される．

$$\begin{aligned}
&\left(\int_V {}_0C^{ijkl} {}_0\dot{E}_{kl} \delta_0 E_{Lij} dV + \int_V {}^t_0S^{ij} (\delta_0 E_{NLij}) dV \right) \Delta t \\
&= {}^t\delta R - \int_V {}^t_0S^{ij} \delta_0 E_{Lij} dV \quad (5.38)
\end{aligned}$$

ただし，微小体積 $dV = dX_1 dX_2 dX_3$ は初期配置の共変基底ベクトル \mathbf{G}_i のスカラー三重積と曲面座標系の微小線分 dr^i を用いて次のように表せる．

$$dV = [\mathbf{G}_1 \mathbf{G}_2 \mathbf{G}_3] dr^1 dr^2 dr^3 \quad (5.39)$$

式 (5.38) の Green-Lagrange ひずみの詳細な離散化は次節に記載する．以上が total Lagrange 法における仮想仕事式 (5.20) の増分分解，及び線形化である．一方の updated Lagrange 法においては式 (5.21) から導かれるが，式 (5.38) が初期配置に基づ

く基底ベクトル \mathbf{G}_i , \mathbf{G}^i によって分解されたのに対して, 現配置に基づく基底ベクトル ${}^t\mathbf{g}_i$, ${}^t\mathbf{g}^i$ で分解することになる. つまり, 式 (5.38) を現配置基準に置き換えて考え, 応力テンソルとして Cauchy 応力テンソル \mathbf{T} を用いる形にすれば, updated Lagrange 法の定式化に容易に切り替えることが可能である.

$$\begin{aligned} & \left(\int_{t_v} {}^t C^{ijkl} {}^t \dot{E}_{kl} \delta_t E_{Lij} d^t v + \int_{t_v} {}^t T^{ij} (\delta_t E_{NLij}) d^t v \right) \Delta t \\ & = {}^t \delta R - \int_{t_v} {}^t T^{ij} \delta_t E_{Lij} d^t v \end{aligned} \quad (5.40)$$

また, 時刻 t における微小体積 $d^t v = dx_1 dx_2 dx_3$ は時刻 t の共変基底ベクトル ${}^t\mathbf{g}_i$ と微小線分 dr^i より,

$$d^t v = [{}^t\mathbf{g}_1 {}^t\mathbf{g}_2 {}^t\mathbf{g}_3] dr^1 dr^2 dr^3 \quad (5.41)$$

となる.

以上より, 曲面座標系を用いた total Lagrange 法, 及び updated Lagrange 法における線形化された仮想仕事式がそれぞれ導かれた. 数値積分は曲面座標系における $r^1 r^2$ 平面方向では SCNI を適用して領域内を厳密に積分し, 板厚方向である r^3 方向の積分は Newton-Cotes の積分公式を適用する.

5.2 RK による構成式の離散化

接線剛性マトリクスの離散化について示す. 参照配置 $t_0 = 0$ のとき total Lagrange 法, 参照配置 $t_0 = t$ のとき updated Lagrange 法として, 線形化された仮想仕事式は次のように表される.

$$\begin{aligned} & \left(\iiint {}^t_0 C^{ijkl} {}^t_0 \dot{E}_{kl} \delta_{t_0} E_{Lij} [{}^t_0 \mathbf{g}_1 {}^t_0 \mathbf{g}_2 {}^t_0 \mathbf{g}_3] dr^1 dr^2 dr^3 \right. \\ & \quad \left. + \iiint {}^t_0 S^{ij} (\delta_{t_0} E_{NLij}) [{}^t_0 \mathbf{g}_1 {}^t_0 \mathbf{g}_2 {}^t_0 \mathbf{g}_3] dr^1 dr^2 dr^3 \right) \Delta t \\ & = {}^t \delta R - \iiint {}^t_0 S^{ij} \delta_{t_0} E_{Lij} [{}^t_0 \mathbf{g}_1 {}^t_0 \mathbf{g}_2 {}^t_0 \mathbf{g}_3] dr^1 dr^2 dr^3 \end{aligned} \quad (5.42)$$

ただし, $t_0 = 0$ のとき ${}^t_0 \mathbf{g}_i = \mathbf{G}_i$ であり, $t_0 = t$ のとき ${}^t_0 S^{ij} = {}^t T^{ij}$ である. ここでは主に変位-ひずみ変換マトリクスについて示すため, 式 (5.42) 中の Green Lagrange

ひずみに関する項 ${}_{t_0}\dot{E}_{Lij}$, $\delta_{t_0}E_{Lij}$, $(\delta_{t_0}E_{NLij})$ を以下に示す.

$${}_{t_0}\dot{E}_{ij} = \frac{1}{2} \left({}^t\mathbf{g}_i \cdot \frac{\partial \dot{\mathbf{u}}}{\partial r^j} + {}^t\mathbf{g}_j \cdot \frac{\partial \dot{\mathbf{u}}}{\partial r^i} \right) \quad (5.43)$$

$$\delta_{t_0}E_{Lij} = \frac{1}{2} \left({}^t\mathbf{g}_i \cdot \frac{\partial \delta \mathbf{u}}{\partial r^j} + {}^t\mathbf{g}_j \cdot \frac{\partial \delta \mathbf{u}}{\partial r^i} \right) \quad (5.44)$$

$$(\delta_{t_0}E_{NLij}) = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \dot{\mathbf{u}}}{\partial r^i} \cdot \frac{\partial \delta \mathbf{u}}{\partial r^j} + \frac{\partial \delta \mathbf{u}}{\partial r^i} \cdot \frac{\partial \dot{\mathbf{u}}}{\partial r^j} \right) \quad (5.45)$$

これらの成分の定義に基づいて以下の離散化を行う.

5.2.1 初期変位マトリクス

初めに式 (5.42) の左辺第 1 項の離散化を行う. ${}_{t_0}\dot{E}_{ij}$ についてマトリクス表記すると,

$${}_{t_0}\hat{\mathbf{E}} = \begin{Bmatrix} {}_{t_0}\dot{E}_{11} \\ {}_{t_0}\dot{E}_{22} \\ 2{}_{t_0}\dot{E}_{12} \\ 2{}_{t_0}\dot{E}_{23} \\ 2{}_{t_0}\dot{E}_{31} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} {}^t\mathbf{g}_1 \cdot \frac{\partial \dot{\mathbf{u}}}{\partial r^1} \\ {}^t\mathbf{g}_2 \cdot \frac{\partial \dot{\mathbf{u}}}{\partial r^2} \\ {}^t\mathbf{g}_1 \cdot \frac{\partial \dot{\mathbf{u}}}{\partial r^2} + {}^t\mathbf{g}_2 \cdot \frac{\partial \dot{\mathbf{u}}}{\partial r^1} \\ {}^t\mathbf{g}_2 \cdot \frac{\partial \dot{\mathbf{u}}}{\partial r^3} + {}^t\mathbf{g}_3 \cdot \frac{\partial \dot{\mathbf{u}}}{\partial r^2} \\ {}^t\mathbf{g}_3 \cdot \frac{\partial \dot{\mathbf{u}}}{\partial r^1} + {}^t\mathbf{g}_1 \cdot \frac{\partial \dot{\mathbf{u}}}{\partial r^3} \end{Bmatrix} \quad (5.46)$$

$\dot{\mathbf{u}}$ の曲面座標による偏微分 $\partial \dot{\mathbf{u}} / \partial r^i$ は RK を用いて次のように近似される.

$$\begin{aligned} \frac{\partial \dot{\mathbf{u}}}{\partial r^i} &= \sum_{I=1}^{NP} \begin{bmatrix} \frac{\partial \psi_I}{\partial r^i} & 0 & 0 & -\mathbf{A}_{i2(1)} & \mathbf{A}_{i1(1)} \\ 0 & \frac{\partial \psi_I}{\partial r^i} & 0 & -\mathbf{A}_{i2(2)} & \mathbf{A}_{i1(2)} \\ 0 & 0 & \frac{\partial \psi_I}{\partial r^i} & -\mathbf{A}_{i2(3)} & \mathbf{A}_{i1(3)} \end{bmatrix} \dot{\mathbf{U}}_I \\ &= \sum_{I=1}^{NP} \Psi_{I,i} \dot{\mathbf{U}}_I, \quad (i = 1, 2) \end{aligned} \quad (5.47)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \dot{\mathbf{u}}}{\partial r^3} &= \sum_{I=1}^{NP} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & -\frac{t_h}{2} \psi_I {}^t\mathbf{V}_{2(1)} & \frac{t_h}{2} \psi_I {}^t\mathbf{V}_{1(1)} \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{t_h}{2} \psi_I {}^t\mathbf{V}_{2(2)} & \frac{t_h}{2} \psi_I {}^t\mathbf{V}_{1(2)} \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{t_h}{2} \psi_I {}^t\mathbf{V}_{2(3)} & \frac{t_h}{2} \psi_I {}^t\mathbf{V}_{1(3)} \end{bmatrix} \dot{\mathbf{U}}_I \\ &= \sum_{I=1}^{NP} \Psi_{I,3} \dot{\mathbf{U}}_I \end{aligned} \quad (5.48)$$

ただし,

$$\mathbf{A}_{ij} = \frac{t_h r^3}{2} \left(\frac{\partial \psi_I}{\partial r^i} {}^t\mathbf{V}_j + \psi_I \frac{\partial {}^t\mathbf{V}_j}{\partial r^i} \right) \quad (5.49)$$

であり，局所直交基底ベクトル ${}^t\mathbf{V}_i$ の偏微分形は次のように定義する．

$$\frac{\partial {}^t\mathbf{V}_i}{\partial r^j} = (\mathbf{I} - {}^t\mathbf{V}_i \otimes {}^t\mathbf{V}_i) \Delta {}^t\mathbf{V}_{ij}, \quad (5.50)$$

$$\Delta {}^t\mathbf{V}_{ij} = \frac{\sum_{I=1}^K (\partial \psi_I / \partial r^j) {}^t\mathbf{V}_{Ii}}{|\sum_{I=1}^K \psi_I {}^t\mathbf{V}_{Ii}|} \quad (i, j) = (1, 2) \quad (5.51)$$

以上より，変位-ひずみ変換マトリクス ${}^t_0\mathbf{B}_L$ が定義できる．

$$\begin{aligned} {}^t_0\hat{\mathbf{E}} &= \sum_{I=1}^{NP} \begin{bmatrix} {}^t\mathbf{g}_1^T \Psi_{I,1} \\ {}^t\mathbf{g}_2^T \Psi_{I,2} \\ {}^t\mathbf{g}_1^T \Psi_{I,2} + {}^t\mathbf{g}_2^T \Psi_{I,1} \\ {}^t\mathbf{g}_2^T \Psi_{I,3} + {}^t\mathbf{g}_3^T \Psi_{I,2} \\ {}^t\mathbf{g}_3^T \Psi_{I,1} + {}^t\mathbf{g}_1^T \Psi_{I,3} \end{bmatrix} \\ &= \sum_{I=1}^{NP} {}^t_0\mathbf{B}_{LI} \dot{U}_I \end{aligned} \quad (5.52)$$

$${}^t_0\mathbf{B}_{LI} = \begin{bmatrix} {}^t\mathbf{g}_{1(1)} \frac{\partial \psi_I}{\partial r^1} & {}^t\mathbf{g}_{1(2)} \frac{\partial \psi_I}{\partial r^1} & {}^t\mathbf{g}_{1(3)} \frac{\partial \psi_I}{\partial r^1} & -{}^t\mathbf{g}_1 \cdot \mathbf{A}_{12} & {}^t\mathbf{g}_1 \cdot \mathbf{A}_{11} \\ {}^t\mathbf{g}_{2(1)} \frac{\partial \psi_I}{\partial r^2} & {}^t\mathbf{g}_{2(2)} \frac{\partial \psi_I}{\partial r^2} & {}^t\mathbf{g}_{2(3)} \frac{\partial \psi_I}{\partial r^2} & -{}^t\mathbf{g}_2 \cdot \mathbf{A}_{22} & {}^t\mathbf{g}_2 \cdot \mathbf{A}_{21} \\ {}^t\mathbf{g}_{2(1)} \frac{\partial \psi_I}{\partial r^1} & {}^t\mathbf{g}_{2(2)} \frac{\partial \psi_I}{\partial r^1} & {}^t\mathbf{g}_{2(3)} \frac{\partial \psi_I}{\partial r^1} & -{}^t\mathbf{g}_2 \cdot \mathbf{A}_{12} & {}^t\mathbf{g}_2 \cdot \mathbf{A}_{11} \\ +{}^t\mathbf{g}_{1(1)} \frac{\partial \psi_I}{\partial r^2} & +{}^t\mathbf{g}_{1(2)} \frac{\partial \psi_I}{\partial r^2} & +{}^t\mathbf{g}_{1(3)} \frac{\partial \psi_I}{\partial r^2} & -{}^t\mathbf{g}_1 \cdot \mathbf{A}_{22} & +{}^t\mathbf{g}_1 \cdot \mathbf{A}_{21} \\ {}^t\mathbf{g}_{3(1)} \frac{\partial \psi_I}{\partial r^2} & {}^t\mathbf{g}_{3(2)} \frac{\partial \psi_I}{\partial r^2} & {}^t\mathbf{g}_{3(3)} \frac{\partial \psi_I}{\partial r^2} & -{}^t\mathbf{g}_3 \cdot \mathbf{A}_{22} & {}^t\mathbf{g}_3 \cdot \mathbf{A}_{21} \\ & & & -\frac{t_h}{2} \psi_I {}^t\mathbf{g}_2 \cdot {}^t\mathbf{V}_2 & +\frac{t_h}{2} \psi_I {}^t\mathbf{g}_2 \cdot {}^t\mathbf{V}_1 \\ {}^t\mathbf{g}_{3(1)} \frac{\partial \psi_I}{\partial r^1} & {}^t\mathbf{g}_{3(2)} \frac{\partial \psi_I}{\partial r^1} & {}^t\mathbf{g}_{3(3)} \frac{\partial \psi_I}{\partial r^1} & -{}^t\mathbf{g}_3 \cdot \mathbf{A}_{12} & {}^t\mathbf{g}_3 \cdot \mathbf{A}_{11} \\ & & & -\frac{t_h}{2} \psi_I {}^t\mathbf{g}_1 \cdot {}^t\mathbf{V}_2 & +\frac{t_h}{2} \psi_I {}^t\mathbf{g}_1 \cdot {}^t\mathbf{V}_1 \end{bmatrix} \quad (5.53)$$

罫線は行列中の成分を区別しやすくするためのものである．RK やその偏微分形には第2章にて示した SCNI，あるいは SSCI を適用して積分を行う．式(5.43)，(5.44)を見ると，これらの違いは変位増分についての物質微分か変分かという点のみである．従って， $\delta_{t_0} \hat{\mathbf{E}}_L$ も式(5.52)と同様に ${}^t_0\mathbf{B}_L$ によって表せる．

$$\delta_{t_0} \hat{\mathbf{E}}_L = \sum_{I=1}^{NP} {}^t_0\mathbf{B}_{LI} \delta U_I \quad (5.54)$$

以上より，式 (5.42) 左辺第 1 項は次式のように離散化される．

$$\begin{aligned}
& \left(\iiint_{t_0} C^{ijkl} \dot{E}_{kl} \delta_{t_0} E_{Lij} [{}^{t_0} \mathbf{g}_1 {}^{t_0} \mathbf{g}_2 {}^{t_0} \mathbf{g}_3] dr^1 dr^2 dr^3 \right) \Delta t \\
&= \delta \mathbf{U}^T \iiint_{t_0} {}^t \mathbf{B}_{L t_0}^T \mathbf{C} {}^t \mathbf{B}_L [{}^{t_0} \mathbf{g}_1 {}^{t_0} \mathbf{g}_2 {}^{t_0} \mathbf{g}_3] dr^1 dr^2 dr^3 \mathbf{U} \\
&= \delta \mathbf{U}^T {}^t \mathbf{K}_L \mathbf{U}
\end{aligned} \tag{5.55}$$

${}^t \mathbf{K}_L$ は初期変位マトリクスである．構成則マトリクス ${}_{t_0} \mathbf{C}$ は式 (5.36) に示される曲面座標系上の反変成分を用いる． ${}^t \mathbf{B}_L$ の成分を見てみると，参照時刻 t_0 による違いは無いことから，曲面座標系を用いた本定式化では total Lagrange 法，updated Lagrange 法の区別なく変位-ひずみ変換マトリクスを簡便に構成できることがわかる．

5.2.2 幾何剛性マトリクス

次に式 (5.42) 左辺第 2 項の離散化を行う．式 (5.45) に見られる通り，この項には変位増分に関する変分と物質微分が混在するため，通常は便宜上次式のようなベクトルを設けて離散化される．

$$\dot{\mathbf{d}}^T = \left\{ \left(\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial r^1} \right)^T \quad \left(\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial r^2} \right)^T \quad \left(\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial r^3} \right)^T \right\} \tag{5.56}$$

$\partial \mathbf{u} / \partial r^i$ の離散化については式 (5.47)，(5.48) に示した通りであるから，これらを用いてベクトル $\dot{\mathbf{d}}$ を離散化すると次式となる．

$$\dot{\mathbf{d}} = \sum_{I=1}^{NP} \begin{bmatrix} \Psi_{I,1} \\ \Psi_{I,2} \\ \Psi_{I,3} \end{bmatrix} \dot{\mathbf{U}}_I = \sum_{I=1}^{NP} {}^t \mathbf{B}_{NL} \dot{\mathbf{U}}_I \tag{5.57}$$

変分についても同様に離散化する．また，第 2Piola-Kirchhoff 応力テンソルによる応力マトリクスを次のように定義する．

$${}^t \bar{\mathbf{S}} = \begin{bmatrix} {}^t S^{11} \mathbf{I} & {}^t S^{12} \mathbf{I} & {}^t S^{13} \mathbf{I} \\ {}^t S^{21} \mathbf{I} & {}^t S^{22} \mathbf{I} & {}^t S^{23} \mathbf{I} \\ {}^t S^{31} \mathbf{I} & {}^t S^{32} \mathbf{I} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \tag{5.58}$$

\mathbf{I} は3行3列の単位マトリクスであり、 ${}^t S^{33}$ 成分は0である。以上をまとめると、式(5.42)左辺第2項は次のように離散化される。

$$\begin{aligned}
& \left(\iiint {}^t S^{ij} (\delta_{t_0} E_{NLij}) [{}^{t_0} \mathbf{g}_1 {}^{t_0} \mathbf{g}_2 {}^{t_0} \mathbf{g}_3] dr^1 dr^2 dr^3 \right) \Delta t \\
&= \delta \mathbf{U}^T \iiint {}^t \mathbf{B}_{NLt_0}^T \bar{{}^t \mathbf{S}} {}^t \mathbf{B}_{NL} [{}^{t_0} \mathbf{g}_1 {}^{t_0} \mathbf{g}_2 {}^{t_0} \mathbf{g}_3] dr^1 dr^2 dr^3 \mathbf{U} \\
&= \delta \mathbf{U}^T {}^t \mathbf{K}_{NL} \mathbf{U}
\end{aligned} \tag{5.59}$$

${}^t \mathbf{K}_{NL}$ は幾何剛性マトリクスである。

5.2.3 内カベクトル

式(5.42)右辺第2項は初期変位マトリクスに用いた変位-ひずみ変換マトリクス ${}^t \mathbf{B}_L$ を用いて離散化できる。

$$\begin{aligned}
& \iiint {}^t S^{ij} \delta_{t_0} E_{Lij} [{}^{t_0} \mathbf{g}_1 {}^{t_0} \mathbf{g}_2 {}^{t_0} \mathbf{g}_3] dr^1 dr^2 dr^3 \\
&= \delta \mathbf{U}^T \iiint {}^t \mathbf{B}_{Lt_0}^T \hat{\mathbf{S}} [{}^t \mathbf{g}_1 {}^t \mathbf{g}_2 {}^t \mathbf{g}_3] dr^1 dr^2 dr^3 \\
&= \delta \mathbf{U}^T {}^t \mathbf{Q}
\end{aligned} \tag{5.60}$$

${}^t \mathbf{Q}$ は内カベクトルと呼ばれる。ただし、 ${}^t \hat{\mathbf{S}}$ は次式に示される応力ベクトルである。

$${}^t \hat{\mathbf{S}}^T = \left\{ {}^t S^{11} \quad {}^t S^{22} \quad {}^t S^{12} \quad {}^t S^{23} \quad {}^t S^{31} \right\} \tag{5.61}$$

5.2.4 接線剛性方程式

以上で離散化された式(5.42)の両辺から節点変位増分ベクトル $\delta \mathbf{U}$ の変分を除き、やることで接線剛性方程式が得られる。

$$({}^t \mathbf{K}_L + {}^t \mathbf{K}_{NL}) \mathbf{U} = {}^t \mathbf{F} - {}^t \mathbf{Q} \tag{5.62}$$

各々の項について t_0 は参照配置を示し，total Lagrange 法では $t_0 = 0$ ，updated Lagrange 法では $t_0 = t$ でありそれぞれ次式に示される．

$${}^t_0\mathbf{K}_L = \iiint {}^t_0\mathbf{B}_{L0}\mathbf{C} {}^t_0\mathbf{B}_L[\mathbf{G}_1\mathbf{G}_2\mathbf{G}_3]dr^1dr^2dr^3 \quad (5.63)$$

$${}^t_0\mathbf{K}_{NL} = \iiint {}^t_0\mathbf{B}_{NL0}{}^t\bar{\mathbf{S}} {}^t_0\mathbf{B}_{NL}[\mathbf{G}_1\mathbf{G}_2\mathbf{G}_3]dr^1dr^2dr^3 \quad (5.64)$$

$${}^t_0\mathbf{Q} = \iiint {}^t_0\mathbf{B}_{L0}{}^t\hat{\mathbf{S}}[\mathbf{G}_1\mathbf{G}_2\mathbf{G}_3]dr^1dr^2dr^3 \quad (5.65)$$

$${}^t\mathbf{K}_L = \iiint {}^t\mathbf{B}_L\mathbf{C} {}^t\mathbf{B}_L[{}^t\mathbf{g}_1{}^t\mathbf{g}_2{}^t\mathbf{g}_3]dr^1dr^2dr^3 \quad (5.66)$$

$${}^t\mathbf{K}_{NL} = \iiint {}^t\mathbf{B}_{NL}{}^t\bar{\mathbf{T}} {}^t\mathbf{B}_{NL}[{}^t\mathbf{g}_1{}^t\mathbf{g}_2{}^t\mathbf{g}_3]dr^1dr^2dr^3 \quad (5.67)$$

$${}^t\mathbf{Q} = \iiint {}^t\mathbf{B}_L{}^t\hat{\mathbf{T}}[{}^t\mathbf{g}_1{}^t\mathbf{g}_2{}^t\mathbf{g}_3]dr^1dr^2dr^3 \quad (5.68)$$

また， ${}^t\mathbf{F}$ は時刻 t における外力ベクトルであり，やはり RK によって離散化され，仮定する荷重モードや向きなどに応じて定義される．

以上で，本定式化における接線剛性方程式が total Lagrange 法と updated Lagrange 法のそれぞれについて導かれた．

5.2.5 有限回転を考慮した定式化

以上に示した定式化は回転増分が微小であると仮定されたときのものである．荷重増分による回転増分が小さく，かつディレクターを正しく更新している限り基本的に問題となりはしないが，ひずみ増分，ひいては応力増分を厳密に評価するためには，有限回転増分を考慮することが必要となる．このことから，本項では有限回転増分を考慮した定式化への拡張を行う．

有限回転増分を考慮するために，有限回転テンソル ${}^t_i\mathbf{R}$ を定義する．ここでシェルのディレクター ${}^t\mathbf{V}_3$ の時刻 t までの有限回転について回転の間は回転軸は変化しないものと仮定する．このとき回転軸を表すベクトルを ${}^t_i\boldsymbol{\theta}$ とし，その大きさ ω が有限回転角を表すものとする．このとき，

$${}^t_i\boldsymbol{\theta} = {}^t_i\theta_i\mathbf{e}_i \quad (5.69)$$

$$\omega = |{}^t_i\boldsymbol{\theta}| \quad (5.70)$$

と表せる．次に軸性ベクトル ${}^t\boldsymbol{\theta}$ の成分を用いて反対称マトリクス ${}^t\boldsymbol{\Phi}$ を定義する．

$${}^t\boldsymbol{\Phi} = \begin{bmatrix} 0 & -{}^t\theta_3 & {}^t\theta_2 \\ {}^t\theta_3 & 0 & -{}^t\theta_1 \\ -{}^t\theta_2 & {}^t\theta_1 & 0 \end{bmatrix} \quad (5.71)$$

式(5.69), (5.71)を Δt で除したものがいわゆるスピテンソルとその軸性ベクトルとなり, 微小回転の場合は次式の関係を持つ．

$${}^t\boldsymbol{\Phi}{}^t\mathbf{V}_3 = {}^t\boldsymbol{\theta} \times {}^t\mathbf{V}_3 = {}^t\dot{\mathbf{V}}_3 \quad (5.72)$$

従って, 式(5.72)より, $\mathbf{I} + 1/n {}^t\boldsymbol{\Phi}$ は ω/n を回転角とする $\Delta t/n$ 間の微小回転テンソルを表すことになる．有限回転は無数の微小回転の集合と考えられることから, これより有限回転テンソル ${}^t\mathbf{R}$ は次式のように定義できる．

$$\begin{aligned} {}^t\mathbf{R} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\mathbf{I} + \frac{1}{n} {}^t\boldsymbol{\Phi} \right)^n \\ &= \mathbf{I} + {}^t\boldsymbol{\Phi} + \frac{1}{2!} \left({}^t\boldsymbol{\Phi} \right)^2 + \frac{1}{3!} \left({}^t\boldsymbol{\Phi} \right)^3 + \dots \end{aligned} \quad (5.73)$$

なお, 仮想仕事式の線形化による接線剛性の導出を考えたとき, 2次の項まで考慮すれば十分であるから, 実質的には次式となる．

$${}^t\mathbf{R} = \mathbf{I} + {}^t\boldsymbol{\Phi} + \frac{1}{2} \left({}^t\boldsymbol{\Phi} \right)^2 \quad (5.74)$$

一方で厳密な有限回転テンソル ${}^t\mathbf{R}$ はArgyris [100]によって幾何学的関係から次式として導かれている．

$${}^t\mathbf{R} = \mathbf{I} + \frac{\sin \omega}{\omega} {}^t\boldsymbol{\Phi} + \frac{1}{2} \left(\frac{\sin(\omega/2)}{\omega/2} \right)^2 \left({}^t\boldsymbol{\Phi} \right)^2 \quad (5.75)$$

回転角の大きさ ω が微小であるとしたとき, $\sin \omega / \omega \rightarrow 1$, $\sin(\omega/2)/(\omega/2) \rightarrow 1$ であるから, 式(5.74)と(5.75)が同等であることが分かる．有限回転増分を考慮して変位増分を表せば, 次のようになる．

$$\begin{aligned} \mathbf{u} &= \mathbf{u}_{mid} + \frac{r^3}{2} t_h ({}^t\mathbf{R} - \mathbf{I}) {}^t\mathbf{V}_3 \\ &= \mathbf{u}_{mid} + \frac{r^3}{2} t_h {}^t\boldsymbol{\theta} \times {}^t\mathbf{V}_3 + \frac{r^3}{2} t_h {}^t\boldsymbol{\theta} \times ({}^t\boldsymbol{\theta} \times {}^t\mathbf{V}_3) \\ &= \left(\mathbf{u}_{mid} + \frac{r^3}{2} t_h (-\beta_1 {}^t\mathbf{V}_2 + \beta_2 {}^t\mathbf{V}_1) \right) + \left(-\frac{r^3}{4} t_h (\beta_1^2 + \beta_2^2) {}^t\mathbf{V}_3 \right) \\ &= \mathbf{u}_s + \mathbf{u}_{ex} \end{aligned} \quad (5.76)$$

ここで、 \mathbf{u}_s はこれまでに示した微小回転における変位増分、 \mathbf{u}_{ex} は有限回転増分を考慮したことで追加された項である。有限回転増分項を分けて $\partial \mathbf{u} / \partial r^i$ について表すと、次式のようになる。

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial r^i} &= \frac{\partial \mathbf{u}_s}{\partial r^i} - \frac{r^3}{2} t_h \left(\beta_1 \frac{\partial \beta_1}{\partial r^i} + \beta_2 \frac{\partial \beta_2}{\partial r^i} \right) {}^t \mathbf{V}_3 - \frac{r^3}{4} t_h (\beta_1^2 + \beta_2^2) \frac{\partial {}^t \mathbf{V}_3}{\partial r^i} \\ &= \frac{\partial \mathbf{u}_s}{\partial r^i} + \frac{\partial \mathbf{u}_{ex}}{\partial r^i}, \quad (i = 1, 2) \end{aligned} \quad (5.77)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial r^3} &= \frac{\partial \mathbf{u}_s}{\partial r^3} - \frac{1}{4} t_h (\beta_1^2 + \beta_2^2) {}^t \mathbf{V}_3 \\ &= \frac{\partial \mathbf{u}_s}{\partial r^3} + \frac{\partial \mathbf{u}_{ex}}{\partial r^3} \end{aligned} \quad (5.78)$$

この関係を用いて接線剛性方程式の離散化の際に示した物質微分された Green-Lagrange ひずみ増分の線形成分、非線形成分について改めて考えてみると、それぞれ次式となる。

$$\begin{aligned} {}_t \dot{E}_{ij} &= \frac{1}{2} \left({}^t \mathbf{g}_i \cdot \frac{\partial \dot{\mathbf{u}}_s}{\partial r^j} + {}^t \mathbf{g}_j \cdot \frac{\partial \dot{\mathbf{u}}_s}{\partial r^i} \right) \quad (5.79) \\ (\delta {}_t E_{NLij}) &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \dot{\mathbf{u}}_s}{\partial r^i} \cdot \frac{\partial \delta \mathbf{u}_s}{\partial r^j} + \frac{\partial \delta \mathbf{u}_s}{\partial r^i} \cdot \frac{\partial \dot{\mathbf{u}}_s}{\partial r^j} \right) + \frac{1}{2} \left({}^t \mathbf{g}_i \cdot \frac{\partial (\delta \mathbf{u}_{ex})}{\partial r^j} + {}^t \mathbf{g}_j \cdot \frac{\partial (\delta \mathbf{u}_{ex})}{\partial r^i} \right) \quad (5.80) \end{aligned}$$

つまり、接線剛性マトリクスにおいては式 (5.80) の第 2 項に関する項を新たに幾何剛性マトリクスに加えるのみで済むことになり、残差力の収束計算の際には式 (5.75) に示される厳密な有限回転テンソルを用いてディレクターを更新してひずみ増分を求めることで有限回転増分を考慮した定式化となる。

5.3 弧長増分制御の導入

荷重増分制御や変位増分制御では、増分の規定値が常に一定量増え続ける。このため、座屈後解析のような荷重-変位曲線にスナップが起こる現象では平衡点を探索できずに計算が破綻してしまう。

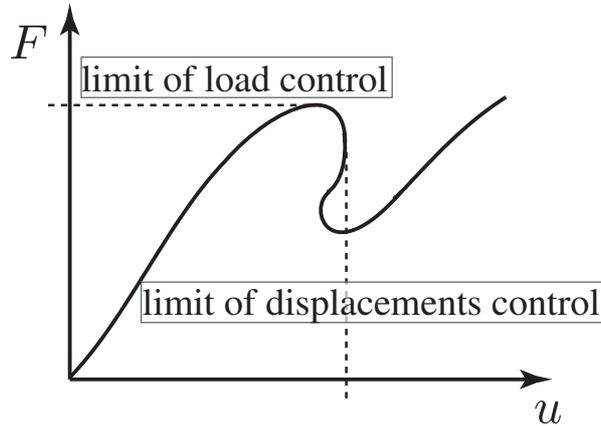


Fig. 5.2: Example of "snap back"

このようなケースで用いられるのが曲線の弧長により制御を行う弧長増分制御である。弧長増分制御では各ステップの弧長増分 Δl を規定値として計算を行う。

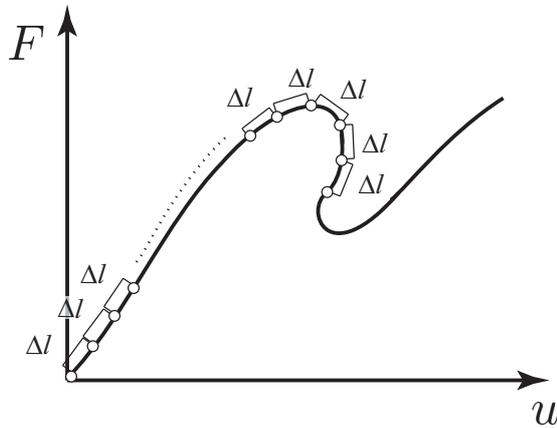


Fig. 5.3: Concept of arc-length control

本節では、野口らの用いた弧長増分制御 [101] について示す。時刻 t における外力 ${}^t\mathbf{F}$ がある一定の荷重モード \mathbf{f}_{ref} に比例するものとして、比例荷重係数 ${}^t\lambda$ を用いれば平衡方程式は次のように表せる。

$${}^t\mathbf{Q}({}^t\mathbf{U}) = {}^t\mathbf{F} = {}^t\lambda\mathbf{f}_{ref} \quad (5.81)$$

従って、未知数 ${}^t\mathbf{U}$ と ${}^t\lambda$ 間の拘束条件式として

$$S({}^t\mathbf{U}, {}^t\lambda) = 0 \quad (5.82)$$

を平衡方程式と連立して解くことにより ${}^t\mathbf{U}$ と ${}^t\lambda$ をそれぞれ導出できる．なお、これらの連立方程式から得られる接線剛性マトリクスは非対称となるため、通常はこれらを同時に解くことは無く、外力ベクトルの線形性を利用して効率的に解を導出できる．

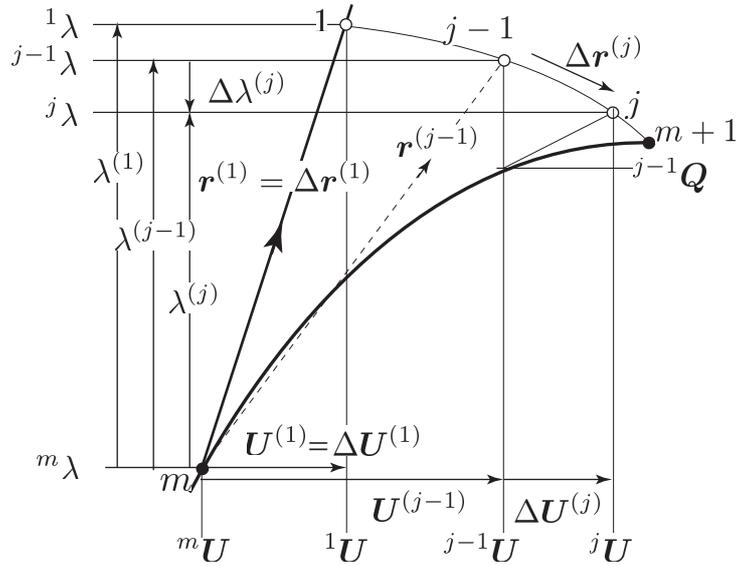


Fig. 5.4: Example of arc-length controlled iteration on step $j - 1 \rightarrow j$

諸記号について説明すると、

${}^m\lambda, {}^m\mathbf{U}$: 増分ステップ m における収束時の比例荷重係数及び変位ベクトル

${}^j\lambda, {}^j\mathbf{U}$: 増分ステップ $m + 1$ における j 回目の反復時の
比例荷重係数及び変位ベクトル

$\lambda^{(j)}, \mathbf{U}^{(j)}$: j 回目の反復時の m ステップ収束時のからの増分

$$\lambda^{(j)} = {}^j\lambda - {}^m\lambda, \quad \mathbf{U}^{(j)} = {}^j\mathbf{U} - {}^m\mathbf{U}$$

$\Delta\lambda^{(j)}, \Delta\mathbf{U}^{(j)}$: j 回目の反復時の $j - 1$ 反復時からの増分

$$\Delta\lambda^{(j)} = {}^j\lambda - {}^{j-1}\lambda = \lambda^{(j)} - \lambda^{(j-1)}$$

$$\Delta\mathbf{U}^{(j)} = {}^j\mathbf{U} - {}^{j-1}\mathbf{U} = \mathbf{U}^{(j)} - \mathbf{U}^{(j-1)}$$

図 5.7 を参照して、 j 回目の反復時の $\Delta \mathbf{U}^{(j)}$ は次のようにして求まる。なお、時刻 $t \rightarrow t'$ の増分を考えていることを踏まえて左上の添字は省略する。

$$\begin{aligned}
{}^{j-1}\mathbf{K}\Delta \mathbf{U}^{(j)} &= {}^j\lambda \mathbf{f}_{ref} - {}^{j-1}\mathbf{Q} \\
&= ({}^{j-1}\lambda + \Delta\lambda^{(j)}) \mathbf{f}_{ref} - {}^{j-1}\mathbf{Q} \\
&= \Delta\lambda^{(j)} \mathbf{f}_{ref} + ({}^{j-1}\lambda \mathbf{f}_{ref} - {}^{j-1}\mathbf{Q}) \\
&= \Delta\lambda^{(j)} \mathbf{f}_{ref} + {}^{j-1}\mathbf{R}
\end{aligned} \tag{5.83}$$

ここで、 ${}^{j-1}\mathbf{K}$ は ${}^{j-1}\mathbf{U}$ における接線剛性マトリクス、 ${}^{j-1}\mathbf{R}$ は ${}^{j-1}\mathbf{U}$ における残差荷重ベクトルである。両辺に ${}^{j-1}\mathbf{K}^{-1}$ をかけると、

$$\Delta \mathbf{U}^{(j)} = \Delta\lambda^{(j)} \Delta \mathbf{U}_I^{(j)} + \Delta \mathbf{U}_{II}^{(j)} \tag{5.84}$$

ただし、

$$\Delta \mathbf{U}_I^{(j)} = {}^{j-1}\mathbf{K}^{-1} \mathbf{f}_{ref} \tag{5.85}$$

$$\Delta \mathbf{U}_{II}^{(j)} = {}^{j-1}\mathbf{K}^{-1} {}^{j-1}\mathbf{R} \tag{5.86}$$

この 2 式を経て、式 (5.82) の反復毎の変位増分と弧長増分の拘束条件により $\Delta\lambda^{(j)}$ 、ひいては $\Delta \mathbf{U}^{(j)}$ を求めることができる。次に弧長の拘束条件について考える。

5.3.1 超平面型拘束条件

変位と比例荷重係数に対する拘束条件式は、直前の収束点からの節点変位増分ベクトル \mathbf{U} と比例荷重係数の増分 λ に課されることが多い。図 5.3 を参照して j 回目の反復時のベクトル $\mathbf{r}^{(j)}$ 、 $\Delta \mathbf{r}^{(j)}$ を表すと、次式となる。

$$\mathbf{r}^{(j)} = [\mathbf{U}^{(j)T}; \lambda^{(j)}]^T, \quad \Delta \mathbf{r}^{(j)} = [\Delta \mathbf{U}^{(j)T}; \Delta\lambda^{(j)}]^T \tag{5.87}$$

Riks が初めに示した拘束条件 [102, 103] は次式である。

$$\mathbf{r}^{(1)T} \mathbf{r}^{(j)} = S_0^2 \tag{5.88}$$

ここで、 S_0 は弧長を示すスカラー量である。式 (5.88) は任意の j に対して成立し、 j を $j-1$ として式 (5.88) から引くと次式を得る。

$$\mathbf{r}^{(1)T} \Delta \mathbf{r}^{(j)} = 0 \tag{5.89}$$

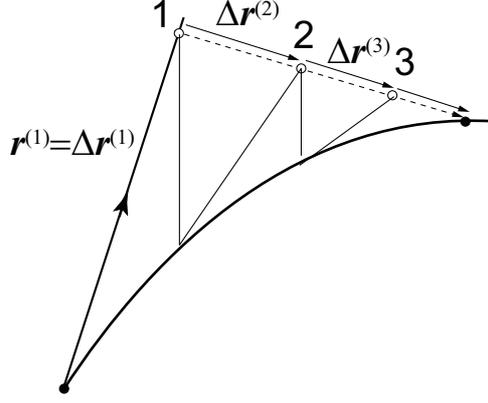


Fig. 5.5: Ramm's control

これは Ramm の拘束条件式 [104] と呼ばれるもので、 $\mathbf{r}^{(1)}$ に垂直に解の更新を行っていく図 5.5 に示すようなイメージとなる．式 (5.84)，(5.85)，(5.86) 及び (5.89) に $j = 1$ を代入して考えると，

$$\begin{aligned} \mathbf{U}^{(1)} &= \lambda^{(1)} \mathbf{K}^{-1} \mathbf{f}_{ref} + \mathbf{K}^{-1} \mathbf{R} \\ &= \lambda^{(1)} \mathbf{U}_I^{(1)} + \mathbf{U}_{II}^{(1)} \approx \lambda^{(1)} \mathbf{U}_I^{(1)} \end{aligned} \quad (5.90)$$

$$\mathbf{r}^{(1)} = \lambda^{(1)} \left[\mathbf{U}_I^{(1)T}; 1 \right]^T \quad (5.91)$$

厳密に残差荷重ベクトルを考慮すれば $\mathbf{U}_{II}^{(1)} = \mathbf{0}$ ではないが，実質的には $\mathbf{R}^{(0)} \approx \mathbf{0}$ であるから $\mathbf{U}_{II}^{(1)} \approx \mathbf{0}$ とおける．拘束条件式 (5.88) より，反復 1 回目の $\mathbf{r}^{(1)}$ が得られる．

$$\lambda^{(1)} = \pm S_0^2 / \sqrt{\mathbf{U}_I^{(1)T} \mathbf{U}_I^{(1)} + 1} \quad (5.92)$$

なお，正負符号は前回の増分 ${}^m \mathbf{r} = [{}^m \mathbf{U} - {}^{m-1} \mathbf{U}; {}^m \lambda - {}^{m-1} \lambda]^T$ と $\mathbf{r}^{(1)}$ の内積が正となるものを選ぶことで，これまでの経路に戻ることが無く極限点を超えられる．以降の増分に関しては，式 (5.89) に基づいて更新を行っていく．従って， j 回目の反復時における $\Delta \lambda^{(j)}$ は次のように求まる．

$$\left[\mathbf{U}_I^{(1)T}; 1 \right]^T \left[\Delta \lambda^{(j)} \Delta \mathbf{U}_I^{(j)T} + \Delta \mathbf{U}_{II}^{(j)T}; \Delta \lambda^{(j)} \right] = 0 \quad (5.93)$$

$$\Delta \lambda^{(j)} = -\Delta \mathbf{U}_I^{(1)T} \Delta \mathbf{U}_{II}^{(j)} / (\Delta \mathbf{U}_I^{(1)T} \Delta \mathbf{U}_I^{(j)} + 1) \quad (5.94)$$

ただし，最初に得られた反復解のベクトル $\mathbf{r}^{(1)}$ から垂直に解を更新していった場合，場合によっては平衡解が得られないことがある．そのため反復計算ごとに超平面を

更新することによって解の探索制度を上げることができる．具体的には Ramm の拘束条件式 (5.89) において，最初に得られたベクトル $\mathbf{r}^{(1)}$ ではなく前回の反復までに得られているベクトル $\mathbf{r}^{(j-1)}$ を用いて解の探索を行う．このとき，各反復で得られ

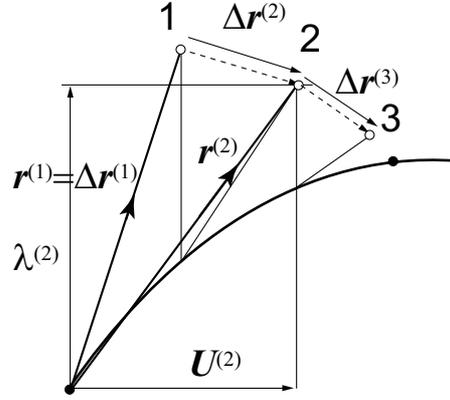


Fig. 5.6: Update of hyperplane

る比例係数増分 $\Delta\lambda^{(j)}$ は次式となる．

$$\Delta\lambda^{(j)} = -\mathbf{U}^{(j-1)T} \Delta\mathbf{U}_{\text{II}}^{(j)} / (\mathbf{U}^{(j-1)T} \Delta\mathbf{U}_{\text{I}}^{(j)} + \lambda^{(j-1)}) \quad (5.95)$$

5.3.2 超球面型拘束条件

前項の Ramm の超平面型拘束条件に対して，Crisfield は次の超球面型拘束条件 [105] を示した．

$$\mathbf{r}^{(j)T} \mathbf{r}^{(j)} = S_0^2 \quad (5.96)$$

この方法は j 回目の反復点を，直前の収束点からの距離が一定になるように求める方法である．この方法では，1 回目の反復で求める解は Ramm の方法である式 (5.92) と同様に求め，2 回目以降は $\mathbf{r}^{(j)} = \mathbf{r}^{(j-1)} + \Delta\mathbf{r}^{(j)}$ を式 (5.96) に代入して次式となる．

$$2\mathbf{r}^{(j)T} \Delta\mathbf{r}^{(j)} + \Delta\mathbf{r}^{(j)T} \Delta\mathbf{r}^{(j)} = 0 \quad (5.97)$$

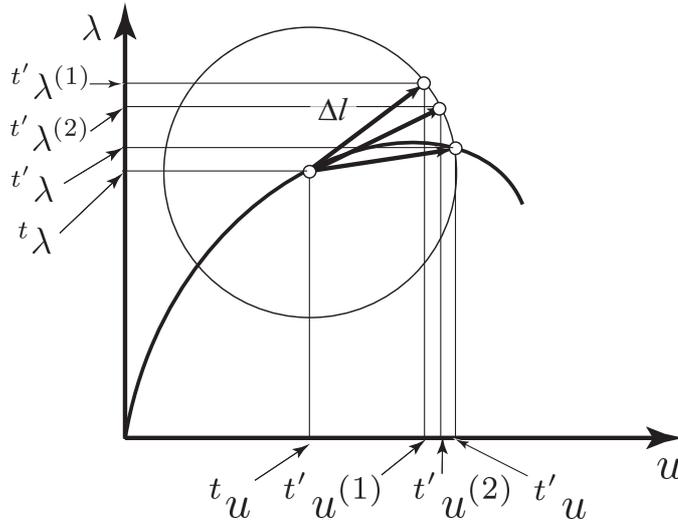


Fig. 5.7: Crisfield's control

$\Delta\lambda^{(j)}$ についての2次式を得る. さらに $\Delta\mathbf{r}^{(j)} = [\Delta\lambda^{(j)}\Delta\mathbf{U}_I^{(j)} + \mathbf{U}_I^{(j)}; \Delta\lambda^{(j)}]^T$ を代入すれば, 次の比例係数増分 $\Delta\lambda^{(j)}$ についての2次方程式が得られる.

$$a(\Delta\lambda^{(j)})^2 + 2b(\Delta\lambda^{(j)}) + c = 0 \quad (5.98)$$

$$a = \Delta\mathbf{U}_I^{(j)T} \Delta\mathbf{U}_I^{(j)} + 1$$

$$b = \Delta\mathbf{U}_I^{(j)T} (\Delta\mathbf{U}_I^{(j)} + \mathbf{U}_I^{(j-1)}) + \lambda^{(j-1)}$$

$$c = \Delta\mathbf{U}_I^{(j)T} (\Delta\mathbf{U}_I^{(j)} + 2\mathbf{U}_I^{(j-1)})$$

これを解けば $\Delta\lambda^{(j)}$ が得られる. この方法は Ramm の方法より多少収束が改善され弧長を大きく取れることが知られているが, 毎回解の選択を行わなければならない, 式 (5.98) が必ず実根を持つ保証がないなどの問題も有している.

5.3.3 radial-return による超球型拘束

Ramm の方法は最初の反復のみ解を選択すれば解は一意的に決定され, また Crisfield の方法は弧長を大きくとることができた. ここでは双方の利点を活かした方法として radial-return 型の超球型拘束について説明する.

超球の半径は式 (5.96) より S_0 とおけるが, 図 5.6 に示される Ramm の方法では, 直前の収束点から最初の反復点へのベクトル $\mathbf{r}^{(1)}$ を除いてはベクトル $\mathbf{r}^{(j)}$ の長さは

S_0 とならない．そこで，反復点を半径方向に引き戻し，超球上に反復点に来るように次のように補正を行う．

$$\mathbf{r}^{(j)} = S_0 \mathbf{r}^{(j)'}/|\mathbf{r}^{(j)'}| \quad (5.99)$$

ここで $\mathbf{r}^{(j)'}$ は補正前の更新された反復点へのベクトルである．その補正点においては， $\mathbf{r}^{(j-1)}$ に直交する超平面は直前の収束点を中心とする半径 S_0 の超球面に対する超接平面と当然ながら一致する．次の反復点を radial-return により超球上に引き戻して求める手順を繰り返し，収束解を超球上に求める．

5.3.4 scaled arc-length method

弧長法の拘束に用いられる \mathbf{r} や $\Delta\mathbf{r}$ の成分は先に示した通り節点変位増分ベクトル \mathbf{U} と比例荷重係数 λ である．シェルの変形について考えると，並進変位成分と回転角成分の自由度をそれぞれ有しているため， \mathbf{r} や $\Delta\mathbf{r}$ の大きさや内積値は諸量について異なる次元の和として表される．従って，それぞれの絶対値が極端に違う場合には小さい値の影響が無視される可能性が生じ，正しい平衡点に辿り着けないことが予想されるため，各々の変位成分についてスケーリングを施すことが望ましい [106]．スケーリングのための係数としては種々考案されているが，本研究では最初の増分ステップの平衡解の各自由度成分の最大絶対値を用いることとする． \mathbf{U} ， λ をスケーリングを施したものとして扱い，最初の解の決定から収束解に至るまでの流れを整理すると以下のようなになる．

$$\lambda^{(1)} = \pm S_0^2 / \sqrt{\mathbf{U}_I^{(1)T} \mathbf{U}_I^{(1)} + 1/\lambda_s^2} \quad (5.100)$$

$$\Delta\lambda^{(j)} = -\mathbf{U}^{(j-1)T} \Delta\mathbf{U}_{II}^{(j)} / (\mathbf{U}^{(j-1)T} \Delta\mathbf{U}_I^{(j)} + \lambda^{(j-1)}/\lambda_s) \quad (5.101)$$

$$\mathbf{r}^{(j)' } = \left[\mathbf{U}^{(j-1)} + \Delta\lambda^{(j)} \Delta\mathbf{U}_I^{(j)} + \Delta\mathbf{U}_{II}^{(j)}; \Delta\lambda^{(j)} \right] \quad (5.102)$$

$$\mathbf{r}^{(j)} = S_0 \mathbf{r}^{(j)'}/|\mathbf{r}^{(j)'}| \quad (5.103)$$

ここで， λ_s は λ に関する係数である．

5.4 曲面座標系を用いた定式化による数値解析例

本章に示した曲面座標系を用いた定式化による数値解析例として、矩形パネルに座屈モードおよびやせ馬モードの初期たわみを導入した座屈/後座屈解析と文献 [108–111] などに示される種々のベンチマーク問題を示す。共通のパラメータとして影響半径決定パラメータ $h = 1.2a$ (a : 粒子間距離), せん断補正係数 $\kappa = \pi^2/12$ とする。また例題 1, 2 の物性値は弾性係数 $E = 206\text{GPa}$, ポアソン比 $\nu = 0.3$ とする。幾何学的境界条件は変位拘束や直線保持, 周期連続境界条件などを問わず, 第 3 章に示した MPC 法を用いて与える。また, 参照解には汎用 FEA ソフト MSC.Marc [96] を用い, シェル要素による十分に細かい要素分割のモデルによる解を用いる。

5.4.1 正方形板の座屈解析

図 5.8 に示されるような正方形パネルの座屈解析を実施した。計算モデルの寸法は中立面の長さ $a = 1,000\text{ mm}$, 幅 $b = 1,000\text{ mm}$, 板厚 $t_h = 10\text{ mm}$ であり, 境界条件は図 5.8 に示される通りの周辺単純支持である。計算モデルは図 5.9 に示され, 21×21 の節点を (a) 規則的に配置したモデルと (b) 不規則に配置したモデルを用いる。図 5.9 (a), (b) における各節点周りの領域は SCNI のための仮想的な積分領域である。

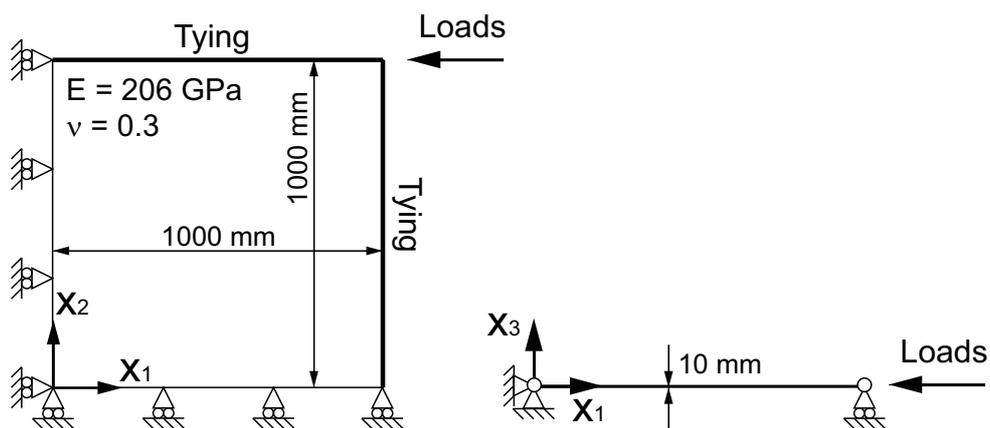


Fig. 5.8: Boundary condition of computational model

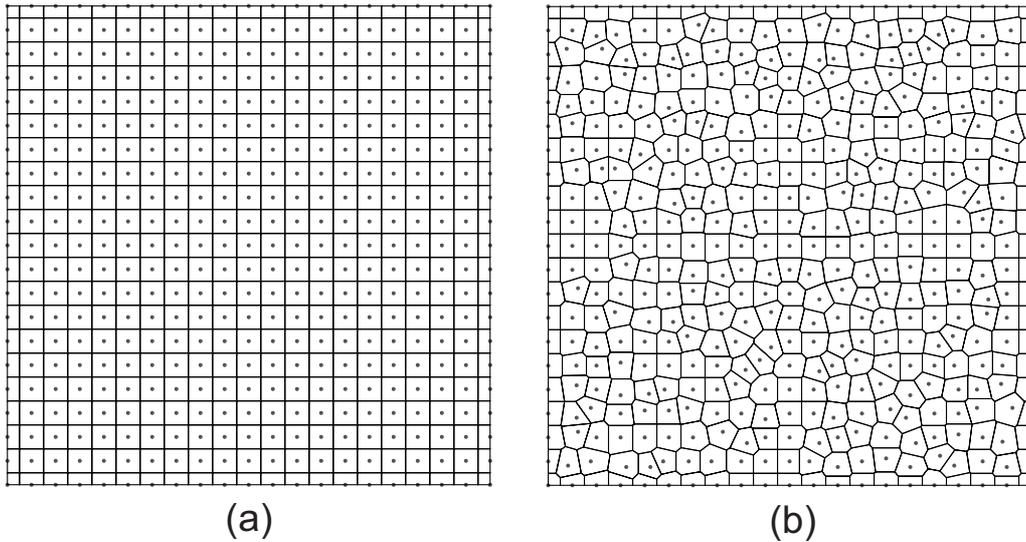


Fig. 5.9: Nodal configuration of the square plate [(a) regular arrangement (b) irregular arrangement]

ここでは、座屈モードの初期たわみを仮定し、次式により X_3 方向の初期配置を与える。

$$X_3 = w_0 = A_0 \sin\left(\frac{m\pi X_1}{a}\right) \sin\left(\frac{\pi X_2}{b}\right) \quad (5.104)$$

単純な曲面として1半波の座屈モードについて考えるため、 $m=1$ である。ここで A_0 は初期たわみの最大たわみ量を表し、本例題では $A_0/t_h = 0.01, 0.1$ についてそれぞれ解く。荷重は直線保持された $X_1 = 1,000$ mm の辺に X_1 方向の点荷重 $P = 1.2 \times 10^6$ N を加える。解法は total Lagrange 法, updated Lagrange 法をそれぞれ用いて解く。計算結果は図 5.10, 5.11 に示される。図はたわみの最頂部であるパネル中央のの荷重-変位曲線であり、図 5.10 は規則配置モデルの解、図 5.11 は不規則配置モデルの解である。 $A_0/t_h = 1e-4$ の実線は初期不整の無いほぼ完全なオイラー座屈の解として併せて示している。total Lagrange 法による解と updated Lagrange 法による解は良好な一致を示しており、またそれらの解は参照解とも高精度に一致していることがわかる。これらの結果から、単純な初期たわみを与えた正方形パネルの座屈解析では本手法によって妥当な解が得られていることが確認できる。

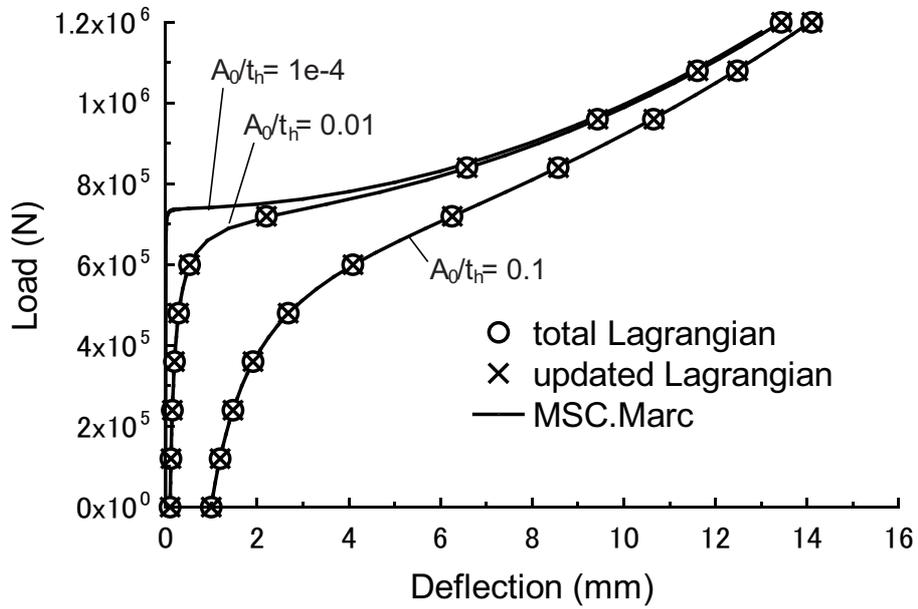


Fig. 5.10: Load-deflection curve (regular arrangement)

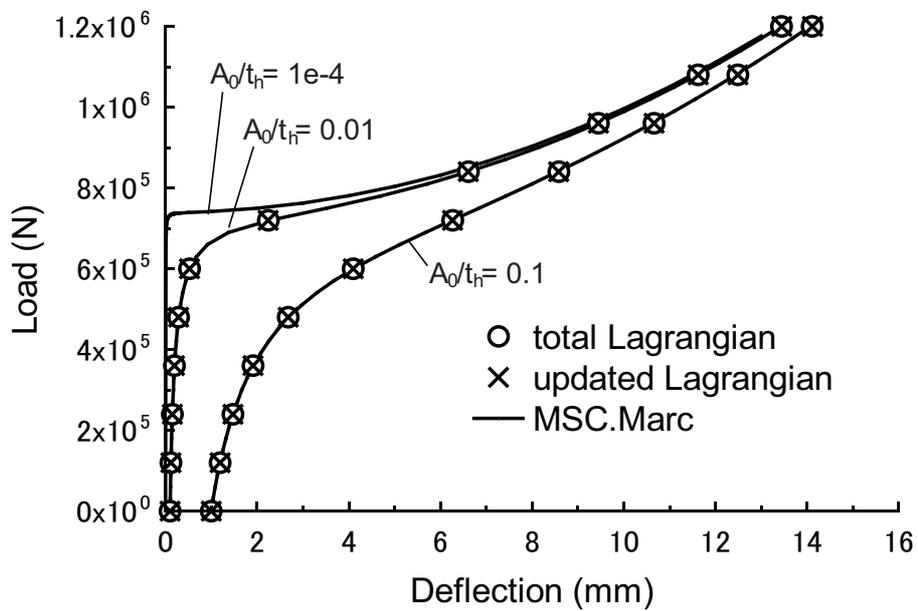


Fig. 5.11: Load-deflection curve (irregular arrangement)

5.4.2 長方形板の座屈解析

次にアスペクト比 $a/b = 3.0$ の矩形パネルの解析を実施した．解析対象の寸法は長さ $a = 2,550$ mm，幅 $b = 850$ mm，板厚 $t_h = 16$ mm である．境界条件は前節と同様な条件であり，全ての周辺を単純支持し，パネル長さ a 方向 (X_1 方向) の直線保持された辺に X_1 方向の点荷重 $P = 6.0 \times 10^6$ N を加える．計算モデルは図 5.12 に示され， 61×21 の節点を (a) 規則的に配置したモデルと (b) 不規則に配置したモデルを用いる．

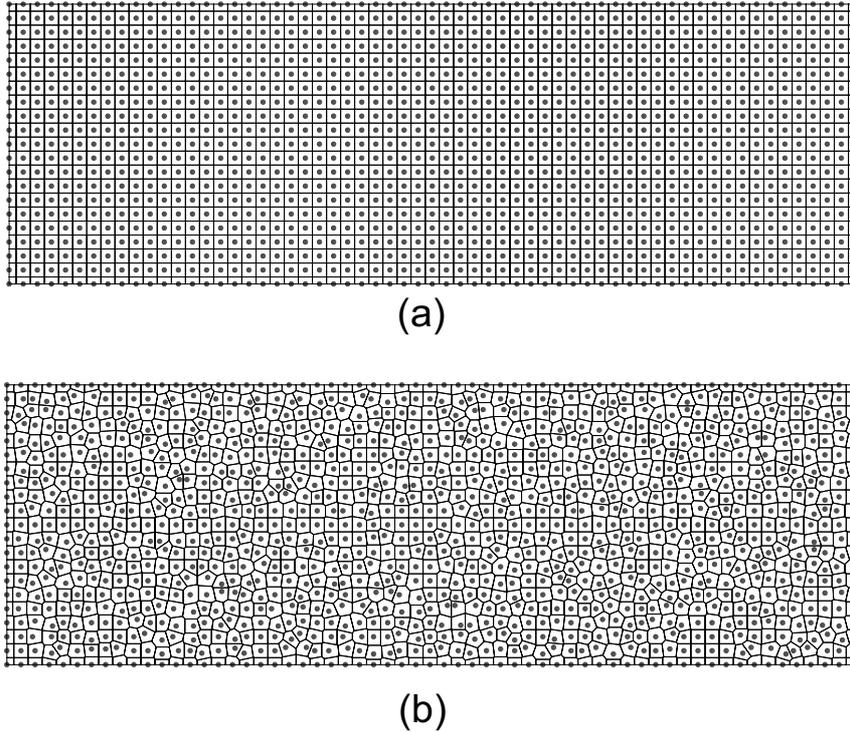


Fig. 5.12: Nodal configuration of the rectangular plate [(a) regular arrangement (b) irregular arrangement]

複雑な曲面形状の一例として，次式に示されるやせ馬モードを初期たわみとして仮定した．

$$X_3 = w_0 = \left| A_{0max} \sum_{m=1}^{11} A_{0m} \sin \frac{m\pi X_1}{a} \sin \frac{\pi X_2}{b} \right| \quad (5.105)$$

A_{0max} は 6mm とした．ここで， A_{0m} は初期たわみの形状を与える係数であり，表の値を用いた．

Table 5.1: Coefficients making initial deflection of thin-horse mode ($a/b=3.0$)

A_{0m}	A_{01}	A_{02}	A_{03}	A_{04}	A_{05}
	1.1458	-0.0616	0.3079	0.0229	0.1146
A_{06}	A_{07}	A_{08}	A_{09}	A_{010}	A_{011}
-0.0065	0.0327	0.0000	0.0000	-0.0015	-0.0074

これらの値は実際に測定されたパネルの初期たわみの値 [107] から得られた理想波形における係数である．式 (5.105) により与えられた矩形パネルの初期形状は図 5.13 に示される形状となる．

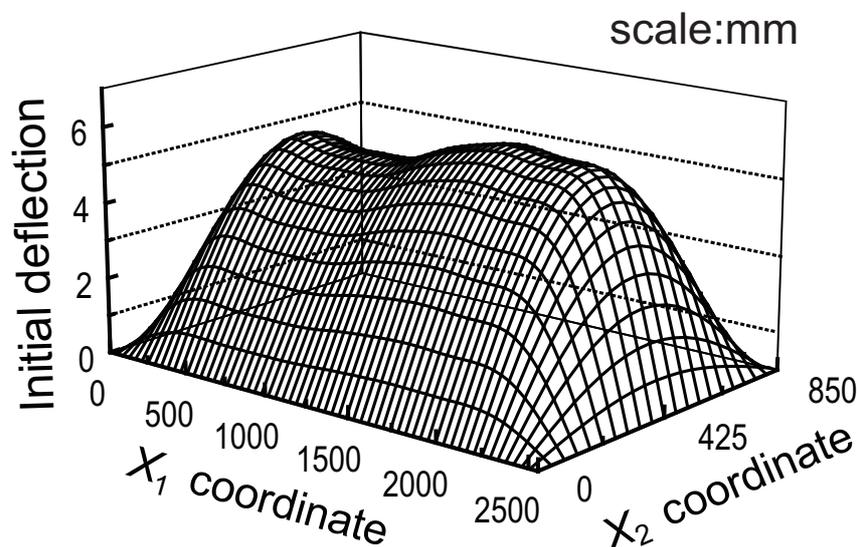


Fig. 5.13: Thin-horse mode

解法は total Lagrange 法, updated Lagrange 法をそれぞれ用いて解く．計算結果は図 5.14 に示される．図は設定した荷重値に至るまでに $X_2 = 425\text{mm}$ におけるたわみの分布をプロットしたものである． $P = 2.0 \times 10^6\text{N}$ 時点においてはパネルには座屈たわみは発生しておらず, 単純にやせ馬モードが少し成長したような分布となっているが, 座屈荷重を超えた $P = 4.0 \times 10^6\text{N}$ 時点と最終状態では, ほとんど純粋なパネルの座屈モードへと推移しているのが見られる．本手法による解はそれぞれ参照解と高精度に一致していることから, 複雑な曲面形状を有するパネルの計算においても本手法が適用できることが示された．

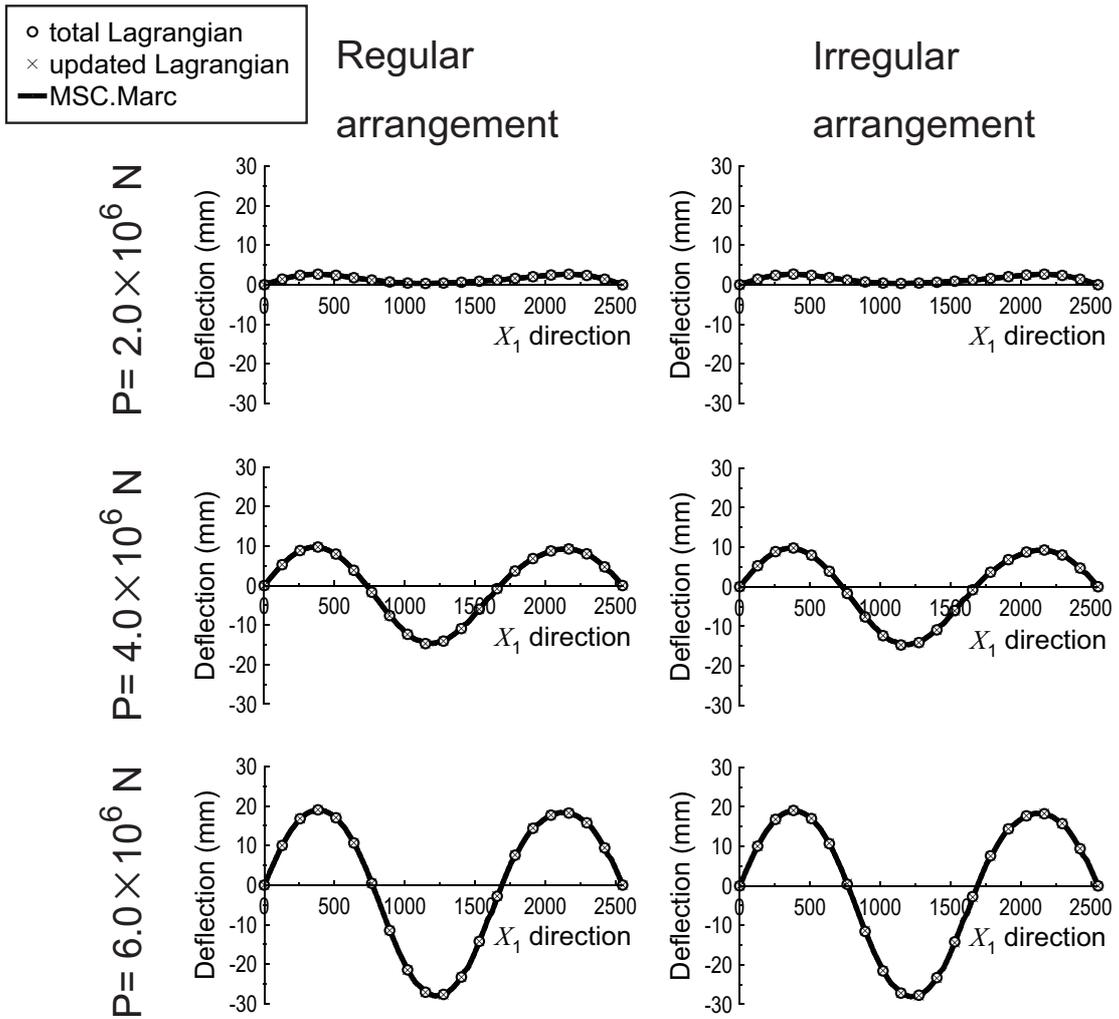


Fig. 5.14: Distribution of deflection along $X_2=425 \text{ mm}$

5.4.3 円筒シェルの座屈解析

円筒シェルの座屈解析を示す。計算モデルは図 5.15 に示される。

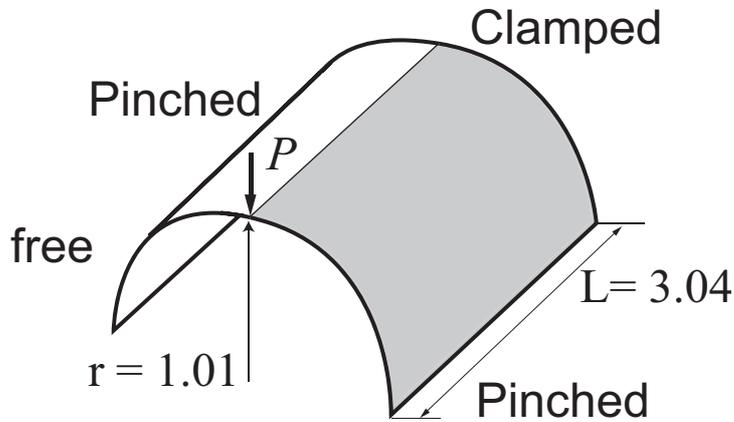


Fig. 5.15: Numerical model

物性値は、弾性係数 $E = 2.065 \times 10^7$ 、ポアソン比 $\nu = 0.3$ である。また、板厚は $t_h = 3.00 \times 10^{-2}$ である。離散化モデルは $1/2$ モデルであり、 $21 \times 21 = 441$ の節点を規則的に配置したものをを用いる。荷重点における荷重-変位曲線は図 5.16 に示され、参照解との高精度な一致が確認できる。

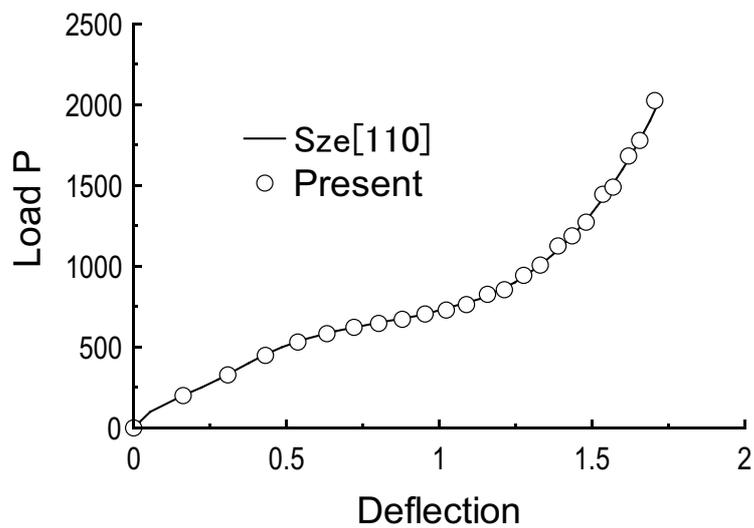


Fig. 5.16: Load-deflection curve

5.4.4 Shallow-roof の飛び移り座屈解析

Shallow-roof の飛び移り座屈解析を示す。計算モデルは図 5.17 に示される。

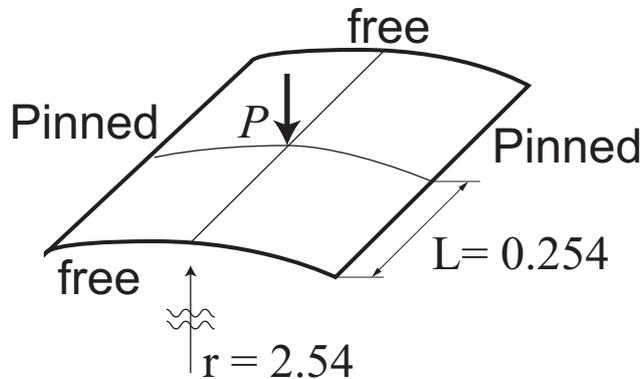


Fig. 5.17: Numerical model

物性値は、弾性係数 $E = 3.103 \times 10^9$ 、ポアソン比 $\nu = 0.3$ である。また、板厚は $t_h = 6.35 \times 10^{-3}$ である。離散化モデルは、 $21 \times 21 = 441$ の節点を規則的に配置したものをを用いる。荷重点における荷重-変位曲線を図 5.18 に示す。弧長増分制御を導入したことで、板の飛び移り座屈挙動を高精度に追跡できていることが確認できる。

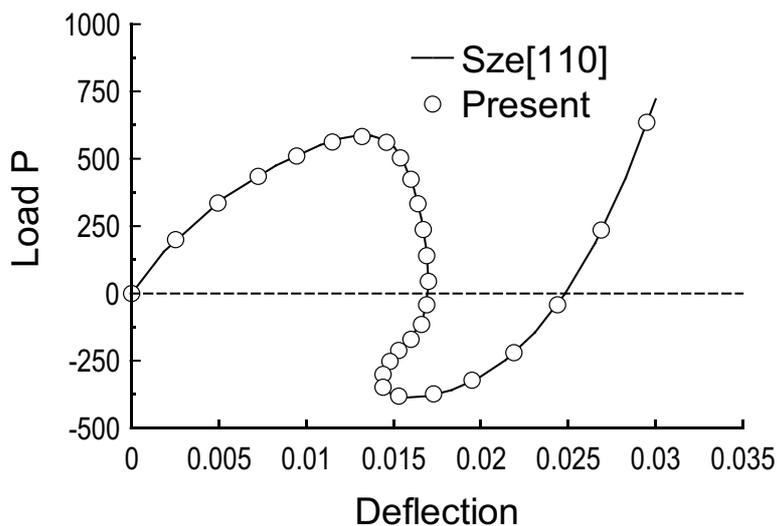


Fig. 5.18: Load-deflection curve

5.4.5 振ったはりの曲げ解析

振ったはりの曲げ解析を示す. 計算モデルは図 5.19 に示される.

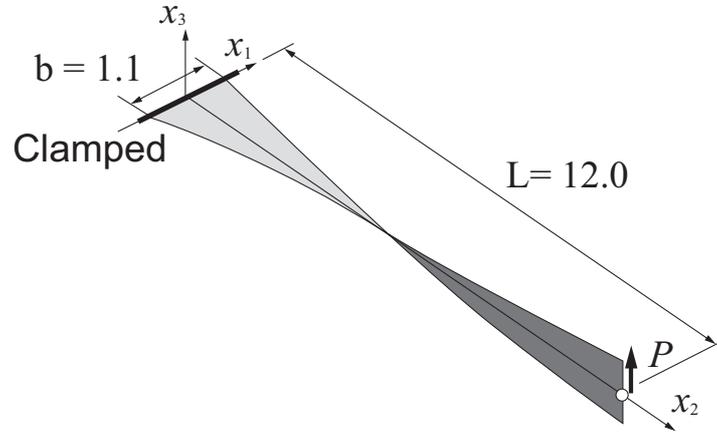


Fig. 5.19: Numerical model

物性値は, 弾性係数 $E = 2.90 \times 10^6$, ポアソン比 $\nu = 0.22$ である. また, 板厚は $t_h = 3.20 \times 10^{-3}$ である. 離散化モデルは, $121 \times 11 = 1331$ の節点を規則的に配置したものを用いる. 図 5.20 は荷重点における荷重-変位曲線であり, 参照解との一致が確認できる.

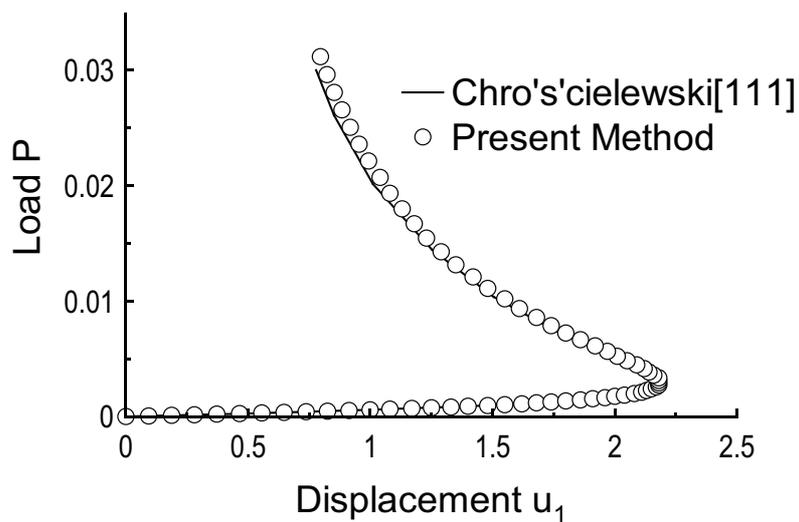


Fig. 5.20: Load-deflection curve

5.4.6 長方形板の巻き上げ解析

長方形板の巻き上げ解析を示す。計算モデルは図 5.21 に示される。

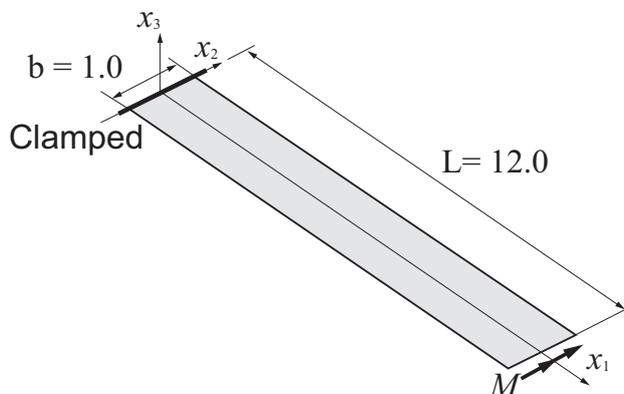


Fig. 5.21: Numerical model

物性値は、弾性係数 $E = 1.20 \times 10^6$ 、ポアソン比 $\nu = 0.0$ である。また、板厚は $t_h = 0.10$ である。曲げモーメントとして $M_{\max} = 50\pi/3$ を加える。離散化モデルは、 $121 \times 11 = 1331$ の節点を規則的に配置したものを用いる。図 5.22 は荷重点における荷重-変位曲線であり、参照解との一致が確認できる。このような大回転の問題において、微小回転の定式化では増分を重ねるごとに反復計算の回数が増大し収束解を得ることが困難となるが、有限回転を考慮したことで高精度な解が得られたと考えられる。

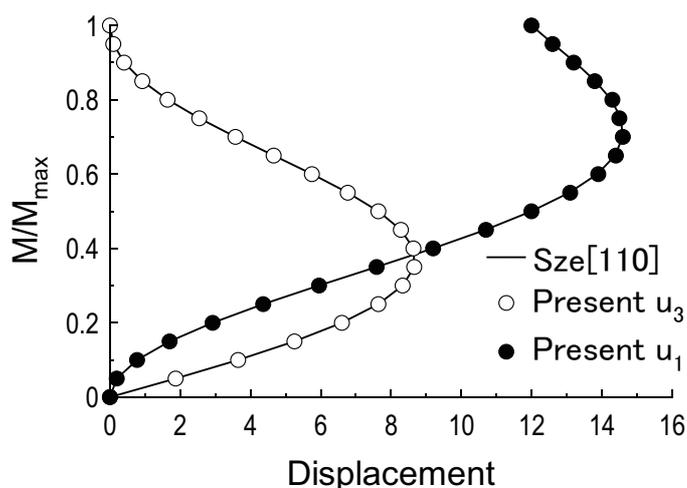


Fig. 5.22: Load-deflection curve

5.5 組合せ構造のための回転角成分の一般化

ここまで本章には曲面座標系を用いた一般化シェル理論の定式化について示したが、板が持つ自由度はカーテシアン座標系における X_i ($i = 1, 2, 3$) 軸方向の並進変位成分である u_i ($i = 1, 2, 3$)、及び曲面上の局所直交基底ベクトル \mathbf{V}_i ($i = 1, 2$) まわりの回転角である β_i ($i = 1, 2$) の5自由度である。回転角成分 β_i ($i = 1, 2$) はそれぞれ \mathbf{V}_i ($i = 1, 2$) まわりの自由度でありカーテシアン座標系における回転角成分とは異なるため、複数の板を組合せた構造系全体を通して回転自由度を一般的に取り扱うことができない。そこで本節では、回転角成分 β_i ($i = 1, 2$) をカーテシアン座標系の基底ベクトル \mathbf{e}_i ($i = 1, 2, 3$) まわりの回転角成分 θ_i ($i = 1, 2, 3$) に変換し、板による任意の構造系を一般的に取り扱うための方法を説明する。

5.5.1 曲面上の回転自由度の一般化

本項では自由度を一般的に取り扱うために回転自由度 β_i ($i = 1, 2$) を θ_i ($i = 1, 2, 3$) に変換する方法について説明する。ディレクターの回転量を ω とすると、 ω は \mathbf{V}_i ($i = 1, 2$) まわりの回転角である β_i と \mathbf{e}_i ($i = 1, 2, 3$) まわりの回転角成分 θ_i をそれぞれ用いて次のように表せる。

$$\omega = \beta_i \mathbf{V}_i = \theta_j \mathbf{e}_j \quad (5.106)$$

従って、回転自由度 β_i は θ_i 用いて次のように表せる。

$$\beta_i = \mathbf{V}_i \cdot \mathbf{e}_j \theta_j = \mathbf{V}_{i(j)} \theta_j \quad (5.107)$$

FEA などのクロネッカー・デルタ特性を持ち節点変位とその近似値が一致するものであれば、節点ごとの局所直交基底ベクトルを用いて次式のように単に節点変位ベクトルを変換してやればよい。

$$\begin{Bmatrix} \beta_{1I} \\ \beta_{2I} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{V}_{1I(1)} & \mathbf{V}_{1I(2)} & \mathbf{V}_{1I(3)} \\ \mathbf{V}_{2I(1)} & \mathbf{V}_{2I(2)} & \mathbf{V}_{2I(3)} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \theta_{1I} \\ \theta_{2I} \\ \theta_{3I} \end{Bmatrix} \quad (5.108)$$

しかしながら本手法では、第2章に説明した通り $\beta_i^h \neq \beta_{iI}$ であるからこのような自由度の変換はできない。ただし、任意点での近似値 β_i^h , θ_i^h について考えれば式

(5.108) のような関係は満たされる。そのため、 $\partial \mathbf{u} / \partial r^i$ を近似するマトリクス $\Psi_{,i}$ にこの関係を組み込めば、全ての自由度をカーテシアン座標系の自由度へと変換することができる。ここで改めて \mathbf{u} , $\partial \mathbf{u} / \partial r^i$ の定義を示す。ただし、有限回転増分を考慮すると大変に煩雑な式となり、かつ $\partial \mathbf{u} / \partial r^i$ において接線剛性マトリクスの離散化に用いられる項は微小変形項のみであるから、有限回転増分に関する項は省略して表す。

$$\mathbf{u} = \mathbf{u}_{mid} + \frac{r^3}{2} t_h (-\beta_1 {}^t \mathbf{V}_2 + \beta_2 {}^t \mathbf{V}_1) \quad (5.109)$$

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial r^i} = \frac{\partial \mathbf{u}_{mid}}{\partial r^i} + \frac{r^3}{2} t_h \left(-\frac{\partial \beta_1}{\partial r^i} {}^t \mathbf{V}_2 - \beta_1 \frac{\partial {}^t \mathbf{V}_2}{\partial r^i} + \frac{\partial \beta_2}{\partial r^i} {}^t \mathbf{V}_1 + \beta_2 \frac{\partial {}^t \mathbf{V}_1}{\partial r^i} \right), (i = 1, 2) \quad (5.110)$$

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial r^3} = \frac{1}{2} t_h (-\beta_1 {}^t \mathbf{V}_2 + \beta_2 {}^t \mathbf{V}_1) \quad (5.111)$$

式(5.108)を考慮して自由度の変換を行えば、式(5.109), (5.110), (5.111)はそれぞれ次のようになる。

$$\mathbf{u} = \mathbf{u}_{mid} + \frac{r^3}{2} t_h (-(\boldsymbol{\theta} \cdot {}^t \mathbf{V}_1) {}^t \mathbf{V}_2 + (\boldsymbol{\theta} \cdot {}^t \mathbf{V}_2) {}^t \mathbf{V}_1) \quad (5.112)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial r^i} = \frac{\partial \mathbf{u}_{mid}}{\partial r^i} + \frac{r^3}{2} t_h \left(-\frac{\partial}{\partial r^i} (\boldsymbol{\theta} \cdot {}^t \mathbf{V}_1) {}^t \mathbf{V}_2 - (\boldsymbol{\theta} \cdot {}^t \mathbf{V}_1) \frac{\partial {}^t \mathbf{V}_2}{\partial r^i} \right. \\ \left. + \frac{\partial}{\partial r^i} (\boldsymbol{\theta} \cdot {}^t \mathbf{V}_2) {}^t \mathbf{V}_1 + (\boldsymbol{\theta} \cdot {}^t \mathbf{V}_2) \frac{\partial {}^t \mathbf{V}_1}{\partial r^i} \right), (i = 1, 2) \end{aligned} \quad (5.113)$$

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial r^3} = \frac{1}{2} t_h (-(\boldsymbol{\theta} \cdot {}^t \mathbf{V}_1) {}^t \mathbf{V}_2 + (\boldsymbol{\theta} \cdot {}^t \mathbf{V}_2) {}^t \mathbf{V}_1) \quad (5.114)$$

式(5.113)中の $\partial / \partial r^i (\boldsymbol{\theta} \cdot {}^t \mathbf{V}_j)$ において、 ${}^t \mathbf{V}_j$ は連続な関数として扱われることに注意してそれぞれ展開すると、次式となる。

$$\begin{aligned} \mathbf{u} = \mathbf{u}_{mid} + \frac{r^3}{2} t_h \left(\theta_1 ({}^t \mathbf{V}_{2(1)} {}^t \mathbf{V}_1 - {}^t \mathbf{V}_{1(1)} {}^t \mathbf{V}_2) \right. \\ \left. + \theta_2 ({}^t \mathbf{V}_{2(2)} {}^t \mathbf{V}_1 - {}^t \mathbf{V}_{1(2)} {}^t \mathbf{V}_2) \right. \\ \left. + \theta_3 ({}^t \mathbf{V}_{2(3)} {}^t \mathbf{V}_1 - {}^t \mathbf{V}_{1(3)} {}^t \mathbf{V}_2) \right) \end{aligned} \quad (5.115)$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial r^i} = & \frac{\partial \mathbf{u}_{mid}}{\partial r^i} + \frac{r^3}{2} t_h \left[\theta_1 \left({}^t \mathbf{V}_{2(1)} \frac{\partial {}^t \mathbf{V}_1}{\partial r^i} + \frac{\partial {}^t \mathbf{V}_2}{\partial r^i} {}^t \mathbf{V}_1 - {}^t \mathbf{V}_{1(1)} \frac{\partial {}^t \mathbf{V}_2}{\partial r^i} - \frac{\partial {}^t \mathbf{V}_1}{\partial r^i} {}^t \mathbf{V}_2 \right) \right. \\
& + \theta_2 \left({}^t \mathbf{V}_{2(2)} \frac{\partial {}^t \mathbf{V}_1}{\partial r^i} + \frac{\partial {}^t \mathbf{V}_2}{\partial r^i} {}^t \mathbf{V}_1 - {}^t \mathbf{V}_{1(2)} \frac{\partial {}^t \mathbf{V}_2}{\partial r^i} - \frac{\partial {}^t \mathbf{V}_1}{\partial r^i} {}^t \mathbf{V}_2 \right) \\
& + \theta_3 \left({}^t \mathbf{V}_{2(3)} \frac{\partial {}^t \mathbf{V}_1}{\partial r^i} + \frac{\partial {}^t \mathbf{V}_2}{\partial r^i} {}^t \mathbf{V}_1 - {}^t \mathbf{V}_{1(3)} \frac{\partial {}^t \mathbf{V}_2}{\partial r^i} - \frac{\partial {}^t \mathbf{V}_1}{\partial r^i} {}^t \mathbf{V}_2 \right) \\
& + \frac{\partial \theta_1}{\partial r^i} ({}^t \mathbf{V}_{2(1)} {}^t \mathbf{V}_1 - {}^t \mathbf{V}_{1(1)} {}^t \mathbf{V}_2) \\
& + \frac{\partial \theta_2}{\partial r^i} ({}^t \mathbf{V}_{2(2)} {}^t \mathbf{V}_1 - {}^t \mathbf{V}_{1(2)} {}^t \mathbf{V}_2) \\
& \left. + \frac{\partial \theta_3}{\partial r^i} ({}^t \mathbf{V}_{2(3)} {}^t \mathbf{V}_1 - {}^t \mathbf{V}_{1(3)} {}^t \mathbf{V}_2) \right], \quad (i = 1, 2) \tag{5.116}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial r^3} = & \frac{1}{2} t_h (\theta_1 ({}^t \mathbf{V}_{2(1)} {}^t \mathbf{V}_1 - {}^t \mathbf{V}_{1(1)} {}^t \mathbf{V}_2) \\
& + \theta_2 ({}^t \mathbf{V}_{2(2)} {}^t \mathbf{V}_1 - {}^t \mathbf{V}_{1(2)} {}^t \mathbf{V}_2) \\
& + \theta_3 ({}^t \mathbf{V}_{2(3)} {}^t \mathbf{V}_1 - {}^t \mathbf{V}_{1(3)} {}^t \mathbf{V}_2)) \tag{5.117}
\end{aligned}$$

式 (5.115), (5.116), (5.117) について RK 近似を行うと, 次式となる.

$$\begin{aligned}
\mathbf{u} = & \sum_{I=1}^{NP} \begin{bmatrix} \psi_I & 0 & 0 & r^3 \mathbf{A}'_{1(1)} & r^3 \mathbf{A}'_{2(1)} & r^3 \mathbf{A}'_{3(1)} \\ 0 & \psi_I & 0 & r^3 \mathbf{A}'_{1(2)} & r^3 \mathbf{A}'_{2(2)} & r^3 \mathbf{A}'_{3(2)} \\ 0 & 0 & \psi_I & r^3 \mathbf{A}'_{1(3)} & r^3 \mathbf{A}'_{2(3)} & r^3 \mathbf{A}'_{3(3)} \end{bmatrix} \mathbf{U}_I \\
= & \sum_{I=1}^{NP} \Psi_I \mathbf{U}_I \tag{5.118}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial r^i} = & \sum_{I=1}^{NP} \begin{bmatrix} \frac{\partial \psi_I}{\partial r^i} & 0 & 0 & r^3 \mathbf{A}''_{i1(1)} & r^3 \mathbf{A}''_{i2(1)} & r^3 \mathbf{A}''_{i3(1)} \\ 0 & \frac{\partial \psi_I}{\partial r^i} & 0 & r^3 \mathbf{A}''_{i1(2)} & r^3 \mathbf{A}''_{i2(2)} & r^3 \mathbf{A}''_{i3(2)} \\ 0 & 0 & \frac{\partial \psi_I}{\partial r^i} & r^3 \mathbf{A}''_{i1(3)} & r^3 \mathbf{A}''_{i2(3)} & r^3 \mathbf{A}''_{i3(3)} \end{bmatrix} \mathbf{U}_I \\
= & \sum_{I=1}^{NP} \Psi_{I,i} \mathbf{U}_I, \quad (i = 1, 2) \tag{5.119}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial r^3} = & \sum_{I=1}^{NP} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \mathbf{A}'_{1(1)} & \mathbf{A}'_{2(1)} & \mathbf{A}'_{3(1)} \\ 0 & 0 & 0 & \mathbf{A}'_{1(2)} & \mathbf{A}'_{2(2)} & \mathbf{A}'_{3(2)} \\ 0 & 0 & 0 & \mathbf{A}'_{1(3)} & \mathbf{A}'_{2(3)} & \mathbf{A}'_{3(3)} \end{bmatrix} \mathbf{U}_I \\
= & \sum_{I=1}^{NP} \Psi_{I,3} \mathbf{U}_I \tag{5.120}
\end{aligned}$$

ただし, \mathbf{A}'_i , \mathbf{A}''_{ij} は次式である.

$$\mathbf{A}'_i = \frac{t_h}{2} \psi_I ({}^t\mathbf{V}_{2(i)} {}^t\mathbf{V}_1 - {}^t\mathbf{V}_{1(i)} {}^t\mathbf{V}_2) \quad (5.121)$$

$$\mathbf{A}''_{ij} = \frac{t_h}{2} \left[\psi_I \left({}^t\mathbf{V}_{2(j)} \frac{\partial {}^t\mathbf{V}_1}{\partial r^i} + \frac{\partial {}^t\mathbf{V}_2}{\partial r^i} (j) {}^t\mathbf{V}_1 - {}^t\mathbf{V}_{1(j)} \frac{\partial {}^t\mathbf{V}_2}{\partial r^i} - \frac{\partial {}^t\mathbf{V}_1}{\partial r^i} (j) {}^t\mathbf{V}_2 \right) + \frac{\partial \psi_I}{\partial r^i} ({}^t\mathbf{V}_{2(j)} {}^t\mathbf{V}_1 - {}^t\mathbf{V}_{1(j)} {}^t\mathbf{V}_2) \right] \quad (5.122)$$

ここで得られた Ψ_I , $\Psi_{I,i}$ を 5.2 節に示した構成式の離散化に用いれば, 全ての自由度がカーテシアン座標系における基底ベクトル \mathbf{e}_i に基づいた形に変換される.

5.5.2 曲面座標系の定式化における面内回転剛性

回転角成分の変換により任意の曲面について自由度を一般的に取り扱えるようになったが, 本来シェルはディレクターまわりの回転成分を持たないため, 回転自由度が 1 成分増えたことにより接線剛性方程式は特異な連立方程式となる. そこで本項では, 3.2 節で平板の線形解析に適用した Kanok [95] の方法を曲面座標系に応じた形に書き換えることで, 面内回転に関する剛性を持たせ特異性を回避する.

平板の定式化において, 板の中立面を x_1x_2 平面とすると, 面内回転によるペナルティエネルギー W_T は次式となる

$$W_T = \kappa_T G t_h A_K \left[\theta_3 - \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_2}{\partial x_1} - \frac{\partial u_1}{\partial x_2} \right) \right]^2 = 0 \quad (5.123)$$

G はせん断弾性係数である. 一方, 曲面座標系内でこれを考えると W_T は次式に書き換えられる.

$$W_T = \kappa_T \int_V {}_t_0 C^{1212} \left[\beta_3 |{}^t_0 \mathbf{g}_1 \times {}^t_0 \mathbf{g}_2| - \frac{1}{2} \left({}^t \mathbf{g}_2 \cdot \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial r^1} - {}^t \mathbf{g}_1 \cdot \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial r^2} \right) \right]^2 dV = 0 \quad (5.124)$$

面内回転 β_3 の追加により生じるひずみ ε_{β_3} と応力 R_{β_3} を次式のように定義する.

$$\varepsilon_{\beta_3} = \left[\beta_3 |{}^t_0 \mathbf{g}_1 \times {}^t_0 \mathbf{g}_2| - \frac{1}{2} \left({}^t \mathbf{g}_2 \cdot \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial r^1} - {}^t \mathbf{g}_1 \cdot \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial r^2} \right) \right] {}^t_0 \mathbf{g}^1 \otimes {}^t_0 \mathbf{g}^2 \quad (5.125)$$

$$R_{\beta_3} = 2\kappa_T {}_t_0 C^{1212} \varepsilon_{\beta_3} {}^t_0 \mathbf{g}_1 \otimes {}^t_0 \mathbf{g}_2 \quad (5.126)$$

式 (5.124) を仮想ひずみ $\delta\varepsilon_{\beta_3}$ による仮想エネルギー δW_T として, $\delta W_T = 0$ について仮想仕事式と同様に増分分解, 及び線形化を行うと次式となる.

$$\left(\frac{1}{2} \int_V {}^t \dot{R}_{\beta_3} \delta {}_t_0 \varepsilon_{\beta_3} dV \right) \Delta t = - \frac{1}{2} \int_V {}^t R_{\beta_3} \delta {}_t_0 \varepsilon_{\beta_3} dV \quad (5.127)$$

線形化された仮想仕事式 (5.42) に式 (5.127) を加えると面内回転剛性を考慮した仮想仕事式が得られる.

$$\begin{aligned}
& \left(\iiint t_0 C^{ijkl} \dot{E}_{kl} \delta_{t_0} E_{Lij} [{}^{t_0} \mathbf{g}_1 {}^{t_0} \mathbf{g}_2 {}^{t_0} \mathbf{g}_3] dr^1 dr^2 dr^3 \right. \\
& \quad + \iiint t_0 S^{ij} (\delta_{t_0} E_{NLij}) [{}^{t_0} \mathbf{g}_1 {}^{t_0} \mathbf{g}_2 {}^{t_0} \mathbf{g}_3] dr^1 dr^2 dr^3 \\
& \quad \left. + \iiint \kappa_{T t_0} C^{1212} {}_{t_0} \dot{\varepsilon}_{\beta_3} \delta_{t_0} \varepsilon_{\beta_3} [{}^{t_0} \mathbf{g}_1 {}^{t_0} \mathbf{g}_2 {}^{t_0} \mathbf{g}_3] dr^1 dr^2 dr^3 \right) \Delta t \\
& = {}^t \delta R - \iiint t_0 S^{ij} \delta_{t_0} E_{Lij} [{}^{t_0} \mathbf{g}_1 {}^{t_0} \mathbf{g}_2 {}^{t_0} \mathbf{g}_3] dr^1 dr^2 dr^3 \\
& \quad - \frac{1}{2} \iiint t_0 R_{\beta_3} \delta_{t_0} \varepsilon_{\beta_3} [{}^{t_0} \mathbf{g}_1 {}^{t_0} \mathbf{g}_2 {}^{t_0} \mathbf{g}_3] dr^1 dr^2 dr^3 \tag{5.128}
\end{aligned}$$

ここで RK による ε_{β_3} の離散化を考えるが, β_3 はディレクター ${}^t \mathbf{V}_3$ まわりの回転角であるから, 前項に示したように β_3 をカーテシアン座標系の回転角成分 θ_i ($i = 1, 2, 3$) に置き換えなくてはならない. 従って, 式 (5.125) は次式となる.

$$\begin{aligned}
\varepsilon_{\beta_3} & = \left[\boldsymbol{\theta} \cdot {}^t \mathbf{V}_3 |{}^{t_0} \mathbf{g}_1 \times {}^{t_0} \mathbf{g}_2| - \frac{1}{2} \left({}^t \mathbf{g}_2 \cdot \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial r^1} - {}^t \mathbf{g}_1 \cdot \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial r^2} \right) \right] {}^{t_0} \mathbf{g}^1 \otimes {}^{t_0} \mathbf{g}^2 \\
& = \left[(\theta_1 {}^t \mathbf{V}_{3(1)} + \theta_2 {}^t \mathbf{V}_{3(2)} + \theta_3 {}^t \mathbf{V}_{3(3)}) |{}^{t_0} \mathbf{g}_1 \times {}^{t_0} \mathbf{g}_2| - \frac{1}{2} \left({}^t \mathbf{g}_2 \cdot \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial r^1} - {}^t \mathbf{g}_1 \cdot \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial r^2} \right) \right] {}^{t_0} \mathbf{g}^1 \otimes {}^{t_0} \mathbf{g}^2 \tag{5.129}
\end{aligned}$$

これを踏まえてひずみの成分に関して RK による変位-ひずみ変換マトリクスを構成すると, 次式のように離散化できる.

$$\varepsilon_{\beta_3}^h = \sum_{I=1}^{NP} {}^t \mathbf{B}_{\beta_3 I} \mathbf{U}_I \tag{5.130}$$

$$\begin{aligned}
& {}^t \mathbf{B}_{\beta_3 I} = \\
& \left\{ \begin{array}{ccc}
{}^t \mathbf{g}_{1(1)} \frac{\partial \psi_I}{\partial r^2} & {}^t \mathbf{g}_{1(2)} \frac{\partial \psi_I}{\partial r^2} & {}^t \mathbf{g}_{1(3)} \frac{\partial \psi_I}{\partial r^2} \\
-{}^t \mathbf{g}_{2(1)} \frac{\partial \psi_I}{\partial r^1} & -{}^t \mathbf{g}_{2(2)} \frac{\partial \psi_I}{\partial r^1} & -{}^t \mathbf{g}_{2(3)} \frac{\partial \psi_I}{\partial r^1}
\end{array} \right. \\
& \quad \left. \begin{array}{ccc}
r^{3t} \mathbf{g}_1 \cdot \mathbf{A}''_{21} & r^{3t} \mathbf{g}_1 \cdot \mathbf{A}''_{22} & r^{3t} \mathbf{g}_1 \cdot \mathbf{A}''_{23} \\
-r^{3t} \mathbf{g}_2 \cdot \mathbf{A}''_{11} & -r^{3t} \mathbf{g}_2 \cdot \mathbf{A}''_{12} & -r^{3t} \mathbf{g}_2 \cdot \mathbf{A}''_{13} \\
+a\psi_I & +a\psi_I & +a\psi_I
\end{array} \right\} \tag{5.131}
\end{aligned}$$

ただし, $a = |{}^{t_0} \mathbf{g}_1 \times {}^{t_0} \mathbf{g}_2|$ であり, \mathbf{A}''_{ij} は式 (5.122) に示される. ${}^t \mathbf{B}_{\beta_3}$ を用い, 式 (5.127) を離散化して節点変位増分ベクトルの変分 $\delta \mathbf{U}$ を除すと次式となる.

$${}^t {}_{t_0} \mathbf{K}_T \mathbf{U} = -{}^t {}_{t_0} \mathbf{Q}_T \tag{5.132}$$

$${}^t\mathbf{K}_T = \iiint {}^t\mathbf{B}_{\beta_3}^T {}^t\mathbf{K}_{Tt_0} C^{1212t} {}^t\mathbf{B}_{\beta_3} [{}^{t_0}\mathbf{g}_1 {}^{t_0}\mathbf{g}_2 {}^{t_0}\mathbf{g}_3] dr^1 dr^2 dr^3 \quad (5.133)$$

$${}^t\mathbf{Q}_T = \frac{1}{2} \iiint {}^t\mathbf{B}_{\beta_3}^T {}^t\mathbf{R}_{\beta_3} [{}^{t_0}\mathbf{g}_1 {}^{t_0}\mathbf{g}_2 {}^{t_0}\mathbf{g}_3] dr^1 dr^2 dr^3 \quad (5.134)$$

従って，式(5.132)を接線剛性方程式に加えれば面内回転剛性を持ったの接線剛性方程式となる。

$$({}^t\mathbf{K} + {}^t\mathbf{K}_T) \mathbf{U} = {}^t\mathbf{F} - ({}^t\mathbf{Q} + {}^t\mathbf{Q}_T) \quad (5.135)$$

5.6 曲面座標系による定式化を用いた組合せ構造の幾何学的非線形解析

本節では，曲面座標系による定式化を用いて組合せ構造の幾何学的非線形解析を行う。

5.6.1 T型はりの曲げ解析

図5.23(a)に示す，第3章に示したT型はりの線形曲げ解析と同様のモデルを用いて幾何学的非線形解析を行う。

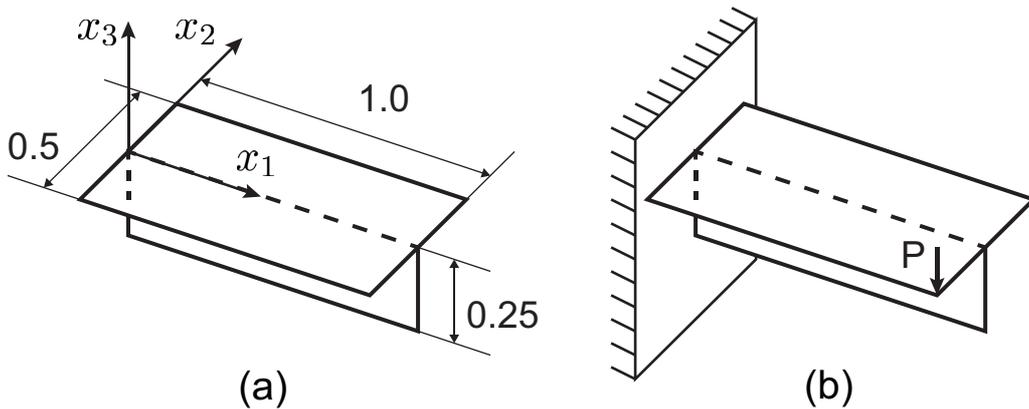


Fig. 5.23: Numerical model for T-shaped plate structure [(a) Dimensional diagram, (b) Boundary condition]

物性値は第3章と同様に弾性係数 $E = 2.06 \times 10^5$ ，ポアソン比 $\nu = 0.3$ であり，板厚は $t_h = 0.01$ である．節点間距離は 0.025 とし，規則的に配置したモデル (3.3.1 項，

モデル A2) を用いる。境界条件は図 5.23(b) に示されるように x_2x_3 平面に接する辺を完全拘束し $x_1 = 1.0$, $x_2 = -0.25$ の端部に点荷重 $P = 0.1$ を加える。参照解には汎用ソフト MSC.Marc [96] による十分に細かい要素分割の FEA の値を用いる。荷重点の荷重-変位曲線を図 5.24 に示す。FEA による参照解と高精度に一致しており、提案手法の妥当性が確認できた。

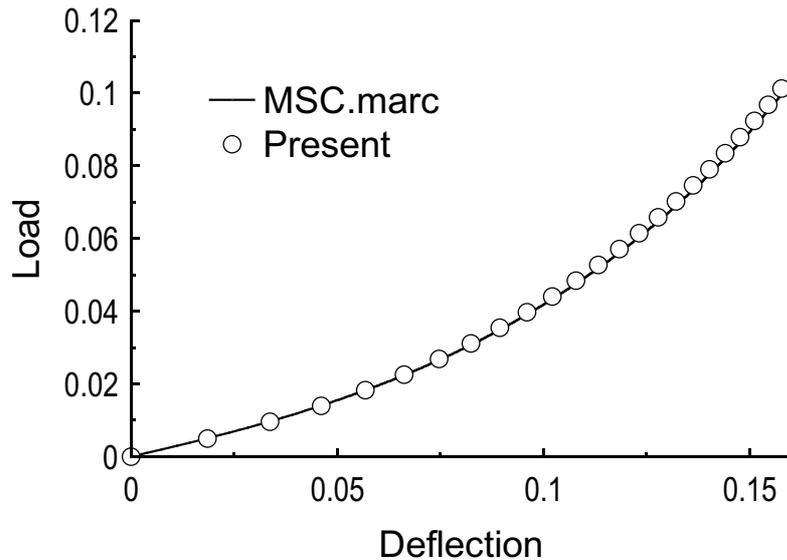


Fig. 5.24: Load-deflection curve

5.6.2 振った T 型はりの曲げ解析

図 5.25 に示す振った T 型はりの幾何学的非線形解析を行う。物性値は弾性係数 $E = 2.0 \times 10^7$, ポアソン比 $\nu = 0.3$ であり, 板厚は $t_h = 0.25$ である。荷重は $P = \lambda P_{\text{ref}}$ とし, $P_{\text{ref}} = 1,000$ である。なお, 組合せ構造であることと形状の複雑さを考慮して積分方法は SSCI を用いた。荷重点の荷重-変位曲線を図 5.26 に示す。参照解には Chróscielewski らによって解かれた値 [111] を用いる。図中の凡例は (h 方向+b 方向) \times L 方向 の節点数を示しており, 参照解においてはそれぞれの方向への要素数を示している。本例題について理論解は無いが, まず参照解について見ても要素数で経路が大きく変わっていることから, このような問題は曲げ変形の定式化や要素数などが大きく影響する問題であると考えることができる。本手法の解について見

ると、粗い分割では堅い解が出ているが、これは単純に一辺に6節点ではこの問題における精度に十分な節点数が得られていないことが原因と考えられる。一方で細かい分割のモデルについては、細かい要素数の参照解について同様の解が得られていることが確認できることから、本手法による解は妥当なものであるといえる。

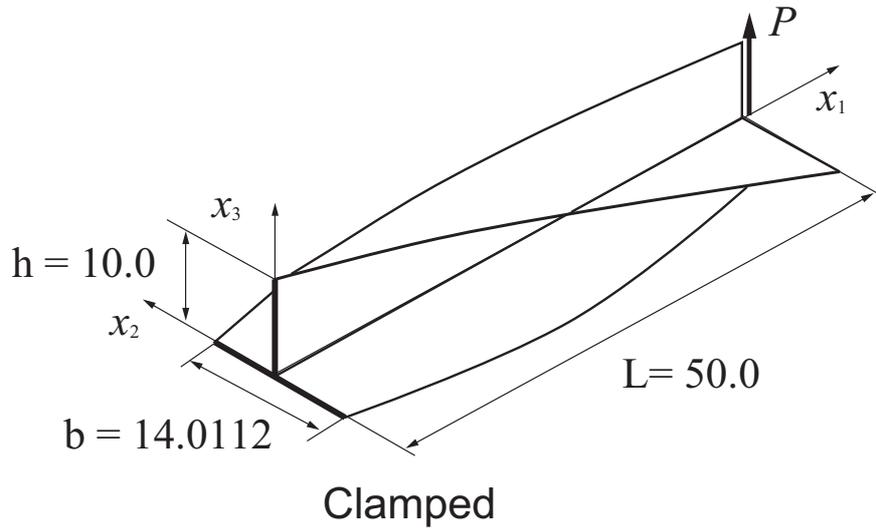


Fig. 5.25: Numerical model for twisted T-shaped plate structure

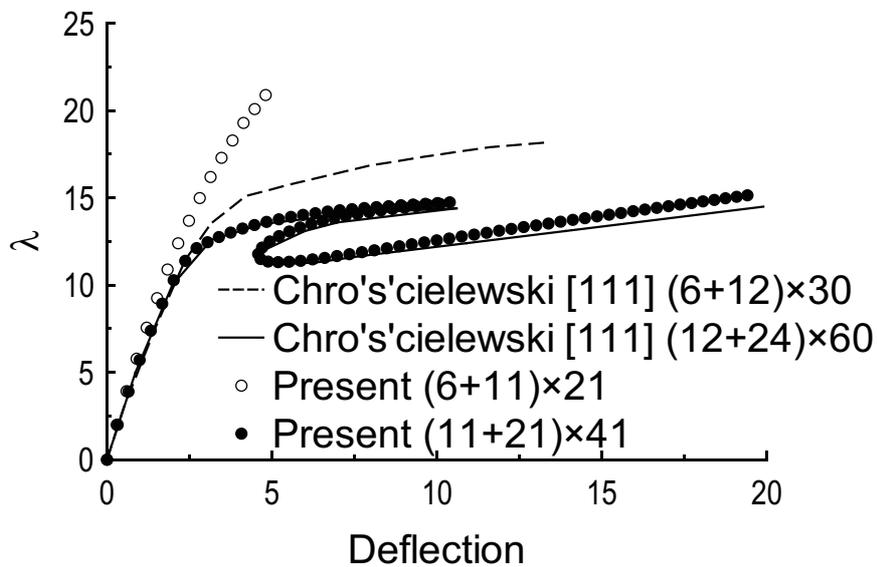


Fig. 5.26: Load-deflection curve

5.7 第5章結言

本章には曲面座標系を用いた RKPM によるシェルの定式化について示した。また、座屈後挙動を取り扱うための弧長増分制御について示した。数値解析例として低次の関数で表せない複雑な曲面形状の初期たわみを考慮した座屈解析を示し、高精度な解の一致を確認した。前章までに示した定式化では任意の曲面形状を取り扱うことは困難であったが、本章に示した定式化を用いることで任意曲面の問題を柔軟かつ高精度に取り扱えることが示された。またシェルの種々のベンチマーク問題に関しても高精度な解を得た。さらに、組合せ構造のための面内回転剛性を曲面座標系の定式化に合わせた形に書き換え、板の組合せ構造物の幾何学的非線形解析によって提案手法の妥当性を検証した。

第6章 結言

本研究の目的は、メッシュフリー/粒子法に基づいたシェル理論の定式化によって板構造物の非線形解析を高精度に行うことである。本論文には、この目的に沿って行った定式化と数値解析例による手法の検証を示した。以下にその概要を示す。

第2章では、板曲げ問題における RKPM の概要を示し、面内変形成分と面外変形成分を併せ持つ5自由度の平板の線形問題の定式化を行った。また、メッシュフリー法における節点積分手法である SCNI と SSCI について示し、これらの適用方法について数値解析例により検証を行った。あらかじめ基本境界条件や荷重条件から予測される応力場に対して適切に各々の積分法を適用することで高精度な解が得られることを示した。

第3章では、メッシュフリー法において基本境界条件を取り扱うための一手法である MPC 法について示した。MPC 法の定式化の概要について示し、MPC 法を適用する上での問題点について究明し、回避策を検証した。問題の根本的な解決には再考の余地があるものの、グローバルな計算精度に与える影響は少ないものと考えられることがわかった。また、自由度を同期する手段を応用して三次元的な組合せ構造物のモデル化を行い、参照解と高精度に一致する解を得ることで提案手法の妥当性を確認した。

第4章では、RKPMにより離散化された平板の幾何学的非線形問題の定式化について示した。提案手法の解は汎用 FEA ソフトウェアによる解と高精度に一致しており、定式化の妥当性が確認できた。また、第3章にて提案した MPC 法に関する応力が振動するという問題に関して数値解析例で改めて検証を行ったが、少なくとも局所的な誤差が問題とならないグローバルな変形に悪影響を与えうるものではなく、直線保持や周期連続境界条件などの自由度を同期する境界条件が適切に与えられて

いることが確認できた。

第5章では，曲面座標系を用いた RKPM によるシェルの定式化について示した．また，座屈後挙動を取り扱うための弧長増分制御について示した．数値解析例として低次の関数で表せない複雑な曲面形状の初期たわみを考慮した座屈解析を示し，高精度な解の一致を確認した．前章までに示した定式化では任意の曲面形状を取り扱うことは困難であったが，本章に示した定式化を用いることで任意曲面の問題を柔軟かつ高精度に取り扱えることが示された．またシェルの種々のベンチマーク問題についても高精度な解を得た．さらに，組合せ構造のための面内回転剛性を曲面座標系の定式化に合わせた形に書き換え，板の組合せ構造物の幾何学的非線形解析によって提案手法の妥当性を示した．

以上より，本研究の目的は達成されたと考えられる．本研究の成果と今後の課題を以下にまとめる．

1. 従来の FEA と同様な古典板理論に基づく定式化にメッシュフリー法の一手法である RKPM を適用し，線形解析，幾何学的非線形解析共に高精度に参照解と一致する手法を開発した．
2. 曲面座標系を用いた定式化へと拡張することで，任意形状の板構造物の計算を一般的に取り扱える手法とした．
3. 本手法の今後の展望として，損傷を持つ防撓パネルなどの様々な破壊力学的現象や計算対象全体を節点/粒子でモデル化した流体構造連成問題などへの適用が挙げられる．

参考文献

- [1] Liu W. K., Jun S. and Zhang Y. F.: Reproducing kernel particle methods, International Journal for Numerical Methods in Fluids, Vol. 20, pp. 1081-1106, 1995.
- [2] Liu W. K., Jun S., Li S., Adee J. and Belytschko T.: Reproducing kernel particle methods for structural dynamics, International Journal for Numerical Methods in Engineering, Vol. 38, pp. 1655-1679, 1995.
- [3] 鷺津 久一郎, 他 編 : 有限要素法ハンドブック I, 培風館, 1981.
- [4] 鷺津 久一郎, 他 編 : 有限要素法ハンドブック II, 培風館, 1983.
- [5] Crisfield M. A.: Non-linear Finite Element Analysis of Solids and Structures Volume 1, John Wiley & Sons, 1991.
- [6] 久田俊明, 野口裕久 : 非線形有限要素法の基礎と応用, 丸善, 1995.
- [7] Crisfield M. A.: Non-linear Finite Element Analysis of Solids and Structures Volume 2, John Wiley & Sons, 1997.
- [8] Hughes T. J. R.: The Finite Element Method, Dover, 2000.
- [9] Zienkiewics O. C. and Taylor R. L.: The Finite Element Method: for Solid and Structural Mechanics 6th Edition, Butterworth Heinemann, 2005.
- [10] Belytschko T., Lu Y.Y. and Gu L.: Element-free Galerkin methods, International Journal for Numerical Methods in Engineering, Vol. 37, pp. 229-256, 1994.
- [11] Durate C. A. and Oden J. T.: An h - p adaptive method using clouds, Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, Vol. 139, pp. 237-262, 1996.

- [12] Belytschko T., Kronggauz Y., Organ D. and Fleming M.: Meshless methods: an overview and recent developments, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, Vol. 139, pp. 3-47, 1996.
- [13] Li S. and Liu W. K.: Meshfree and particle methods and their applications, *Applied Mechanics Review*, Vol. 55, pp. 1-34, 2002.
- [14] Babuška I., Banerjee U. and Osborn J. E.: Survey of meshless and generalized finite element methods: a unified approach, *Acta Numerica*, Vol. 12, pp. 1-125, 2003.
- [15] Li S. and Liu W.K.: *Meshfree Particle Methods*, Springer, 2004.
- [16] 越塚誠一：粒子法，丸善，2005.
- [17] 鈴木克幸，長嶋利夫，萩原世也：メッシュフリー解析法，丸善，2006.
- [18] Nguyen V. P., Rabczuk T., Bordas S. and Duflet M.: Meshless methods: A review and computer implementation aspects, *Mathematics and Computers in Simulation*, Vol. 79, pp. 763-813, 2008.
- [19] Liu G. R.: *Mesh Free Methods: Moving beyond the Finite Element Method*, 2nd Edition, CRC Press, 2009.
- [20] 野口裕久：メッシュフリー/粒子法 第1回 メッシュフリー/粒子法の概要とガラキン法に基づくメッシュフリー法，*シミュレーション*，Vol. 23, pp. 292-300, 2004.
- [21] 長嶋利夫，野口裕久：メッシュフリー/粒子法 第2回 拡張/仮想有限要素法，*シミュレーション*，Vol. 24, pp. 37-44, 2005.
- [22] 萩原世也，野口裕久：メッシュフリー/粒子法 第3回 Smoothed Particle Hydrodynamics 法によるシミュレーション，*シミュレーション*，Vol. 24, pp. 159-165, 2005.

- [23] 越塚誠一:メッシュフリー/粒子法 第4回 メッシュフリー/粒子法 第4回 MPS 粒子法による非圧縮性流れ/構造解析, シミュレーション, Vol. 24, pp. 215-222, 2005.
- [24] Lucy L. B.: A numerical approach to the testing of the fission hypothesis, *Astronomical Journal*, Vol. 82, pp. 1013-1024, 1977.
- [25] Gingold R. A. and Monaghan J. J.: Smoothed particle hydrodynamics, Theory and applications to non-spherical stars, *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, Vol. 181, pp. 375-389, 1977.
- [26] Monaghan J. J.: An introduction of SPH, *Computer Physics Communications*, Vol. 48, pp. 89-96, 1982.
- [27] Koshizuka S. and Oka, Y.: Moving-Particle semi-implicit method for fragmentation of incompressible fluid, *Nuclear Science and Engineering*, Vol. 123, pp. 421-434, 1996.
- [28] Atluri S. N. and Zhu T.: A new meshless local Petrov-Galerkin (MLPG) approach in computational mechanics, *Computational Mechanics*, Vol. 22, pp. 117-127, 1998.
- [29] Melenk J. M. and Babuška I.: The partition of unity finite element method: basic theory and applications, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, Vol. 139, pp. 289-314, 1996.
- [30] Babuška I. and Melenk J. M.: The partition of unity method, *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Vol. 40, pp. 727-758, 1996.
- [31] Belytschko T. and Black T.: Elastic crack growth in finite elements with minimal remeshing, *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Vol. 45, pp. 601-620, 1999.
- [32] Moës N., Dolbow J. and Belytschko T.: A finite element method for crack growth without remeshing, *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Vol. 46, pp. 131-150, 1999.

- [33] Dolbow J., Moës N. and Belytschko T.: Discontinuous enrichment in finite elements with a partition of unity method, *Finite Elements in Analysis and Design*, Vol. 36, pp. 235-260, 2000.
- [34] Marrone S., Antuono M., Colagrossi A., Colicchio G., Le Touzé D. and Graziani G.: δ -SPH model for simulating violent impact flows, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, Vol. 200, pp. 1526-1542, 2011.
- [35] https://wiki.manchester.ac.uk/sphysics/index.php/SPHYSICS_Home_Page [accessed date: 2014.2.24]
- [36] <http://isph.sourceforge.net/> [accessed date:2014.2.24]
- [37] <http://www.prometech.co.jp/27231330211996835239.html> [accessed date: 2014.2.24]
- [38] <http://www.ftr.co.jp/n/products/ryujin/index.html> [accessed date: 2014.2.24]
- [39] Libersky L. D., Petschek A. G., Carney T. C., Hipp J. R. and Allahdadi F. A.: High strain Lagrangian hydrodynamics a three-dimensional SPH code for dynamic material response, *Journal of Computational Physics*, Vol. 109, pp. 67-75, 1993.
- [40] Randles P. W. and Libersky L. D.: Smoothed particle hydrodynamics: some recent improvements and applications, *Computer Methods Applied Mechanics and Engineering*, Vol. 139, pp. 375-408, 1996.
- [41] Randles P. W. and Libersky L. D.: Normalized SPH with stress points, *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Vol. 48, pp. 1445-1462, 2000.
- [42] Dilts G. A.: Moving-least-squares-particle hydrodynamics - I. consistency and stability, *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Vol. 44, pp. 1115-1155, 1999.

- [43] Bonet J. and Kulasegaram S.: Remarks on tension instability of Eulerian and Lagrangian corrected smooth particle hydrodynamics (CSPH) methods, *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Vol. 52, pp. 1203-1220, 2001.
- [44] 酒井讓, 山下彰彦, SPH 理論に基づく粒子法による構造解析の基礎的検討, *日本機械学会論文集 A 編*, Vol. 67, No. 659, pp. 1093-1102, 2001.
- [45] 邵陽, 伊藤広貴, 柴田和也, 越塚誠一, Hamiltonian MPS 粒子法による Reissner-Mindlin シェルの解析モデル, *計算工学会論文集*, Paper No. 20120013.
- [46] Nayroles B., Touzot G. and Villon P.: Generalizing the finite element method: diffuse approximation and diffuse elements, *Computational Mechanics*, Vol. 10, pp. 307-318, 1992.
- [47] Hollister S. J. and Kikuchi N.: Homogenization theory and digital imaging: A basis for studying the mechanics and design principles of bone tissue, *Biotechnology and Bioengineering*, Vol. 43, pp. 586-596, 1994.
- [48] Yagawa G. and Yamada T.: Free mesh method: A new meshless finite element method, *Computational Mechanics*, Vol. 18, pp. 383-386, 1996.
- [49] Yagawa G. and Furukawa T.: Recent developments of free mesh method, *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Vol. 47, pp. 1419-1443, 2000.
- [50] Sukumar N., Moës N., Moran B. and Belytschko T.: Extended finite element method for three-dimensional crack modelling, *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Vol. 48, pp. 1549-1570, 2000.
- [51] Elguedj T., Gravouil A. and Combescure A.: Appropriate extended functions for X-FEM simulation of plastic fracture mechanics, *Computer Methods Applied Mechanics and Engineering*, Vol. 195, pp. 501-515, 2006.
- [52] Elguedj T., Gravouil A. and Maigre H.: An explicit dynamics extended finite element method. Part 1: Mass lumping for arbitrary enrichment functions, *Com-*

- puter Methods Applied Mechanics and Engineering, Vol. 198, pp. 2297-2317, 2009.
- [53] Gravouil A., Elguedj T. and Maigre H.: An explicit dynamics extended finite element method. Part 2: Element-by-element stable-explicit/explicit dynamic scheme, Computer Methods Applied Mechanics and Engineering, Vol. 198, pp. 2318-2328, 2009.
- [54] Lee S. H., Song J. H., Yoon Y. C., Zi G. and Belytschko T.: Combined extended and superimposed finite element method for cracks, International Journal for Numerical Methods in Engineering, Vol. 59, pp. 1119-1136, 2004.
- [55] Li S. and Ghosh S.: Extended Voronoi cell finite element model for multiple cohesive crack propagation in brittle materials, International Journal for Numerical Methods in Engineering, Vol. 65, pp. 1028-1067, 2006.
- [56] Nakasumi S., Suzuki K. and Ohtsubo H.: Crack growth analysis using mesh superposition technique and X-FEM, International Journal for Numerical Methods in Engineering, Vol. 75, pp. 291-304, 2008.
- [57] Liu W. K. and Chen Y.: Wavelet and multiple scale reproducing kernel methods, International Journal for Numerical Methods in Fluids, Vol. 21, pp. 901-931, 1995.
- [58] Li S. and Liu W. K.: Synchronized reproducing kernel interpolant via multiple wavelet expansion, Computational Mechanics, Vol. 21, pp. 28-47, 1998.
- [59] Li S. and Liu W. K.: Moving least-square reproducing kernel method Part II: Fourier analysis, Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, Vol. 139, pp. 159-193, 1996.
- [60] Li S. and Liu W. K.: Reproducing kernel hierarchical partition of unity, Part I - Formulation and theory, International Journal for Numerical Methods in Engineering, Vol. 45, pp. 251-288, 1999.

- [61] Li S. and Liu W. K.: Reproducing kernel hierarchical partition of unity, Part II - Applications, *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Vol. 45, pp. 289-317, 1999.
- [62] Li S. and Liu W. K.: Numerical simulations of strain localization in inelastic solids using mesh-free methods, *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Vol. 48, pp. 1285-1309, 2000.
- [63] Timoshenko S. P. and Gere J. M.: *Theory of Elastic Stability Second Edition*, Dover, 2009.
- [64] Krysl P. and Belytschko T.: Analysis of thin plates by the element-free Galerkin method, *Computational Mechanics*, Vol. 17, pp. 26-35, 1995.
- [65] Krysl P. and Belytschko T.: Analysis of thin shells by the element-free Galerkin method, *International Journal of Solids and Structures*, Vol. 33, pp. 3057-3080, 1996.
- [66] Long S. Y. and Atluri S. N.: A meshless local Petrov-Galerkin method for solving the bending problem of a thin plate, *Computer Modeling in Engineering and Sciences*, Vol. 3, No. 1, pp. 53-63, 2002.
- [67] Wang D. and Chen J. S.: A Hermite reproducing kernel approximation for thin-plate analysis with sub-domain stabilized conforming integration, *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Vol. 74, pp. 368-390, 2008.
- [68] Wang D. and Lin Z.: Free vibration analysis of thin plates using Hermite reproducing kernel Galerkin meshfree method with sub-domain stabilized conforming integration, *Computational Mechanics*, Vol. 46, pp. 703-719, 2010.
- [69] Wang D. and Lin Z.: Dispersion and transient analyses of Hermite reproducing kernel Galerkin meshfree method with sub-domain stabilized conforming integration for thin beam and plate structures, *Computational Mechanics*, Vol. 48, pp. 47-63, 2011.

- [70] Li S., Hao W. and Liu W. K.: Numerical simulations of large deformation of thin shell structures using meshfree methods, *Computational Mechanics*, Vol. 25, pp. 102-116, 2000.
- [71] Qian D., Eason T., Li S. and Liu W. K.: Meshfree simulation of failure modes in thin cylinders subjected to combined loads of internal pressure and localized heat, *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Vol. 76, pp. 1159-1184, 2008.
- [72] Gato C.: Meshfree analysis of dynamic fracture in thin-walled structures, *Thin-Walled Structures*, Vol. 48, pp. 215-222, 2010.
- [73] Wang D. and Chen J. S.: Locking-free stabilized conforming nodal integration for meshfree Mindlin-Reissner plate formulation, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, Vol. 193, pp. 1065-1083, 2004.
- [74] Noguchi H., Kawashima T. and Miyamura T.: Element free analyses of shell and spatial structures, *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Vol. 47, pp. 1215-1240, 2000.
- [75] Cho J. Y., Song Y. M. and Choi Y. H.: Boundary locking induced by penalty enforcement of essential boundary condition in mesh-free methods, *Computer Methods Applied Mechanics and Engineering*, Vol. 197, pp. 1167-1183, 2008.
- [76] Belyschko T., Organ D. and Krongauz Y.: A coupled finite element - element free Galerkin method, *Computational Mechanics*, Vol. 17, pp. 186-195, 1995.
- [77] Krongauz Y. and Belyschko T.: Enforcement of essential boundary conditions in meshless approximations using finite elements, *Computer Methods Applied Mechanics and Engineering*, Vol. 131, pp. 133-145, 1996.
- [78] Hegen D.: Element-free Galerkin methods in combination with finite element approaches, *Computer Methods Applied Mechanics and Engineering*, Vol. 135, pp. 143-166, 1996.

- [79] Chen J. S., Pan C., Wu C. T. and Liu W. K.: Reproducing kernel particle methods for large deformation analysis of nonlinear structures, *Computer Methods Applied Mechanics and Engineering*, Vol. 139, pp. 195-227, 1996.
- [80] Chen J. S. and Wang H. P.: New boundary condition treatments in meshfree computation of contact problems, *Computer Methods Applied Mechanics and Engineering*, Vol. 187, pp. 441-468, 2000.
- [81] Nagashima T.: Node-by-node meshless approach and its applications to structural analyses, *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Vol. 46, pp. 341-385, 1999.
- [82] Nagashima T.: Development of a CAE system based on the node-by-node meshless method, *Computer Methods Applied Mechanics and Engineering*, Vol. 187, pp. 1-34, 2000.
- [83] Wu C. T., Koishi M., Skinner G. and Shimamoto H.: A meshfree procedure for the microscopic simulation and design of rubber compounds and its application to multi-scale simulation of tires, *Proceedings of WCCM8 and ECCOMAS 2008*, pp. 1-2, 2008.
- [84] Noguchi H. and Zhang Z.: Analysis of large deformation of rubber-filler structures under periodic boundary conditions using an enhanced meshfree method, *Proceeding of the Computational Mechanics Conference*, Vol. 20, pp. 661-662, 2007.
- [85] Chen J. S., Wu C. T., Yoon S. and You Y.: A stabilized conforming nodal integration for Galerkin meshfree methods, *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Vol. 50, pp. 435-466, 2001.
- [86] Chen J. S., Yoon S. and Wu C. T.: Non-linear version of stabilized conforming nodal integration for Galerkin mesh-free methods, *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Vol. 53, pp. 2587-2615, 2002.
- [87] MSC.Nastran 2010, User's Guide.

- [88] Peng L. X., Kitipornchai S. and Liew K. M.: Analysis of rectangular stiffened plates under uniform lateral load based on FSDT and element-free Galerkin method, *International Journal of Mechanical Sciences*, Vol. 47, pp. 251-276, 2005.
- [89] Peng L. X., Liew K. M. and Kitipornchai S.: Buckling and free vibration analyses of stiffened plates using FSDT mesh-free method, *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 289, pp. 421-449, 2006.
- [90] Liew K. M., Peng L. X. and Kitipornchai S.: Buckling analysis of corrugated plates using a mesh-free Galerkin method based on the first-order shear deformation theory, *Computational Mechanics*, Vol. 38, pp. 61-75, 2006.
- [91] Peng L. X., Kitipornchai S. and Liew K. M.: Free vibration analysis of folded plate structures by the FSDT mesh-free method, *Computational Mechanics*, Vol. 39, pp. 799-814, 2007.
- [92] Liew K. M., Peng L. X. and Kitipornchai S.: Nonlinear analysis of corrugated plates using a FSDT and a meshfree method, *Computer Method in Applied Mechanics and Engineering*, Vol. 196, pp. 2358-2376, 2007.
- [93] Liew K. M., Peng L. X. and Kitipornchai S.: Geometric non-linear analysis of folded plate structures by the spline strip kernel particle method, *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Vol. 71, pp. 1102-1133, 2007.
- [94] Simo J. C.: On a stress resultant geometrically exact shell model. Part VII: Shell intersections with 5/6 DOF finite element formulations, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, Vol. 108, pp. 319-339, 1993.
- [95] Kanok-Nukulchai W.: A simple and efficient finite element for general shell analysis, *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Vol. 14, pp. 179-200, 1979.
- [96] MSC. Marc 2010 User's Guide.

- [97] Bathe K. J., Lee N. S. and Bucalem M. L.: On the use of hierarchical models in engineering analysis, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, Vol. 82, pp. 5-26, 1990.
- [98] Fujikubo M., Yao T., Khedmati M. R., Harada M. and Yanagihara D.: Estimation of ultimate strength of continuous stiffened panel under combined transverse thrust and lateral pressure Part 1: Continuous Plate, *Marine Structures*, Vol. 18, pp. 383-410, 2005.
- [99] Chen J. S. and Wang D.: A constrained reproducing kernel particle formulation for shear deformable shell in Cartesian coordinates, *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Vol. 68, pp. 151-172, 2006.
- [100] Argyris J.: An excursion into large rotations, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, vol. 32, pp. 85-155, 1982.
- [101] 野口裕久, 久田俊明: 座屈後挙動における感度解析手法の開発, *日本機械学会論文集 A 編*, Vol. 58, No. 556, pp. 2415-2422, 1992.
- [102] Riks E.: The application of Newton's method to the problems of elastic stability, *Journal of Applied Mechanics*, *Transactions of the ASME*, Vol. 39, pp. 1060-1066, 1972.
- [103] Riks E.: The incremental approach to the solution of snapping and buckling problems, *International Journal of Solid and Structures*, Vol. 15, pp. 529-551, 1979.
- [104] Ramm E.: Strategies for tracing the nonlinear response near limit point, *Nonlinear Finite Element Analysis in Structural Mechanics* (Ed. Wunderlich et al.), pp. 63-89, 1981.
- [105] Crisfield M. A.: A fast incremental/iterative solution procedure that handles snap through, *Computers & Structures*, Vol. 13, pp. 55-62, 1981.
- [106] Simo J. C., Wriggers P., Schweizerhof K. H. and Taylor R. L.: Finite deformation post-buckling analysis involving inelasticity and contact constraints,

International Journal of Numerical Methods in Engineering, Vol. 23, pp. 779-800, 1986.

- [107] Ueda Y. and Yao, T.: The influences of complex initial deflection modes on the behavior and ultimate strength rectangular plates in compression, Journal of Constructional Steel Research, Vol. 5, pp. 265-302, 1985.
- [108] Chróścielewski J., Makowski J. and Stumpf H.: Finite element analysis of smooth, folded and multi-shell structures, Computational Methods in Applied Mechanics and Engineering, Vol. 141, pp. 1-46, 1997.
- [109] Sansour C. and Kollmann F. G.: Families of 4-node and 9-node finite elements for a finite deformation shell theory. An assesment of hybrid stress, hybrid strain and enhanced strain elements, Computational Mechanics Vol. 24 pp. 435-447, 2000.
- [110] Sze K. Y., Liu X. H. and Lo S. H.: Popular benchmark problems for geometric nonlinear analysis of shells, Finite Elements in Analysis and Design Vol. 40, pp. 1551-1569, 2004.
- [111] Chróścielewski J. and Witkowski W.: Four-node semi-EAS element in six-field nonlinear theory of shells, International Journal for Numerical Methods in Engineering, Vol. 68, pp. 1137-1179, 2006.

本論文に係る投稿論文

- [1] 貞本将太, 田中智行, 岡澤重信: 粒子法を用いた薄板構造物の幾何学的非線形解析, 土木学会論文集 A2 (応用力学), Vol. 67, No.2 (応用力学論文集 Vol. 14), I.171- I.178, (2011.9).
- [2] Satoyuki Tanaka, Shota Sadamoto and Shigenobu Okazawa: Large deflection analysis for thin-plate using the Hermite Reproducing Kernel (HRK) approximation, Theoretical and Applied Mechanics Japan, Vol. 60, pp. 205-214, (2012.1).

- [3] Satoyuki Tanaka, Shota Sadamoto and Shigenobu Okazawa: Nonlinear thin-plate bending analyses using the Hermite reproducing kernel approximation, *International Journal of Computational Methods*, Vol. 9-1, (DOI:10.1142/S0219876212400129) , (2012.3).
- [4] 貞本将太, 田中智行, 岡澤重信: Reproducing Kernel 近似を用いた非線形板曲げ解析における基本境界条件の処理に関する考察, *土木学会論文集 A2 (応用力学)* , Vol. 68, No.2 (応用力学論文集 Vol. 15), I.249-I.260, (2012.9).
- [5] 貞本将太, 田中智行, 岡澤重信: メッシュフリー法を用いた板曲げ解析における数値積分法に関する一考察, *日本計算工学会論文集*, Paper No. 20130008, (2013.4).
- [6] 貞本将太, 田中智行, 岡澤重信: メッシュフリー法を用いた板構造物のモデル化に関する研究 (第1報: モデル化と線形解析の定式化), *日本機械学会論文集 A 編*, Vol. 79, No. 802, pp. 891-904, (2013.6).
- [7] 貞本将太, 田中智行, 岡澤重信: メッシュフリー解析での MPC 法を用いた基本境界条件の処理に関する研究, *土木学会論文集 A2 (応用力学)* , Vol. 69, No.2 (応用力学論文集 Vol. 16), I.145-I.154, (2013.9).
- [8] Shota Sadamoto, Satoyuki Tanaka and Shigenobu Okazawa: Elastic large deflection analysis of plates subjected uni-axial thrust using meshfree Mindlin-Reissner formulation, *Computational Mechanics*, Vol. 52, No. 6, pp. 1313-1330, (2013,12)