

Theoretical study for morphodynamics of sand dunes and snow avalanches regulated by aeolian process in surface layer

(地表層内の風成作用によって制御される砂丘と雪崩の動力学に関する理論的研究)

新屋 啓文

固体と流体の相互作用によって生じる特徴的な空間パターンやダイナミクスは、地形の構造形成から微生物の集団運動、生体高分子の運動に至るまで、多様な対象で確認されており、幅広い時空間スケールを有する。これら現象の複雑な挙動を理解する上で、固体的要素間の近接的相互作用や流体を介した要素間の非近接的相互作用が重要と考えられる。このような対象の内、巨視的なスケールを呈する自然現象の典型例として、地形の動力学（砂丘や雪崩）が挙げられる。本論文では、数理モデルを介した数値的・解析的手法を通して、砂丘と雪崩の動力学に潜む機構の解明を試みた。論文の前半では、一方向流下で形成される砂丘の構造安定性や形状の転移機構について、数理モデルを通して解明した。論文の後半では、雪崩を模した斜面流の運動形態の再現や詳細な内部構造について、粒子モデルを通して考察した。

1 序論

地上で最大の粉粒体地形である砂丘は、風向きなどの環境条件に応じて様々な典型的形状を示す。一般的に、多様な砂丘形状を決定付ける主要な要因として、風向きの定常性と砂漠上の砂量の2つが知られている。例えば、1年を通して風向きが変化しない（一方向流）地域では、三日月型のバルハンと風向きに直交する方向へ尾根が伸びる横列砂丘が砂量の違いによって現れる（図1(a),(b)）。これら砂丘の形成と移動に関して、従来は野外観測が主流であったが、近年は水槽内で縮小砂丘の形成に成功しており、その特徴的性質が捉えられつつある [1]。一方で、これら砂丘に対する理論研究として、様々な計算機模型が提案されている。そして、いずれの模型も砂丘形態の再現に成功しており、多方向流下の砂丘形態さえも再現されつつある。

しかしながら、計算機で砂丘形状を再現したとしても、その機構の本質的理解には、まだ一定の距離がある。そこで、本研究では、一方向流下で形成される砂丘に対し、既存の観測・実験・理論から得られた知見に基づいて、現象の自由度を大幅に縮約した数理モデルを提案した。そして、本モデルを解析的に取り扱うことで、砂丘形態の構造形成や安定性の機構を解明することを試みた。

一方、大規模な斜面崩壊現象の一種である雪崩は、固体と流体が混合した状態で斜面を下ることで、典型的構造を形成する。

特に、典型的構造の一つである頭部-尾部構造は、火砕流など異なる現象の煙部においても確認されている（図1(c)）。一般的に、これら煙部内では、乱流によって発生した渦が固体粒子を浮遊状態へ遷移させていると考えられる。そのため、形成要因として、斜面流の駆動力である重力と流体から受ける抵抗力（空気抵抗）の比率が重要であると言われている。これら斜面流の形成と運動は、粒状体を用いた実験や粉体の連続体近似、流体模型などにより再現されつつある [2]。

しかしながら、観測・実験による雪崩内部の直接測定は難しく、既存模型の多くは多数の経験的表式やフィッティング・パラメータを採用しているため、系統的な研究が十分に進んでいない。そこで、本研究では、既存の観測や実験結果から雪崩のダイナミクスに本質的に働いていると考えられる物理過程を抽出し、それらを組み込んだ粒子モデルの構築を行った。そして、本モデルを数値的に取り扱うことで、雪崩が示す典型的な運動機構と詳細な内部構造を捉えることを試みた。

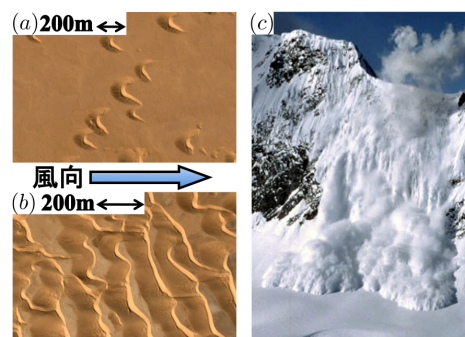


図1 (a) バルハン、(b) 横列砂丘、(c) 雪煙を伴う雪崩

2 砂丘に関する数理モデル

一方向の風の下で形成される横列砂丘とバルハン、砂丘の形状に沿って流動する砂により、変形・移動すると考えられる。我々は、以下の2つの基本仮定のもとに砂丘骨格模型と呼ばれる数理モデルを構築した(図2)。i) 砂丘の概形は、風向き方向に移動する鉛直断面を、風向きと直角する方向へ一定間隔で並べる事により作られる。ii) 砂丘の変形と移動は、各断面の運動によって表現される。また、観測事実として、これらの砂丘の風上と風下の傾斜角は、それぞれでほぼ一定である事が知られているため、用いる断面は大きさによらず全て相似な三角形と仮定する。この相似性から、本モデルの変数は各断面 i の頂点における進行方向(風向き方向)の位置 x_i と高さ h_i の $2N$ 変数のみとなる (N は断面の総数)。

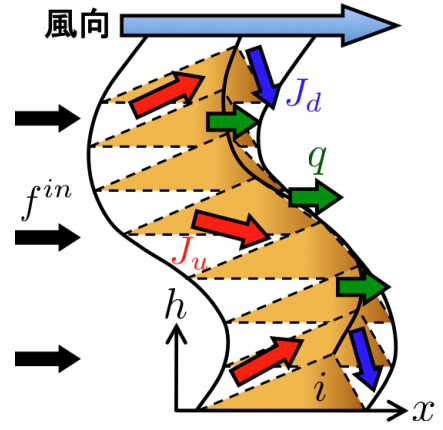


図2 砂丘骨格模型の模式図: 矢印は砂の流れを表す。

本モデルは、砂丘表面の砂の流れを各断面内と隣接する断面間の2種類に分けている。まず、断面内の砂の流れは、形状の相似性から尾根を越える砂 q と上流からの砂の供給 f^{in} とし、尾根を越える砂は確率 T_E で風下斜面へ堆積し、確率 $1 - T_E$ で下流地面へ流出する。ここで、堆積率 T_E は高さに単調増加する関数として知られている。次に、断面間の砂の流れは、風上と風下の斜面間でそれぞれ発生し、その流量 J_u, J_d は斜面間の勾配による拡散で記述され、拡散係数として D_u, D_d が与えられる。以上の砂の流れを考慮することで、各断面 i の位置 x_i と高さ h_i に関する $2N$ 変数の常微分方程式系(砂丘骨格模型)が、以下のように導出された。

$$\frac{dx_i}{dt} = \frac{1}{h_i} \left[q(BT_E(h_i) + C) + \sum_{j=i\pm 1} (BJ_d(j \rightarrow i) + CJ_u(i \rightarrow j)) - Cf_i^{in} \right] \quad (1)$$

$$\frac{dh_i}{dt} = \frac{A}{h_i} \left[q(T_E(h_i) - 1) + \sum_{j=i\pm 1} (J_d(j \rightarrow i) - J_u(i \rightarrow j)) + f_i^{in} \right] \quad (2)$$

($i = 1, \dots, N$)

ここで、 A, B, C は断面の形状から定まる定数である。

3 一方向流下における砂丘形態

上述の砂丘骨格模型を用い、砂丘表面の砂の流れと砂丘を構成する砂量が砂丘形態へ及ぼす影響について調べた。数値計算は、風向きに対し垂直方向に周期境界条件、風向き方向に下流地面へ流出した砂を空間平均し、上流から再供給させる条件付き周期境界条件を用いて行われた。そして、初期の砂丘の平均高さ(砂量の指標) H_0 と風速に影響を受けるパラメータ(尾根を越える砂 q と風上の拡散係数 D_u) の変化に応じて、直線状と波状の横列砂丘、バルハンの3形態が得られた(図3)。また、砂量の増加は横列砂丘の安定性を強めるが、一方で、砂量の減少は横列砂丘を不安定化させ、バルハンへの変形を促すことが分かった[3]。さらに、数値計算で再現された砂丘形状の安定性とその転移機構は、2断面系の分岐解析によって明らかにされた[4]。

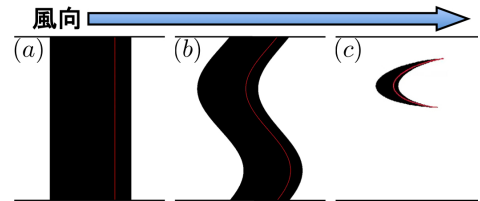


図3 一方向風の砂丘形態: (a) 直線状、(b) 波状、(c) バルハン。(砂丘を構成する砂量: (a)>(b)>(c))

次に、砂丘骨格模型で形成された横列砂丘の定量的性質について調べた。砂の再供給がない場合、下流地面への砂の流出によって、横列砂丘は時間とともに縮小し、波状の横列砂丘へ変形した。さらに時間が経過すると、横列砂丘の一部がちぎれることで、最終的に複数のバルハンが出現した (図 4)。一方で、砂の再供給がある場合、横列砂丘の初期の構造揺らぎは、一定時間 (横列砂丘の直線の形状が維持される) までベキ減衰し、その後、パラメータに応じて指数的に成長または減衰する事が分かった [5]。このような横列砂丘の変形過程は、既存の水槽実験の結果とも定性的に一致し、さらに、構造揺らぎの指数的な時間変化は、既存の理論模型においても確認されている。

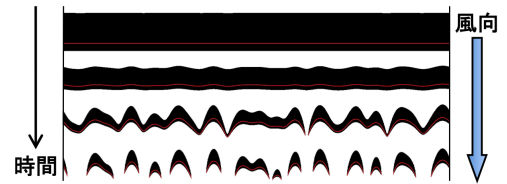


図 4 横列砂丘の不安定化

最後に、砂丘骨格模型で形成されたバルハンの定量的性質について調べた。単体のバルハンに対し、上流から砂を一定の割合で供給すると、バルハンは供給量の増加に伴い、消滅・定常・増加の異なる 3 状態を示した。そして、定常的なバルハンは一定の形状比を示し、その移動速度は高さに反比例した。これらの結果は既存の観測・実験事実と定量的に対応した。

最後に、砂丘骨格模型で形成されたバルハンの定量的性質について調べた。単体のバルハンに対し、上流から砂を一定の割合で供給すると、バルハンは供給量の増加に伴い、消滅・定常・増加の異なる 3 状態を示した。そして、定常的なバルハンは一定の形状比を示し、その移動速度は高さに反比例した。これらの結果は既存の観測・実験事実と定量的に対応した。

4 雪崩に関する数理モデル

雪煙を伴う雪崩の縮小実験として、ポリスチレン粒子を用いた斜面流が報告されている [2]。実験で用いられる斜面は、表面の凹凸など不均一性を最小限に抑える加工が施されているため、底面摩擦は極力軽減されていると考えられる。以上の点を鑑みて、我々は、重力と空気抵抗が主に働く粉体の斜面流について数理モデルを提案した。

本モデルは、以下の 3 つの基本仮定から成り立つ。まず、斜面流は、2次元平面上を運動する球状粒子 (3次元) から構成される。次に、粒子の回転は無視され、粒子の並進運動のみが考慮される。最後に、粒子に働く力として、次の 3 つを考慮した。(i) 雪崩の駆動力である重力 \mathbf{F}_g 、(ii) 粒子間の接触により生じる斥力 \mathbf{F}_r (近接相互作用)、(iii) 流体から受ける抵抗力 (非近接相互作用)。ここで、(iii) に関して、粒子の運動が流体を介して即座に他の粒子へ伝搬すると仮定することで、流体から受ける抵抗力は Rotne-Prager テンソルを用いて粒子間の長距離相互作用として表現される。さらに、粒子の慣性を無視する事により、粒子 i の速度 \mathbf{v}_i は、以下のように導出された。

$$\mathbf{v}_i = \frac{\mathbf{F}_i}{6\pi\mu a} + \sum_{j \neq i}^N \mathbf{u}_i(j), \quad (\mathbf{F}_i = \mathbf{F}_{gi} + \mathbf{F}_{ri}) \quad (3)$$

$$\mathbf{u}_i(j) = \frac{1}{8\pi\mu r} \left[\mathbf{I} + \frac{\mathbf{r}\mathbf{r}}{r^2} + \frac{2}{3} \left(\frac{a}{r} \right)^2 \left(\mathbf{I} - 3 \frac{\mathbf{r}\mathbf{r}}{r^2} \right) \right] \cdot \mathbf{F}_j, \quad (\mathbf{r} = \mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j) \quad (4)$$

ここで、 μ は流体の粘性係数、 a は粒子の半径、 \mathbf{r}_i は粒子 i の座標、 r は粒子 i, j の中心間距離、 \mathbf{I} は単位テンソル、 $\mathbf{u}_i(j)$ は粒子 j が粒子 i の位置で作り出す誘起速度である。

5 低密度粒子から成る粉体なだれのパターン形成

上述の粒子モデルを用い、斜面流前端の不安定化とそれに伴うパターン形成について調べた。数値計算の設定として、 $N = 2000$ 個の粒子が一定の傾斜角 (45°) を持つ平坦な斜面上に配置される。そして、粒子の運動は、斜面の表面に対して (i) 水平な平面と (ii) 垂直な鉛直断面の異なる 2 種類の 2次元平面内に制限される。ただし、(i) と (ii) の両方で粒子の初期配置のサイズは、粒子充填率が約 0.5 となるように与えられる。(i) において、粒子の初期配置が円形型の場合、粒径に依存せず単体の頭部が斜面流の前端に形成され、頭部の内部で粒子流の渦対が発生することを見出した。また、粒子の初期配置が長方形型の場合、斜面流は前端への粒子凝集によって不安定化し、複数の頭部を伴う波状のパターンが形成された (図

5(a))。さらに、形成された頭部の大きさは粒径と比例関係を示し、これらの結果はポリスチレン粒子を用いた斜面流実験と定性的に一致した [6]。(ii)において、粒子の初期配置は三角形型で与えら、粒子の拡がりは空気抵抗によって抑えられた。そのため、粒子が斜面流の前端へ凝集することで、頭部-尾部構造が形成された (図 5(b))。加えて、頭部形状は粒径に依存せず時間の経過とともに、一定の前端角 (60°) へ収束することが分かった。頭部における 60° の前端角は、雪崩の運動論的な理論解析から推測されており、本モデルの結果とよく対応する。

次に、粒子の初期配置の形状 (大きさやアスペクト比) が頭部形成へ及ぼす影響と頭部のサイズ分布について調べた。数値計算は、一定の傾斜角 (45°) を持つ平坦な斜面上で行われる。初期の粒子は、横方向と傾斜方向の長さ (W, L) で与えられる長方形内へ、粒子充填率が 0.5 を越えるまでランダムに配置される (ただし、粒子間の接触を回避)。そして、長方形の各辺の長さ W, L を独立に変化させた結果、形成された頭部の平均幅は、初期の横方向の長さ W に依存せず、初期の傾斜方向の長さ L に対し線形に増加することが確認された。さらに、頭部に関するサイズ分布はガウス分布で上手くフィッティングされた事から、頭部は傾斜方向の長さ L に依存した特徴的長さを有することが明らかにされた。

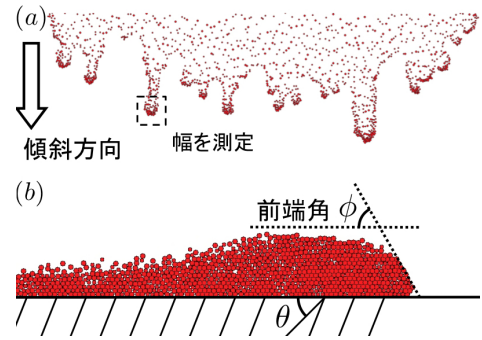


図 5 (a) 斜面流前端の不安定化、(b) 頭部-尾部構造。 θ は傾斜角である。

6 結論

本論文の前半では、一方向流下における砂丘形態の形成・移動過程を力学系として捉える砂丘骨格模型を提案した。砂丘骨格模型の数値計算から、砂丘を構成する砂量などの環境条件に応じて、直線状と波状の横列砂丘、バルハンの異なる 3 形態が再現された。そして、各形状の安定性と形状の転移機構は、分岐解析を通して解明された。さらに、単体の横列砂丘の変形過程は水槽実験の結果と一致し、一方で、単体のバルハンの形状比と移動速度は観測・実験事実を満たすことが確認された。従って、砂丘骨格模型は、現象の本質を捉えつつ自由度の縮約に成功し、かつ、砂丘形態に対し解析手法を適用可能な理論模型といえる。

本論文の後半では、煙部を伴う雪崩を模した低密度粒子から成る粉体なだれの運動形態と内部構造を捉える粒子モデルを構築した。その数値計算は、斜面流前端の不安定化とそれに伴うパターン形成を再現し、斜面流内部の粒子流に関する渦構造を捉えることに成功した。数値計算で得られた頭部形状の大きさと粒径との比例関係は、既存のポリスチレン粒子を用いた斜面流実験とおおまかに一致し、さらに、頭部の前端角が 60° へ収束する結果は、運動論の理論とも一致した。従って、構築した粒子モデルは、雪崩のダイナミクスに本質的に働く物理過程の抽出に成功したものと考えられる。

参考文献

- [1] P. Hersen *et al.*, Phys. Rev. Lett. **89** (2002) 264301.
- [2] Y. Nohguchi *et al.*, Phys. D **238** (2009) 20-26.
- [3] H. Niiya *et al.*, J. Phys. Soc. Jpn. **79** (2010) 063002.
- [4] H. Niiya *et al.*, Phys. Rev. Lett. **108** (2012) 158001.
- [5] H. Niiya *et al.*, Aeolian Res. **9** (2013) 63-68.
- [6] H. Niiya *et al.*, Proceeding of the 23rd International Congress of Theoretical and Applied Mechanics (2012) FS08-13.