

論文審査の要旨

博士の専攻分野の名称	博 士 (理 学)	氏名	橋永 貴弘
学位授与の要件	学位規則第4条第①・②項該当		
論文題目			
<p>On the minimality of the corresponding submanifolds to four-dimensional solvsolitons</p> <p>(4次元可解ソリトンに対応する部分多様体の極小性について)</p>			
論文審査担当者			
	主 査	教 授	田丸 博士
	審査委員	教 授	阿賀岡 芳夫
	審査委員	教 授	作間 誠
	審査委員	准教授	澁谷 一博
	審査委員	准教授	山田 拓身 (島根大学大学院総合理工学研究所)
〔論文審査の要旨〕			
<p>可解リー群の上の左不変計量が可解ソリトン (solvsoliton) であるとは、そのリッチ作用素が微分を法として恒等写像になることをいう。リッチ作用素が恒等写像となる計量はアインシュタイン計量と呼ばれ、広く研究されているが、可解ソリトンはその一般化に相当する。また、可解ソリトン計量は、自動的にリッチソリトンとなることが知られている。このことと、さらに非自明なリッチソリトン計量を数多く供給することから、可解ソリトンは近年活発に研究されている。</p> <p>与えられた可解リー群が可解ソリトン計量を許容するかどうかを判定せよ、という問題は、当該分野に於ける中心的な問題であると考えられている。この問題に対して、低次元の場合の分類結果と、高次元の場合の散発的な具体例は知られているが、一般的な状況では多くのことが分かっていない。さらに、低次元の場合の分類に於いても、計算した結果そうだった、という類の結果であり、幾何学的あるいは概念的な証明は全く知られていない。</p> <p>筆者は上記の問題に対して、部分多様体を用いた全く新しい研究手法を提唱している。一般に、与えられたリー群に対して、その上の左不変計量全体の成す集合は非コンパクトな有限次元のリーマン対称空間となる。一方で、スカラー写像およびリー群の自己同型写像の成す群は、この対称空間に自然に作用し、さらに計量の幾何学的な性質を保つ。従って、リー群の上に可解ソリトンなどの良い左不変計量が存在するかどうかを調べる問題は、上記の群作用が (何らかの意味で) 良い軌道をもつかどうかを調べる問題であると考えられる。この軌道を、与えられた左不変計量に対応する部分多様体と呼ぶ。この概念を用いて、筆者は以下の問題を提起している：</p>			

問題：可解リー群の上の可解ソリトン計量を，対応する部分多様体の幾何的な性質で特徴付けよ。

筆者らによる先行研究によって，可解リー群が三次元の場合には，この問題に極めて肯定的な解答が与えられている。すなわち，三次元可解リー群の上の左不変計量が可解ソリトンであるための必要十分条件は，対応する部分多様体が極小部分多様体となることである。

本論文では，三次元の場合の研究を進展させ，四次元可解ソリトンに対応する軌道の極小性を調べている。その結果は，以下の通り：

- (1) 四次元冪零リー群に対しては，三次元可解と同様に，可解ソリトンは対応する部分多様体の極小性で特徴付けることができる。
- (2) 一般の四次元可解リー群に対しては，同様の特徴付けは成立しない。より詳しく言うと，可解ソリトンだが対応する部分多様体が極小でないもの，対応する部分多様体は極小だが可解ソリトンでないもの，という双方の反例が存在する。

可解ソリトン計量を，対応する部分多様体の幾何的な性質で特徴付けよという問題は，筆者らによる独自のものである。このアイデアは，可解ソリトンに限らず，左不変アインシュタイン計量など他の幾何的な性質の研究にも応用できる可能性が高い。また，低次元可解ソリトンの分類結果に，一つの幾何学的な解釈を与えるものであると考えることもできる。さらに，本論文の結果は，上記の研究の枠組みに於いて着実にその研究を進展させるものであり，また今後の研究の一つの指針となるものだと考えられる。

以上，審査の結果，本論文の著者は博士（理学）の学位を授与される十分な資格があるものと認める。

公表論文

Takahiro Hashinaga,

On the minimality of the corresponding submanifolds to four-dimensional solvsolitons.

Hiroshima Mathematical Journal, 掲載決定.

参考論文

(1) Takahiro Hashinaga,

On the minimality of the corresponding submanifolds to solvsolitons.

Proceedings of the Seventeenth International Workshop on Differential Geometry and Related Fields, 17 (2013), 125--133.

(2) Hashinaga, Akira Kubo, Hiroshi Tamaru,

Some topics of homogeneous submanifolds in complex hyperbolic spaces.

Differential Geometry of Submanifolds and its Related Topics, World Scientific 2013, 230--244.