論文要旨

On the minimality of the corresponding submanifolds to four-dimensional solvsolitons

(4 次元可解ソリトンに対応する部分多様体の極小性について)

橋永　貴弘

リー群上の左不変計量の成す空間に “スカラー倍を除いて等長的” という同値関係を考える．このとき各同値類は, ある非コンパクト対称空間内の等質部分多様体となることが知られている．このことから, 各リー群上の左不変計量に対してそれを含む同値類を対応させることで左不変計量と等質部分多様体の間の対応が得られる．以下, 各左不変計量に対して, それを含む同値類を (左不変計量に) 対応する部分多様体と呼ぶ. 計量のリーマン幾何学的な性質はスカラー倍および等長変換で保たれることから, 対応する部分多様体の性質と見なすことができる.

定義. 単連結可解リー群 G 上の左不変計量 g が **solvsoliton (可解ソリトン)** であるとは, 対応するリー代数 $\mathfrak{g}$ 上の内積 $\langle , \rangle$ の Ricci 作用素 $\mathrm{Ric}_{\langle , \rangle}$ が次を満たすときをいう: ある $c \in \mathbb{R}$ と, $D \in \mathrm{Der}(\mathfrak{g})$ が存在して

$$\mathrm{Ric}_{\langle , \rangle} = cI + D. \tag{1}$$

ただし I は恒等写像, $\mathrm{Der}(\mathfrak{g})$ はリー代数 $\mathfrak{g}$ 上の微分代数である．特に単連結冪零リー群上の左不変計量 g に対応するリー代数上の内積 $\langle , \rangle$ が (1) を満たすときに, g を **nilsoliton** という.

3 次元単連結可解リー群上の solvsoliton と対応する部分多様体の間の関係性については先行研究により次のことが知られている: 3 次元単連結可解リー群上の左不変計量が solvsoliton であることと, 対応する部分多様体が自然な計量のもとで極小であることは同値となる.

このことを踏まえ, 本論文では 4 次元単連結可解リー群上の solvsoliton に対応する部分多様体の極小性について調べた．結果として 4 次元単連結冪零リー群上の左不変計量が nilsoliton であることと, 対応する部分多様体が極小となることが同値であることがわかった．他方, 4 次元単連結可解リー群上の solvsoliton は対応する部分多様体の極小性で特徴付けることができないことがわかった．具体的に述べると 4 次元単連結可解リー群で

以下を満たすものが存在する:

- solvsoliton だが対応する部分多様体が極小でない,
- solvsoliton ではないが対応する部分多様体が極小である.

しかしながら, 4 次元単連結可解リー群の場合, 対応する可解リー代数の極大冪零イデアルが可換なものに関しては, その上の左不変計量が solvsoliton であることと, 対応する部分多様体が極小であることが同値であることがわかった. この結果については参考論文 1 でまとめている.