広島大学　学部・附属学校共同研究機構研究紀要
〈第41号　2013. 3〉

論理的な図形認識を促す算数・数学科カリキュラム開発（４）

― ４年間の追跡による生徒の論理的な図形認識の変容についての考察 ―

妹尾　進一　　村上　良太　　鈴木　昌二　　植田　敦三
松浦　武人
（研究協力者）　木村　恵子　　川﨑　正盛

１．はじめに

わが国では，小学校算数科における図形の学習は図形の性質を直観的・操作的な活動をとおして発見することが主題となるのに対して，中学校数学科における図形の学習は論証をとおして性質間の関係としての命題の真偽性，すなわち正当化することが主題となる。これらの両者の学習指導上の文脈の違いが，中学校数学科における論証理解の困難性に現れている（岡崎・岩崎，2003）[1)]。

中学校数学科における論証理解の困難性に関する調査研究，学習指導の改善に関する実証的・実践的研究は従来からも精力的になされているが，今日においても生徒の学習状況の改善を必要としているのが現状である（国宗，1987，小関ほか，1987）[2)]。

小学校算数科の図形認識から中学校数学科における図形認識への移行過程に関する理論的，実践的研究を行った岡崎・岩崎（2003）は，算数科の中で算数の押し上げを促す「移行前期」と数学科の中で積極的に数学への移行を促す「移行後期」の２期に分け，中学校数学科における移行後期教材として，作図がもつ性格，すなわち命題を構成する手段，経験的認識から論理的認識への媒介者としての性格に着目している。高本・岡崎（2008）[3)]も同様である。

本研究の最終的な目的は，岡崎・岩崎（2003）が提起する「算数から数学への移行」を促す学習指導の枠組みに基づき，義務教育９か年の図形領域のカリキュラムを開発することである。

２．４年間の研究の経緯

本研究グループは，小中の接続という視点から小中一貫の図形領域のカリキュラム案を構想した（川﨑ほか，2011）[4)]。これをもとに，筆者らは実験授業を行っていった。村上ほか（2010）[5)] は，図形の性質を意識させるとともに，その性質間の関係性への意識化を促す学習指導を行い，その有効性を確認している。また，川﨑ほか（2011）は，図形の性質の意識化を促す学習指導を行い，その有効性を確認している。さらに，筆者（妹尾，2011）[6)]は，作図の有効性を再認識することができ，図形の性質間の関係の意識化・対象化を促すことに一定の成果をあげている。

このように実験授業を通じて，その成果と課題を明らかにする中で，段階による違いをより明確にして図形指導を行うという観点から表１のような図形指導の構想をまとめた。「必要な視点」にある移行前期の「図形の性質間の関係性の意識化」とは，活動のレベルで，図形の性質を顕在化し，それらの性質間には順序関係がありそうだということをその活動の中で捉えることである。また，移行後期の「図形の性質間の関係の意識化・対象化」とは，活動のレベルで，図形の性質を顕在化させ，現れた図形の性質に順序関係を見いだし，その関係を考察の対象として捉えることである。さらに，論証期の「図形の性質間の関係の対象化」とは，言語や記号のレベルで，図形の性質間に順序関係が埋め込まれた命題そのものを考察の対象として捉えることである。

本稿では，論理的な図形認識を促すために開発された小中一貫の図形領域カリキュラムのもと，移行前期における小学校第５学年から論証期における中学校第２学年までの４年間の図形指導を受けてきた生徒達を追跡することによって，生徒の図形認識の変容を捉え，小中一貫の図形領域カリキュラムの有効性を明らかにすることが主目的である。

Shinichi Senoo, Ryouta Murakami, Syouzi Suzuki, Atsumi Ueda, Taketo Matsuura, Keiko Kimura, Masamori Kawasaki; Improvement of cooperative creativity through learning in elective subject (Arithmetic ／ Mathematics) (4) －Transformation of the logical recognition of geometric figure through a four-year prospective practice－

表１　小中一貫の図形指導の構想

段階	学年	必要な視点	期待される子どもの姿
移行前期への接続期	幼稚園～小２	○形遊びや造形 ○性質	・身のまわりにあるものを形として捉える。 ・図形の性質を理解する。
	小３，４	○図形の性質の意識化 （図形からその図形の性質を列挙することができるとともに，特殊な図形の性質からその性質を持っている図形の他の性質を考えたりすることができる）	・図形の性質を具体的な活動のもとで発見する。 ・図形の性質を並列的に捉える。
移行前期	小５，６	○図形の性質間の関係性の意識化 （図形の性質を顕在化する中で，現れた性質と性質の間には関係がありそうだということに気づく）	・作図において，図形の性質の一部を定めることによってできた図形が他の性質を持っていることに気づくことができ，自分のことばで説明しようとする。
移行後期	中１	○図形の性質間の関係の意識化 （図形の性質と性質の間の関係を捉える） ○図形の性質間の関係の対象化 （図形の性質と性質の間の関係を考察の対象とする）	・作図において，図形の性質の一部を定めることによってできた図形の他の性質が成り立つことを，理由をつけて説明することができる。
論証期	中２，３	○図形の性質間の関係の対象化 （仮定，結論が明確になった命題を考察の対象とする）	・条件の一部を変更させて結論を予測し，それが正しいかどうかを証明したり，結論が成り立つ他の条件を考えて証明したりして，新たな性質を見出すことができる。

３．授業設計の基本方針

移行後期から論証期においては，図形の性質間の関係を命題の視点で捉え，論証理解を深めるために以下の３点に焦点をあてて授業を設計していくこととする。

ア）証明の必要性を認識させ，意欲を高める

移行後期から論証期へのスムーズな接続を図るため，「作図してそれが正しいことを証明する流れ」による学習を引き続き行う。このことによって，生徒自身が作図の結果から命題を帰納的につくり出すことができ，命題の正誤に関する判断を生徒に委ねることで証明の必要性を認識させていくことができる。

イ）証明の道筋をつくり出す

証明の構成で最も困難なのは，命題の仮定と結論を演繹的な推論で結びつけることである。その際には，仮定から言えることは何か，結論を導くために必要なことは何かを組み合わせながら推論を進めていく必要がある。宮崎（1995）[7]は，推論の過程を，図１のような性質間のつながりを示した関係図に表すことで，証明の道筋を捉えやすくしている。このような関係図は各社の教科書にも取り入れられ，主に証明した後，証明の道筋を振り返る場面で取り入れられている。これを，証明の道筋を考える手段としても積極的に活用し，道筋が明確になってきたところで，記述に取り組ませれば，形式的証明にもスムーズに移行できるのではないかと考える。

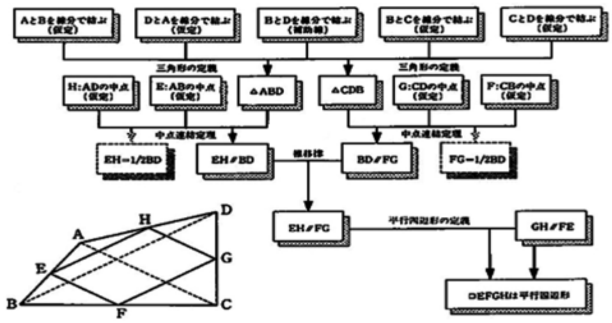


図１　性質間の関係を表した関係図

ウ）発展的に考える

中学校学習指導要領[8]には，第２学年の内容として，「図形の性質の証明を読んで新たな性質を見いだしたりすること」があげられており，証明を書くだけでなく証明を読むことの大切さを述べている。証明を読むことは図形の性質の証明を見直したり評価したりする際に必要である。１つの証明が終わった時に，「条件の一部を変更させても同じ結論が成り立つか」や「結論が成り立つ他の条件はないか」などを考える活動を通して，その図形に不変な性質を明らかにしていくことは証明することのよさとしての実感を伴っていくであろう。

以上の３点を踏まえた授業を行うことで，「ＡならばＢである」という図形の性質間の関係を命題の視点でより明確にとらえることができ，生徒が論証についての理解を深め，論理的に考察し表現する能力を高めていくことにつながると考え，授業を構成していくことにした。

４．教材研究

（１）生徒の実態

対象生徒は広島大学附属三原中学校２年生１クラス41名である。実施時期は平成23年11月，単元は「図形の性質と証明」で，二等辺三角形の性質を考える学習課題を設定した。この課題は作図と証明活動からなる課題で，作図は多様なアプローチができ，多様な証明が考えられる課題である。

生徒達は，小学校５年生で長方形，6年生で直角三角形，中学校１年生でたこ形の作図教材を用いて，作図してそれが正しいことを考える活動を通して，筋道立てて考察する数学的な推論の考え方の素地となる活動を行ってきている。生徒の図形認識の実態を比較するために2010年の中学校１年生とその生徒が中学校２年生になった2011年に同一問題による図形の命題の認識に関する調査（岡崎・岩崎, 2003）を行った。また，本研究に取り組む以前の2009年の２年生にも同様の調査を行っている。

調査問題は，図形を決定する１つの性質から別の性質への関係性を○×式で問い，その理由を書かせるものである。

表２　命題の認識に関する調査の正答率（%）注1）

	ひし形 問1	平　行 問2	平　行 問3
2010. 9 実施(中１)	24.4	15.4	38.5
2011. 10 実施(中２)	43.0	34.2	43.0
2009. 10 実施(中２)	25.6	20.7	31.7

例えば，問１「四角形の４つの辺が等しい」という情報からひし形を想起し，述べている事柄がひし形の性質かどうかを判定する質問では，同一集団内で前年比約19%の上昇（24.4%→43.0%）が見られた。理由を見ても，「ひし形は４つの辺の長さが等しくても，４つの角が等しいとは言えない」のように正しく理由を書いている生徒は26人で，命題の認識が高まっていることが伺える。2009年の２年生注2）の結果との比較でも，筋道立てて考察する数学的な推論の考え方の素地となる活動を行ってきている2011年の２年生の方が論理的図形認識が高いことが分かり，このような活動に取り組むことで一定の成果をあげていると言うことができる。しかし正答率が高まったとはいえ，50%を超えてはおらず，算数での経験的認識と数学での論理的認識との間の隔たりは小さくなってきていると考えられるが, 十分解消されているとは言えない状況にある。

（２）単元計画

図形の単元を次のように構成することにした。

第１次　平行と合同（５時間）
第２次　証明のしくみ（３時間）
第３次　三角形（６時間）実験授業３／６
第４次　四角形（８時間）
第５次　平行線と面積（２時間）

（３）評価材

本単元の学習目標（望まれている結果）を生徒がどの程度達成したのか，つまり，「図形の性質間の関係の対象化」がどの程度なされたかの変容を具体的に示すための評価材（承認される証拠）として実験授業前，実験授業後のパフォーマンス課題及びルーブリックを次のように設定した。なお，パフォーマンス課題については実施時期の学習状況を踏まえ，実験授業前後で出題の仕方を多少変えている。

○パフォーマンス課題（川上，1999）[9]

（実験授業前）AB＝ACである二等辺三角形ABCに，２本の直線AD，AEを付け加えた。自分で１つだけ同じ長さの辺や同じ大きさの角などの条件をつけて△ABD≡△ACEであることを証明しなさい。

（実験授業後）AB＝ACである二等辺三角形ABCの図に，２本の直線を付け加え，合同な三角形をつくり，合同であることを証明しなさい。ただし，仮定として同じ長さの辺や同じ大きさの角の条件は１つだけ付け加えることとする。

○評価規準

結論が成り立つ新たな条件を予測して課題を設定し，その条件で成り立つことを，既習事項を活用して演繹的に確かめることができる。

○ルーブリック

表３は，パフォーマンス課題に対するルーブリックである。評価基準Ⅳ以上の段階で評価規準を達成したものとみなす。基準Ⅳはその記述語及びパフォーマンス課題が示すとおり，結論が成り立つ新たな条件を見つけ，ことばや記号を使って証明しており，証明の筋道は正しいと認められるものであり，この基準以上で「図形の性質間の関係の対象化」がなされた状態を示すものとした。一方，評価規準に達していない基準Ⅲは，新たな条件を見つけられなかったり，条件の誤り，条件不足等があり証明の筋道が不明確であるもの，基準Ⅱは根拠が曖昧であるもの，基準Ⅰは無解答であるものである。これらはいずれも「図形の性質間の関係

表３　ルーブリック

	評価基準	パフォーマンス事例
Ⅴ	結論が成り立つ新たな条件を見つけ，根拠をもとに，ことばや記号を使って筋道を立てて証明することができる。	(条件)∠Ｂの二等分線とＡＣとの交点をＥ，∠Ｃの二等分線とＡＢとの交点をＤとすると，ＢＥ＝ＣＤが成り立つ。 (証明)△ＢＤＣと△ＣＥＢにおいて，ＡＢ＝ＡＣより，∠ＡＢＣ＝∠ＡＣＢ･･･①，∠ＤＣＢ＝１/２∠ＡＣＢ，∠ＥＢＣ＝１/２∠ＡＢＣ，①より　∠ＤＣＢ＝∠ＥＢＣ･･･②，ＢＣは共通･･･③，①，②，③より１組の辺とその両端の角がそれぞれ等しいから△ＢＤＣ≡△ＣＥＢ，よってＢＥ＝ＣＤ
Ⅳ	結論が成り立つ新たな条件を見つけ，記述や表現が不十分なところもあるが，ことばや記号を使って説明しており，証明の筋道は正しいと認められるもの。	(条件)Ⅴと同じ。 (証明)△ＢＤＣと△ＣＥＢで，∠ＡＢＣ＝∠ＡＣＢ･･･①，∠ＤＣＢ＝∠ＥＢＣ･･･②，ＢＣは共通･･･③，①，②，③より１組の辺とその両端の角がそれぞれ等しいから△ＢＤＣ≡△ＣＥＢ，よってＢＥ＝ＣＤ
Ⅲ	自分または仲間が見つけた新たな条件で，ことばや記号を使って説明しようとしているが，条件不足，条件の誤りなどがあり，証明の筋道が不明確である。	(証明)△ＢＤＣと△ＣＥＢにおいて，∠ＤＣＢ＝∠ＥＢＣ･･･②，ＢＣは共通･･･③，１組の辺とその両端の角がそれぞれ等しいから△ＢＤＣ≡△ＣＥＢ，よってＢＥ＝ＣＤ
Ⅱ	自分または仲間が見つけた新たな条件で，証明しようとしているが，根拠があいまいである。	語句の羅列にとどまっている。
Ⅰ	新たな条件を見つけることができない。	無答

の対象化に至っていない状態を示すものとした。

５．論証期における実験授業の実際

本節では，第３次の授業について述べる。

第１時では，まず最初に二等辺三角形を作図し，二等辺三角形の定義を確認した。そして，二等辺三角形の２つの底角は等しいことを頂角の二等分線をひくことによってできた２つの合同な三角形に着目して証明した。小学校では，並列の関係として捉えられていた性質が,序列の関係にあり「『２辺が等しい』ならば『２つの底角が等しい』」という，性質から性質が導かれるという関係性を強調しておいた。

第２時では，次の問題を提示した。

問題　AB＝ACである二等辺三角形ABCがある。AB，AC上にAD=DB，AE＝ECとなるように点D，EをとりBとE，CとDをそれぞれ結ぶと・・・

仮定を確認し，新たに成り立ちそうな性質をあげさせた。生徒から次の７組が出された。

∠ABC＝∠ACB，∠ABE＝∠ACD，
∠ADC＝∠AEB，∠BDC＝∠CEB，BE＝CD，
△AEB≡△ADC，△BDC≡△CEB

この中から，辺の長さに関するBE＝CDを選び証明することにした。証明では，△AEB≡△ADC着目したものと，△BDC≡△CEBに着目したものが見られ，どちらでも証明できることを確認した。さらに，たくさんあげられた性質間のつながりを見るために以下のような関係図を考えさせた。

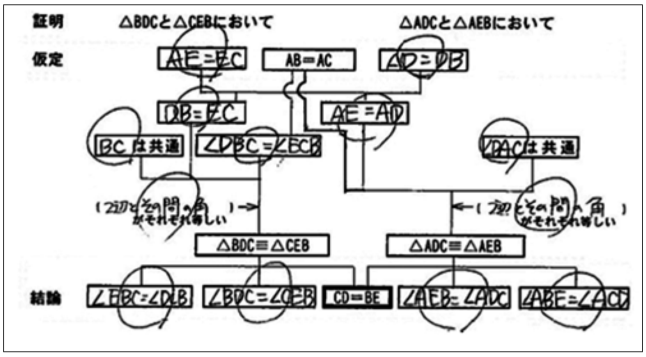


図２　証明の関係図

複雑に線が入り組んでいるため，仮定からいえることは何か，結論がいえるためには何がいえればよいかといった解析的な方法と総合的な方法の双方の思考を巡らし，完成させることができていた。 これを見ると，最初にあげた７組の性質がつながっていることがわかる。関係図を完成させた生徒の感想である。

○関係図にすることで，結論からさらにいえることを導き出すことができたので新たな発見ができていいなと思いました。〔発展性〕
○記述の方はどちらの場合も書けました。関係図の方が難しかったです。
○関係図にしてみるととても入り組んでいて考えづらかったです。

関係図の有効性の記述も見られたが，複雑になってくるとわかりにくいといった記述が多く見られ，簡潔な記述による証明のよさに意識を向けることができた。

第３時では，結論が成り立つ他の条件を考えることを通して，その証明を考えたり，新たな性質を見出すことができることをねらいとして，次の問題を提示した。

問題　AB＝ACである二等辺三角形ABCがある。AB，AC上に□となるように点D，Eをとり BとE，CとDをそれぞれ結ぶとBE＝CDとなることを証明しなさい。

結論が成り立つには，他にどんな点D，Eのとり方があるかを作図によって考えていった。しばらく時間をとった後，生徒に発表させると４つの作図が出てきた。

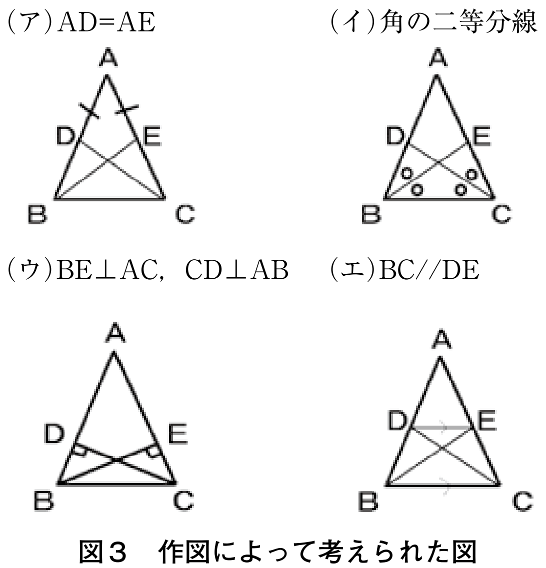


図３　作図によって考えられた図

この問題では，あえてAB＝ACとだけ提示し，線分としてだけでなく直線としても考えられるようにしていたが，このような作図をした生徒はいなかった。この後，それぞれの図でBE＝CDが成り立つことを証明していった。まず各自で，自分の考えた条件を証明した後，グループで交流した。交流の中で，「それはまだ証明していないから使えない。」や「逆が成り立つとは限らないよ。」といった声が聞かれ，根拠を明らかにしながら説明したり，なぜそれが言えるのか根拠を尋ねたりする姿が見られた。本時は（ア）の証明を全体で確認して終わった。

次時に（ウ）の証明を考えた。直角三角形の合同条件は未習であったため，すぐに三角形の合同条件が適用できなくて困惑している様子が見られた。しかし，ある生徒が，「三角形の内角の和は180°だから，２つの角が等しければ残りの角も等しいことが言える。」と発言したことで，三角形の合同条件の「１組の辺とその両端の角がそれぞれ等しい」に帰着することができ，一気に解決をした。

（エ）の証明については，今の段階では未習の二等辺三角形になる条件を利用するため，もう少し学習が進んでから取り組むことにした。

以下，授業後の生徒の感想である。（下線は筆者）
○今日は，条件から決めていったのでいろいろな点のとり方があり，いろいろな証明ができて楽しかった。〔発展性〕
○たくさん方法があって，それが本当にそうなのかを証明するのも楽しいなと思いました。〔意義・意欲〕
○中点じゃなくてもいいということがわかった。証明をするのに条件を選んだり，探したりするのがおもしろい。〔発展性・意欲〕
○条件を考えるときは，先のことも考えないといけないのですごく大変でした。〔方法〕
○平行線による方法は，今までに習った平行線の性質を使って証明できそうだなあと思った。〔方法〕

記述からは，証明の意義やよさを感じながら，証明に意欲的に取り組んでいる姿が伺える。

６．評価

（1）　ルーブリックに基づく評価

実験授業後にパフォーマンス課題とルーブリックによる評価を行った。表４は，事前事後のパフォーマンスの変容を示したものである。

評価規準を達成した生徒21名のうち，基準Ⅳの４名の生徒は，新たな条件を見つけ証明に取り組んでおり，証明の記述に多少の不備はあるものの，証明の筋道は正しいと認められた生徒である。事後における基準Ⅲの８名は，根拠の誤りや条件不足などがあり筋道は通っていないが，どの生徒も形式化による記述はみられていた。

表４　事前事後のパフォーマンスの変容[注3]

評価基準		事後					
		Ⅴ	Ⅳ	Ⅲ	Ⅱ	Ⅰ	計
事前	Ⅴ	5	1	4	1	1	12
	Ⅳ	7	0	0	1	1	9
	Ⅲ	2	2	1	3	0	8
	Ⅱ	3	1	3	2	0	9
	Ⅰ	0	0	0	0	1	1
	計	17	4	8	7	3	39

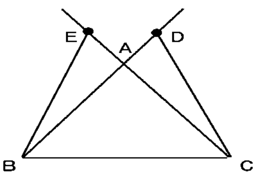
なお，事前Ⅴから事後Ⅱになった１名と事前Ⅴから事後Ⅰになった１名は，問題把握を誤ったものによる誤答，無答であった生徒であり，他の証明においては筋道の通る証明が書ける生徒であることを付言しておく。

（２）全国学力調査[10]**との比較**

単元構成の有効性を，授業後の生徒の感想及びパフォーマンス課題と１ヶ月後に実施した平成22年度全国学力調査数学Ｂ４(２）の類題において，全国学力調査の解答類型と比較した結果に基づき総合的に評価した。

なお，全国学力調査における証明では,「△ABEと△ACDにおいて」と合同な三角形が最初から指定されていたが，本調査では合同な三角形を最初から指定せず,「△（　　　）と△（　　　）において」と空欄にして考えさせるようにしたことが異なる点である。

問題　図のように，AB＝ACの二等辺三角形ABCの辺BA，辺CAを延長した直線上にAD＝AEとなる点D，Eをそれぞれとる。このとき，BE=CDであることを証明しなさい。



証明　△　　　　と△　　　　において

図４　全国学力調査の類題

比較調査の結果から，ポイントを５点あげておく。

① 正答率は,正答◎（類型番号１，５）と準正答○（同２，３，６）を合わせると，本校71.8%（全国48.2%）であり，高い正答率であった。

② 最初から合同な三角形を指定していないため，結論を言うためにはどの三角形に着目すればよいかといった解析的な方法による思考が行われている。

③ 証明の中で，使ってもよいことと使えないことの区別がついており，命題の認識が備わっている。

④ 無解答の生徒の割合が０％であることは，証明の最初の一歩（とっかかり）が分からないという生徒が減り，証明に対する認知が高まっていると考えられる。

⑤ 証明に取り組もうとする意欲は高いが，証明を理解できていない生徒が約18%いる。

表５　全国学力調査との比較

類型番号	解答類型	本校（%）	全国（%）
◎１	△ABEと△ACDにおいて，根拠を記述し，証明しているもの。	43.6	37.7
○２	表現が十分でない，記号の書き忘れがあるが，証明の筋道が正しいと分かるもの。	0	4.1
○３	根拠が抜けている，根拠の表現が十分でないが，証明の筋道が正しいと分かるもの。	7.7	6.4
4	根拠が間違っている。	5.1	6.3
◎５	△EBCと△DCBにおいて，根拠を記述し，証明しているもの。	12.8	0
○６	上記５について，表現が十分でない，記号の書き忘れがあるが，証明の筋道が正しいと分かるもの。	7.7	0
7	仮定として，結論の「BE=CD」を用いているもの。	0	3.9
8	根拠が不足しているもの。	5.1	3.6
9	上記以外の解答	17.9	15.6
0	無解答	0	21.9

７．４年間の変容について

本節では，小学校５年生の時に行ったパフォーマンス課題とルーブリック評価による調査結果（村上2010）と第２学年での論証指導が終わった後に行った同一問題，同一評価基準による調査結果と面接による質問調査の結果をもとに，生徒の図形認識の変容について述べる。なお，調査の比較にあたっては，中学校の立場からの評価基準にそろえるため，本研究グループで村上（2010）の調査結果を再評価したもので行った。

表６　小５と中２のパフォーマンスの変容注４）

評価基準		中学校２年					
		Ⅴ	Ⅳ	Ⅲ	Ⅱ	Ⅰ	計
小学校５年	Ⅴ	0	0	0	0	0	0
	Ⅳ	2	0	2	1	0	5
	Ⅲ	6	6	5	0	0	17
	Ⅱ	3	3	5	0	0	11
	Ⅰ	0	0	1	0	0	1
	計	11	9	13	1	0	34

基準Ⅴの11名の内３名は，長方形に対角線をひき，２つの三角形が合同であることを証明し，三角形の内角の和が180°であることを利用して４つの角が90°であることを証明していた。他の８名は，作図の手順から２組の対辺が等しい四角形は平行四辺形であることを述べ，平行四辺形の１つの角が90°であることから，平行四辺形の性質を利用して４つの角が90°になることを証明していた。後者の方は，平行四辺形の特殊な形として長方形を認識しており平行四辺形と長方形の包摂関係が捉えられている。これは小学校段階では見られない証明の方法であり，より高い図形認識であることが伺える。基準Ⅳでも同様の傾向が見られた。

５年生で基準Ⅱだった生徒で中学校２年生で基準Ⅴになった生徒３名のうち２名は，５年生では，同じ大きさの長方形をしきつめて説明をしていた生徒である。さらに，５年生で基準Ⅲだった生徒で中学校２年生で規準を達成した生徒の変容をみると，その多くは，5年生では作図の手順から分かる性質を羅列しているだけの生徒や30°，60°，90°の三角定規を使って特別な場合で説明している生徒であった。

面接では，一人ひとりに次の３点の質問を行った。

① 自分が書いた小学校と中学校の証明を見比べて，違いは何だと思いますか。

② 中学校で本格的な証明をする前に，小学校で作図してそれが正しいことを証明する学習をすることについてどう思いますか。

③ 中学校で証明をする前に，小学校でこんなことをやっておいたら証明の学習に役に立つと思うことは何ですか。

表７　質問①に対する回答の割合（％）

小学校は操作活動で，中学校は根拠を使って説明する	44
中学校は仮定から結論を導くように手順がはっきりしている	29
小学校は文章で書き，中学校は形式的に書いている。	18
その他	9

①に関する主な回答として，「小学校は測ったりして確かめる。 中学校は習ったことを使って説明する。」，「小学校は特徴を言っているだけ。中学校は書き方の形式が決まっていたり，手順を追って説明している。」があり，経験的認識と論理的認識の違いを捉えている生徒が多かった。

表８　質問②に対する回答の割合（％）

いいと思う	88
わからない	6
無回答	6

②に関しては，88％の生徒が肯定的に答えた。主な理由として，「性質を使って考える習慣ができる。」，「小中つながっていることがわかる。」，「慣れておくと図形の性質をみつけやすくなるから。」といった回答がみられ，経験的認識から論理的認識へと徐々に高めていくことの有効性を伺うことができる。一方，少数意見ではあるが質問②の回答で，５年生時に「証明することに何の意味があるのか。なぜ当たり前のことをいわないといけないのか。」と感じていた生徒もおり，証明の必要性について丁寧な指導が必要である。

表９　質問③に対する回答の割合（％）

図形の性質をよく理解しておく	32
なぜそうなるのか考える習慣をつける	24
性質と性質の関係を捉えていく	21
その他	23

③に関しては，「図形の性質をよく理解しておく。」と答えた生徒の割合が最も多かった。他には，「１つの図を見てどんな性質があるかたくさん発見した方がよい」という図形の性質の顕在化に関する回答，「向かい合う辺が等しかったらどうなるといった性質の関

係を捉えていく。」という性質間の関係性に関する回答や「なぜそうなるのかを考えるようにする。」という論理的思考力に関する回答などがあり，本研究グループが大切にして取り組んできたことが生徒たちに認識されていることを窺い知ることができた。

８．考察およびまとめ

本研究では，小中一貫の図形カリキュラム構想に基づき，小学校第５学年の移行後期から第２学年の論証期まで４年間の論証指導を受けてきた生徒を追跡してきている。本稿では，論証期における図形の性質間の関係の対象化を強く認識させることで，生徒の図形認識がどのよう変容したかを検証することによって，義務教育９カ年の図形領域のカリキュラムの有効性を明らかにすることが目的であった。

以下では，本実践研究の成果と課題を整理しておく。

第一の成果は，小中一貫の図形領域カリキュラムの有効性についてである。小学校第５学年から，作図してそれが正しいことを証明するという学習指導を継続して行ってきており，自分が作図した方法でかかれた図が正しいかどうか振り返ることで，証明の必要性を感じ，そのことが証明に取り組む意欲へとつながっていっている。

実際，証明における無解答の生徒がいないこと，小学校からこのような学習指導を行うことについての肯定的な回答が多いこと，さらに，小学校と中学校の違いに着目した回答から，中学校の論証がどういうものなのか，そしてどのように記述すればよいのかを認識している生徒が多くいることからも伺える。

このことは，小学校５年生と中学校２年生の同一パフォーマンス課題における変容の様子にも表れており，小中一貫の図形領域カリキュラムのもとで，経験的認識から論理的な認識へと促す指導を行うことによって，生徒の論理的な図形認識を促し，論証理解の困難性を克服するのに一定の成果をあげているということができるであろう。

第二の成果は，図形の性質間の関係を命題として強く認識させることができたことである。移行後期から論証期へのスムーズな接続を図るため，関係図を用いた実践を行った。その中で，仮定からいえることは何かを考える総合的な方法と，結論を導くために何がいえればよいかを考える解析的な方法を組み合わせながら推論を進めていく証明の考え方の理解を図ることができ，性質間の順序関係を認識しながらスムーズに形式化につなげていくことができた。

第三の成果は，条件を決めて結論を予測したり，結論がいえるための他の条件を考える活動を通して，発展的な考え方が生徒自身の学習の中から主体的にできるようになってきたことである。何が仮定されているかを調べ，そうでなければどうなるかを考えてみる。そのような仮定を特定したり，仮定を変更したりする活動を通して，変わらない性質を明らかにしていくことは大切な数学的活動である。今回の実験授業では，二等辺三角形の対称性に，様々な作図方法から導かれる条件を加えて証明が成り立っていることがわかり，図形の本質に迫ることができた。

最後に，今後の課題について述べておく。

第一に，実験授業における事前事後のルーブリックの結果を見ると，上位層の生徒に対しては論理的な図形認識を高めることができた一方で，苦手な生徒の伸びが十分ではなかった。これは，実験授業後のパフォーマンス課題において，２本の直線を付け加えて合同であることを証明するという問題設定の難易度が高くて対応できなかったことが考えられる。そういった生徒に対しては，スモールステップでの学習支援などを取り入れた授業作りを行う必要がある。

第二に，小学校段階で図形の性質の顕在化及び図形の性質間の関係性の意識化を促す教材の開発である。面接調査では，小学生へのアドバイスとして「１つの図形を見てどんな性質があるかたくさん発見した方がよい」や「これとこれが分かればこれがわかるという順番が大事」などを挙げている生徒が少なくない。また，論証指導では，一般的に仮定，結論が最初から与えられ，証明する必要性をあまり感じない場面も多い。このような状態では，証明しようという意欲になかなか結びついていかない。中学校ではもとより，小学校段階でも証明する必要性を感じさせるような図形の性質の顕在化，性質間の関係の対象化を図るような教材作りが求められる。また，このような経験を小学校段階から積んでおくとスムーズな小中の接続が図れるであろう。

第三に，証明を読んで新たな性質を見いだす活動をより一層取り入れていくことである。証明を読むことを通して，論理的な図形認識が一層高まっていき，そのことが他の領域にも波及していけば，相対的に生徒の論理的な認識の高まりが期待できるであろう。

以上の成果と課題を踏まえ，小中一貫のカリキュラムのもとで，発達段階に即した教材開発と授業実践を行っていき，中学校での論証理解の困難性の克服に向けた取り組みをさらに充実させていきたい。

注

1）命題の認識に関する調査問題は以下の通りである。

次の問１～問３のア～ウの文の意味が正しい場合には○を，正しくない（ときがある）場合には×を，よくわからない場合には△を（　　）の中に記入してください。なお，×にしたものはその理由も書いてください。

問１　四角形の４つの辺の長さが等しいならば，この四角形はいつでも

ア（　　）対角線が角を二等分する。

イ（　　）４つの角が等しい。

ウ（　　）対角線が垂直に交わる。

問２　四角形の２組の向かい合う辺が平行ならば，この四角形はいつでも

ア（　　）対角線が角を二等分する。

イ（　　）４つの角が等しい。

ウ（　　）対角線が垂直に交わる。

問３　四角形の２組の向かい合う角の大きさが等しいならば，この四角形はいつでも

ア（　　）向かい合う辺が平行である。

イ（　　）対角線の長さが等しい。

ウ（　　）対角線が垂直に交わる。

2）2009年の中学校２年生は，小学校で図形の性質間の関係性の意識化を図れるような学習は積んできておらず，また中学校１年生の作図単元においても，作図を手続きの習得としてのみ扱っており，なぜその方法で作図できるのかについては考察しておらず，図形の性質間の関係を意識するのは中学校２年生が最初である。

3）41名のうち２名は事前または事後評価時に欠席したため，評価対象者から除いている。

4）計の欄が34名であるのは，41名のうち７名が附属三原小学校以外からの入学者であり，５年生との比較においてデータがないので41名の中から除いている。

引用（参考）文献

1）岡崎正和・岩崎秀樹（2003），「算数から数学への移行教材として作図―経験的認識から論理的認識への転化を促す理論と実践―」，日本数学教育学会誌，Vol. 80，pp. 3－27.

2）例えば以下のような研究に見られる。小関煕純（1987），『図形の論証指導』，明治図書. 國宗進（1987），「論証の意義の理解に関する発達の研究」，数学教育学論究，vol. 47・48，pp. 3－23.

3）高本誠二郎・岡崎正和（2008），「図形の論理的位置づけの初期の様相について―論証への移行を目指した中学１年『平面図形』のデザイン実験（1)―」，全国数学教育学会誌，第14巻，pp. 41－50.

4）川﨑正盛・村上良太・妹尾進一・木村惠子・高淵千香子・山中法子・内田武瑠・松浦武人・植田敦三（2011），「論理的な図形認識を促す算数・数学科カリキュラムの開発（2）―図形の性質の意識化に焦点を当てて―」，全国数学教育学会誌，第17巻，第１号，pp. 61－71.

5）村上良太・川﨑正盛・妹尾進一・木村惠子・高淵千香子・山中法子・内田武瑠・松浦武人・植田敦三（2010），「論理的な図形認識を促す算数・数学科カリキュラムの開発（1）―小学校第５学年における移行を促す算数での実践的研究―」，全国数学教育学会誌，第16巻，第１号，pp. 73－85.

6）妹尾進一（2011），「論理的な図形認識を促す数学科授業の実践的研究―中学校第７学年における論証への移行を促す実践的研究―」，広島大学附属三原学校園研究紀要，pp. 103－122.

7）宮崎樹夫（1995），『論証の構成の指導のポイント』，ニチブン，中学校数学科教育実践講座CRECER，第６巻，pp. 281－285.

8）文部科学省（2008），『中学校学習指導要領解説数学編』.

9）川上博禎（1999），『合同な三角形をつくる』，明治図書，数学教育，vol. 499，pp. 50－55.

10）国立教育政策研究所教育課程研究センター（2010），『平成22年度 全国学力・学習状況調査解説資料 中学校数学』.