

言語活動を充実させた数学科授業の実践的研究

— 思考力・判断力・表現力の育成に向けて —

橋本 三嗣 富永 和宏 砂原 徹 青谷 章弘
板崎 真一 内海 美香 川久保晃一 喜田 英昭
森脇 政泰 河野 祐子 小山 正孝 下村 哲
影山 和也

1. はじめに

国際的な調査、国内における全国的な調査などの結果から、思考力・判断力・表現力の育成が課題であることが明らかになった。また、学校教育法においても、「思考力・判断力・表現力等」が学力の重要な要素として示された。そして、その育成の手だてとして、教育活動全体で言語活動の充実を図ることが重要であることが指摘された^{1) 2) 3)}。

それは、言語が「知的活動（論理や思考）」「コミュニケーション」「感性・情緒」の基盤であり、言語活動を通して言語に関する能力を育成することが、思考力・判断力・表現力の育成につながるからである。

数学教育に目を向けると、言語活動を充実させた授業として、中学校ではグループ活動やレポートの作成・発表など多くの実践が報告されている。しかし、それぞれの活動の目的が明確化されているのか、生徒にとって達成感のあるものであるのか、次の学習への意欲につながるものなのかなどの考察はあまりなされていない。また高等学校では、2012年に文部科学省のホームページに指導事例が紹介されたが、実践の報告がまだまだあまりなされていないのが現状である。

そこで本研究では、言語活動を充実させた授業により、生徒に他者との対話や自己との対話を促し、その結果として数学の本質に迫る議論や思考の深化につながる授業開発を目指す。グループ活動における生徒の発言やつぶやきの記録から授業を分析し、授業後に生徒に活動の意義をどう感じたかを調査するなど、多面的な検討を行い、言語活動を充実させた数学科授業の在り方の研究を行う。

2. 言語活動を充実させた授業構成の視点

思考力・判断力・表現力の育成に向け、言語活動を充実させた数学科の授業構成について附属学校の数学科教員で協議し、次の3つの視点を重視して研究を進めることにした。

- ①多様なアイデア…様々な思考や創意工夫が生まれるか
- ②数学の活用…日常生活や自然現象・社会現象などに関連づけることができるか
- ③数学の再構成…既習の数学の概念を拡張することができるか

それぞれの視点による授業構成の例を次に示す。

- ①多様なアイデア「文字の式」（中学1年）
「基石の数を求めよう」

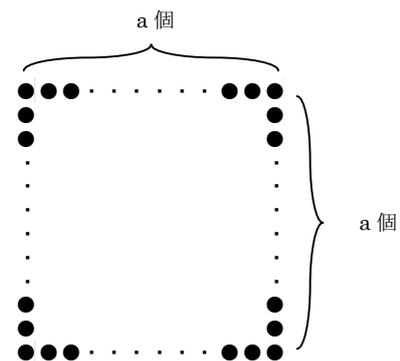


図 1

基石の数を文字で表し、発表するという活動から式を読み取る活動、さらに振り返って工夫する活動へと

Mitsugu Hashimoto, Kazuhiro Tominaga, Toru Sunahara, Akihiro Aotani, Shinichi Itazaki, Mika Utsumi, Kouichi Kawakubo, Hideaki Kida, Masayasu Moriwaki, Yuko Kawasaki, Masataka Koyama, Tetsu Shimomura, Kazuya Kageyama : A Study on Mathematics lesson through language activities – Developing the ability to think, make decisions, and represent –

発展させる。表し方には、 $(a-1) \times 4$ 、 $a^2 - (a-2)^2$ 、 $a \times 2 + (a-2) \times 2$ 、 $a \times 4 - 4$ などがあり、同じ式であっても生徒によって異なる読み取りを行うこともある。

自分で考えるだけでなく、他者の考えを知り、比較することなどを通して、多様なアイデアの生まれる授業が展開できる。

②数学の活用「三平方の定理」(中学3年)⁵⁾

「お得なテープはどれ？」

芯の太さの異なるいくつかのテープの残りの長さを比較する方法を、ドーナツ型の円盤(円環、図2)の面積を比較する問題に帰着させて考える。

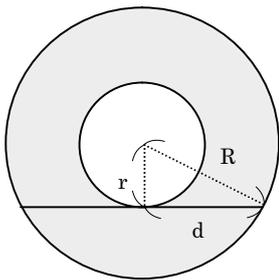


図2

外周の半径を R 、内周の半径を r とすると、求める面積は $\pi(R^2 - r^2)$ であるから、2つの面積を比較するには $R^2 - r^2$ の値を比較すればよい。長さを測る箇所を少なく、できるだけ1カ所にするようにし、あまり計算もしなくてよい簡便な方法を考えるとき、三平方の定理を利用すると内側の円に接する外側の円の弦の長さで比較できることに気づかせる。日常生活において数学の活用を実感する授業が展開できる。

③数学の再構成「指数」(高校2年)

「 $a^{\frac{1}{2}}$ を定義しよう」

指数の有理数への拡張である。数学の学習において、一般化の場面は少なくない。既知の性質を維持したまま、定義を拡張することで不易で発展的な議論ができるようになる。指数が $\frac{1}{2}$ であっても指数法則が成り立つものとする、 $a^{\frac{1}{2}} \times a^{\frac{1}{2}} = a^{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}} = a^1 = a$ となり、 $a^{\frac{1}{2}} = \sqrt{a}$ と定めることが妥当であると考えられる。この定義は $(a^{\frac{1}{2}})^2 = a$ となることからなど、他の指数法則から考えても妥当である。さらに $a^{\frac{1}{3}}$ 、 $a^{\frac{1}{4}}$ 、 $a^{\frac{2}{5}}$ などについても考えることができる。このように通常の題材においても、言語活動の充実によって数学の再構成を考える授業が展開できる。

これらの3つの視点は、授業構成の際にどれか一つに限るものではなく、教材に応じて軽重をつけるものである。次にこの3つの視点を重視して行った公開授業の概要を示し、本質に迫る議論や思考の深化につながる授業開発について検討する。

3. 授業の実際

3-1. 「正2.4角形の性質」(中学1年)

(1) 教材について

この度の中学校学習指導要領の改訂により、比例に加えて反比例も小学校で学習することになり、比例や反比例などの数量関係の学習は、複数学年にわたり繰り返し学習する機会を持つことができるようになった。これを受けて、中学1年の関数の学習では、変数のとる値の範囲を負の数まで拡張するとともに、比例や反比例の考えを使って、具体的な事象をとらえ説明する活動にも取り組むことができる。

本時では、正 n 角形の内角の大きさと n の値の関係についての考察を行い、 180° から内角を引いた値(外角)と n が反比例の関係にあることを見出すとともに、その関係が常に成り立つと仮定して考えを進め、正2.4角形の存在について検討した。もちろん、多角形の定義上 n は3以上の自然数でなくてはならないが、反比例の性質を前提として考えることにより、普段では認められないような図形も含めて議論する経験を生徒に積ませたいと考えた。そのような議論をすることは、思考する対象を拡張することの面白さや不思議さ、難しさを感じ取らせるとともに、正しいことの持つ意義や大切さについて考える態度を養うことにつながると考えたからである。

また、本時の学習を通して、正しいとされる根拠をもとに自分の考えを説明したり、他人の考えを聞いてその真偽を判断したりする活動を行うことは、思考力・判断力・表現力を育み、言語活動の充実につながると考えられる。

(2) 課題の考察

本時で取り上げた「正 n 角形の外角の大きさと n は反比例する」という性質は、本来は中学2年の図形の領域で学習する内容である。これを中学1年で取り上げた理由は、証明も含め厳密に理由を示しながら議論をすることを求められる中学2年よりも、数量関係やそれが成り立つ理由を直観的に理解できればよい中学1年の方が、他者に自分の考えを伝えたり、他者の意見を聞いたりする活動に取り組みやすいと考えたからである。

本時では、円を12等分する点を結んでつくることのできる正多角形を取り上げ、その内角の大きさと角の数を表にまとめ、数量関係の特徴を考察した。そのままではわかりづらかった関係も、内角の大きさを記入する位置を左右逆にすると反比例の関係を見つけることができた。この「記入する位置を左右逆にする」という操作が数式ではどのように表されるかが一つの課題である。さらに、得られた内角がすべて 30° の倍数

であることから、内角が 30° のときの n の値を求めることを考えた。もちろん、 n が3以上の自然数の正 n 角形では内角が 30° になることはないが、『正 n 角形の外角の大きさと n は反比例する』という関係は n が自然数以外でも成り立つとする」と仮定すれば、 n の値を求めることは可能である。課題2は、そうして得られた n の値をどのように解釈するか？という問題である。普段、生徒が持っている正多角形のイメージを越えて「正2.4角形」を考えることは楽なことではないが、それだけに生徒の興味・関心を高め、活発な議論が期待できる。

さらに、この考え方を拡張させて「正2.5角形」についても考えさせる。本時では正 n 角形の内角の大きさに着目して図形の形状を考察するが、他の方法として円を m 等分する点を取り、 n 個隣りの点同士を結んでいけば正 n/m 角形になるという性質に気がつけば、より生徒同士の議論にも熱が入るのではないだろうか。以上のことより、本時で取り上げた課題は言語活動を充実させるには面白い課題であると考えられる。

(3) 授業構成

<本時の目標>

- ・正 n 角形の内角の大きさと n の値の関係について調べ、その数量関係のもつ性質について考察を深めることができるようにする。
- ・自分の考えを述べるときに、正多角形の性質や反比例の数量関係など、正しいことがらを根拠にしながら説明できるようにする。

<授業構成の特徴>

表1

	多様なアイデア	数学の活用	数学の再構成
正2.4角形の性質	○		◎

(◎非常に適している、○適している)

<指導過程>

学習内容	指導過程・学習活動	指導上の留意点・評価
(導入) ・本時の課題「正多角形の性質を調べよう」	・円周を12等分する点をつけた図を利用して描くことのできる正多角形を考える。 ・それぞれの正多角形を描き、内角の大きさを調べ表にまとめる。	・あわせて、正多角形のもつ性質について確認する。 ・内角の求め方がわからない生徒には分度器を使わせる。
(展開) ・正 n 角形の内角の大きさの性質	表を見て気づいたことを発表させる。 (予想される解答) ・内角の大きさが 30° ずつ大きくなっている。 ・内角の大きさはすべて 30° の倍数になる。 ・ n の値が大きくなると内角も 30° ずつ大きくなっていることを確認し、次の課題に取り組む	・あわせて、 n の値と内角の大きさは比例しないことも確認する。
・課題1の提示 内角が 30° の正多角形	課題1 この性質が他の n の値についても成り立つとしたら、内角が 30° になる n はいくらですか。	・答えが出ないときは内角

・課題2の提示 正2.4角形の形	・まずは自分だけで考え、答えをまとめる。 ・グループに分かれてお互いの答えとそれを求めた考え方を話し合い、その妥当性を検討する。 ・内角と 180° の差と n の値が反比例の関係にあることを確認し、この性質が成り立つと仮定したときの n の値を求める。(答) $n=2.4$	と 180° の差(外角)に注目させる。 ○反比例の関係をもとに自分の考えを説明することができるか。 【数学的な見方や考え方】
・課題3の提示 正2.5角形の形	課題2 正2.4角形はどんな形をしていると思いますか。 ・正 n 角形は円に内接する線対称な図形であることと内角が 30° であることから形を考える。 ・別の考えとして、円周上の12等分点を x 個隣の点同士で結んでできる図形が正 $12/x$ 角形であることから、正2.4角形の形を考えられることをいう。	・正多角形は線対称な図形なので、半径OAを対称の軸として左右に 15° ずつ開いた辺をとらせる。
(まとめ)	課題3 正2.5角形はどんな形をしていると思いますか。 ・ n の値と内角と 180° の差が反比例の関係にあることを再確認し、内角の大きさを求める。 ・内角が 36° になることを確認し、課題2と同様にして形を考える。 ・自分の考えを述べるときには、正多角形の性質や反比例の数量関係など、正しいことがらを根拠にしながら説明するとよいことを確認する。	○反比例の関係から内角の大きさを求めることができるか。 【数学的な技能】
備考	準備物：ワークシート、定規、分度器	



(4) 研究協議

授業者から、本時のねらいとしていた「自分の考えを述べるときに、正多角形の性質や反比例の数量関係など、正しいことがらを根拠にしながら説明できるようにする」ことの大切さや、実際にはあり得ないように思えるものでも、ルールを整えることで考えられることの面白さは伝わったのではないかというコメントに対し、参観者から、気づいたことやわかったことについて話し合わせることもよいが、わからなかったこと、特に何故そうなるかがわからなかったことについても話し合わせることも大切なのではないかという指摘が出た。そして、言語活動を行うことが数学の学習目標ではなく、学習における言語活動を通じて学習内容と現実との関連を意識させることや、数学的活動によって得られた根拠に基づいた判断やそれを他者に説明できる表現力を高めることが重要であるという話になった。

(5) まとめと課題

言語活動の充実をはかる学習活動の展開をねらい、主体的に数学的な活動に取り組むことを目標に行った授業であった。特に、反比例の関係を発見するだけでなく、その結果を図形に当てはめて課題の解決をはかり、自分の考えた内容を反比例から求めた数値をもとに他者に説明する活動ができたのは、数学的な言語活

動を重視する立場から評価できると考えられる。

課題としては、言語活動のための学習ではなく、現実場面との関連性や有用性を感じ取らせたり達成感を得させたりすることで、さらに次の学習への関心・意欲につなげられるように工夫することである。

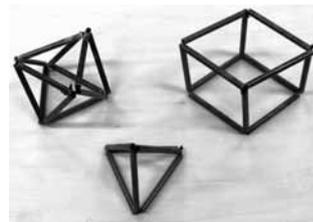


図3

3-2. 「多面体を平面上に表す方法」(高校1年)

(1) 教材について

高等学校の旧学習指導要領において空間図形に関する内容は、中学1学で空間における直線や平面の位置関係、平面図形の運動による空間図形の構成、柱体や錐体の表面積と体積を扱ってからは、中学3年での三平方の定理の空間図形への利用、数学Iでの空間図形の計量のような計量に関する内容以外では、数学Bの空間ベクトルまで扱われていなかった。今回の学習指導要領の改訂で、中学1年に投影図、数学Aに空間図形が入ることで、計量以外の内容でも中高で継続的な学習ができるようになった。

また数学Aに新たに入った空間図形に関する内容は、空間における直線や平面の位置関係や多面体に関する基本的な性質である。授業では、教具や機器を用いて、実感をもたせながら事象の考察を行うとともに、図形を題材にして数学的に表現できる力をつけさせたい。

本時では、まず、正四・六・八面体の見取図をかかせた。見取図は立体の全体像がわかるように、見た様子そのままを平面上に写生した図であるが、すべての辺と頂点のつながりや面の形を1つの視点から把握する(実線でかく)ことは困難である。条件を満たす図をかくためには、辺の長さや角度を無視して、辺と頂点のつながりや面の形だけに注目すればよいことに気付かせたい。そのために、表記例として建物の内部を表した鳥瞰図を示すことで、形相図(1つの面を広げて、その他の面の辺と頂点のつながりや面の形が把握できる図)を用いて多面体を平面上に表す活動につなげた。条件を満たすために変えていいもの、変えてはいけないものの選択が空間図形に関する新たな見方や考え方になったという実感をもたせたい。そして、空間図形に関する多様な見方や考え方のよさを理解させるとともに言語活動を通してそれらを数学的に表現したり、活用できるようにしたい。

(2) 課題の考察

多面体について、5時間で計画を立てた。1時間目は、ポリドロン(立体図形教具)で5種類の正多面体の模型をつくらせ、見取図をかかせた。ここで、正十二・二十面体の見取図についても時間をとって苦労してかかせることが、形相図のよさを実感することに

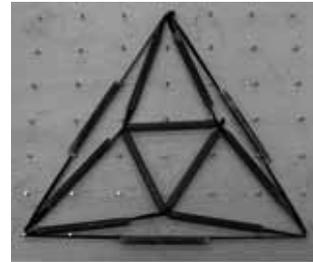


図4

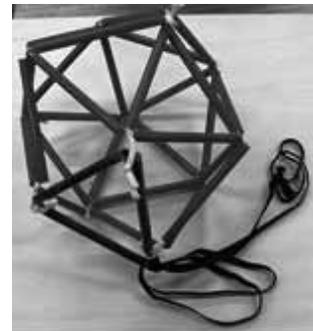


図5

つながると考えたためである。2時間目は、まず、オイラーの多面体定理が正多面体で成り立つことを調べさせた。さらに、「なぜ、オイラーの“正”多面体定理となっていないのだろう」という問いかけから、各自で考えた模型をつくらせ、その模型でもオイラーの多面体定理が成り立つことを調べさせた。3時間目は、正多面体が5種類しかないことの証明や立体の断面・体積について学習を行った。本時は指導計画の4時間目であり、5時間目は、本時で学習した形相図を用いて、オイラーの多面体定理が成り立つことの証明を行った。

本時は、ポリドロンや図3のようなストローとゴムでつくった教具を用いて、課題に取り組ませた。図3の教具は図4のように平面上に張り付けることで、生徒にどのような図をかけばよいのかイメージをもたせることができた。正四面体は上から覗いた図でも同じ形相図がかけられるが、本時は、多面体の面の1つを取り除いて、その内部を覗くという活動で統一した。指導案では、正四・六・八面体の形相図をかくところまでを計画していたが、生徒から回収したプリントで確認をした結果、正十二面体については23人、正二十面体については9人が形相図をかくことができていた。

授業では図5のように、正十二面体と正二十面体を平面上に張り付ける教具もつくり、実際に形相図を表した。

(3) 授業構成

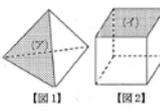
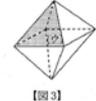
<本時の目標>

- ・頂点と辺のつながりと面の形だけに注目した捉え方によって、多面体を平面上に表すことができる。

<授業構成の特徴> 表2

	多様な アイデア	数学の 活用	数学の 再構成
多面体を 平面上に 表す方法	◎	○	

(◎非常に適している, ○適している)

学習内容	指導過程・学習活動	指導上の留意点・評価
(導 入) ・課題1の把握	1. 課題1の確認をする。 課題1 次の立体の見取図をかいてみよう。 ① 正四面体 ② 正六面体 ③ 正八面体	
(展 開) ・課題1の検討 ・見取図	・立体模型をつくる。 ① ② ③ 	・頂点は区別しないことを伝える。 ・見取図は、見えていない辺を破線でかくことを確認する。 ・見取図がかけたか。【数学的な技能】
・課題2の把握	2. 課題2の確認をする。 課題2 次のような条件を満たす図をかいてみよう。 (i) すべての頂点と辺のつながりが把握できる。 (ii) 面の形(三角形・四角形)が把握できる。 (iii) 見えていない辺(破線)がない。	
・課題2の検討 ・①の検討 ・②の検討	・表記例として、鳥瞰図を提示する。 ・鳥瞰図は、屋根を取り除いて建物の中を覗いていることを確認する。 ① ② 	・①は【図1】の(ア)の面、②は【図2】の(イ)の面を取り除いて、立体模型の内部を覗くことで図がかけたか。  
・③の検討	・①、②の立体において、各頂点につながっている辺の本数と面の形が何かを問う。 ①: 3本, 三角形 ②: 3本, 四角形 ・③も①、②と同様に【図3】の(ウ)の面を取り除いて考える。 	・③は(ii)から面がn角形はn角形のままだなっていけばよいことを確認する。③も面が三角形であればよいことに気づき、図がかけたか。 【数学的な見方や考え方】
・形相図の説明 ・正多面体の 対称性の確認	3. 形相図について説明をする。 ・立体模型を回転させて形相図をかくとどうなるかを問う。 ・正多面体は対称性があるため、同じ図になることに気付く。 	・図をかいた平面を1つの面と見なすことで面の数も立体の場合の面の数と合うことを伝える。
(まとめ) ・本時のまとめ	4. 本時のまとめを行う。 ・空間から平面へ次元をおとして、課題2の条件を満たす図がかけたことを確認する。	・条件を満たすために、変えていいもの、変えてはいけないものを選択することで新たな見方や考え方ができたことを伝える。

備考 準備物: 立体模型(ポリドロン), スマートボード



<指導過程>

(4) 研究協議

授業後の協議において、参観者から形相図を用いた学習の展開にどのようなものがあるのかという質問が出た。オイラーの多面体定理の証明や多面体の塗り分け問題、ハミルトン閉路問題、一筆書きへの利用が考えられる。また、ポリドロンにはフレームタイプとソリッドタイプがあるが、今回ソリッドタイプを採用した。その理由はフレームタイプでは見取図をかいたり、課題2の条件(iii)を考える際に、すべての辺が見えている状態で考察しなければならないからである。

言語活動に関しては、授業の中で生徒がかいた形相図とプロジェクターに映し出した教具(参照:図4)が互いに課題の条件を満たしているのか確認する活動を生徒自身にさせる場面で、図形をどのように見ているのか、何に着目して見ているのかなどを数学的に表現させることで空間図形の理解が進んだといえる。

(5) まとめと課題

本時で取り上げた内容は、生徒が今まで学習してきたユークリッド幾何の考えではなく、位相幾何の考えを用いるものであり、生徒にとっては、新たな見方や考え方を生み出すものである。生徒の思考の中では、図形をかくときは、辺の長さや角度は変えてはいけないという固定観念があると推測される。本時の教材には、生徒にそのような固定観念に縛られず、柔軟な思考ができる人間になってもらいたいという思いを込めた。授業後の生徒の感想の中に、「色々な見方をする事の重要性が学べた。」「新鮮だった。」などの記述があったので、教材に込めた思いは生徒には伝わったのではないと思う。

本時では、形相図という図形を平面上に表すという新たな見方や考え方ができたことに価値を見出したが、発問や生徒の活動を工夫することで、形相図を用いることのよさについてもっと生徒が実感できるような授業の展開も可能となるだろう。

3-3. 「相関」(高校1年)

(1) 教材について

今年度より数学Iで「データの分析」を扱うことになった。ここでは、小学校算数、中学校数学における「資料」を「データ」に広げ、1つの変量の散らばりとしては、範囲と四分位範囲、分散と標準偏差を、2つの変量の間関係としては、相関を扱う。特にデータの相関は、2つの変量の線形的な関係を知るという重要な意味をもつ。そこでデータの分析の単元の指導として、データの散らばり、相関の学習後にアンケート調査の方法として、相関を扱う授業展開を構想した。

授業の内容としては、「収集したデータの中から相関があるものを見つけ、そこからなぜそのような関係があるのか考察する」ことを課題とし、具体的なテーマとして「高校生の生活」を設定した。データ分析は、本来、帰納的な取り組みであるため、アンケート調査の「計画→実施→分析」という活動を取り入れた。

本時では、「I年4組生徒の生活実態」について、前時に整理したことがらをグループごとに発表させた。データ分析の方法や意味を学習した成果として、発表→質疑応答→考察→評価という一連の活動を通して、根拠に基づいて筋道を立てて説明し伝え合う力を養いたい。発表に関しては、相関係数に加えて、散布図などを用いて視覚的にも表現するとともに、なぜそのような関係があるのかも述べるようにした。生徒同士の積極的な議論により、学習が深まった。また、まとめとして統計や数学が社会において活用できること、その際にデータに振り回されずに判断したり、伝えることの意義や重要性を確認した。

クラス内にあるさまざまな情報の中から、数値情報をうまく取り出したり、あるいは数値化したりして、それらを整理すること、そして発表することなど、生徒の活動を中心にしながら統計的な見方・考え方を習得させるための授業を構成した。

(2) 課題の考察

分散、標準偏差、共分散の計算方法や相関係数の求め方は既に指導しており、生徒はコンピュータ（エクセル）を用いて相関係数を求めたり、散布図をかいたりする経験はある。相関係数と散布図については、一般に次のことがいえる。

- ・相関係数が1に近いほど、正の相関が強くなる。散布図では、傾きが正の直線の近くに多くの点が分布する。
- ・相関係数が-1に近いほど、負の相関が強くなる。散布図では、傾きが負の直線の近くに多くの点が分布する。
- ・相関係数が0に近いとき、相関は弱くなる。

計算で求めた相関係数の値（ r ）をどう解釈するかは難しく、どの程度の値で相関があるかは一概にはいえないが、一応の目安として次のような規準を提示した。

(相関係数の読み方)

- $|r| \leq 0.2$ ほとんど相関がない
- $0.2 < |r| \leq 0.4$ やや相関がある
- $0.4 < |r| \leq 0.7$ かなり相関がある
- $0.7 < |r|$ 高い相関がある

課題を「I年4組の生活実態」とし、前時まで、班ごとに相関がありそうな項目の設定、データの収集や分析をさせた。データの収集はクラス内で行わせ、

その際に答える数量の単位は何か、聞かれたくない項目が含まれていないかなどについてクラス全体で確認した。本時は、班ごとにデータを分析して整理したことがらを発表し、考察することに焦点を当てた。分析結果に加えて、「なぜそのような関係があるのか」を考えさせることで、生徒からいろんな意見を引き出すことをねらった。

(3) 授業構成

<本時の目標>

- ・データを分析して整理したことがらを発表し、考察することができる。

<授業構成の特徴>

表3

	多様な アイデア	数学の 活用	数学の 再構成
相関	○	◎	

(◎非常に適している, ○適している)

<指導過程>

学習内容	指導過程・学習活動	指導上の留意点・評価
(導 入) ・課題の確認	○前時の課題を確認する。 課題：「I年4組生徒の生活実態」について、アンケート調査で収集したデータの中から、相関があるものを見つけ、なぜそのような関係があるのか考えよう。	・3～5人程度のグループで、作業している。
(展 開) ・発表にあたっての確認	○発表する際の留意点を確認する。 ① 作成した表やグラフなどを表示すること。 ② 説明には基本的な統計量を入れること。 ③ 説明には自分たちの主張も入れること。 ④ これまでの作業の感想も入れてもよい。	
・発表の準備	・グループごとに前時に整理したことがらを振り返り、発表できるように準備する。	
・発表	○各グループが集めてきたいろいろなデータの相関について、整理したことがらを発表させる。	○表やグラフを有効に使用できるか。【数学的な技能】
・質疑応答	○発表に対して、質問や意見・感想を述べさせる。 ・発表したグループの生徒は、出された質問や意見・感想に対して、グループの考えを述べる。	○根拠に基づいて筋道を立てて説明できるか。【数学的な技能】
・考察	○質問や意見・感想をもとに、さらに考えたい部分を整理し、クラス全体で共有するとともに考察する。	・1グループごとに発表→質疑応答→考察→評価の順に進める。
・評価	・発表の内容について、個々の評価と気づきを述べる。	
(まとめ) ・本時のまとめ	○本時の発表を振り返り、統計や数学が社会において活用できること、その際にデータに振り回されずに判断したり、伝えることの意義や重要性を確認する。	

備考 準備物：コンピュータ

(4) 研究協議

授業後の協議において、参観者から生活実態の調査の中から相関があるものを見つけるよりも、日頃の問題意識の中から相関がありそうなものの中からデータを収集する方が自然であるという意見が出た。さらに、連続量と連続量のときの相関と、連続量と離散量のときの相関では意味が異なることを教師としてコメントすべきであったこと、プレゼンの際には、データの数

を明記するように指導すべきであったことなどの指摘があった。高校1年で相関を扱う際に、グラフ（散布図）と数値（相関係数）の両面から相関関係を判断することが重要であること、教師が知らない事柄に出会った場合には生徒と一緒に考えるという姿勢が必要であることも指摘していただいた。

(5) まとめと課題

生徒の反応をある程度予想をして授業に臨んだが、生徒の発言に対して適切なコメントができなかったことが残念である。「もっとたくさんデータを取れば違ったものが出るかもしれないね。」などの統計的な考え方のヒントとなるようなコメントを教師から出すべきであった。

課題は生徒に発表させる授業を展開する際の教師の役割について検討することである。

4. 総合的考察

4-1. グループ活動における言語活動の充実

3-3で示した授業の分析から、グループ活動において、本質に迫る議論や思考の深化につながる授業にするための手立てを検討する。

それぞれの班が取り組んだテーマは次の通りである。

- 1班「手の中指の長さとの関係」
- 2班「握力と体重の関係」
- 3班「一か月に遊ぶ回数と一日にインターネットをする時間の関係」
- 4班「一年間に読む本と漫画の関係」
- 5班「シャトルランと中指の長さの関係」
- 6班「運動時間と身長との関係」
- 7班「50m走のタイムと身長との関係」
- 8班「サンタがいなくて気付いた年齢と一人で寝られるようになった時期」
- 9班「自分の身長と相手の理想の身長との関係」
- 10班「身長と髪長さの関係」

「サンタがいなくて気付いた年齢と一人で寝られるようになった時期」というテーマで取り組んだ8班は、サンタの存在を信じている人ほど、一人で寝られるようになるのは遅いであろうという仮説を立て、データの収集・分析を行った。現在もサンタはいると思っていると回答した1名を外れ値として処理したことが生徒間で議論になった。

「握力と体重」の相関に興味を持った2班は、そのデータを男女別に分析し、男子は高い相関があるのに対して、女子はほとんど相関がないことを指摘した。

その理由を男性ホルモンと女性ホルモンの違いであろうと述べた。発表を聞いた生徒からは、意外な結果だとの反応も出た。8班の生徒から、「男女の違いはホルモンだけですか。他に影響しているものが考えられるのではないですか。」という質問が出て、クラスで議論になった。4班の生徒から、男性と女性の違いをホルモンの考えではなく、利き腕の周りの長さなど測定してみてもどうかとの提案があり、この提案は次の時間に、巻尺で利き腕の周りの長さを測定する活動へと発展した。

これらの生徒の発表の際には、教師は発表させる班の順序を考えて展開すること、生徒のつぶやきの中から内容の広がりや深まりにつながるものをクラス全体で共有することが重要となる。生徒に意見を言わせただけではなく、そこに教師のコメントを加えることで、さらに議論が深まっていく。例えば6班が、「運動時間と身長との関係」から、運動している人は身長も伸びるのではないかと主張したのに対し、8班の生徒が、「僕はアーチェリー班に所属して、毎日運動しているが、全然身長が伸びていません。運動といってもいろいろあるので、単純に運動している人の身長が伸びるというのは納得がいきません。」という発言があった。そこで教師から「何を調べたら今のことに説明がつくでしょうか。班で話し合ってみよう。」との提案をすることで、班ごとの話し合いが始まった。「運動系の部活をしている人としていない人に分けて考えよう。」「新しく太ももの周囲の長さなどを測定して、筋肉との比較をしてみよう。」などの発言が出た。

グループ活動を行う際には、活動の目標や時間を明示し、それぞれのグループの状況を把握して、取捨選択をしてクラス全体で共有すること、話し合う内容には自由度をもたせること、話し合いが進んでいない班には適切な支援をすることに留意することで、本質に迫る議論や思考の深化につながる授業になる。

4-2. 生徒の学習意欲の分析

言語活動の充実した数学の授業を生徒はどのように感じているのだろうか。また数学の達成度による学習意欲の違いはあるのだろうか。高校1年生38名に調査した結果をもとに、生徒の学習意欲を分析する。

(1) 調査の概要

2012年12月に、高校1年生38名に授業ノートをもとにして、「達成感があった活動、またやってみたくと思う活動」をピックアップさせた。話し合いの後に生徒からピックアップされた活動および学習内容は次の6つである。

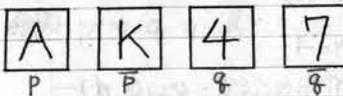
- ①演繹課題（4枚カードの問題・封筒の問題）
- ②背理法（凸多角形の内角のうち、鋭角はいくつ）
- ③絶対値を含む関数（グラフを式で表す）
- ④2次関数の最大・最小（文字を含む2次関数）
- ⑤測量（校舎の高さを調べる）
- ⑥ π の近似（周の長さ、面積）

この6つの活動および学習内容の概要を次に示す。

①演繹課題（4枚カードの問題・封筒の問題）

「カードの片面にはアルファベットの大文字、もう1つの片面には数字が書かれているカードが4枚ある。A, K, 4, 7と見えている4枚のカードのうち、『母音字のカードの裏には偶数が書かれている』というのが正しいかどうかを調べるには最低どのカードを裏返す必要があるか。」という4枚カードの問題、「封をした封筒、封をしていない封筒、80円切手を貼った封筒、50円切手を貼った封筒の4つの封筒があり、『封をした封筒は80円切手を貼っている』というのが正しいかどうか」を調べるには最低どの封筒を確認する必要があるか」という封筒問題に対して、論理的な判断を話し合う活動である。論理構造が同じ2つの課題を比較し、演繹的な判断をやすくする要因は何かについて話しあう活動にまで発展した。

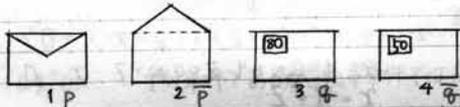
〔問1〕 4枚カードの問題



カードの片面には、アルファベットの大文字、もう1つの片面には、数字が書かれている。
 “母音字のカードの裏には偶数が書かれている。”

- ① Aと1と7
- ② Aと4
- ③ Aと7

〔問2〕 封筒の問題



“封したものは、80円切手を貼っている。”

- ① 2と3
- ② 1と2
- ③ 1と4
- ④ 1と3と4
- ⑤ 1のみ

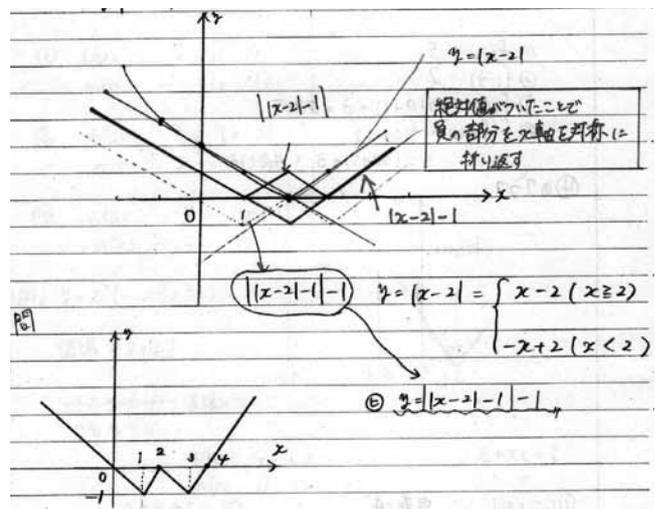
②背理法（凸多角形の内角のうち、鋭角はいくつ）

凸多角形を定義し、三角形、四角形から始めて多角

形を考え、内角のうち鋭角はいくつまでできるかについて実際に図をかいて予想し、証明するという活動である。内角のうち、鋭角は3つまでできそうだと予想はすぐに出たが、直接証明が難しいという状況になり、話し合いが始まった。外角に着目しようというアイデアが出て、多角形の外角の和が 360° であることから、4つ以上鋭角はできないということを示すことができた。

③絶対値を含む関数（グラフを式で表す）

絶対値を含む関数のグラフをかく学習の後に行ったものであり、グラフから式を求める問題を作成し、ペアで交換するという活動である。平行移動と折り返しを利用して、さまざまな工夫された問題が作成された。



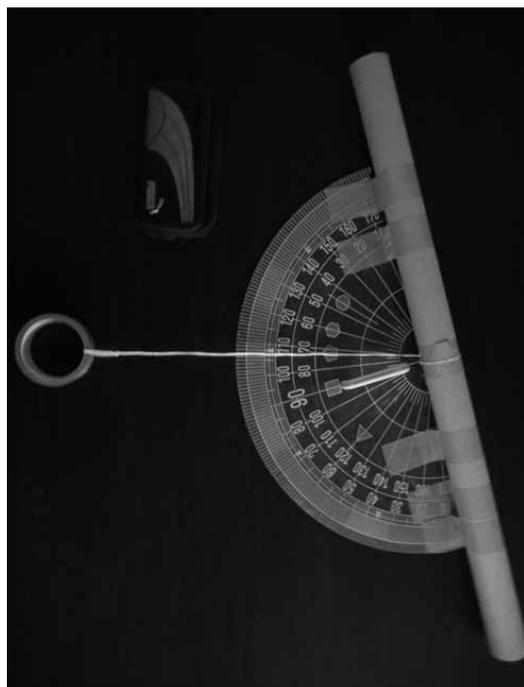
④2次関数の最大・最小（文字を含む2次関数）

$y = x^2 - 2ax + 2a$ ($0 \leq x \leq 2$) で、 y の最大値、最小値を求める課題に対して、 a の値に実数値を代入したグラフをいくつかかくことで、 $y = x^2 - 2ax + 2a$ のグラフが a の値によってどのように変化するか、 a の値によらず変化しないものは何かを探る活動である。 a の値が変化すると、頂点が放物線上を動くこと、 a の値によらず $(1, 1)$ を通ること、すべて合同な図形（放物線）になることが出て、生徒間の話し合いにより、その理由を説明できた。

⑤測量（校舎の高さを調べる）

校舎の高さをどうやったら直接測らずに求めることができるかという課題に対して、いくつかのアイデアを共有し、そのうちの1つを用いて計算する活動である。ある人を校舎の近くに立たせて校舎の高さがその人の身長は何倍かを目測する、影の長さを求める、既に高さがわかっている建物の屋上からみる、校舎から一定の距離の位置から校舎の屋上までの仰角を測定するなどのアイデアが出て、仰角を求めるアイデアを採用し、手作りの装置を製作して測定した。測定して計算した結果、校舎の設計図にある値よりも約

1 m大きな値が計算で求まった。



⑥ π の近似 (周の長さ, 面積)

半径 1 の円に内接する正三角形, 正方形, 正五角形, 正六角形, 正八角形の周の長さや面積を求めて, 円周率 $\pi = 3.141592\dots$ の値にどこまで近づくのかを調べる活動である。面積よりも周の長さを求めた方が, 円周率 π の値に近づくのが早いという結論を得た。

これらの 6 つから 1 番目, 2 番目によかったと思うものを選ばせた。また数名の生徒には, よかったと思う理由とそうでないと思う理由をインタビューした。

(2) 調査の結果

高校 1 年生 38 名を数学の達成度 (定期試験の結果) から上位群 13 名, 中位群 13 名, 下位群 12 名に分けて, 1 番目, 2 番目によかったと回答した生徒の数を整理すると表 4 になる。

表 4

	① 演繹課題	② 背理法	③ 絶対値を含む関数	④ 2 次関数の最大・最小	⑤ 測量	⑥ π の近似
上位群 n=13	1 (0) 2 (2)	1 (2) 2 (2)	1 (1) 2 (1)	1 (6) 2 (4)	1 (0) 2 (1)	1 (4) 2 (3)
中位群 n=13	1 (2) 2 (1)	1 (3) 2 (0)	1 (1) 2 (4)	1 (4) 2 (3)	1 (2) 2 (3)	1 (1) 2 (2)
下位群 n=12	1 (3) 2 (5)	1 (0) 2 (0)	1 (1) 2 (2)	1 (0) 2 (0)	1 (7) 2 (4)	1 (1) 2 (1)

() 内は人数を表す。

表 4 から, 数学の達成度の上位群は, ④ 2 次関数の最大・最小 (1 と 2 あわせて 10 名), ⑥ π の近似 (1 と 2 あわせて 7 名) に多く, 下位群は⑤ 測量 (1 と 2 あわせて 11 名), ① 演繹課題 (1 と 2 あわせて 8 名) に多い。上位群と下位群では, よかったと思う活動に違いが見られる。上位群の生徒 2 名 (生徒 A, B), 下位群の生徒 2 名 (生徒 C, 生徒 D) に行ったインタビューでは次のようなコメントがあった。

<上位群：生徒 A>

「④は, 自分一人では気づかなかったことが他の人の考えを聞くことで知ることができ, 他の問題を解くときにも役に立ちそうなのでよかった。⑤は, どうでもいいような意見が出たときにはどうしようかと思った。」

<上位群：生徒 B>

「⑥は, 友達の説明を聞いて自分の考え方で合っていることが確認できたのでよかった。 π はもうわかっていることだと思っていたのに, 結構深かった。②は証明するのが難しいと思ったけど, 外角を考えるというのにはやられた。時間がかかったけど楽しかった。」

①はなるほどとは思ったけど, 話し合いの時間が長すぎて退屈した。」

<下位群：生徒 C>

「⑤は, 三角比を使ったら結構正確な値が出るんだって驚きでした。どうでもいいかもしれないけど, 角度を測定する装置に好きに名前をつけるというのが楽しかった。毎回こんなことしたい。②は, 予想するまではまだいいけど, 背理法を考えるなんて無理。絶対に自分一人では思いつかないと思う。」

<下位群：生徒 D>

「①は, クイズみたいで楽しかったです。友達と話してだんだんわからなくなってきたんだけど, 命題の逆・裏・対偶というので判断できると知り, すっきりしました。数学をこんなところで使うことができるんだなあと思いました。また普段は論理的に考えることができているなと感じました。④は, みんなが言っていることについていくのが大変でした。変わるものは何で, 変わらないものは何かなんて考えているとこんがらがってきました。文字がいっぱい出てきて難しかったです。」

(3) まとめ

表 4 から, 数学の達成度による学習意欲の違いはあるといえる。上位群は, 数学の問題を解くのに役に立つような数学的な処理の方法を知ること, 意欲をもつようである。「数学の再構成」に関わる授業をよいと思う傾向がある。一方下位群は, 数学そのものよりはむしろ数学を用いて問題解決に取り組むことに意欲

をもつようである。「数学の活用」に関わる授業をよいと思う傾向がある。生徒Bのコメントから、「多様なアイデア」に関わる授業では、時間管理と教師の介入による議論の練り上げが必要であるといえる。つまりアイデアを広げる際には、生徒からいろいろ引き出し、深める際には、教師と生徒、生徒間のやりとりの中で焦点化し、新たな課題を設定するなど工夫するとよい。

4-3. 指導への含意

本研究では、思考力・判断力・表現力の育成に向け、言語活動を充実させた数学科の授業構成について「多様なアイデア」、「数学の活用」、「数学の再構成」という3つの視点を重視して指導実践やインタビューなどの調査を行った。その結果として、次のようなことがいえる。

- ・単なる話し合いではなく、数学的に広がりや深まりのある活動を行うことが重要である。生徒には気づいたことやわかったことについて話し合わせることもよいが、わからなかったこと、特に何故そうなるかがわからなかったことについても話し合わせることも大切である。このことは、生徒の数学の理解とも大いに関わる。
- ・答えだけでなく、問題解決のプロセスを数学的な言語を用いて表現させることが重要である。そのために教師は、既習内容など指導の系統性を意識するとともに、理解の様子や達成度などの生徒の学習の状況を適切に把握する必要がある。教師が指導する場面、生徒が活動する場面のバランスを考慮する。
- ・活動の目的を明確にし、教師が時間管理を適切に行うことが重要である。生徒のアイデアを引き出すだけでは不十分であり、教師と生徒、生徒間のやりとりの中で焦点化し、新たな課題を設定するなど工夫することで生徒の学習意欲が高まる。
- ・数学の達成度による学習意欲の違いがある。達成度の上位群は、数学の問題を解くのに役に立つような数学的な処理の方法を知ることにより意欲をもつ。「数学の再構成」に関わる授業をよいと思う傾向があ

る。また、下位群は、数学そのものよりはむしろ数学を用いて問題解決に取り組むことに意欲をもつ。「数学の活用」に関わる授業をよいと思う傾向がある。

5. 今後の課題

本稿では、言語活動を充実させた数学科授業を考案・実施し、授業中の生徒の反応や授業後のインタビュー調査を通して、本質に迫る議論や思考の深化につながる授業開発を目指した研究を行った。今後は、数学の単元ごとにどのような指導が可能かを検討するとともに、発問の工夫などにも取り組みたい。また生徒の記述の変化に着目した検討も課題である。さらに、言語活動を充実させた授業が生徒の思考力・表現力・判断力の育成にどのように寄与するかについても考察したい。

参考文献

- 1) 文部科学省 (2008), 『中学校学習指導要領解説 数学編』, 教育出版.
- 2) 文部科学省 (2011), 『高等学校学習指導要領解説 数学編 理数編』, 実教出版.
- 3) 文部科学省 (2012), 『言語活動の充実に関する指導事例集 (中学校版) 思考力, 判断力, 表現力等の育成に向けて』, 教育出版.
- 4) 江森英世 (2012), 『算数・数学授業のための数学的コミュニケーション論序説』, 明治図書.
- 5) 砂原徹 (2001), 「数学的活動の楽しさを知る授業モデル」『中学校新数学科の授業モデル 3 第3学年編』, 明治図書, pp.18-22.
- 6) 鈴木明裕 (2012), 「「事実・手続き」「根拠」「着想」の3つの柱をもとに考えることの提案」, 日本数学教育学会誌『数学教育』, 第94巻, 第7号, pp.19-22.
- 7) 両角達男 (2012), 「図形の証明の学習導入期にみられる言語活動」, 日本数学教育学会誌『数学教育』, 第94巻, 第7号, pp.27-30.