最大誤差制約下最小２乗法
・状態空間モデルを用いた
多次元ディジタルフィルタ設計

１９９７

土　井　章　充

①

最大誤差制約下最小２乗法
・状態空間モデルを用いた
多次元ディジタルフィルタ設計

１９９７

土井章充

概　要

本論文は、筆者が広島大学大学院工学研究科システム工学専攻において行ったディジタルフィルタの設計に関する研究をまとめたものである。

第 1 章は序論であり、本研究の背景および従来行われてきた研究の概要、問題点を述べた後、それらの問題点に対する本研究の関係について示している。

第 2 章では、最大誤差制約条件下で最小 2 乗誤差をもつ 2 次元 FIR フィルタの設計法について論じている。まず、重み付き最小 2 乗法によるフィルタ設計法と、最大誤差を制約するための重み係数更新アルゴリズムについて論じた後、設計に要する計算量の低減を図るために、Lagrange 乗数法による設計法を提案している。次に、直線位相フィルタを設計する場合と、実質的な遷移域幅を固定する場合の設計法の変更点が、それぞれ示されている。最後に、数値例を与え理論の有効性を確認している。

第 3 章では、安定性の保証された 2 次元 IIR フィルタの設計法について論じている。まず、Roesser モデルと Fornasini-Marchesini(FM) 第 2 モデルの記述を行いその安定条件を示した後、これらの 2 つの状態空間モデルに基づく安定な分母多項式係数の設計法について論じている。次に、分母多項式係数を固定して分子多項式係数を設計する方法を述べている。本設計法の特長は、分母多項式係数の設計法と分子多項式係数の設計法を分離独立させることで、分子多項式係数の設計を線形最適化問題に帰着した点であり、これによって計算量の低減を図っている。設計例では、従来法と比較して計算時間が 2 分の 1 以下になっていることを確認している。

第 4 章では、多次元ディジタルフィルタの空間領域設計について論じている。まず、Roesser モデルによる分母分離形多次元ディジタルフィルタの状態空間記述が与えられる。次に、所与の多次元 FIR ディジタルフィルタを形式的に 1 次元システムを用いて表現した後、平衡実現による低次数近似と最小分解の繰り返しによってフィルタを設計する手法について論じている。数値例では、2 次元および 3 次元ディジタルフィルタの設計を実行し、理論の正当性を検証している。

第 5 章では、適応アルゴリズムを用いた、FM 第 2 モデルに基づく、2 次元状態空間ディジタルフィルタの設計について論じている。まず、出力信号に対する各係数行列の勾配を計算し、それを用いた LMS 適応フィルタを構成している。次に、状態変換を行い、参照信号を入力の一部として利用するによってフィルタ次数を低減する手法についても論じている。数値例では、これらのアルゴリズムを 2 次元ガウシアンフィルタの設計に応用した例を示している。

第 6 章は、本論文の結論であり、本研究による成果をまとめた後、今後に残された研究課題について言及している。

目次

第 1 章

序　論

1.1　本研究の背景

実データの多くが本来は多次元信号である。昨今、CCD 画像センサ、X 線や NMR コンピュータ断層写真撮影センサ、地震用アレイ、音響用アレイ等の多次元センサアレイが広く利用できるようになり、近年のハードウエア技術や並列処理技術の発展に伴うディジタル演算能力の飛躍的な向上や、LSI 及び MOS 半導体メモリの進歩により大容量のメモリが安価に入手できるようになってきたこと等があいまって、多次元ディジタル信号処理は最近益々重要になってきている。多次元ディジタル信号処理の応用分野には、画像処理、地球物理信号処理、センサアレイ信号処理等が含まれており、その範囲は今後ますます拡大する傾向にある。

多次元信号が 1 次元信号と異なる点として、1) データ量の多さ、2) 標本化構造の多様さ、3) 周波数軸 (あるいは空間軸) に関する対称性の存在、4) 数学的な取り扱い方の相違、などが挙げられる。このため、多次元信号の処理に 1 次元信号処理の理論の拡張が利用できない場合も多く存在する。この 1 例として、代数の基本定理の欠如に起因するシステムの安定性の問題が挙げられる。1 次元の場合、システムの伝達関数の分母多項式が 1 次と 2 次の多項式に分解できることが保証されており、安定性のチェックやシステムの安定化が容易に行えるが、多次元の場合、分母多項式の低次多項式への分解が保証されておらず、安定性のチェックやシステムの安定化が非常に困難になる。こうした問題に対処するためには、多次元信号の特徴を考慮した信号処理手法の確立が必要になる。

さて、多次元ディジタル信号処理には FFT、フィルタリング、スペクトル推定、データ圧縮、標本化構造変換、その他多くのものが存在するが、中でも多次元ディジタルフィルタと多次元 FFT はその中心的な重要な役割を演じている。特に多次元ディジタルフィルタの用途は画像の平滑化や強調、地震波やレーダー、ソナーの信号処理、標本化構造変換の前後処理、その他広範囲に及んでおり、従来から非常に多くの研究が活発に行われている。一般に、多次元ディジタルフィルタは非巡回形 (FIR) と巡回形 (IIR) に大別され

る。非巡回形は線形位相が厳密に得られると共に、安定性が常に保証されるという特長がある。一方、巡回形では、所望の設計仕様が与えられたとき、非巡回形に比べて比較的少ない記憶容量と演算量で所与のフィルタ特性を実現できるという利点がある。多次元ディジタルフィルタを非巡回形を用いて実現するか、巡回形で実現するかについては周囲の状況や使用目的、経済性を加味して決定されることになる。また、設計仕様については周波数領域または空間領域のいずれかで与えられる。さらに、周波数領域の設計仕様は振幅応答と位相特性 (群遅延) とに分けられる。このように、多次元ディジタルフィルタの設計法は仕様の与え方によっても違ってくる。従って、フィルタ構造や設計仕様に対応して多次元ディジタルフィルタの設計問題を論じる必要がある。これらのフィルタの設計法に関する既存の研究とその問題点について以下で概説する。

周波数領域での代表的な 2 次元 FIR ディジタルフィルタの設計法 [1],[2] として、1) 窓関数法、2) 周波数標本化法、3) マクレラン変換等の周波数変換による方法、4) 何らかの基準に基づいた最適設計法、等が挙げられる。これらのうち 1)~3) の手法は比較的容易にフィルタを設計できるものの、何らかの基準において最適なフィルタを得ることができないという欠点がある。何らかの意味で最適なフィルタを得るためには 4) の手法を用いる必要があり、多くの場合、設計基準として最小 2 乗誤差基準 [3]~[5] かミニマックス基準 [6]~[8] のどちらか一方が用いられる。これらの基準に基づく最適設計法はすでに幾つか提案されているが、これらの基準は最大誤差又は 2 乗誤差の一方のみを考慮したものであり、他方の基準に関しては全く考慮されていない。一般に、設計基準の最適性は入力信号のスペクトルに依存する。そのためこれらのいずれか一方の設計基準を用いてフィルタを設計した結果が常に最適であるとは限らないという問題点が存在する。この問題に対して、最近 Lagrange 乗数法を用いることで、最大誤差を制約した条件のもとで阻止域の 2 乗誤差が最小となる 1 次元 FIR フィルタを設計する手法が提案されている [9]。しかし、多次元の場合においてこれに類する研究は発表されておらず、また、2 次元の場合には 1 次元のそれと異なり、帯域端が点でなく線または点の集合で与えられるなどの理由から文献 [9] の手法を単純に多次元に拡張するのは困難であるという問題点がある。

周波数領域における 2 次元 IIR フィルタの設計法 [10] として、1) 1 次元アナログフィルタからの変換による方法、2) 低次元分解に基づく方法、3) 最適化による方法、等が挙げられる。ある意味で最適なフィルタを得るためには 3) の手法を用いる必要があるが、この場合には同時に安定性の検証も行われなければならない。先に述べたように伝達関数表現における 2 次元 IIR フィルタの安定性の検証は非常に困難である。また、2 次元 IIR フィルタの設計ではフィルタ係数は非線形最適化手法によって決定されるため、計算量が非常に大きくなるという欠点があった。この問題を解決するため、伝達関数表現における分母多項式係数と分子多項式係数を独立に取り扱うことで、分母多項式係数の設計で群遅延特性を、分子多項式係数の設計で振幅特性をそれぞれ分担して近似し、さらに分母多項式の構造を分離形に限定することによって、安定なフィルタを比較的少ない計算量で設計する手法が提案されている [16],[23]。しかしながら、この手法では分母分離形しか取り扱

われておらず、一般形での設計法については言及されていない。一方、2 次元局所状態空間モデルによるフィルタ設計法ではリアプノフ方程式に基づく安定条件が導出されており、これに基づくフィルタ設計法が既に提案されている [13],[14]。しかしながら、この手法ではフィルタパラメータの全てが非線形最適化手法で求められており、設計に必要な計算量が非常に大きなものになるという問題点が存在している。

一般に、空間領域における設計では設計仕様としてインパルス応答が与えられ、それを近似するような差分方程式もしくは状態空間モデルを求めることになる。空間領域の設計には伝達関数 (差分方程式) に基づいた手法も存在するが、そのほとんどは状態空間表現に基づくものである。状態空間モデルを用いることには、1) 係数感度や丸め誤差に対する特性の優れたフィルタが得られること、2) 構造が並列処理に向いていること、3) 近似と実現を同時に行うことができ、多次元の場合困難な伝達関数から状態空間モデルへの低次元実現を考える必要がないこと、などの利点がある。しかしながら、従来の状態空間モデルを用いた設計問題のほとんどは、1 次元もしくは 2 次元ディジタルフィルタの設計に関するものであり、多次元ディジタルフィルタの設計法としては、伝達関数表現によるものしか見かけられない [24]~[36]。したがって、以上のような利点を持つ、状態空間モデルによる多次元ディジタルフィルタの設計法を開発することは重要な研究課題である。

ところで、近年適応信号処理に関する研究が活発に行われている。適応フィルタの構造として最もよく用いられているのは適応 FIR フィルタであるが、フィルタ性能の向上や演算量の軽減を目的として適応 IIR フィルタ [45],[46] や状態空間適応フィルタ [47] 等が提案されている。2 次元の場合においても適応フィルタに関する研究 [49]~[60] は活発に行われており、最近 Roesser モデルに基づく 2 次元状態空間適応フィルタが提案された [59]。2 次元の場合よく知られている局所状態空間モデルとして、Roesser モデルの他に Fornasini-Marchesini 第 2 モデル [20] が挙げられるが、これに基づく 2 次元状態空間適応フィルタはまだ提案されていない。

1.2 本研究の内容

本研究は前節で述べられた諸問題の解決を目的として行われた研究をまとめたものであり、その内容は以下に示す通りである。

第 2 章では、周波数領域における 2 次元 FIR フィルタの設計法について論じている。ここでは最小 2 乗近似やミニマックス近似を行った際に発生する問題点を避けるため最大誤差制約条件下で最小 2 乗誤差を有する 2 次元 FIR フィルタの設計法について提案している。本手法では 1 次元の場合における研究 [9] を 2 次元のそれに拡張する際に発生する諸問題を避けるために、通過域を等リップルとする条件を取り除き、繰り返し重み付き最小 2 乗法を用いることで 2 次元の場合におけるフィルタ設計を可能にしている。また、繰り返し重み付き最小 2 乗法によって制約すべき評価点が限定できた後で、Lagrange の未定乗数法を用いることによって設計に必要な計算量を低減する手法を与えている。さらに、

所与の仕様が線形位相で周波数軸や原点に対して対称性をもつ場合のフィルタ設計法についても考察している。また、最大誤差に対する制約を緩めることによって実質的な遷移域幅が広がるという問題点について考察し、最大誤差に対する制約条件とは別に、帯域端の誤差に対して新たに制約条件を課することによって、この問題点を解決する方法について述べている。数値例では、複素係数フィルタ、線形位相フィルタ、実質的な遷移域幅を固定した線形位相フィルタの3つについてフィルタ設計をおこない、いずれの場合においても本設計法が有効性であることを確認している。

第3章では、安定性の保証された2次元IIRフィルタの設計法について論じている。ここではフィルタ設計を分子多項式の設計と分母多項式の設計に分離し、分母多項式として2次元局所状態空間モデルより得られる多項式を用いることによってフィルタの安定性を保証する一方、分子多項式係数の設計を分母多項式係数の設計と独立に取り扱うことによって設計に要する演算量を低減する方法を提案している。まず、安定な2次元局所状態空間モデルと伝達関数表現との関係を示した後、交互変数法 [22] による分母係数の最適化法を示し、続いて分子多項式の係数の最適化について論じている。分子多項式の係数決定は線形方程式を解くことによって行われるため、これに必要な演算量は従来法と比較して非常に少なくなる。設計例では、Fornasini-Marchesini 第2モデルに基づく従来法と本方法に要した計算時間を比較し、実際に演算量が低減されていることを示している。

第4章では、Roesser モデルに基づく多次元IIRディジタルフィルタの空間領域設計法について述べている。最初に、フィルタを記述した後、分母分離形多次元ディジタルフィルタが多入力多出力の1次元ディジタルフィルタの縦続接続によって表現できることを示している。続いて、フィルタの設計問題について定式化している。まず、所与の多次元FIRディジタルフィルタを形式的に多入力多出力の1次元FIRディジタルフィルタで表現した後、それを状態空間モデルで実現し、平衡実現 [40] を用いることで低次数モデルによる近似を行っている。続いて、得られたフィルタに対して最小分解を施し、それによって得られる2つのFIRフィルタに対して同様の平衡実現、低次数モデルによる近似を行っている。それを繰り返し、得られた1次元多入力多出力ディジタルフィルタを組み合わせることによって、多次元ディジタルフィルタを得ている。また、実現、近似される1次元FIRディジタルフィルタが1入力、もしくは1出力であるときには平衡実現による近似の代わりにインパルス応答グラミアンによる近似を行い、部分的に逆行列の計算を不要にして、設計に要する計算量を低減している。この結果、2次元IIRディジタルフィルタの設計の際には逆行列の計算が一切不要になる。この章で述べられている手法は従来2次元の場合において提案された低次元分解 [38] の考え方を多次元に拡張したものであるが、本方法を2次元IIRディジタルフィルタの設計に応用した場合でも、従来法より少ない計算量でフィルタを設計することが可能である。また、本方法で得られたフィルタの安定性は常に保証されている。

第5章では、適応アルゴリズムを用いた、Fornasini-Marchesini 第2モデルに基づく2次元状態空間フィルタの空間領域設計法について論じている。ここでは、係数感度と中間

伝達関数の関係から勾配を求めるための新しいシステムを導出し、それを用いてLMSアルゴリズムによる適応フィルタを構成している。また、状態空間モデルの特長であるフィルタ構成における自由度を利用し、参照信号を入力信号の1部として用いることによって、状態空間モデルの次数を低減し、適応に必要な計算量を削減する方法についても論じている。設計例では、これらのアルゴリズムを2次元ガウシアンフィルタの設計に応用し、理論の有効性を確認している。

第 2 章

最大誤差を制約した最小 2 乗誤差 FIR フィルタの設計

2.1 諸 言

2 次元 FIR ディジタルフィルタの設計法は、マクレラン変換などの変数変換に基づく設計法をはじめとする間接的な手法 [2] と、なんらかの評価基準に基づく最適設計法の 2 つに大別される。前者は、一般に非常に簡単な手続きでフィルタを設計することが可能であるという利点を持つが、一般にある基準に対して最適なフィルタを得ることはできない。そのため、何らかの基準に対して最適なフィルタを得るためには、後者を用いる必要がある。

後者によってフィルタを設計する際、最も広く用いられる評価基準として最小 2 乗 [3]~[5] 基準とミニマックス [6]~[8] 基準の 2 つが挙げられる。これらの基準に基づくフィルタ設計法は多くの研究者によって研究がなされており、これまでに様々な最適設計法が提案されている。しかしながら、実際の応用に当たってはこれら 2 つの基準のいずれか 1 つを用いることが必ずしも最適であるとは限らない。例えば、入力信号が広範囲にわたってほぼ一様に分布している場合、阻止域のエネルギーが大きくなるミニマックス基準によるフィルタよりも、誤差のエネルギーが最小となる最小 2 乗基準によるフィルタを用いる方が望ましい。しかし、最小 2 乗フィルタはよく知られるギブス現象によって阻止域端での利得が大きくなるため、入力信号が阻止域端で大きなスペクトルを持つ場合には不適切である。ほとんどの場合、入力信号のスペクトルは不明であり、このことは阻止域において両方の基準を考慮する必要があることを意味している。そこで、本章では最大誤差をある一定の大きさに制約するという条件のもとで、2 乗誤差が最小となる 2 次元 FIR フィルタの設計法について提案している。具体的な設計アルゴリズムとして、重み付き最小 2 乗誤差に基づくフィルタ係数決定の繰り返しによって最大誤差を制約しながら 2 乗誤差を最小化する手法を提案している。この手法はフィルタ設計に必要な繰り返し回数が非常に大きくな

るという欠点を持っているため、繰り返しの途中でフィルタの係数決定法を Lagrange の未定乗数法に切替えることによって、計算量の低減を図る手法を提案している。また、最大誤差に対する制約条件が厳しい場合と緩やかな場合では、実質的な遷移域幅が異なる。これは通常、帯域端で設計誤差が最大値をとるためである。遷移域の変動幅は設計されるフィルタの次数や仕様によって異なるが、この変動が許容できない場合には、実質的な遷移域幅を固定したフィルタ設計法が必要になる。本章では、この問題についても考察し帯域端の最大誤差に対して新たな制約条件を課することによってこの問題を解決する手法を提案している。

本章の構成は次の通りである。まず、第 2 節ではフィルタの記述と問題の定式化を行い、第 3 節ではフィルタ設計のアルゴリズムについて述べている。第 4 節では、設計されるフィルタに完全な線形位相を保証した場合の変更点について説明し、第 5 節では実質的な遷移域幅を固定する場合について考察している。第 6 節では、複素係数をもつ低域通過フィルタ、完全な線形位相をもつダイヤモンドフィルタの設計例と、さらに後者と同じ仕様をもち、実質的な遷移域幅を固定した場合についての設計例を示し、本手法の有効性を確認している。

2.2 フィルタ記述と問題の定式化

2 次元 FIR フィルタの周波数応答は、一般に次式で与えられる。

$$\begin{aligned} H(\omega_1,\omega_2) &= \sum_{n_1=0}^{N_1-1}\sum_{n_2=0}^{N_2-1} h(n_1,n_2)e^{-j(n_1\omega_1+n_2\omega_2)} \\ &= \boldsymbol{h}^t\boldsymbol{c}(\omega_1,\omega_2) \end{aligned} \tag{2.1}$$

但し、

$$\begin{aligned} \boldsymbol{h} = [&h_r(0,0)\ \cdots\ h_r(0,N_2-1)\ h_r(1,0)\ \cdots\ h_r(1,N_2-1)\ \cdots h_r(N_1-1,N_2-1) \\ &h_i(0,0)\ \cdots\ h_i(0,N_2-1)\ h_i(1,0)\ \cdots\ h_i(1,N_2-1)\ \cdots h_i(N_1-1,N_2-1)]^t \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \boldsymbol{c}(\omega_1,\omega_2) = [&1\ \cdots\ e^{-j(N_2-1)\omega_2}\ e^{-j\omega_1}\ \ldots\ e^{-j(\omega_1+(N_2-1)\omega_2)}\ \ldots\ e^{-j((N_1-1)\omega_1+(N_2-1)\omega_2)} \\ &j\ \cdots\ je^{-j(N_2-1)\omega_2}\ je^{-j\omega_1}\ \ldots\ je^{-j(\omega_1+(N_2-1)\omega_2)} \\ &\cdots\ je^{-j((N_1-1)\omega_1+(N_2-1)\omega_2)}]^t \end{aligned}$$

ここで、$h_r(i,j), h_i(i,j)$ はそれぞれインパルス応答 $h(i,j)$ の実部、および虚部を表す。

本節で取り扱うフィルタ設計問題とは、所望の周波数応答 $H_d(\omega_1,\omega_2)$ が与えられたとき、これをある意味で近似する複素三角多項式 (2.1) 式を与える $h(i,j)$ を求める問題、すなわち近似問題を指す。フィルタの設計問題に関しては、従来より様々な研究が行われているが、それらの研究のなかで近似の際の評価関数として最もよく用いられているのは、次に示す 2 つである。

1) 2乗誤差関数

$$E(\boldsymbol{h}) = \sum\sum_{(p,q)\in\Omega} |\epsilon(p,q)|^2 \tag{2.2}$$

2) 最大誤差関数

$$E(\boldsymbol{h}) = \max_{(p,q)\in\Omega} |\epsilon(p,q)| \tag{2.3}$$

但し、

$$\epsilon(p,q) = H_d(p,q) - H(p,q)$$

であり、(p,q) は周波数評価点 $(\omega_{1p}, \omega_{2q})$ の略である。また、Ω は周波数平面全体より遷移域を除いた領域である。

しかしながら、これらの評価基準では最大誤差又は2乗誤差の一方のみを考慮し、他方を完全に無視しているため、入力スペクトルが不明のときにはこれらのフィルタが必ずしも適当であるとは限らない。そこで、本章では次に示す評価関数を最小化することによって、フィルタを設計する。

$$E(\boldsymbol{a}) = \sum\sum_{(p,q)\in\Omega} |H(p,q) - H_d(p,q)|^2 \tag{2.4a}$$

但し

$$\begin{cases} |H(p,q) - H_d(p,q)| \le \delta_p\,, & (p,q)\in\Omega_p \\ |H(p,q) - H_d(p,q)| \le \delta_s\,, & (p,q)\in\Omega_s \end{cases} \tag{2.4b}$$

δ_p, δ_sはそれぞれ設計者によって設定される通過域及び阻止域における最大誤差であり、Ω_p, Ω_sは通過域及び阻止域を表す。すなわち、$\Omega = \Omega_p \cup \Omega_s$である。

2.3 フィルタ設計

2.3.1 重み付き最小2乗法による設計アルゴリズム

最初に、重み付き最小2乗誤差に基づく設計、すなわち、次に示す評価関数を最小化するフィルタ係数を求める問題を考える。

$$\begin{aligned} E(\boldsymbol{a}) &= \sum\sum_{(p,q)\in\Omega} w(p,q)\,|H(p,q) - H_d(p,q)|^2 \\ &= \sum\sum_{(p,q)\in\Omega} w(p,q)\left|\boldsymbol{c}^t(p,q)\boldsymbol{a} - H_d(p,q)\right|^2 \end{aligned} \tag{2.5}$$

但し、$w(p,q)$ は評価点 (p,q) における重み係数を表す。

定義: ベクトル $\boldsymbol{m}$ を大きさ n の実ベクトルとし、$f(\boldsymbol{m})$ をベクトル $\boldsymbol{m}$ のすべての要素で微分可能な関数とする。このとき、f の $\boldsymbol{m}$ に関する導関数を次のように定義する。

$$\frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{m}} = \left[\frac{\partial f}{\partial m_i}\right]$$

但し、m_iはベクトル $\boldsymbol{m}$ の第 i 要素である。

式(2.5) を $\boldsymbol{a}$ で微分すると、次式が得られる。

$$\begin{aligned} \frac{\partial E(\boldsymbol{a})}{\partial \boldsymbol{a}} &= \frac{\partial}{\partial \boldsymbol{a}}\left(\sum\sum_{(p,q)\in\Omega} w(p,q)(\boldsymbol{c}^t(p,q)\boldsymbol{a} - H_d(p,q))(\boldsymbol{c}^t(p,q)\boldsymbol{a} - H_d(p,q))^*\right) \\ &= \sum\sum_{(p,q)\in\Omega} w(p,q)\left\{\boldsymbol{c}^*(p,q)(\boldsymbol{c}^t(p,q)\boldsymbol{a} - H_d(p,q)) + \boldsymbol{c}(p,q)(\boldsymbol{c}^t(p,q)\boldsymbol{a} - H_d(p,q))^*\right\} \\ &= \sum\sum_{(p,q)\in\Omega} w(p,q)\mathrm{Re}[\boldsymbol{c}^*(p,q)\boldsymbol{c}^t(p,q)\boldsymbol{a} - \boldsymbol{c}^*(p,q)H_d(p,q)] \\ &= \boldsymbol{Q}\boldsymbol{a} - \boldsymbol{d} \end{aligned} \tag{2.6}$$

但し、

$$\boldsymbol{Q} = \sum\sum_{(p,q)\in\Omega} w(p,q)\mathrm{Re}[\boldsymbol{c}^*(p,q)\boldsymbol{c}^t(p,q)]$$

$$\boldsymbol{d} = \sum\sum_{(p,q)\in\Omega} w(p,q)\mathrm{Re}[H_d(p,q)\boldsymbol{c}^*(p,q)]$$

である。また、$\mathrm{Re}[\cdot]$ は $\cdot$ の実部を示し、*は複素共役を表す。式(2.6) を0とおくことによって、$\boldsymbol{a}$ は次の線形方程式を解くことによって求められる。

$$\boldsymbol{a} = \boldsymbol{Q}^{-1}\boldsymbol{d} \tag{2.7}$$

重み係数 $w(p,q)$ は、評価点 (p,q) における誤差の相対的な大きさを制御するパラメータで、このパラメータが大きくなるほどその評価点における誤差は小さくなる。従って、式(2.4b) における制約条件を満たすフィルタを設計するには、式(2.4b) の制約を満たさない評価点における誤差を制約条件下に収めるための重み係数の更新と、更新された重み係数を用いたフィルタ設計を繰り返せばよい。

本手法では、重み係数の更新を次のように行う。

$$w_{n+1}(p,q) = \frac{\hat{w}_{n+1}(p,q)}{\max\limits_{(p,q)}\left[\hat{w}_{n+1}(p,q)\right]}$$

$$\hat{w}_{n+1}(p,q) = \begin{cases} w_n(p,q)\left(\dfrac{|\varepsilon_n(p,q)|}{|\delta(p,q)|}\right)^r, & \varepsilon_n(p,q) \ge \delta(p,q) \\ w_n(p,q), & \text{その他} \end{cases} \tag{2.8}$$

但し、

$$\delta(p,q)=\begin{cases}\delta_p, & (p,q)\in\Omega_p\\ \delta_s, & (p,q)\in\Omega_s\end{cases}$$

ここで、添字 n は第 n 回目の繰り返しである事を意味する。また、r は試行錯誤的に決定される重み係数の収束を制御するパラメータである。

本手法のような、重み係数の更新とフィルタ係数決定の繰り返しによってフィルタを設計する手法は、しばしば 1 次元および多次元ミニマックスフィルタの設計にも用いられている。しかし、最大誤差の最小化を目的とするこれらのアルゴリズムとは異なり、本アルゴリズムは最大誤差を制約条件以下に制約しつつ 2 乗誤差を最小化するのを目的としたもので、重み係数の更新は制約条件を越える最大誤差を制約するためだけに用いられていることに注意する必要がある。本アルゴリズムの考え方を 1 次元的に図示したものを図 2.1 に示す。

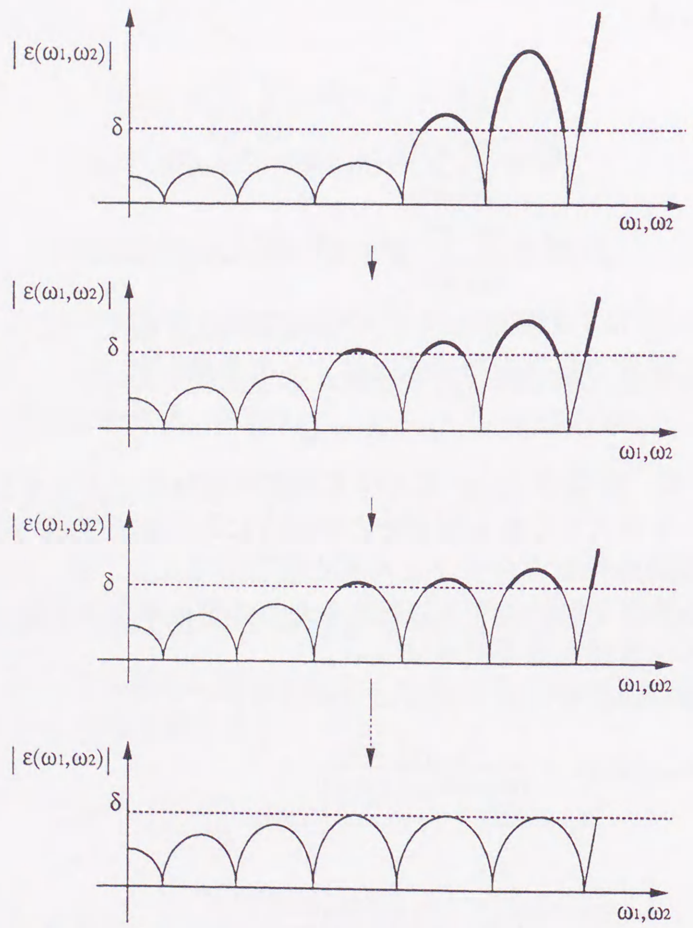


図 2.1. 重み係数による最大誤差制約アルゴリズム (太線は実質的に重み係数が更新される部分を表す)。

2.3.2 Lagrange 乗数法による設計アルゴリズム

前節で示したアルゴリズムを用いることによって、所望のフィルタを設計することが可能である。しかし、このアルゴリズムでは繰り返し過程において、設計されたフィルタが所望の仕様に近づくにつれ、収束に必要な繰り返し回数が多くなってしまう。これは、繰り返しが進むたびに実質的に重み係数を更新する箇所が減少し、また、重み係数の更新量が小さくなるためである。これを避けるために、より効率的にフィルタ係数を求めるアルゴリズムを次に考える。

上記のアルゴリズムが収束点に近づいたとき、実質的に重み係数を更新しなければならない評価点は、制約条件を越える誤差を持つ評価関数の極大値に位置する点とその付近に限定されてくる。この状態のときには重み係数の更新量はごく小さなものとなっているため、重み係数の更新によって評価関数の極大値をもつ評価点自体が大きく動くことはない。このような状態、すなわち、誤差を制約すべき評価点が限定された状態であれば、それらの評価点における誤差が与えられた仕様を満たすフィルタ係数を直接求めることによって、フィルタ設計に必要な繰り返し回数を減らすことができる。この具体的なアルゴリズムとして、次のものが考えられる。

(i) 誤差が極値をとる評価点のうち、誤差が制約条件を越えているものをすべて求める。但し、ここでの極値をとる評価点とは

$$\varepsilon(p\pm1,q)\le\varepsilon(p,q)\quad \text{かつ}\quad \varepsilon(p,q\pm1)\le\varepsilon(p,q)$$

である点を指すものとする。

(ii) (i) で求められた評価点（以下制約点と呼ぶ）に次の制約条件を課して、Lagrange の未定乗数法を用いてフィルタ係数をみつける。

$$\boldsymbol{c}^t(p_i,q_i)\boldsymbol{a}=\tilde{H}_d(p_i,q_i)\ ,\quad i=1,2,\cdots,M \tag{2.9}$$

但し、

$$\tilde{H}_d(p_i,q_i)=H_d(p_i,q_i)-\delta(p_i,q_i)\frac{\epsilon(p_i,q_i)}{|\epsilon(p_i,q_i)|}.$$

また、Mは得られた制約点の総数である。

式 (2.9) における制約条件は、次のように書き換えられる。

$$\boldsymbol{C}\boldsymbol{a}-\boldsymbol{e}=0 \tag{2.10}$$

但し、

$$\begin{aligned}\boldsymbol{C}&=[\boldsymbol{c}(p_1,q_1)\ \boldsymbol{c}(p_2,q_2)\ \cdots\ \boldsymbol{c}(p_M,q_M)]^t\\ \boldsymbol{e}&=\left[\tilde{H}_d(p_1,q_1)\ \tilde{H}_d(p_2,q_2)\ \cdots\tilde{H}_d(p_M,q_M)\right]^t\end{aligned}$$

この条件下における最適解は、次式によって与えられる（付録）。

$$a = \left[I - \hat{Q}^{-1}C^t(C\hat{Q}^{-1}C^t)^{-1}C\right]\hat{Q}^{-1}\hat{d} + \hat{Q}^{-1}C^t(C\hat{Q}^{-1}C^t)^{-1}e \tag{2.11}$$

但し、

$$\hat{Q} = \sum_{(p,q)\in\Omega}\sum \mathrm{Re}[\boldsymbol{c}^*(p,q)\boldsymbol{c}^t(p,q)]$$

$$\hat{d} = \sum_{(p,q)\in\Omega}\sum \mathrm{Re}[H_d(p,q)\boldsymbol{c}^*(p,q)]$$

$$C = [\ \mathrm{Re}[\boldsymbol{c}(p_1,q_1)]\ \ \mathrm{Im}[\boldsymbol{c}(p_1,q_1)]\ \ \cdots\ \ \mathrm{Re}[\boldsymbol{c}(p_M,q_M)]\ \ \mathrm{Im}[\boldsymbol{c}(p_M,q_M)]\ ]^t$$

$$g = [\ \mathrm{Re}[\tilde{H}_d(p_1,q_1)]\ \ \mathrm{Im}[\tilde{H}_d(p_1,q_1)]\ \ \cdots \mathrm{Re}[\tilde{H}_d(p_M,q_M)]\ \ \mathrm{Im}[\tilde{H}_d(p_M,q_M)]\ ]^t$$

但し、$\mathrm{Im}[\cdot]$ は $\cdot$ の虚部を表す。

(iii) 新しく求められた係数が所望の仕様を満たしていれば終了し、そうでなければ以上の過程を繰り返す。

このアルゴリズムの考え方を 1 次元的に示したものを図 2.2 に示す。

ステップ (i) からステップ (iii) を数回繰り返すことによって、所望の仕様を満たすフィルタを設計することができる。但し、所望の仕様が極めてミニマックスの仕様に近い場合には、制約点の数が多くなり、所望の特性を満たすフィルタを得るのが困難な場合もある。一般に制約点の数がフィルタ係数の数を越えた場合には、Lagrange の未定乗数法ではフィルタ係数を求めることができない。

結局、本設計法はまず重み付き最小 2 乗誤差に基づく手法を用いて、誤差を制約すべき評価点をある程度見極めた上で、Lagrange の未定乗数法を用いて最適解を求めるものであると言える。具体的なフィルタの設計法のフローチャートを図 2.3 に示す。ここで、α はあらかじめ与えられたパラメータである。α が大きすぎれば、Lagrange の未定乗数法によって適当な解が得られない場合があり、α が小さければ、図 2.3 における前半部分の繰り返し回数が多くなる。

本手法を用いれば、与えられた仕様が合理的なものであれば、その仕様を完全に満たすフィルタを設計することができる。しかし、δ_p, δ_s の値が合理的であるかどうかは簡単には判別できないため、これらの値を完全に任意に設定するのは困難である。そのため、実際に本手法でフィルタ設計を行う場合には、なんらかの手法を用いてプロトタイプフィルタを設計し、得られたフィルタの特性からこれらの値を設定する必要がある。

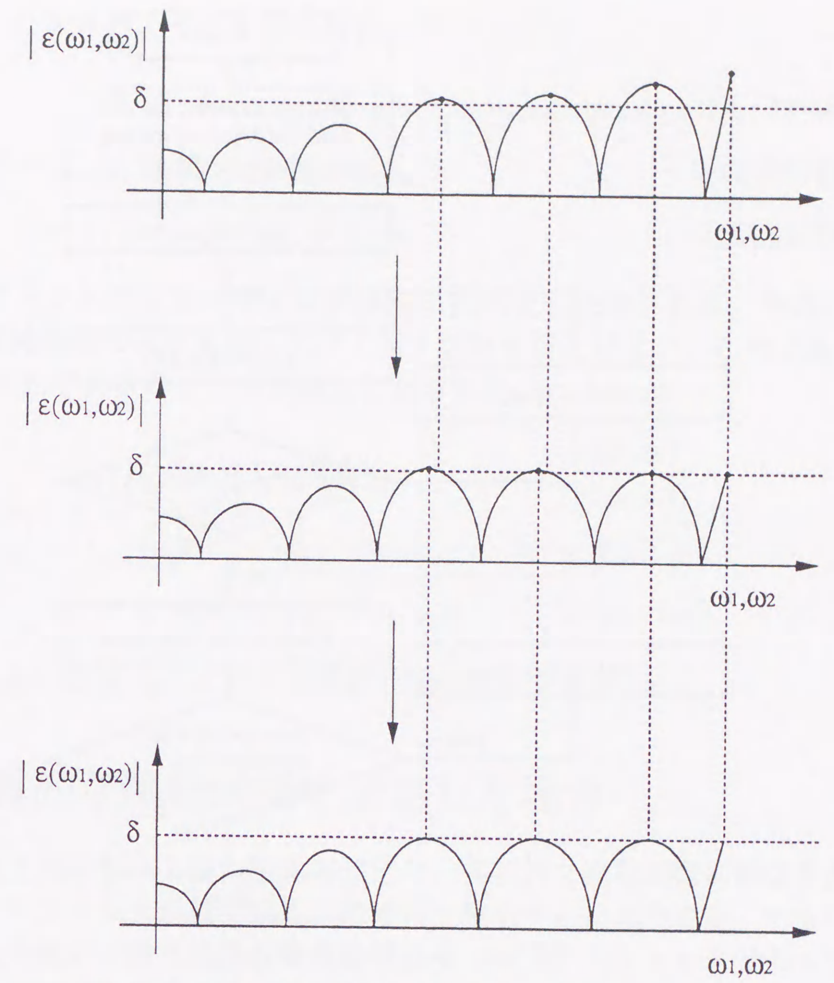


図 2.2. Lagrange 乗数法による最大誤差制約アルゴリズム (●は制約点をあらわす)。

2.4 線形位相を保証した場合

設計されるフィルタのインパルス応答が実数であるとき、インパルス応答に対称性を課すことによって、完全な線形位相が実現できる事が知られている。また、このとき振幅特性の対称性に応じてインパルス応答に適当な制約を加えることによって、フィルタ係数の数を減少させ、フィルタ設計に必要な計算量を低減することが可能であることも知られている。本節では、これらの条件が課されたときに発生する設計アルゴリズムの変更点について述べる。

線形位相をもつ 2 次元ディジタルフィルタの周波数特性は、次式によって与えられる。

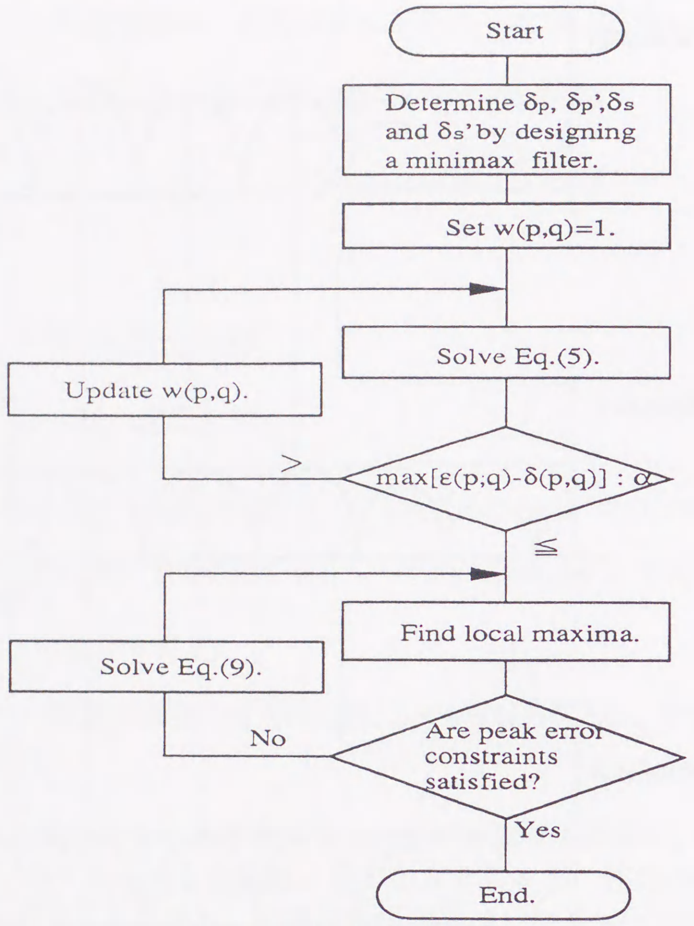


図 2.3. 本設計法の流れ図

$$
\begin{aligned}
H(\omega_1,\omega_2) &= \hat{H}(\omega_1,\omega_2)e^{-j(\frac{N_1-1}{2}\omega_1+\frac{N_2-1}{2}\omega_2)} \\
\hat{H}(\omega_1,\omega_2) &= \sum\sum_{(n_1,n_2)\in L} a(n_1,n_2)c_{n_1,n_2}(\omega_1,\omega_2) \\
&= \boldsymbol{h}^t\boldsymbol{c}(\omega_1,\omega_2)
\end{aligned}
\tag{2.12}
$$

但し、

$$
\boldsymbol{h} = [a(0,0)\ a(0,1)\ \cdots]^t
$$

$$
\boldsymbol{c}(\omega_1,\omega_2) = [c_{00}(\omega_1,\omega_2)\ c_{01}(\omega_1,\omega_2)\cdots]^t.
$$

ここで、L はフィルタの対称性とフィルタ次数に応じて決定される整数対であり、$a(n_1,n_2)$ は実数のフィルタ係数である。また、$c_{n_1,n_2}(\omega_1,\omega_2)$ はフィルタの対称性に応じて決定され

る関数であり、次式のように与えられる。

$$
c_{n_1,n_2}(\omega_1,\omega_2) = \begin{cases} \cos n_1\omega_1\cos n_2\omega_2 + \cos n_2\omega_1\cos n_1\omega_2 & (\text{8分対称のとき}) \\ \cos n_1\omega_1\cos n_2\omega_2 & (\text{象限対称のとき}) \\ \cos(n_1\omega_1+n_2\omega_2) & (\text{原点対称のとき}) \end{cases}
$$

このとき、フィルタの位相はフィルタ係数に関係なく決定される。そのため、この場合フィルタの振幅特性のみを考慮してフィルタ設計を行えばよい。このとき、$\tilde{H}_d(p_i,q_i)$, $\boldsymbol{C}$ および $\boldsymbol{g}$ はそれぞれ次のように定義しなおされる。

$$
\tilde{H}_d(p_i,q_i) = \hat{H}_d(p_i,q_i) - \delta(p_i,q_i)\frac{\epsilon(p_i,q_i)}{|\epsilon(p_i,q_i)|}
$$

$$
\boldsymbol{C} = [\boldsymbol{c}(p_1,q_1)\ \boldsymbol{c}(p_2,q_2)\ \cdots\ \boldsymbol{c}(p_M,q_M)]^t
$$

$$
\boldsymbol{g} = [\tilde{H}_d(p_1,q_1)\ \tilde{H}_d(p_2,q_2)\ \cdots\ \tilde{H}_d(p_M,q_M)]^t
$$

但し、$\hat{H}_d(p_i,q_i)$ は (p_i,q_i) における所望の振幅特性である。

2.5 実質的な遷移域幅を固定した場合

通過域、阻止域における最大誤差の設定は、実質的な遷移域幅に影響を及ぼす。これは通常ディジタルフィルタの最大誤差は帯域端で発生するためである。すなわち、遷移域の振幅特性の最大傾斜は最大誤差が最も小さいミニマックスフィルタで最も急峻であり、最大誤差に対する制約を緩めるにつれ次第にゆるやかになる。つまり、実質的に遷移域が広がっていく。これを具体的に示すため、1 次元等リップルフィルタ及び文献 [9] による通過域等リップル、阻止域最小 2 乗誤差フィルタの振幅特性を図 2.4 に示す。これを防ぐためには、通過域及び阻止域内での最大誤差に対する制約とは別に、帯域端における最大誤差を設定し、それを固定する必要がある。

従って、この場合最大誤差に対する制約条件は次のように設定される。

$$
\begin{cases}
|H(p,q)-H_d(p,q)| \le \delta_p\,, & (p,q)\in\Omega_{p1} \\
|H(p,q)-H_d(p,q)| \le \delta_p'\,, & (p,q)\in\Omega_{p2} \\
|H(p,q)-H_d(p,q)| \le \delta_s\,, & (p,q)\in\Omega_{s1} \\
|H(p,q)-H_d(p,q)| \le \delta_s'\,, & (p,q)\in\Omega_{s2}
\end{cases}
\tag{2.13}
$$

但し、Ω_{p2} と Ω_{s2} はそれぞれ通過域端および阻止域端を表し、Ω_{p1} と Ω_{s1} はそれぞれ通過域および阻止域から Ω_{p2} と Ω_{s2} を除いた領域である。δ_p' と δ_s' はそれぞれ通過域端及び阻止域端

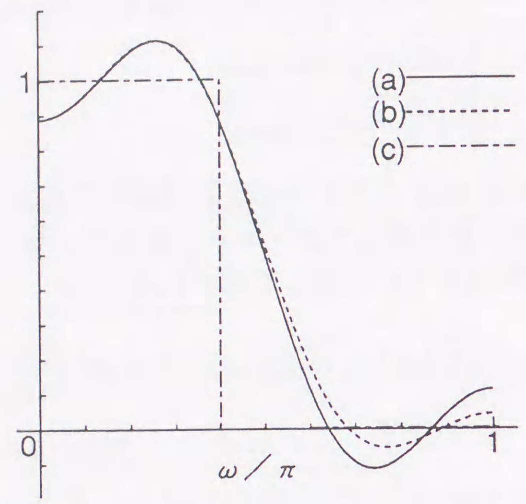


図 2.4 (a) ミニマックス基準で設計された 1 次元フィルタ、(b) 通過域で等リップル及び阻止域で最小 2 乗基準で設計された 1 次元フィルタの比較。ここで、(c) は振幅仕様を示す。

における最大誤差の制約条件であり、δ_pとδ_sを大きく設定することによって、実質的な遷移域幅が広くなるのを防ぐために設定される。すなわち、$\delta'_p \leq \delta_p, \delta'_s \leq \delta_s$ である。

2.6 設計例

以下の設計例では、設計されたフィルタを次に示す評価関数を用いて評価する。

$$\varepsilon_2 = \left\{ \frac{\sum\sum_{(p,q)\in\Omega} |H_d(p,q) - H(p,q)|^2}{\sum\sum_{(p,q)\in\Omega} H_d(p,q)^2} \right\}^{\frac{1}{2}} \times 100$$

$$\varepsilon_{s,\infty} = \max_{(p,q)\in\Omega_s} |H_d(p,q) - H(p,q)|.$$

なお、本節における設計例では通過域、阻止域、フィルタ次数、δ_p、δ'_p、δ'_sを固定して、δ_sのみを変動パラメータとしてフィルタの設計を行う。本設計例の中では、通過域における最大誤差を同一とする制約条件が課されているため、通過域における最大誤差については、以後言及しない。すなわち、設計例の中での最大誤差に関する記述は、すべて阻止域を対象としたものであるとする。

2.6.1 設計例 1 低域通過フィルタの設計

評価点 $(\omega_{1p}, \omega_{2q})$ を、次のように設定する。

$$\omega_{1p} = \frac{\pi}{32}p,\ \omega_{2q} = \frac{\pi}{32}q \quad (-32 \leq p, q \leq 32)$$

所望の周波通応答は、次式の通りである。

$$H_d(\omega_1, \omega_2) = \begin{cases} exp\{-j(\omega_1\tau_1 + \omega_2\tau_2)\}, & r \leq 0.4\pi \\ 0, & r \geq 0.6\pi \end{cases}$$

但し、

$$r = \sqrt{(\omega_1 - 0.125\pi)^2 + (\omega_2 - 0.125\pi)}$$
$$\tau_1 = \tau_2 = 3$$

設計仕様の振幅特性を図 2.4 に示す。また、設計されるフィルタの次数を 9×9 とする。

まず、文献 [7] の手法にしたがってプロトタイプフィルタの設計を行った。プロトタイプフィルタの最大誤差が 0.0924 であったことから、通過域における最大誤差をδ_p=0.0924 と設定し、阻止域における最大誤差δ_sを 0.100, 0.110, 0.120,$\cdots$, 0.170 としたときのそれぞれの場合について、本手法による設計を行った。このときの設計結果を表 2.1 に示し、これをプロットしたものを図 2.5 に示す。図 2.5 より $\delta_s = 0.110$ 付近では最大誤差の制約条件をわずかに緩めることによって、大幅に 2 乗誤差を低減できることがわかる。また、$\delta_s = 0.170$ 付近では逆に 2 乗誤差をほとんど減少させることなく最大誤差を大幅に低減できることが確認できる。プロトタイプフィルタおよび本手法で δ_s=0.110, 0.170 としたときの振幅特性および振幅誤差を図 2.6 から図 2.9 に示す。

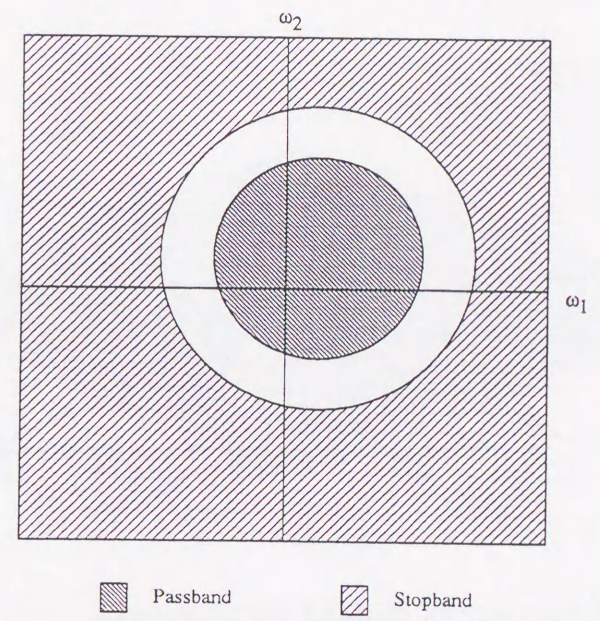


図 2.4 設計例 1 における設計仕様の振幅特性

表 2.1 設計例 1 の設計結果

	$\varepsilon_{\infty,s}$	ε_2	Number of iterations
Prototype	0.0924	13.76	
$\delta_s = 0.100$	0.100	10.62	8+1
$\delta_s = 0.110$	0.110	10.21	8+1
$\delta_s = 0.120$	0.120	9.87	8+1
$\delta_s = 0.130$	0.130	9.62	9+1
$\delta_s = 0.140$	0.140	9.46	9+1
$\delta_s = 0.150$	0.150	9.38	7+4
$\delta_s = 0.160$	0.160	9.36	5+1
$\delta_s = 0.170$	0.165	9.36	5+1

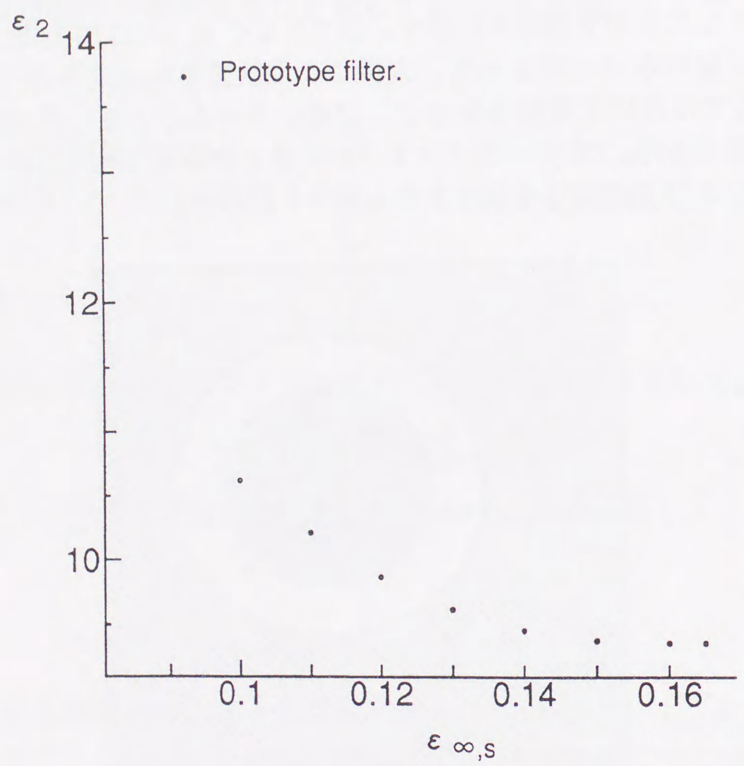


図 2.5 設計例 1 の設計結果

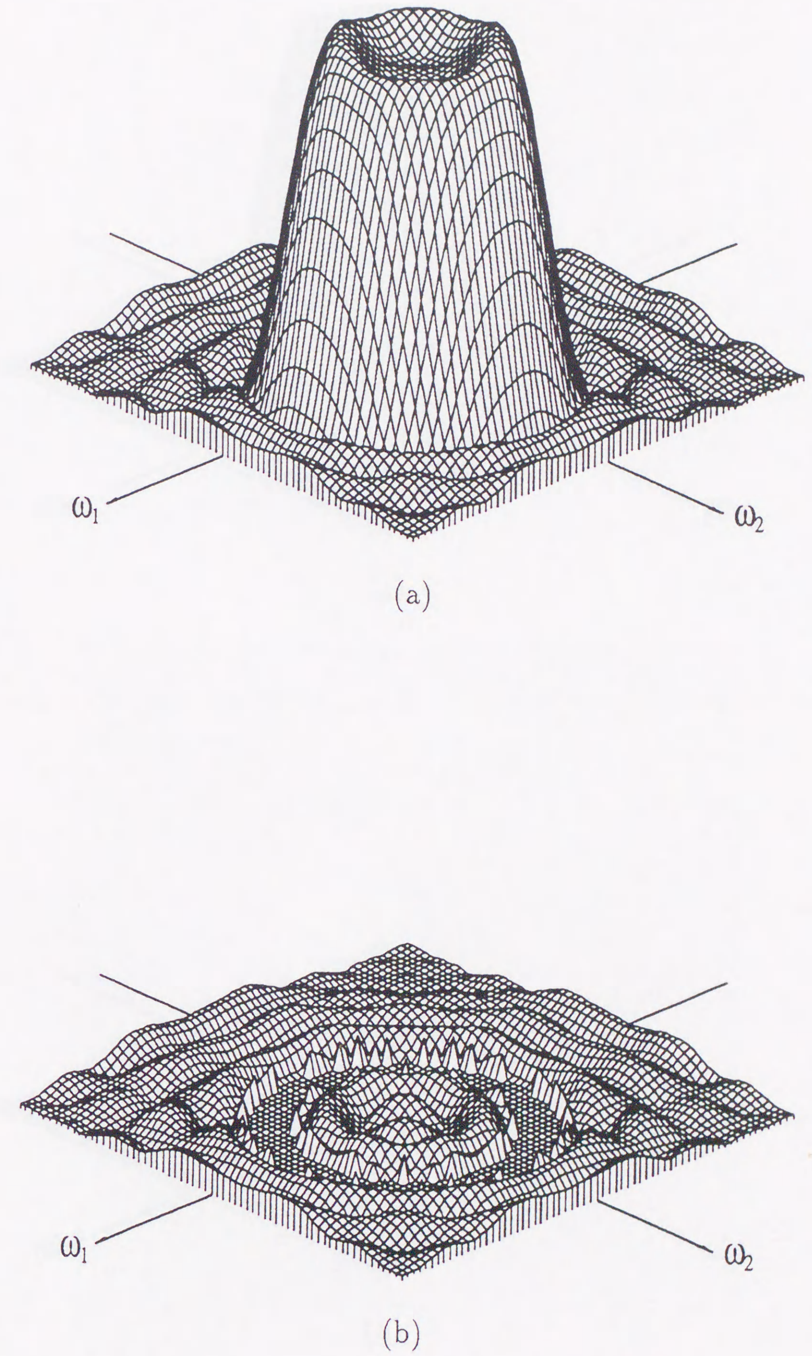
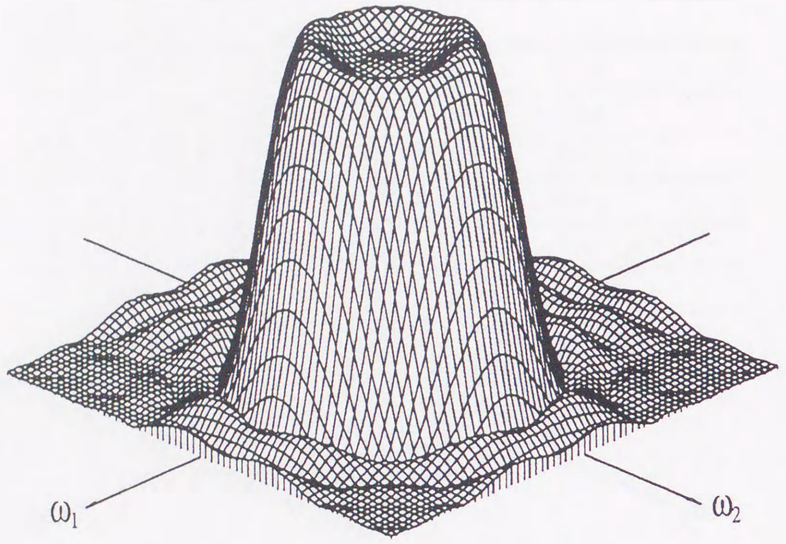
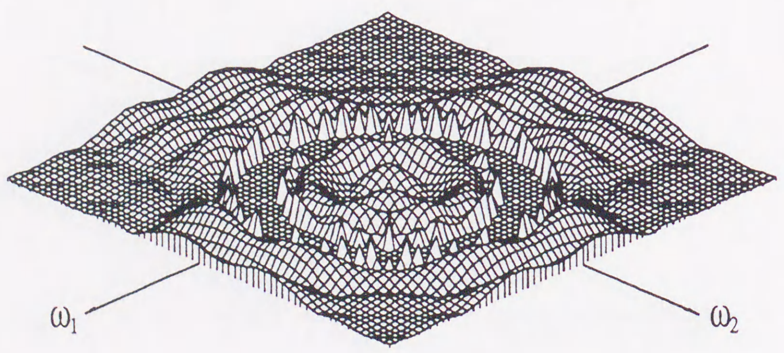


図 2.6 (a) プロトタイプフィルタの振幅特性および (b) 誤差関数の振幅特性

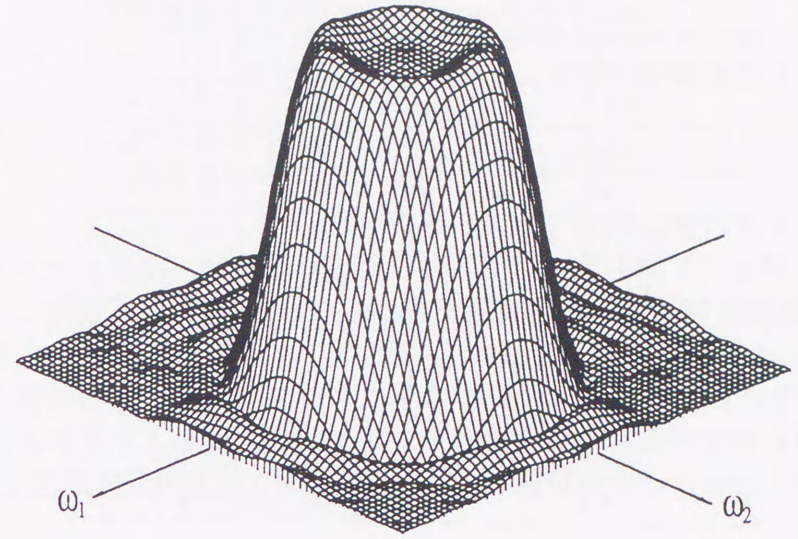


(a)

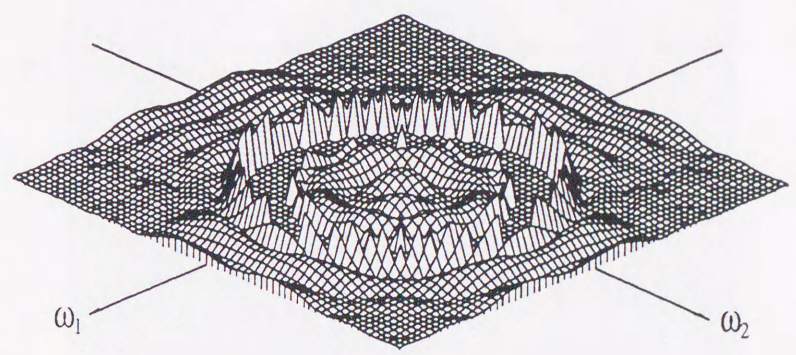


(b)

図 2.7 (a) 本手法によるフィルタの振幅特性および (b) 誤差関数の振幅特性 (δ_s=0.100)



(a)



(b)

図 2.8 (a) 本手法によるフィルタの振幅特性および (b) 誤差関数の振幅特性 (δ_s=0.170)

2.6.2　設計例 2　線形位相ダイヤモンドフィルタの設計

評価点 $(\omega_{1p}, \omega_{2q})$ を、次式によって設定する。

$$\omega_{1p} = \frac{\pi}{48}p,\ \omega_{2q} = \frac{\pi}{48}q \quad (0 \le p, q \le 48).$$

所望のフィルタの振幅特性を、次のように定義する。

$$H_d(\omega_1, \omega_2) = \begin{cases} 1, & |\omega_1| + |\omega_2| \le 0.4\pi \\ 0, & |\omega_1| + |\omega_2| \ge 0.6\pi \end{cases}$$

設計するフィルタの次数を 11×11 とする。

設計例 1 と同様にプロトタイププフィルタの設計を行い、得られたフィルタの最大誤差 0.119 より、本設計例における通過域の最大誤差を δ_p=0.119 と設定し、阻止域における最大誤差を $\delta_s = 0.119, 0.130, 0.140, \cdots, 0.220$ として，設計を行った。それぞれの δ_sに対する設計結果を、表 2.2 および図 2.10 に示す。図 2.10 より、本設計例でも設計例 1 と同様の結果が得られているのが確認できる。プロトタイププフィルタおよび本手法において δ_s=0.140, 0.220 としたときの設計結果の振幅特性および振幅誤差を図 2.11 から図 2.13 に示す。

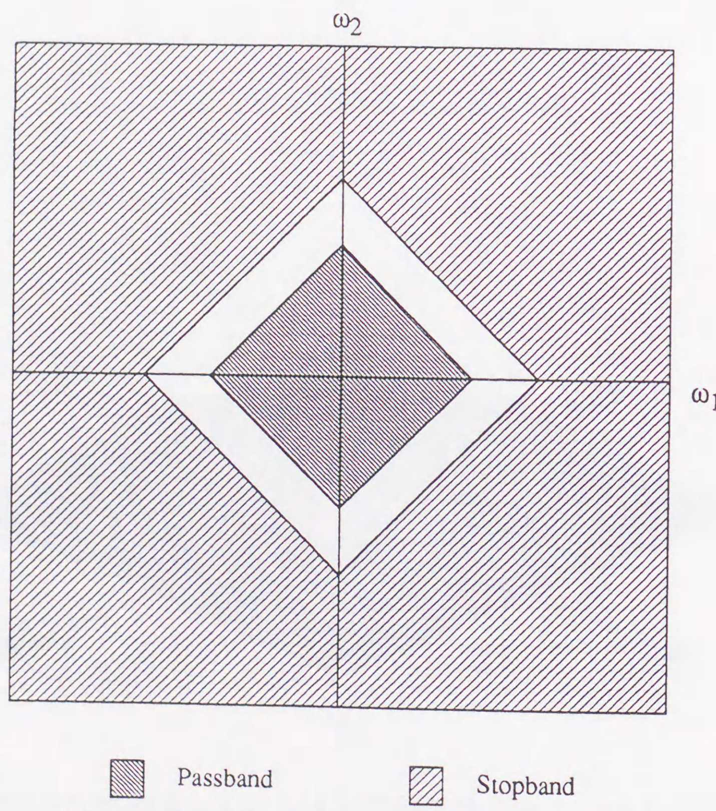


図 2.9 設計例 2 における設計仕様の振幅特性

表 2.2 設計例 2 における設計結果

	$\varepsilon_{\infty,s}$	ε_2	Number of iterations
Prototype	0.119	17.11	
$\delta_s = 0.119$	0.119	15.17	13+3
$\delta_s = 0.130$	0.130	13.03	7+2
$\delta_s = 0.140$	0.140	12.47	7+1
$\delta_s = 0.150$	0.150	11.97	8+1
$\delta_s = 0.160$	0.160	11.53	8+1
$\delta_s = 0.170$	0.170	11.15	9+1
$\delta_s = 0.180$	0.180	10.85	9+1
$\delta_s = 0.190$	0.190	10.62	6+1
$\delta_s = 0.200$	0.200	10.48	4+1
$\delta_s = 0.210$	0.210	10.42	4+1
$\delta_s = 0.220$	0.212	10.42	4+1

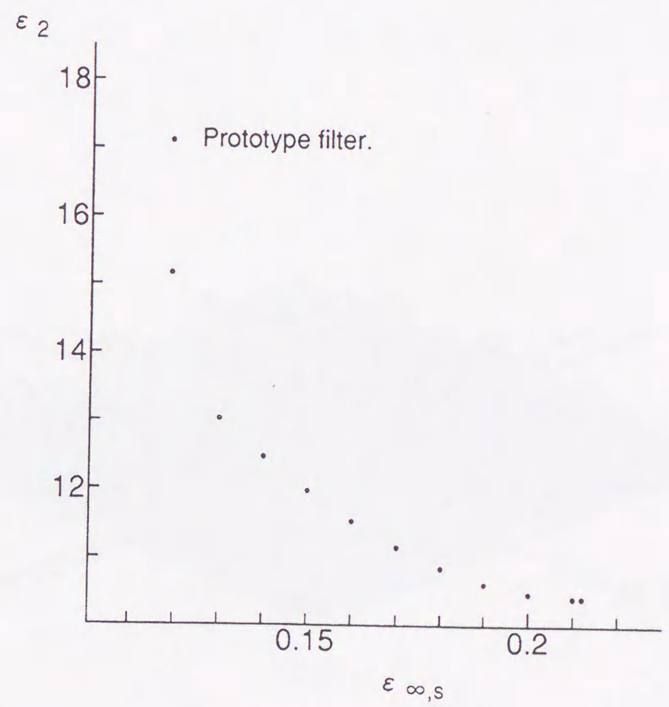
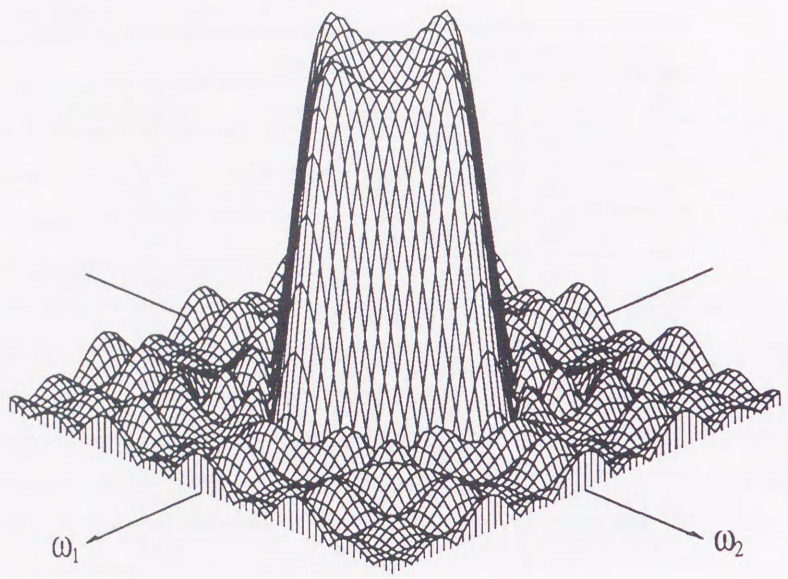
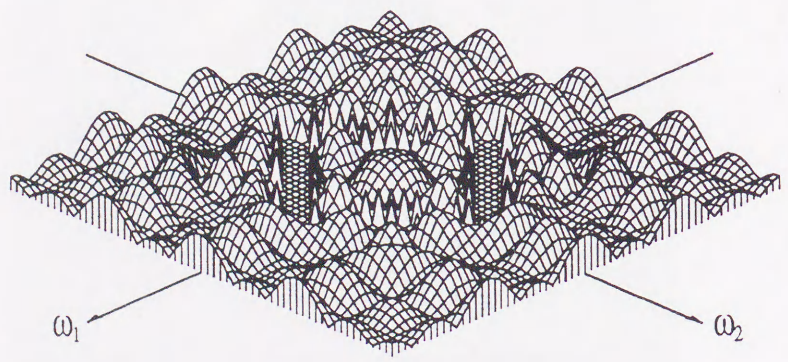


図 2.10 設計例 2 における設計結果

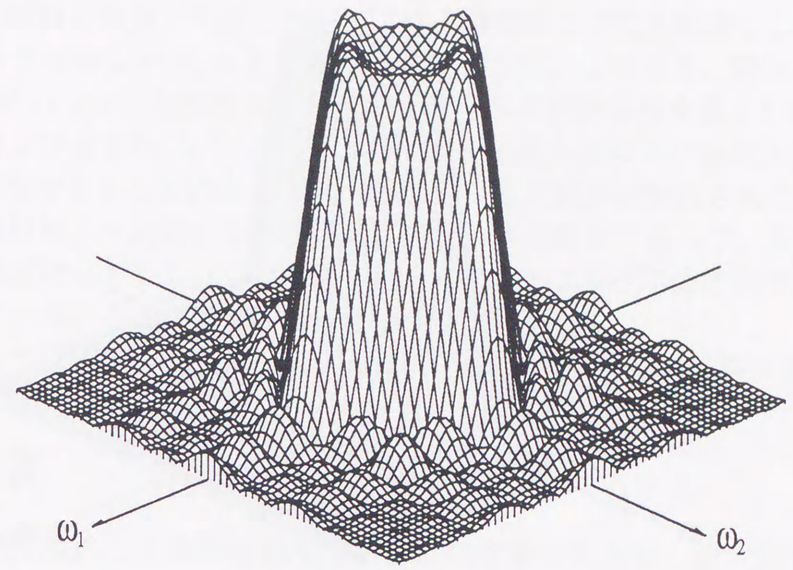


(a)

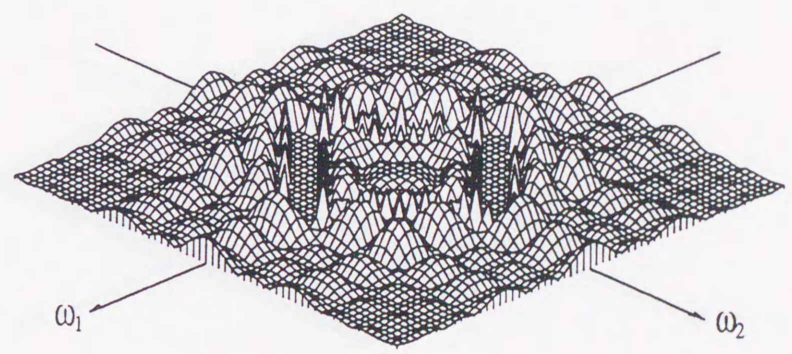


(b)

図 2.11 プロトタイプフィルタの (a) 振幅特性および (b) 振幅誤差

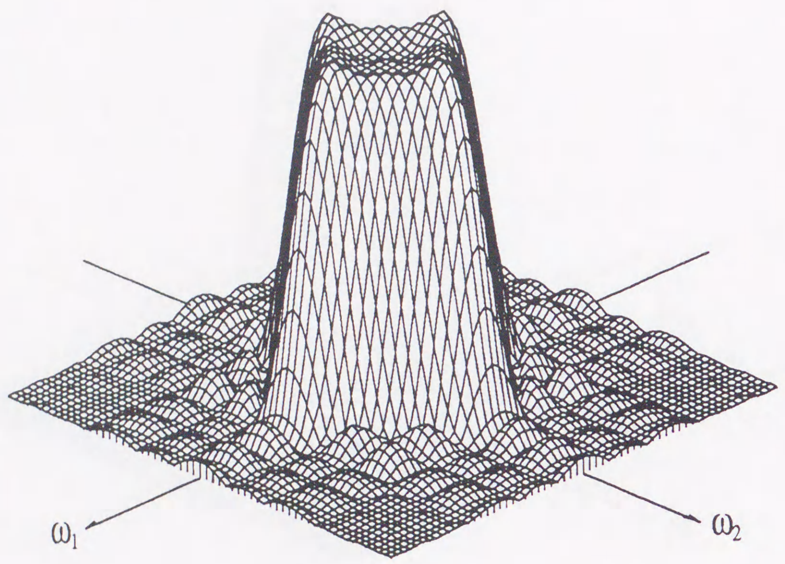


(a)

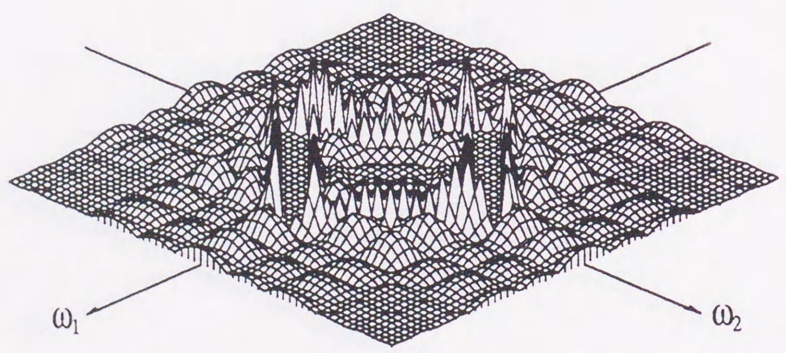


(b)

図 2.12 本手法によるフィルタの (a) 振幅特性および (b) 振幅誤差 (δ_s=0.140)



(a)



(b)

図 2.13 本手法によるフィルタの (a) 振幅特性および (b) 振幅誤差 (δ_s=0.220)

2.6.3 設計例 3　実質的な遷移域幅を固定した場合

本節では前節と同様の仕様で、実質的な遷移域幅を固定したときの例を示す。周波数評価点、フィルタ次数を前節と同様に設定し、通過域端および阻止域端での最大誤差をプロトタイプフィルタと等しい $\delta'_p = \delta'_s = 0.119$ と設定した。このとき、阻止域の最大誤差を $\delta_s = 0.119, 0.130, \sim, 0.150$ と設定したときのそれぞれの設計結果を表 2.3 および図 2.14 に示す。表 2.3 および図 2.14 より、正規化 2 乗誤差と阻止域における最大誤差との関係は設計例 1,2 と同様であることがわかるが、帯域端の最大誤差が制約されているため、その変化の度合は設計例 2 と比較すると小さい。また、本設計例を通して、通過域端および阻止域端の最大誤差はいずれも 0.119 であった。このことより、本設計例では実質的な遷移域幅が変化していないことが確認できる。

本手法によって設計された $\delta_s = 0.140$ におけるフィルタの振幅応答を図 2.15 に示す。

2.7 結　言

本章では、最大誤差と 2 乗誤差の双方を同時に考慮するため、最大誤差制約条件下で最小 2 乗誤差となる 2 次元 FIR フィルタの設計法について考察した。具体的な設計手法として、まず重み付き最小 2 乗法の逐次繰り返しによって、ある程度最大誤差を制約した後、Lagrange の未定乗数法を用いることによって、正確に最大誤差に対する制約条件を満足するフィルタを得る方法を提案した。つぎに、完全な線形位相を保証した場合での変更点について述べ、さらに、実質的な遷移域幅を固定する手法について言及した。最後に、数値例を示し、本手法の有効性を検証した。

表 2.3 設計例 3 における設計結果

パラメータ	$\varepsilon_{\infty,s}$	ε_2	繰り返し回数
文献 (7)	0.119	17.11	15.95
$\delta_s = 0.119$	0.119	15.17	13+3
$\delta_s = 0.125$	0.125	14.29	7+2
$\delta_s = 0.130$	0.130	13.88	7+3
$\delta_s = 0.140$	0.140	13.68	7+2
$\delta_s = 0.150$	0.143	13.68	7+1

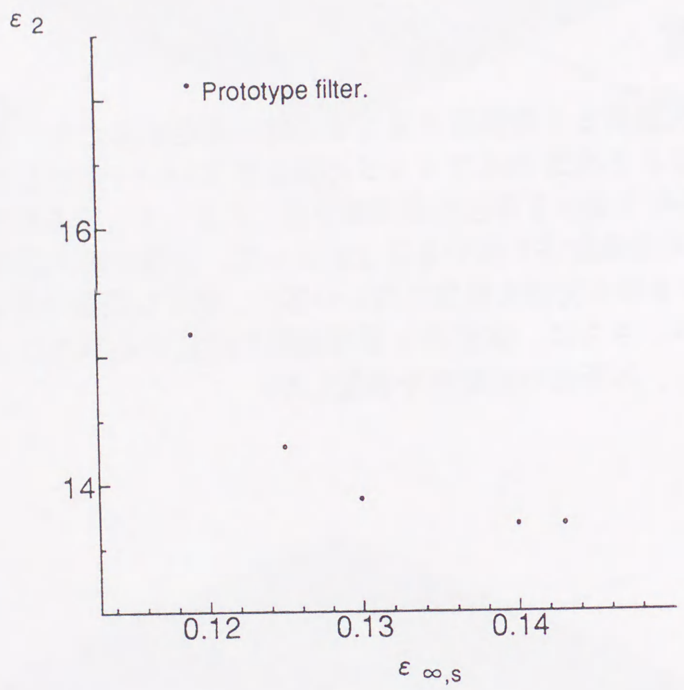
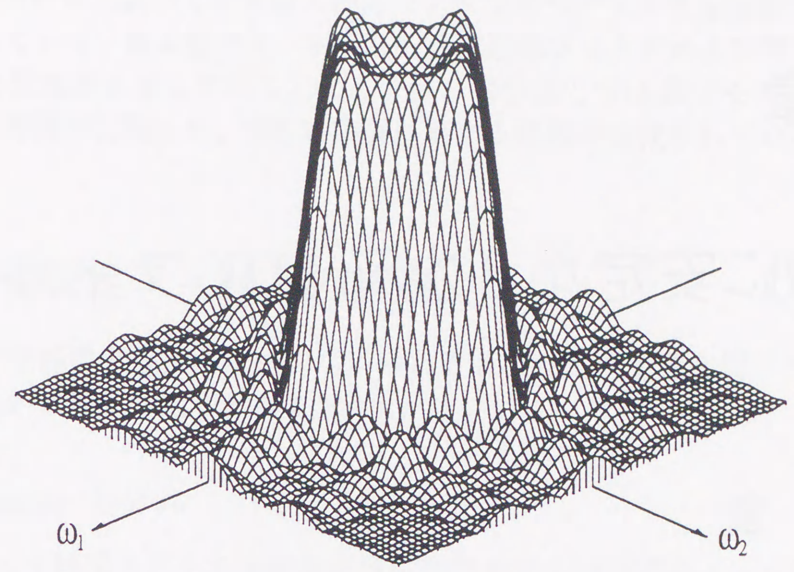
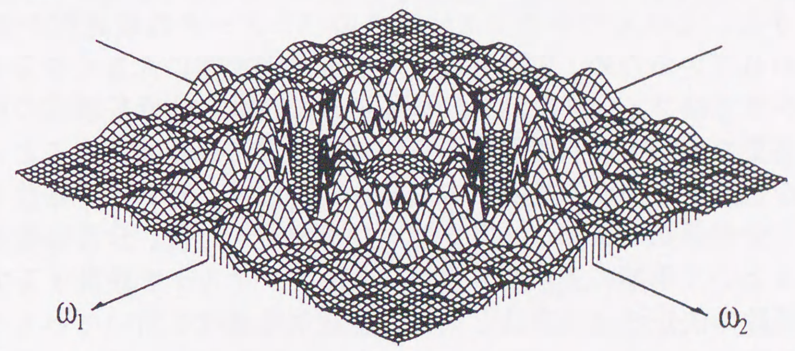


図 2.14 設計例 3 における設計結果



(a)



(b)

図 2.15 実質的な遷移域幅を固定したフィルタの (a) 振幅特性および (b) 振幅誤差 (δ_s=0.140)

第 3 章

構造的に安定な 2 次元 IIR フィルタの設計

3.1 緒　言

1 次元 IIR ディジタルフィルタと 2 次元 IIR ディジタルフィルタの最も大きな相違点の一つとして、安定性の問題が挙げられる。これはよく知られているように、1 次元の場合、多項式が 1 次と 2 次の多項式の積に常に分解できるのに対し、2 次元多項式では一般に低次の多項式に分解できないという事実に由来している。このため、伝達関数表現による従来の 2 次元 IIR フィルタの設計問題では、フィルタの構造として分母分離形 [15],[16],[23] や低次数フィルタの縦続接続形 [17],[18] が広く用いられていた。一方、2 次元局所状態空間モデルのうち、よく用いられている Roesser モデルおよび Fornasini-Marchesini(FM) 第 2 モデルに関しては、Lin ら [13] および Hinamoto[14] によって Lyapunov 方程式に基づいた安定条件が導出されており、これに基づいたフィルタ設計法がすでに提案されている。しかしながら、これらの手法はフィルタのパラメータの最適化が全て非線形最適化法を用いて行われているため、設計に要する演算量が非常に大きくなるという欠点があった。そこで、本章ではフィルタ設計を分子多項式の設計と分母多項式の設計に分離し、安定性の検証の必要な分母多項式の決定のみに状態空間モデル用いることによって、設計に要する演算量を低減する方法を提案している。本手法は、まず分子係数を固定して交互変数法に基づいて分母係数およびフィルタゲインを決定した後、分母係数を固定して、分子係数を決定するという手順の逐次繰り返しによってフィルタを設計する方法である。本手法では、分母係数の決定法は従来法と同様の非線形最適化を用いているものの、分子係数は線形方程式を解くことによって決定されるため、従来法と比較して必要な計算量が少なくてすむという利点がある。

本章の構成は次の通りである。まず、第 2 節で Roesser モデルと FM 第 2 モデルそれぞれについて伝達関数表現と常に安定な構造を持つ条件について述べている。次に、第 3 節

で具体的なフィルタ設計法について論じている。まず、矩形入出力マスクを持つ Roesser モデルに基づくフィルタについて分母係数および分子係数に関する設計法をそれぞれ示した後、FM 第 2 モデルに基づく三角形入出力マスクをもつフィルタを設計する際の相違点について記述している。第 4 節では、本手法を低域通過フィルタおよび帯域通過フィルタの設計に用いた数値例を示している。ここでは、本手法と FM 第 2 モデルに基づく従来法で要する計算時間が比較され、実際に設計に要する時間が低減されていることが確認される。

3.2 構造的安定フィルタの記述

ここでは、分母係数を設計する際に用いられる 2 次元局所状態空間モデルについて論じ、それが構造的に安定であるための条件を示す。

3.2.1 Roesser モデル

Roesser によって提案された 2 次元局所状態空間モデルは次式によって記述される。

$$
\begin{aligned}
\begin{bmatrix} \boldsymbol{x}^h(i+1,j) \\ \boldsymbol{x}^v(i,j+1) \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} \boldsymbol{A}_1 & \boldsymbol{A}_2 \\ \boldsymbol{A}_3 & \boldsymbol{A}_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \boldsymbol{x}^h(i,j) \\ \boldsymbol{x}^v(i,j) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \boldsymbol{b}_1 \\ \boldsymbol{b}_2 \end{bmatrix} u(i,j) \\
y(i,j) &= \begin{bmatrix} \boldsymbol{c}_1 & \boldsymbol{c}_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \boldsymbol{x}^h(i,j) \\ \boldsymbol{x}^v(i,j) \end{bmatrix} + du(i,j)
\end{aligned} \tag{3.1}
$$

但し、$\boldsymbol{x}^h(i,j)$ は $m \times 1$ 水平状態ベクトル、$\boldsymbol{x}^v(i,j)$ は $n \times 1$ 垂直状態ベクトル、$u(i,j)$ はスカラ入力、$y(i,j)$ はスカラ出力、さらに $\boldsymbol{A}_1, \boldsymbol{A}_2, \boldsymbol{A}_3, \boldsymbol{A}_4, \boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2, \boldsymbol{c}_1, \boldsymbol{c}_2$ および d は適当な大きさの実行列である。式 (3.1) の伝達関数は、次式によって与えられる。

$$
\begin{aligned}
H(z_1,z_2) &= \boldsymbol{c}(\boldsymbol{Z}-\boldsymbol{A})^{-1}\boldsymbol{b} + d \\
&= \boldsymbol{c}\frac{\mathrm{adj}(\boldsymbol{Z}-\boldsymbol{A})}{\det(\boldsymbol{Z}-\boldsymbol{A})}\boldsymbol{b} + d \\
&= \frac{\sum_{k=0}^{m}\sum_{l=0}^{n} b_{kl} z_1^{-k} z_2^{-l}}{\sum_{k=0}^{m}\sum_{l=0}^{n} a_{kl} z_1^{-k} z_2^{-l}}
\end{aligned} \tag{3.2}
$$

但し、

$$
\boldsymbol{Z} = \begin{bmatrix} z_1\boldsymbol{I}_m & 0 \\ 0 & z_2\boldsymbol{I}_n \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{A}_1 & \boldsymbol{A}_2 \\ \boldsymbol{A}_3 & \boldsymbol{A}_4 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{b} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{b}_1 \\ \boldsymbol{b}_2 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{c} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{c}_1 & \boldsymbol{c}_2 \end{bmatrix} \tag{3.3}
$$

式 (3.2) からわかるように、このシステムは矩形の入出力マスクを持つ。行列 $\boldsymbol{A}$ が次の構造を持つとき、式 (3.1) のシステムは常に安定になることが知られている。

$$\boldsymbol{A} = \boldsymbol{U}\boldsymbol{\Lambda}\boldsymbol{V} \tag{3.4}$$

但し、

$$\boldsymbol{U}^t = \prod_{j=1}^{m+n+1} \prod_{i=j+1}^{m+n} \boldsymbol{U}^{ij}_{m+n}, \quad \boldsymbol{V} = \prod_{i=1}^{m+n+1} \prod_{j=i+1}^{m+n} \boldsymbol{U}^{ij}_{m+n}$$

$$\boldsymbol{\Lambda} = \mathrm{diag}\{\sin\theta_{11}, \sin\theta_{22}, \cdots, \sin\theta_{m+n,m+n}\}$$

$$\boldsymbol{U}^{ij}_p = \begin{array}{cc}
\begin{array}{ccccccc} & & i & & j & & \end{array} & \\
\left[\begin{array}{ccccccc}
1 & & & & & & \\
 & \ddots & & & & 0 & \\
 & & \cos\theta_{i,j} & \cdots & -\sin\theta_{i,j} & & \\
 & & \vdots & \ddots & \vdots & & \\
 & & \sin\theta_{i,j} & \cdots & \cos\theta_{i,j} & & \\
 & 0 & & & & \ddots & \\
 & & & & & & 1
\end{array}\right] & \begin{array}{c} \\ \\ i \\ \\ j \\ \\ \\ \end{array}
\end{array}$$

ここで、$\boldsymbol{U}^{ij}_p$ は $p \times p$ の直交行列である。

3.2.2 Fornasini-Marchesini(FM) 第 2 モデル

Fornasini と Marchesini によって 2 度目に提案された 2 次元局所状態空間モデルは、次式によって記述される。

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{x}(i+1, j+1) &= \boldsymbol{F}_1\boldsymbol{x}(i, j+1) + \boldsymbol{F}_2\boldsymbol{x}(i+1, j) \\
&\quad + \boldsymbol{g}_1 u(i, j+1) + \boldsymbol{g}_2 u(i+1, j) \\
y(i, j) &= \boldsymbol{h}\boldsymbol{x}(i, j) + du(i, j)
\end{aligned} \tag{3.5}$$

ここで、$\boldsymbol{x}(i,j)$ は $N \times 1$ の局所状態ベクトル、$u(i,j)$ はスカラ入力、$y(i,j)$ はスカラ出力、さらに、$\boldsymbol{F}_1, \boldsymbol{F}_2, \boldsymbol{g}_1, \boldsymbol{g}_2, \boldsymbol{h}$ および d は適当な大きさの実行列である。式 (3.5) の伝達

関数は、次式によって与えられる。

$$\begin{aligned}
H(z_1, z_2) &= \boldsymbol{h}(z_1 z_2 \boldsymbol{I}_N - z_2\boldsymbol{F}_1 - z_1\boldsymbol{F}_2)^{-1}(z_2\boldsymbol{g}_1 + z_1\boldsymbol{g}_2) + d \\
&= \boldsymbol{h}\frac{\mathrm{adj}(z_1 z_2 \boldsymbol{I}_N - z_2\boldsymbol{F}_1 - z_1\boldsymbol{F}_2)}{\det(z_1 z_2 \boldsymbol{I}_N - z_2\boldsymbol{F}_1 - z_1\boldsymbol{F}_2)}(z_2\boldsymbol{g}_1 + z_1\boldsymbol{g}_2) + d \\
&= \frac{\displaystyle\sum_{r=0}^{N} \sum_{k+l=r} b_{kl} z_1^{-k} z_2^{-l}}{\displaystyle\sum_{r=0}^{N} \sum_{k+l=r} a_{kl} z_1^{-k} z_2^{-l}}
\end{aligned} \tag{3.6}$$

式 (3.6) から明らかなように、このシステムは三角形の入出力マスクを持つ。行列 $\boldsymbol{F}_1, \boldsymbol{F}_2$ が次の構造を持つとき、式 (3.6) のシステムは常に安定になることが知られている。

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{F} &= \begin{bmatrix} \boldsymbol{F}_1 & \boldsymbol{F}_2 \end{bmatrix} \\
&= \boldsymbol{R}\begin{bmatrix} \boldsymbol{\Sigma} & 0 \end{bmatrix}\boldsymbol{S}
\end{aligned} \tag{3.7}$$

但し、

$$\boldsymbol{R}^t = \prod_{j=1}^{N-1} \prod_{i=j+1}^{N} \boldsymbol{U}^{ij}_N, \quad \boldsymbol{V} = \prod_{i=1}^{2N-1} \prod_{j=i+1}^{2N} \boldsymbol{U}^{ij}_N$$

$$\boldsymbol{\Sigma} = \frac{1}{\sqrt{2}}\mathrm{diag}\{\sin\theta_{11}, \sin\theta_{22}, \cdots, \sin\theta_{N,N}\}$$

ここで、$\boldsymbol{U}^{ij}_p$ は式 (3.4) の場合と同様の $p \times p$ の直交行列である。

3.3 設計アルゴリズム

ここでは、フィルタの設計法について論じる。まず、矩形入出力マスクの IIR フィルタの設計法を示し、つぎに三角形入出力マスクの場合の相違点を述べる。

3.3.1 矩形マスク IIR フィルタの設計

ここでは、次式で与えられる矩形入出力マスクの IIR フィルタの設計について考える。このフィルタは、Roesser モデルから導かれる有理伝達関数に対応する。

$$\begin{aligned}
H(z_1, z_2) &= K\frac{\displaystyle\sum_{k=0}^{m}\sum_{l=0}^{n} b_{kl} z_1^{-k} z_2^{-l}}{\det(\boldsymbol{I}_{m+n} - \boldsymbol{A}\boldsymbol{Z}^{-1})} \\
&= K\frac{\displaystyle\sum_{k=0}^{m}\sum_{l=0}^{n} b_{kl} z_1^{-k} z_2^{-l}}{\displaystyle\sum_{k=0}^{m}\sum_{l=0}^{n} a_{kl} z_1^{-k} z_2^{-l}}
\end{aligned} \tag{3.8}$$

但し、$b_{00}=1$ である。行列 $\boldsymbol{A}$ から a_{kl} は容易に計算できる。本設計法においては、分母係数と分子係数を交互に繰り返し設計する。

振幅と位相の両特性を近似するため、分母係数とゲインを設計するための評価関数を次のように定義する。

$$\begin{aligned} E(\boldsymbol{\theta},K) = R_m \sum_{p=0}^{L_1}\sum_{q=0}^{L_2} w_m(p,q)[M(p,q)-M_d(p,q)]^2 \\ +\sum_{i=1}^{2}\left[R_\tau \sum_{p=0}^{L_1}\sum_{q=0}^{L_2} w_{\tau_i}[\tau_i(p,q)-\tau_{di}(p,q)]^2\right] \end{aligned} \tag{3.9}$$

但し、

(p,q)	:	評価点 (ω_p,ω_q) の簡略形
$M(p,q)-M_d(p,q)$	:	(p,q) における実際の振幅応答と所望の振幅応答の差
$\tau_i(p,q)-\tau_{di}(p,q)$	:	(p,q) における実際の群遅延と所望の群遅延の差 $(i=1,2)$
$w_m(p,q), w_{\tau_{di}}$	:	振幅応答、群遅延の誤差に対する相対重み係数 $(i=1,2)$

$\boldsymbol{\theta}=[\theta_{11}\ \theta_{12}\ \cdots\ \theta_{1n}\ \theta_{21}\ \cdots\ \theta_{2n}\ \cdots\ \theta_{mn}]$

式 (3.9) の最小化にあたっては、文献 [13],[14] と同様に、$\boldsymbol{\theta}$ の調整は交互変数法を用いて行う。ここで、$\boldsymbol{\theta}$ が一通り更新されるたびにゲイン K の更新を行う。式 (3.9) を K で微分し 0 と置くことによって、K は

$$K=\frac{\sum_{p=0}^{L_1}\sum_{q=0}^{L_2} M_d(p,q)\hat{M}(p,q)}{\sum_{p=0}^{L_1}\sum_{q=0}^{L_2} \hat{M}(p,q)^2} \tag{3.10}$$

から計算できる。但し、

$$\hat{M}(p,q)=\frac{\left|\sum_{k=0}^{m}\sum_{l=0}^{n} b_{kl}e^{-j(\omega_{1p}k+\omega_{2q}l)}\right|}{\left|\sum_{k=0}^{m}\sum_{l=0}^{n} a_{kl}e^{-j(\omega_{1p}k+\omega_{2q}l)}\right|}$$

分母係数を設計した後、分母を固定して分子係数を決定する。分子係数を設計するための評価関数を、次のように定義する。

$$E(\boldsymbol{b})=\sum_{p=0}^{L_1}\sum_{q=0}^{L_2} w(p,q)|H(p,q)-H_d(p,q)|^2 \tag{3.11}$$

但し、$w(p,q)$ は評価点 (p,q) における重み係数であり、$H_d(p,q)$ は所望の周波数応答を表す。また、

$$\begin{aligned} \boldsymbol{b} &= K[1\ b_{01}\ \cdots\ b_{0n}\ b_{10}\ \cdots\ b_{mn}] \\ &= [\tilde{b}_{00}\ \tilde{b}_{01}\ \cdots\ \tilde{b}_{0n}\ \tilde{b}_{10}\ \cdots\ \tilde{b}_{mn}] \end{aligned}$$

である。

周波数応答 $H(p,q)$ は、次のように書き換えることができる。

$$H(p,q)=\sum_{k=0}^{m}\sum_{l=0}^{n} K\,b_{kl}X_{pq}^{kl} \tag{3.12}$$

但し、

$$X_{pq}^{kl}=\frac{e^{-j(k\omega_{1p}+l\omega_{2q})}}{\sum_{k'=0}^{m}\sum_{l'=0}^{n} a_{k'l'}e^{-j(k'\omega_{1p}+l'\omega_{2q})}}$$

式 (3.11) を $\tilde{b}_{kl}$ で微分し 0 とおくことによって、次式が得られる。

$$\mathrm{Re}[\boldsymbol{y}_{kl}^t\boldsymbol{g}]=\mathrm{Re}[\boldsymbol{y}_{kl}^t\boldsymbol{X}]\boldsymbol{b} \tag{3.13}$$

但し、

$$\begin{aligned} \boldsymbol{y}_{kl} &= \left[w(0,0)X_{00}^{kl*}\ \cdots\ w(0,L_2)X_{0L_2}^{kl*}\ w(1,0)X_{10}^{kl*}\ cdots\ w(L_1,L_2)X_{L_1L_2}^{kl*}\right]^t \\ \boldsymbol{g} &= [H_d(0,0)\ \cdots H_d(0,L_2)\ H_d(1,0)\ \cdots\ H_d(L_1,L_2)]^y] \\ \boldsymbol{X} &= \begin{bmatrix} X_{00}^{00} & \cdots & X_{00}^{0n} & X_{00}^{10} & \cdots & X_{00}^{mn} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ X_{0L_2}^{00} & \cdots & X_{0L_2}^{0n} & X_{0L_2}^{10} & \cdots & X_{0L_2}^{mn} \\ X_{10}^{00} & \cdots & X_{10}^{0n} & X_{10}^{10} & \cdots & X_{10}^{mn} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ X_{L_1L_2}^{00} & \cdots & X_{L_1L_2}^{0n} & X_{L_1L_2}^{10} & \cdots & X_{L_1L_2}^{mn} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

これを $(k,l)=(0,0)\cdots(m,n)$ で考えると、次式が得られる。

$$\mathrm{Re}[\boldsymbol{Y}^t\boldsymbol{g}]=\mathrm{Re}[\boldsymbol{Y}^t\boldsymbol{X}]\boldsymbol{b} \tag{3.14}$$

但し、

$$\boldsymbol{Y}=[\boldsymbol{y}_{00}\ \boldsymbol{y}_{01}\ \cdots\ \boldsymbol{y}_{0n}\ \cdots\ \boldsymbol{y}_{mn}]$$

従って、$\mathrm{Re}[\boldsymbol{Y}^t\boldsymbol{X}]$ が正則のとき評価関数 $E(\boldsymbol{b})$ を 最小化する係数ベクトル $\boldsymbol{b}$ は

$$\boldsymbol{b}=(\mathrm{Re}[\boldsymbol{Y}^t\boldsymbol{X}])^{-1}\cdot\mathrm{Re}[\boldsymbol{Y}^t\boldsymbol{g}] \tag{3.15}$$

によって計算できる。

以上より、フィルタの設計法は次のように要約される。

1) 分子係数を

$$b_{kl} = \begin{cases} 1, & k = l = 0 \\ 0, & \text{その他} \end{cases}$$

とおいて、式 (3.9) を最小化するように交互変数法を用いて分母係数 a_{kl} を設計し、次に、式 (3.10) からゲイン K を設計する。これを L 回繰り返し更新する。

2) 分母係数を固定して、式 (3.11) を最小化するように分子係数 b_{kl} およびゲイン K を設計する。

3) 分子係数を固定して、式 (3.9) を最小化するように交互変数法を用いて分母係数 a_{kl} を設計し、次に式 (3.10) からゲイン K を設計する。これを L 回繰り返し更新する。

2),3) を繰り返すことによって、評価関数の値をより小さくすることができる。ここで、分母係数を設計する際に用いる評価関数と、分子係数を設計する際に用いる評価関数は見かけ上は異なっており、分子係数の更新を行なった後、式 (3.9) の値が分子係数更新前の値より大きくなることも起こり得る。その場合でも、更に分母係数の更新を行なうことによって、評価関数の値を小さくすることができることがある。そのため、ここでは分母係数の更新を行なった時点での誤差関数の値が、前回の分母更新の際の誤差関数の値よりも大きくなった時点で係数の更新を打ち切り、前回の結果を係数として採用している。

3.3.2 三角形マスク IIR フィルタの設計

ここでは、次式で与えられる三角形入出力マスクの IIR フィルタの設計について考える。このフィルタは FM 第 2 モデルから導かれた有理伝達関数に対応する。

$$\begin{aligned} H(z_1, z_2) &= K \frac{\displaystyle\sum_{r=0}^{N} \sum_{k+l=r} b_{kl} z_1^{-k} z_2^{-l}}{\det(\boldsymbol{I}_N - z_1^{-1}\boldsymbol{F}_1 - z_2^{-1}\boldsymbol{F}_2)} \\ &= \frac{\displaystyle\sum_{r=0}^{N} \sum_{k+l=r} b_{kl} z_1^{-k} z_2^{-l}}{\displaystyle\sum_{r=0}^{N} \sum_{k+l=r} a_{kl} z_1^{-k} z_2^{-l}} \end{aligned} \tag{3.16}$$

但し、$b_{00} = 1$ である。a_{kl} は $\boldsymbol{F}_1$ と $\boldsymbol{F}_2$ から容易に計算できる。係数の設計法は矩形入出力マスクの場合と同様で、式 (3.9) および式 (3.11) の評価関数が用いられる。但し、

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\theta} = [&\theta_{11} \cdots \theta_{1\,2N}\ \theta_{21} \cdots \theta_{2\,2N} \cdots \theta_{N\,2N}\ \theta_{N+1\,N+2} \cdots \theta_{N+1\,2N} \\ &\theta_{N+2\,N+3} \cdots \theta_{N+2\,2N} \cdots \theta_{2N-1,2N}] \end{aligned}$$

$$\hat{M}(p,q) = \frac{\left|\displaystyle\sum_{r=0}^{N} \sum_{k+l=r} b_{kl} e^{-j(\omega_{1p}k + \omega_{2q}l)}\right|}{\left|\displaystyle\sum_{r=0}^{N} \sum_{k+l=r} a_{kl} e^{-j(\omega_{1p}k + \omega_{2q}l)}\right|}$$

$$H(p,q) = \sum_{r=0}^{N} \sum_{k+l=r} K b_{kl} X_{pq}^{kl}$$

$$X_{pq}^{kl} = \frac{e^{-j(k\omega_{1p} + l\omega_{2q})}}{\displaystyle\sum_{r=0}^{N} \sum_{k'+l'=r} a_{k'l'} e^{-j(k'\omega_{1p} + l'\omega_{2q})}}$$

$$\boldsymbol{b} = K[1\ b_{01}\ \cdots\ b_{0N}\ b_{10}\ \cdots\ b_{1\,N-1}\ \cdots b_{N0}]$$

$$\boldsymbol{X} = \begin{bmatrix} X_{00}^{00} & \cdots & X_{00}^{0N} & X_{00}^{10} & \cdots & X_{00}^{1N-1} & \cdots & X_{00}^{N0} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ X_{0L_2}^{00} & \cdots & X_{0L_2}^{0N} & X_{0L_2}^{10} & \cdots & X_{0L_2}^{1N-1} & \cdots & X_{0L_2}^{N0} \\ X_{10}^{00} & \cdots & X_{10}^{0N} & X_{10}^{10} & \cdots & X_{10}^{1N-1} & \cdots & X_{00}^{N0} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ X_{L_1L_2}^{00} & \cdots & X_{L_1L_2}^{0N} & X_{L_1L_2}^{10} & \cdots & X_{L_1L_2}^{1N-1} & \cdots & X_{L_1L_2}^{N0} \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{Y} = [\boldsymbol{y}_{00}\ \cdots\ \boldsymbol{y}_{0N}\ \boldsymbol{y}_{10} \cdots\ \boldsymbol{y}_{1N-1}\ \cdots \boldsymbol{y}_{N0}]$$

である。

3.4 設計例

ここでは、交互変数法の探索ステップ a_k を次のように設定する。

$$\begin{aligned} a_k &= \pi/d_k\,, \quad k = 1, 2, \cdots \\ d_1 &= 1 \\ d_k &= d_{k-1} + 2^{\mathrm{INT}[k/3]} \end{aligned}$$

但し、INT[·] は·の整数部を表す。分母係数決定時におけるパラメータベクトル $\boldsymbol{\theta}$ の各要素の初期値はすべて 0.1 とおき、ゲイン K の初期値を $K = 1$ とする。また、設計偏差を

評価するため、以下に示す正規化２乗誤差を用いる。

$$\varepsilon_m = \left\{ \frac{\sum\sum_{(p,q)\in\Omega}(M_d(p,q) - M(p,q))^2}{\sum\sum_{(p,q)\in\Omega} M_d(p,q)^2} \right\}^{\frac{1}{2}} \times 100$$

$$\varepsilon_{\tau_i} = \left\{ \frac{\sum\sum_{(p,q)\in\Omega}(\tau_{di}(p,q) - \tau_i(p,q))^2}{\sum\sum_{(p,q)\in\Omega} \tau_{di}(p,q)^2} \right\}^{\frac{1}{2}} \times 100\ , \quad i = 1, 2 \tag{3.17}$$

3.4.1　設計例１　低域通過フィルタの設計

次の仕様によって与えられる低域通過フィルタを設計する。

振幅仕様は、次のように与えられる。

$$M_d(p,q) = \begin{cases} 1.0, & 0.0 \le r \le 0.1 \\ 0.8, & 0.1 < r \le 0.2 \\ 0.44, & 0.2 < r \le 0.3 \\ 0.14, & 0.3 < r \le 0.4 \\ 0.03, & 0.4 < r \le 0.5 \\ 0.002, & 0.5 < r \le 0.6 \\ 0.001, & 0.6 < r \le 1.0 \\ 0.0, & \text{その他} \end{cases}$$

但し、

$$\begin{aligned} r &= \sqrt{\omega_{1p}^2 + \omega_{2q}^2}/\pi \\ \omega_{1p} &= \pi \cdot (p - 10)/10\ , \quad -10 \le p \le 9 \\ \omega_{2q} &= \pi \cdot q/10\ , \quad 0 \le p \le 10 \end{aligned}$$

通過域は $r \le 0.4\pi$ とし、通過域における群遅延を $\tau_{di} = 3.0, i = 1, 2$ とする。また、各重み係数を次のように設定する。

$$\begin{aligned} w_m(p,q) &= w_{\tau_i}(p,q) = w(p,q) = 1\ , \quad i = 1, 2 \\ R_m &= 0.5/\left[\sum\sum_{(p,q)\in\Omega} M_d^2(p,q)\right] \end{aligned}$$

$$R_{\tau_i} = 0.25/\left[\sum\sum_{(p,q)\in\Omega_p} \tau_{di}^2(p,q)\right]\ , \quad i = 1, 2$$

矩形入出力マスクフィルタの設計

フィルタの次数を $(m,n) = (3,3)$ とする。

$L = 10$ とおき、係数に関する最適化を 14 回繰り返した結果、以下に示すフィルタが得られた。

$$K = 0.001166$$

$$[a_{ij}] = \begin{bmatrix} 1.000000 & -1.321650 & 0.713613 & -0.158437 \\ -1.314689 & 1.648965 & -0.807204 & 0.151973 \\ 0.744138 & -0.882004 & 0.380920 & -0.053425 \\ -0.181136 & 0.204290 & -0.076509 & 0.007727 \end{bmatrix}$$

$$[b_{ij}] = \begin{bmatrix} 1.000000 & 3.467313 & 4.977327 & 1.486399 \\ 4.157282 & 3.179034 & -0.330989 & 5.448184 \\ 5.497049 & -0.417681 & 6.647359 & 3.785360 \\ 2.757275 & 4.747086 & 3.723685 & 3.593797 \end{bmatrix}$$

このフィルタの振幅特性を図 3.1 に、群遅延特性を図 3.2 に示す。

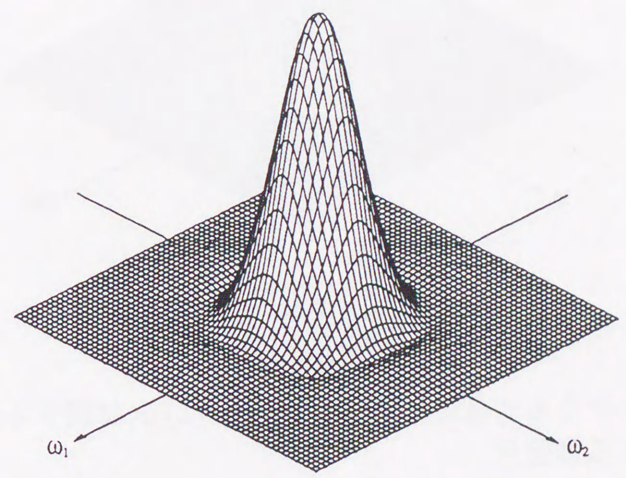
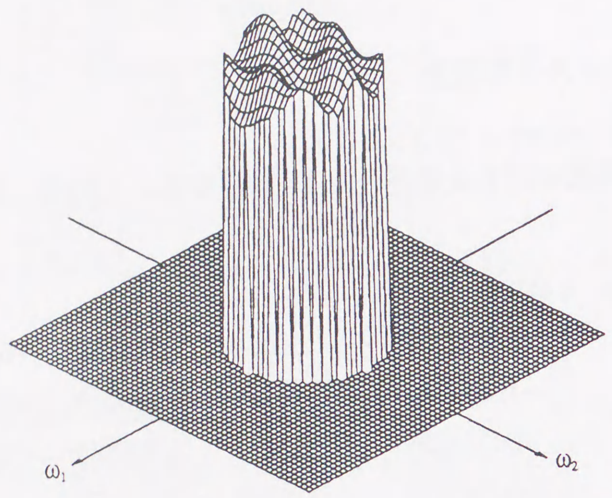
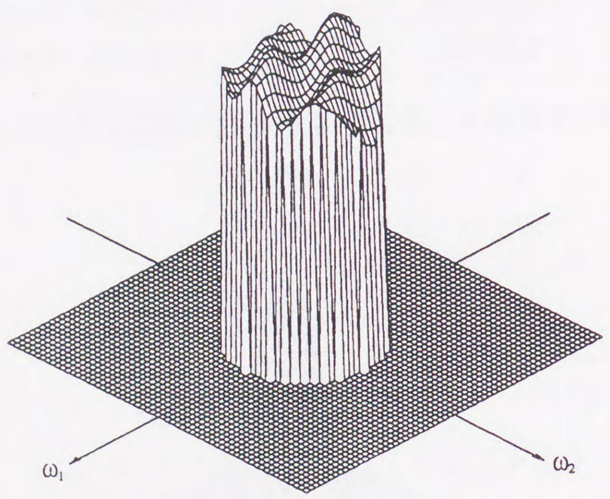


図 3.1 矩形入出力マスクをもつ低域通過フィルタの振幅特性



(a)



(b)

図 3.2 矩形入出力マスクをもつ低域通過フィルタの (a) ω_1に関する通過域での群遅延および (b) ω_2に関する群遅延

三角入出力マスクフィルタの設計

フィルタの次数を $N=4$ とする。
$L=20$ とおき、係数の更新を 8 回行った結果、以下に示すフィルタが得られた。

$$K = 0.001227$$

$$[a_{ij}] = \begin{bmatrix} 1.000000 & -1.494467 & 0.986784 & -0.330467 & 0.041826 \\ -1.239595 & 1.475852 & -0.703064 & 0.136813 & * \\ 0.652381 & -0.537711 & 0.131311 & * & * \\ -0.172892 & 0.075504 & * & * & * \\ 0.018507 & * & * & * & * \end{bmatrix}$$

$$[b_{ij}] = \begin{bmatrix} 1.000000 & 2.851480 & 4.708566 & 0.920212 & -0.886100 \\ 3.963252 & 3.987310 & -4.625246 & 4.268581 & * \\ 5.992568 & -6.055965 & 12.42206 & * & * \\ 2.721223 & 4.374989 & * & * & * \\ -0.995091 & * & * & * & * \end{bmatrix}$$

このフィルタの振幅応答、群遅延を図 3.3 および図 3.4 に示す。

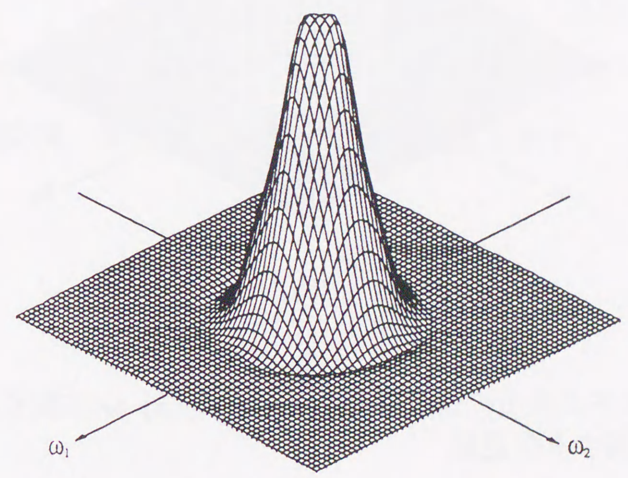
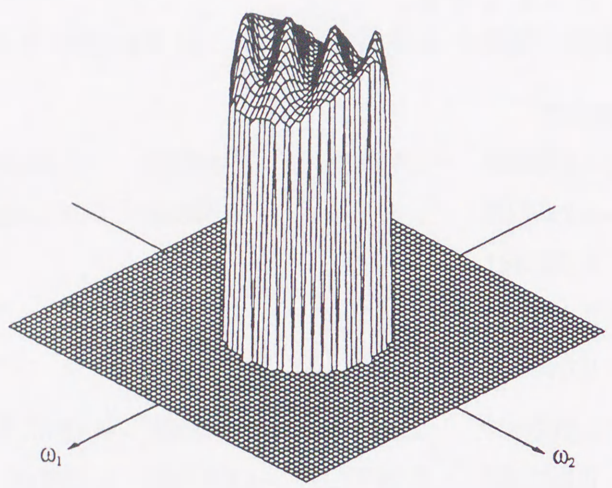
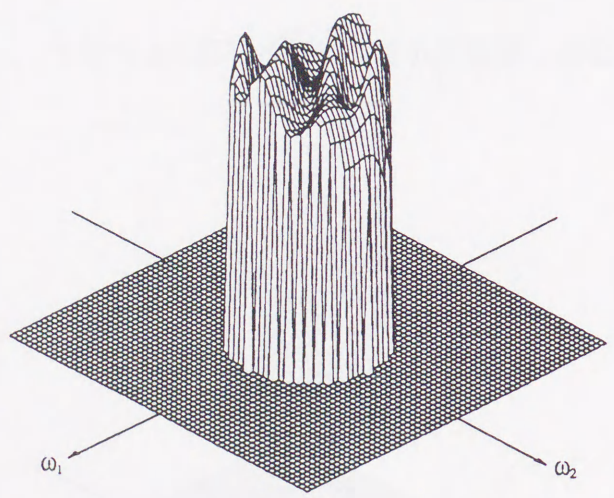


図 3.3 三角形入出力マスクをもつ低域通過フィルタの振幅特性



(a)



(b)

図 3.4 三角形入出力マスクをもつ低域通過フィルタの (a) ω_1に関する通過域での群遅延および (b) ω_2に関する群遅延

3.4.2 設計例 2 帯域通過フィルタの設計

振幅仕様は、次のように与えられる。

$$M_d(p,q) = \sqrt{E/(E^2+0.01)}$$

但し、

$$E = \sqrt{2\pi}\exp\left[-(\omega_{1p}^2+\omega_{2q}^2)/0.5\right]$$

通過域は $\sqrt{\omega_{1p}^2+\omega_{2q}^2}/\pi \le 0.6$ とし、通過域における群遅延を $\tau_{di} = 3.0,\ i = 1,2$ とする。各重み係数は設計例 1 の場合と同様に与える。

矩形入出力マスクフィルタの設計

フィルタの次数を $(m,n) = (3,3)$ とする。$L = 20$ とおき、係数に関する最適化を 4 回繰り返した結果、以下に示すフィルタが得られた。

$$\begin{aligned}
K &= 0.000692 \\
[a_{ij}] &= \begin{bmatrix} 1.000000 & -1.022714 & 0.074044 & -0.247729 \\ -0.952465 & 1.127359 & -0.843447 & 0.305709 \\ 0.696409 & -0.848361 & 0.706565 & -0.261887 \\ -0.236134 & 0.316901 & 0.271234 & 0.106013 \end{bmatrix} \\
[b_{ij}] &= \begin{bmatrix} 1.000000 & 59.94774 & 8.094024 & 78.00468 \\ 68.09140 & 26.53547 & -83.04501 & 35.11772 \\ 11.18099 & -71.97759 & -134.0233 & -105.9767 \\ 83.27105 & 17.11785 & -164.8418 & -127.6884 \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

このフィルタの振幅応答、群遅延を図 3.5 および図 3.6 に示す。

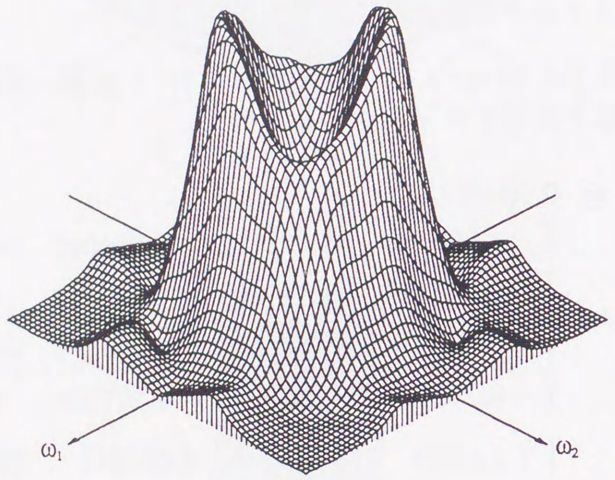


図 3.5 矩形入出力マスクをもつ帯域通過フィルタの振幅特性

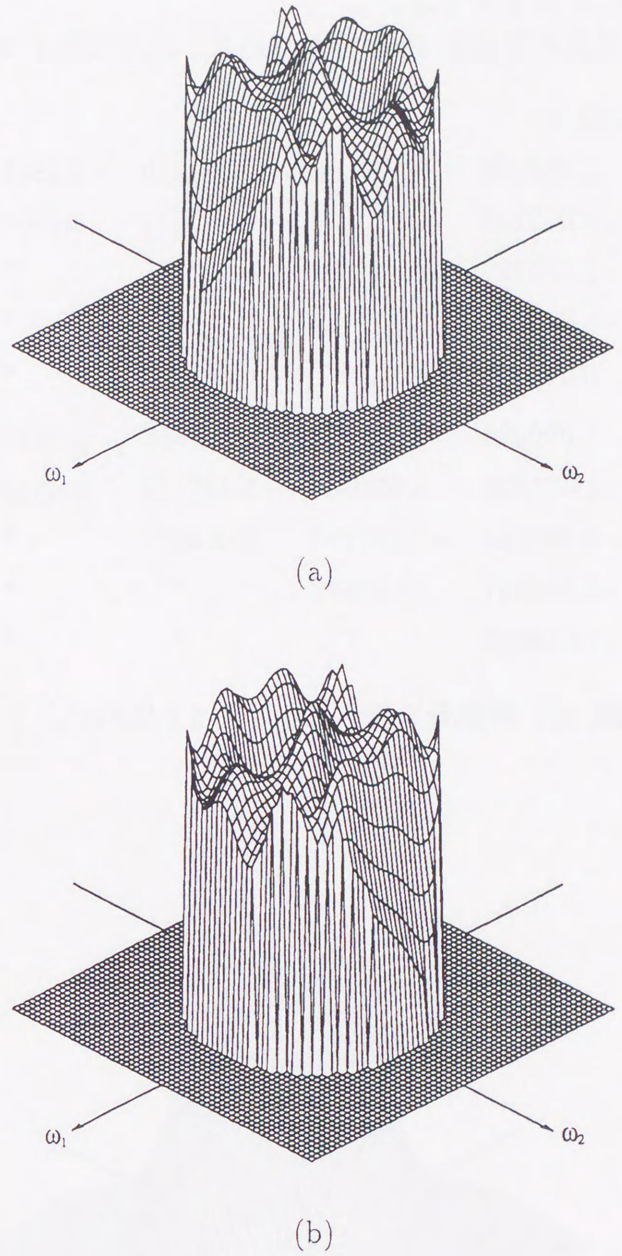


図 3.6 矩形入出力マスクをもつ帯域通過フィルタの (a) ω_1に関する通過域での群遅延および (b) ω_2に関する群遅延

三角入出力マスクフィルタの設計

フィルタの次数を $N = 4$ とする。
$L = 15$ とおき、係数の更新を 13 回行った結果、以下に示すフィルタが得られた。

$$
\begin{aligned}
K &= 0.003335 \\
[a_{ij}] &= \begin{bmatrix}
1.000000 & -1.081080 & 0.753459 & -0.298143 & 0.060404 \\
-1.013249 & 0.821656 & -0.371212 & 0.086627 & * \\
0.674788 & -0.348953 & 0.080105 & * & * \\
-0.254753 & 0.075880 & * & * & * \\
0.047347 & * & * & * & *
\end{bmatrix} \\
[b_{ij}] &= \begin{bmatrix}
1.000000 & -11.95713 & -3.196857 & -5.649917 & -17.24187 \\
-11.35535 & 3.858667 & -5.342132 & 9.853837 & * \\
-6.097160 & -7.498787 & 78.04677 & * & * \\
-5.706957 & 19.33471 & * & * & * \\
-19.19068 & * & * & * & *
\end{bmatrix}
\end{aligned}
$$

このフィルタの振幅応答、群遅延を図 3.7 から図 3.8 に示す。

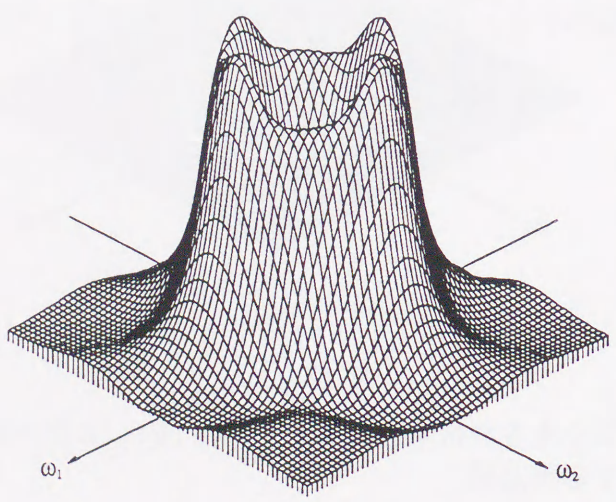
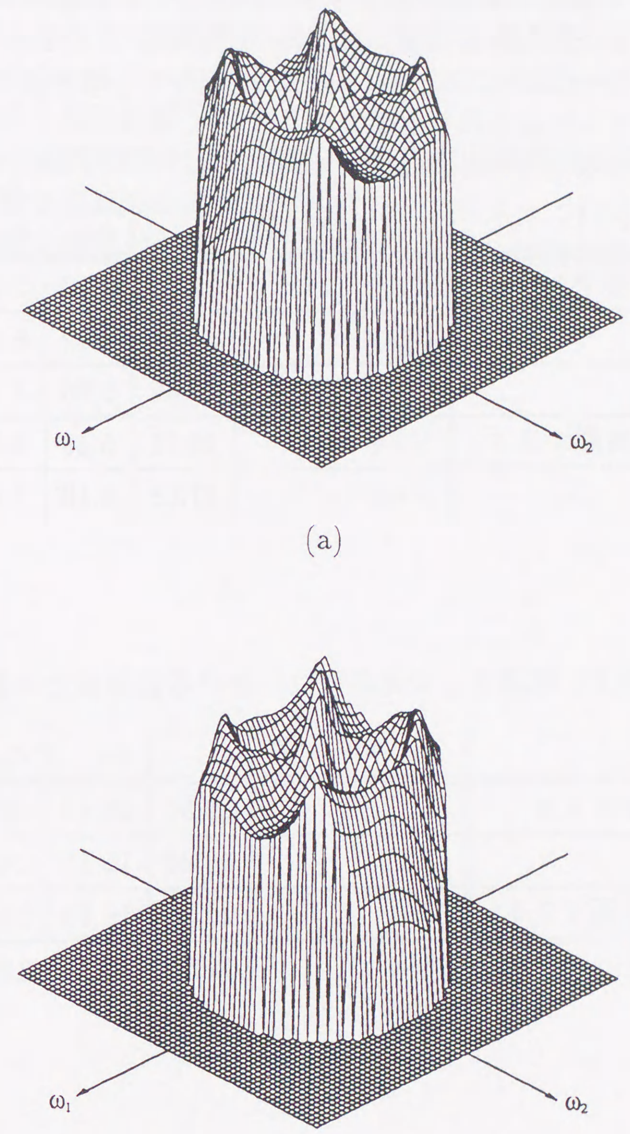


図 3.7 三角形入出力マスクをもつ帯域通過フィルタの振幅特性



(a)

(b)

図 3.8 矩形入出力マスクをもつ帯域通過フィルタの (a) ω_1に関する通過域での群遅延および (b) ω_2に関する群遅延

提案された設計法と、従来法との比較を表 3.1 および表 3.2 に示す。これらの表から、本設計法によって従来法と同程度のフィルタが設計されていることがわかる。また、三角形入出力マスクフィルタの設計における本手法と、従来法との計算時間の比較を表 3.3 に示す (NEC EWS4800/3100 主記憶 32 MB, 78MIPS を使用)。この表から、従来法と比較して本手法の計算時間が半分以下になっていることがわかり、本手法の有効性が確認できる。

表 3.1 低域通過フィルタの設計における従来法との比較

	フィルタ次数	ε_m	ε_{τ_1}	ε_{τ_2}	係数の数
本手法 (矩形マスク)	(3,3)	17.38	4.10	5.14	31
文献 [18]	(4,4)	24.36	9.32	8.18	33
文献 [13]	(3,3)	16.49	5.95	7.11	31
本手法 (三角形マスク)	N=4	16.71	6.46	9.57	29
文献 [14]	N=4	17.68	6.10	7.49	29

表 3.2 帯域フィルタの設計における従来法との比較

	フィルタ次数	ε_m	ε_{τ_1}	ε_{τ_2}	係数の数
本手法 (矩形マスク)	(3,3)	22.94	14.40	16.22	31
文献 [18]	(4,4)	58.86	15.11	14.62	33
本手法 (三角形マスク)	N=4	20.15	19.62	18.71	29
文献 [14]	N=4	19.58	17.17	19.50	29

表 3.3 本手法と従来法の設計時間の比較

	本手法	文献 [14]
設計例 1	907sec	4270sec
設計例 2	1508sec	3131sec

3.5 結言

その安定性の検証の繁雑さから、伝達関数を用いた 2 次元 IIR ディジタルフィルタは分母分離形や低次数フィルタの縦続形でしばしば設計されてきた。これに対して、本章では、安定性の保証された、より一般的な 2 次元 IIR フィルタの一設計法を提案した。本設計法では、分母多項式を局所状態空間モデルの安定行列に基づいて決定しているため、繁雑な安定判別を行なう必要がない。また、分母多項式と分子多項式を交互に独立に設計しているため、分母係数は非線形最適化問題を解くことによって決定されるが、分子係数の設計は線形最適化問題に帰着ができ、従来の方法と比較して計算量が低減されるという利点を持つ。

第 4 章

多次元状態空間フィルタの空間領域設計

4.1 概　要

第 2 章および第 3 章が周波数領域での設計問題を取り扱ったのに対し、本章では空間領域でのフィルタ設計を取り上げる。空間領域の設計では、設計仕様としてインパルス応答が与えられ、それを近似するようなインパルス応答をもつ伝達関数又は状態空間モデルを求めることが問題になる。多次元 IIR ディジタルフィルタの設計問題の多くは伝達関数表現による周波数領域設計 [24]~[30] であって、状態空間モデルによる空間領域設計に関する研究はほとんど見かけない。そこで、本章では Roesser モデルに基づく多次元ディジタルフィルタの空間領域設計について論じている。本手法では、多次元分母分離形 IIR ディジタルフィルタが多入力多出力 1 次元 IIR ディジタルフィルタの縦続接続で表すことができることを用い、多次元 IIR ディジタルフィルタの設計を複数の 1 次元ディジタルフィルタの設計問題に帰着している。具体的には、まず所与の多次元 FIR ディジタルフィルタを形式的に多入力多出力 1 次元フィルタで表し、それを状態空間モデルで実現または低次数近似している。低次数化は平衡実現を用いて行われる。この手法では、もとのフィルタが安定である限り、低次数化されたフィルタは必ず安定となる。次に、低次数化されたフィルタに最小分解を施し、得られた 2 つの FIR フィルタに同様の実現、低次数近似を行っている。これを繰り返し、得られた 1 次元多入力多出力フィルタを組み合わせることによって多次元 IIR ディジタルフィルタを構成している。また、平衡実現による近似では逆行列の計算が必要になるが、低次数近似されるフィルタが 1 入力もしくは 1 出力のときには、平衡実現による近似の代わりにインパルス応答グラミアンを用いた近似をおこない、部分的に逆行列の計算を不要にしている。この結果、2 次元 IIR ディジタルフィルタの設計では、逆行列の計算が一切不要になる。本手法の考え方は、2 次元の場合において提案された従来の低次元分解の考え方を多次元に拡張したものであるが、本方法を 2 次元フィルタの設計に用いた場合には、従来法で必要であった特異値分解が不要であることと、逆行列の計算が不要であるという理由から、従来法より少ない計算量でフィルタを設

計することが可能である。

本章の構成は次の通りである。まず、第 3 節で分母分離形多次元ディジタルフィルタの状態空間記述について示している。第 4 節では、具体的な設計法について述べており、最小実現による状態空間モデルでの実現法が示された後、平衡実現による低次数近似およびインパルス応答グラミアンによる近似法が示されている。第 5 節では、2 次元および 3 次元ディジタルフィルタの設計例を示し、本手法の有効性を検証している。

4.2 分母分離形多次元伝達関数と状態空間記述

次式で与えられる m 次元分母分離形ディジタルフィルタについて考える。

$$H(z_1, z_2, \cdots, z_m) = \frac{N(z_1, z_2, \cdots, z_m)}{D_1(z_1)D_2(z_2)\cdots D_m(z_m)} \tag{4.1}$$

但し、

$$N(z_1, z_2, \cdots, z_m) = \sum_{i_1=0}^{N_1}\sum_{i_2=0}^{N_2}\cdots\sum_{i_m=0}^{N_m} q_{i_1 i_2 \cdots i_m} z_1^{-i_1} z_2^{-i_2}\cdots z_m^{-i_m}$$

$$D_i(z_i) = 1 + p_{i1}z_i^{-1} + \cdots + p_{iN_i}z_i^{-N_i}, \quad i = 1, 2, \cdots, m.$$

式 (4.1) は、次のように書き換えられる。

$$H(z_1, z_2, \cdots, z_m) = \boldsymbol{G}_1(z_1)\frac{\boldsymbol{N}_{2,\cdots,m}(z_2, \cdots, z_m)}{D_2(z_2)\cdots D_m(z_m)} \tag{4.2}$$

但し、

$$\boldsymbol{G}_1(z_1) = \frac{\left[1, z_1^{-1}, \cdots, z_1^{-N_1}\right]}{D_1(z_1)}$$

$$N_{2,\cdots,m}(z_2, \cdots, z_m) = \sum_{i_2=0}^{N_2}\cdots\sum_{i_m=0}^{N_m} \boldsymbol{Q}_{i_2\cdots i_m} z_2^{-i_2}\cdots z_m^{-i_m}$$

$$\boldsymbol{Q}_{i_2\cdots i_m} = \begin{bmatrix} q_{0 i_2 \cdots i_m} \\ \vdots \\ q_{N_1 i_2 \cdots i_m} \end{bmatrix}.$$

さらに、式 (4.2) は次のように変形できる。

$$H(z_1, z_2, \cdots, z_m) = \boldsymbol{G}_1(z_1)\frac{\boldsymbol{N}_{2,\cdots,m-1}(z_2, \cdots, z_{m-1})}{D_2(z_2)\cdots D_{m-1}(z_{m-1})}\boldsymbol{G}_m(z_m) \tag{4.3}$$

但し、

$$G_m(z_m) = \frac{\left[1, z_m^{-1}, \cdots, z_m^{-N_m}\right]^T}{D_m(z_m)}$$

$$\boldsymbol{N}_{2,\cdots,m-1}(z_2, \cdots, z_{m-1}) = \sum_{i_2=0}^{N_2} \cdots \sum_{i_{m-1}=0}^{N_{m-1}} \boldsymbol{Q}_{i_2 \cdots i_{m-1}} z_2^{-i_2} \cdots z_{m-1}^{-i_{m-1}}$$

$$\boldsymbol{Q}_{i_2 \cdots i_{m-1}} = \left[\ \boldsymbol{Q}_{i_2 \cdots i_{m-1} 0} \ \ \cdots \ \ \boldsymbol{Q}_{i_2 \cdots i_{m-1} N_m}\ \right].$$

式 (4.3) に対し、式 (4.2) と同様の操作を行うことによって、次式が得られる。

$$H(z_1, z_2, \cdots, z_m) = \boldsymbol{G}_1(z_1)\boldsymbol{G}_2(z_2)\frac{\boldsymbol{N}_{3,\cdots,m-1}(z_3, \cdots, z_{m-1})}{D_3(z_3) \cdots D_{m-1}(z_{m-1})}\boldsymbol{G}_m(z_m) \tag{4.4}$$

但し、

$$\boldsymbol{G}_2(z_2) = \frac{\left[\boldsymbol{I}_{N_1+1}, z_2^{-1}\boldsymbol{I}_{N_1+1}, \cdots, z_2^{-N_2}\boldsymbol{I}_{N_1+1}\right]}{D_2(z_2)}$$

$$\boldsymbol{N}_{3,\cdots,m-1}(z_3, \cdots, z_{m-1}) = \sum_{i_3=0}^{N_3} \cdots \sum_{i_{m-1}=0}^{N_{m-1}} \boldsymbol{Q}_{i_3 \cdots i_{m-1}} z_3^{-i_3} \cdots z_{m-1}^{-i_{m-1}}$$

$$\boldsymbol{Q}_{i_3 \cdots i_{m-1}} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{Q}_{0 i_3 \cdots i_{m-1}} \\ \vdots \\ \boldsymbol{Q}_{N_2 i_3 \cdots i_{m-1}} \end{bmatrix}.$$

同様に、式 (4.4) は次のように変形される。

$$H(z_1, z_2, \cdots, z_m) = \boldsymbol{G}_1(z_1)\boldsymbol{G}_2(z_2)\frac{\boldsymbol{N}_{3,\cdots,m-2}(z_3, \cdots, z_{m-2})}{D_3(z_3) \cdots D_{m-2}(z_{m-2})}\boldsymbol{G}_{m-1}(z_{m-1})\boldsymbol{G}_m(z_m) \tag{4.5}$$

但し、

$$\boldsymbol{G}_{m-1}(z_{m-1}) = \frac{\left[\boldsymbol{I}_{N_m+1}, z_{m-1}^{-1}\boldsymbol{I}_{N_m+1}, \cdots, z_{m-1}^{-N_{m-1}}\boldsymbol{I}_{N_m+1}\right]^T}{D_{m-1}(z_{m-1})}$$

$$\boldsymbol{N}_{3,\cdots,m-2}(z_3, \cdots, z_{m-2}) = \sum_{i_3=0}^{N_3} \cdots \sum_{i_{m-2}=0}^{N_{m-2}} \boldsymbol{Q}_{i_3 \cdots i_{m-2}} z_3^{-i_3} \cdots z_{m-2}^{-i_{m-2}}$$

$$\boldsymbol{Q}_{i_3 \cdots i_{m-2}} = \left[\ \boldsymbol{Q}_{i_3 \cdots i_{m-2} 0} \ \ \cdots \ \ \boldsymbol{Q}_{i_3 \cdots i_{m-2} N_{m-1}}\ \right].$$

上記の操作を繰り返すことによって、次に示す結果が得られる：

$$H(z_1, z_2, \cdots, z_m) = \boldsymbol{G}_1(z_1) \cdots \boldsymbol{G}_{k-1}(z_{k-1})\frac{\boldsymbol{N}_k(z_k)}{D_k(z_k)}\boldsymbol{G}_{k+1}(z_{k+1}) \cdots \boldsymbol{G}_m(z_m) \tag{4.6}$$

但し、

$$k = \begin{cases} \dfrac{m}{2} + 1, & m\text{ が偶数のとき} \\ \dfrac{m+1}{2}, & m\text{ が奇数のとき} \end{cases}$$

$$\boldsymbol{G}_{k-1}(z_{k-1}) = \frac{\left[\boldsymbol{I}_{(N_1+1)\cdots(N_{k-2}+1)}, \cdots, z_{k-1}^{-N_{k-1}}\boldsymbol{I}_{(N_1+1)\cdots(N_{k-2}+1)}\right]}{D_{k-1}(z_{k-1})}$$

$$\boldsymbol{G}_{k+1}(z_{k+1}) = \frac{\left[\boldsymbol{I}_{(N_{k+2}+1)\cdots(N_m+1)}, \cdots, z_{k+1}^{-N_{k+1}}\boldsymbol{I}_{(N_{k+2}+1)\cdots(N_m+1)}\right]^T}{D_{k+1}(z_{k+1})}$$

$$\boldsymbol{N}_k(z_k) = \sum_{i_k=0}^{N_k} \boldsymbol{Q}_{i_k} z_k^{-i_k}$$

$$\boldsymbol{Q}_{i_k} = \begin{cases} \begin{bmatrix} \boldsymbol{Q}_{0 i_k} \\ \vdots \\ \boldsymbol{Q}_{N_{k-1} i_k} \end{bmatrix}, & m\text{ が偶数のとき} \\ \left[\ \boldsymbol{Q}_{i_k 0} \ \ \cdots \ \ \boldsymbol{Q}_{i_k N_{k+1}}\ \right], & m\text{ が奇数のとき} \end{cases}$$

$(N_{k+1} + 1) \cdots (N_m + 1)$ 入力 $(N_1 + 1) \cdots (N_{k-1} + 1)$ 出力の 1 次元フィルタ $\tilde{\boldsymbol{H}}(z_k) = \boldsymbol{N}_k(z_k)/D_k(z_k)$ は、次のように表される。

$$\begin{aligned} \tilde{\boldsymbol{H}}(z_k) &= \frac{\boldsymbol{N}_k(z_k)}{D_k(z_k)} \\ &= \tilde{\boldsymbol{C}}_k(z_k\boldsymbol{I}_{n_k} - \boldsymbol{A}_{kk})^{-1}\tilde{\boldsymbol{B}}_k + \tilde{\boldsymbol{D}}_k \\ &= \left[\tilde{\boldsymbol{C}}_k \ \ \tilde{\boldsymbol{D}}_{k1}\right] \begin{bmatrix} (z_k\boldsymbol{I}_{n_k} - \boldsymbol{A}_{kk})^{-1} & 0 \\ 0 & \boldsymbol{I}_{r_k} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{\boldsymbol{B}}_k \\ \tilde{\boldsymbol{D}}_{k2} \end{bmatrix} \end{aligned} \tag{4.7}$$

但し、

$$\tilde{\boldsymbol{D}}_k = \tilde{\boldsymbol{D}}_{k1}\tilde{\boldsymbol{D}}_{k2}\ , \quad \mathrm{rank}\ \tilde{\boldsymbol{D}}_k = r_k.$$

n_kが最小であるとき、これを$\tilde{\boldsymbol{H}}(z_k)$ の最小分解と呼ぶ。特殊な場合として、$\tilde{\boldsymbol{H}}(z_k)$ が定行列である場合を考えると、これは文献 [38] で与えられている 2 次元分母分離形ディジタルフィルタの低次元分解と等価になる。すなわち、式 (4.7) は文献 [38] の拡張と見なすことができる。

式 (4.6) および (4.7) から、次に示す 2 つの 1 次元フィルタが得られる。

$$
\begin{aligned}
&\boldsymbol{G}_{k-1}(z_{k-1})\left[\tilde{\boldsymbol{C}}_k \;\; \tilde{\boldsymbol{D}}_{k1}\right] \\
&\quad = \tilde{\boldsymbol{C}}_{k-1}(z_{k-1}\boldsymbol{I}_{n_{k-1}} - \boldsymbol{A}_{k-1,k-1})^{-1}\tilde{\boldsymbol{B}}_{k-1} + \tilde{\boldsymbol{D}}_{k-1} \\
&\quad = \left[\tilde{\boldsymbol{C}}_{k-1} \;\; \tilde{\boldsymbol{D}}_{k-1,1}\right]\begin{bmatrix} (z_{k-1}\boldsymbol{I}_{n_{k-1}} - \boldsymbol{A}_{k-1,k-1})^{-1} & 0 \\ 0 & \boldsymbol{I}_{r_{k-1}} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \tilde{\boldsymbol{B}}_{k-1} \\ \tilde{\boldsymbol{D}}_{k-1,2} \end{bmatrix} \\
&\begin{bmatrix} \tilde{\boldsymbol{B}}_k \\ \tilde{\boldsymbol{D}}_{k2} \end{bmatrix}\boldsymbol{G}_{k+1}(z_{k+1}) \\
&\quad = \tilde{\boldsymbol{C}}_{k+1}(z_{k+1}\boldsymbol{I}_{n_{k+1}} - \boldsymbol{A}_{k+1,k+1})^{-1}\tilde{\boldsymbol{B}}_{k+1} + \tilde{\boldsymbol{D}}_{k+1} \\
&\quad = \left[\tilde{\boldsymbol{C}}_{k+1} \;\; \tilde{\boldsymbol{D}}_{k+1,1}\right]\begin{bmatrix} (z_{k+1}\boldsymbol{I}_{n_{k+1}} - \boldsymbol{A}_{k+1,k+1})^{-1} & 0 \\ 0 & \boldsymbol{I}_{r_{k+1}} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \tilde{\boldsymbol{B}}_{k+1} \\ \tilde{\boldsymbol{D}}_{k+1,2} \end{bmatrix}
\end{aligned}
\tag{4.8}
$$

但し、

$$
\begin{aligned}
\tilde{\boldsymbol{D}}_{k-1} &= \tilde{\boldsymbol{D}}_{k-1,1}\tilde{\boldsymbol{D}}_{k-1,2}\ , \quad \mathrm{rank}\tilde{\boldsymbol{D}}_{k-1} = r_{k-1} \\
\tilde{\boldsymbol{D}}_{k+1} &= \tilde{\boldsymbol{D}}_{k+1,1}\tilde{\boldsymbol{D}}_{k+1,2}\ , \quad \mathrm{rank}\tilde{\boldsymbol{D}}_{k+1} = r_{k+1}.
\end{aligned}
$$

この操作を、次式が得られるまで繰り返す。

$$
\begin{aligned}
&\boldsymbol{G}_1(z_1)\left[\tilde{\boldsymbol{C}}_2 \;\; \tilde{\boldsymbol{D}}_{21}\right] = \tilde{\boldsymbol{C}}_1(z_1\boldsymbol{I}_{n_1} - \boldsymbol{A}_{11})^{-1}\tilde{\boldsymbol{B}}_1 + \tilde{\boldsymbol{D}}_1 \\
&\qquad = \left[\tilde{\boldsymbol{C}}_1 \;\; \tilde{\boldsymbol{D}}_{11}\right]\begin{bmatrix} (z_1\boldsymbol{I}_{n_1} - \boldsymbol{A}_{11})^{-1} & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \tilde{\boldsymbol{B}}_1 \\ \tilde{\boldsymbol{D}}_{12} \end{bmatrix} \\
&\begin{bmatrix} \tilde{\boldsymbol{B}}_{m-1} \\ \tilde{\boldsymbol{D}}_{m-1,2} \end{bmatrix}\boldsymbol{G}_m(z_m) = \tilde{\boldsymbol{C}}_m(z_m\boldsymbol{I}_{n_m} - \boldsymbol{A}_{mm})^{-1}\tilde{\boldsymbol{B}}_m + \tilde{\boldsymbol{D}}_m \\
&\qquad = \left[\tilde{\boldsymbol{C}}_m \;\; \tilde{\boldsymbol{D}}_{m1}\right]\begin{bmatrix} (z_m\boldsymbol{I}_{n_m} - \boldsymbol{A}_{mm})^{-1} & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \tilde{\boldsymbol{B}}_m \\ \tilde{\boldsymbol{D}}_{m2} \end{bmatrix}
\end{aligned}
\tag{4.9}
$$

但し、$\tilde{\boldsymbol{D}}_1 = \tilde{\boldsymbol{D}}_{11}\tilde{\boldsymbol{D}}_{12}$ であり、$\tilde{\boldsymbol{D}}_m = \tilde{\boldsymbol{D}}_{m1}\tilde{\boldsymbol{D}}_{m2}$である。これより、次式が得られる。

$$
\begin{aligned}
&H(z_1, z_2, \cdots, z_m) \\
&= \left[\tilde{\boldsymbol{C}}_1 \;\; \tilde{\boldsymbol{D}}_{11}\right]\prod_{i=1}^{k-1}\boldsymbol{V}_i(z_i)\begin{bmatrix} (z_k\boldsymbol{I}_{n_k} - \boldsymbol{A}_{kk})^{-1} & 0 \\ 0 & \boldsymbol{I}_{r_k} \end{bmatrix}\prod_{i=k+1}^{m}\boldsymbol{W}_i(z_i)\begin{bmatrix} \tilde{\boldsymbol{B}}_m \\ \tilde{\boldsymbol{D}}_{m2} \end{bmatrix}
\end{aligned}
\tag{4.10}
$$

但し、

$$
\boldsymbol{V}_i(z_i) = \begin{bmatrix} (z_i\boldsymbol{I}_{n_i} - \boldsymbol{A}_{ii})^{-1} & 0 \\ 0 & \boldsymbol{I}_{r_i} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \tilde{\boldsymbol{B}}_i \\ \tilde{\boldsymbol{D}}_{i2} \end{bmatrix}, \quad i = 1, 2, \cdots, k-1
$$

$$
\boldsymbol{W}_i(z_i) = \left[\tilde{\boldsymbol{C}}_i \;\; \tilde{\boldsymbol{D}}_{i1}\right]\begin{bmatrix} (z_i\boldsymbol{I}_{n_i} - \boldsymbol{A}_{ii})^{-1} & 0 \\ 0 & \boldsymbol{I}_{r_i} \end{bmatrix}, \quad i = k+1, k+2, \cdots, m.
$$

ここで、

$$
\begin{aligned}
\begin{bmatrix} \tilde{\boldsymbol{B}}_i \\ \tilde{\boldsymbol{D}}_{i2} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} \bar{\boldsymbol{B}}_i \\ \bar{\boldsymbol{D}}_{i2} \end{bmatrix}\left[\bar{\boldsymbol{C}}_{i+1} \;\; \bar{\boldsymbol{D}}_{i+1,1}\right], \quad i = 1, 2, \cdots, k-1 \\
\left[\tilde{\boldsymbol{C}}_i \;\; \tilde{\boldsymbol{D}}_{i1}\right] &= \begin{bmatrix} \bar{\boldsymbol{B}}_{i-1} \\ \bar{\boldsymbol{D}}_{i-1,2} \end{bmatrix}\left[\bar{\boldsymbol{C}}_i \;\; \bar{\boldsymbol{D}}_{i1}\right], \quad i = k+1, k+2, \cdots, m
\end{aligned}
\tag{4.11}
$$

と置くことによって、伝達関数 (4.10) 式は次のように書き換えられる。

$$
H(z_1, z_2, \cdots, z_m) = \boldsymbol{H}_1(z_1)\boldsymbol{H}_2(z_2)\cdots\boldsymbol{H}_m(z_m) \tag{4.12}
$$

但し、

$$
\boldsymbol{H}_i(z_i) = \bar{\boldsymbol{C}}_i(z_i\boldsymbol{I}_{n_i} - \boldsymbol{A}_{ii})^{-1}\bar{\boldsymbol{B}}_i + \bar{\boldsymbol{D}}_{i1}\bar{\boldsymbol{D}}_{i2}
$$

$$
\bar{\boldsymbol{C}}_1 = \tilde{\boldsymbol{C}}_1\ , \quad \bar{\boldsymbol{D}}_{11} = \tilde{\boldsymbol{D}}_{11}\ , \quad \bar{\boldsymbol{B}}_m = \tilde{\boldsymbol{B}}_m\ , \quad \bar{\boldsymbol{D}}_{m2} = \tilde{\boldsymbol{D}}_{m2}.
$$

式 (4.12) は、m 次元分母分離形フィルタが 1 入力多出力 1 次元フィルタと、$(m-2)$ 個の多入力多出力 1 次元フィルタと、多入力 1 出力の 1 次元フィルタの縦続接続で与えられることを示している。式 (4.12) の右辺の各々のセクションの状態方程式および出力方程式は、次式によって与えられる。

$$
\begin{aligned}
&\begin{cases} \boldsymbol{x}_1(\mu+\sigma_1) = \boldsymbol{A}_{11}\boldsymbol{x}_1(\mu) + \bar{\boldsymbol{B}}_1\boldsymbol{y}_2(\mu) \\ y(\mu) = \bar{\boldsymbol{C}}_1\boldsymbol{x}_1(\mu) + \bar{\boldsymbol{D}}_{11}\bar{\boldsymbol{D}}_{12}\boldsymbol{y}_2(\mu) \end{cases} \\
&\begin{cases} \boldsymbol{x}_2(\mu+\sigma_2) = \boldsymbol{A}_{22}\boldsymbol{x}_2(\mu) + \bar{\boldsymbol{B}}_2\boldsymbol{y}_3(\mu) \\ \boldsymbol{y}_2(\mu) = \bar{\boldsymbol{C}}_2\boldsymbol{x}_2(\mu) + \bar{\boldsymbol{D}}_{22}\bar{\boldsymbol{D}}_{23}\boldsymbol{y}_3(\mu) \end{cases} \\
&\qquad \vdots \\
&\begin{cases} \boldsymbol{x}_m(\mu+\sigma_m) = \boldsymbol{A}_{mm}\boldsymbol{x}_m(\mu) + \bar{\boldsymbol{B}}_m u(\mu) \\ \boldsymbol{y}_m(\mu) = \bar{\boldsymbol{C}}_m\boldsymbol{x}_m(\mu) + \bar{\boldsymbol{D}}_{m1}\bar{\boldsymbol{D}}_{m2}u(\mu) \end{cases}
\end{aligned}
\tag{4.13}
$$

但し、

$$
\begin{aligned}
\mu &= (k_1, k_2, \cdots, k_m)\ , \quad k_i \geq 0 \\
\sigma_i &= (0, \cdots, 0, \underset{(i)}{1}, 0, \cdots, 0),
\end{aligned}
$$

であり、$\boldsymbol{x}_i(\mu), i=1,2,\cdots,m$ は $n_i \times 1$ の大きさをもつ状態ベクトル、$u(\mu)$ はスカラ入力、$y(\mu)$ はスカラ出力、$\boldsymbol{y}_i(\mu),\ i=2,3,\cdots,m$ は適当な大きさを持つ出力ベクトルである。また、$k_1,k_2,\cdots,k_m$ は空間変数を表す。式 (4.13) から全体のシステムは、次式によって記述される。

$$\begin{bmatrix} \boldsymbol{x}_1(\mu+\sigma_1) \\ \boldsymbol{x}_2(\mu+\sigma_2) \\ \vdots \\ \boldsymbol{x}_m(\mu+\sigma_m) \end{bmatrix} = \boldsymbol{A} \begin{bmatrix} \boldsymbol{x}_1(\mu) \\ \boldsymbol{x}_2(\mu) \\ \vdots \\ \boldsymbol{x}_m(\mu) \end{bmatrix} + \boldsymbol{B}u(\mu)$$

$$y(\mu) = \boldsymbol{C} \begin{bmatrix} \boldsymbol{x}_1(\mu) \\ \boldsymbol{x}_2(\mu) \\ \vdots \\ \boldsymbol{x}_m(\mu) \end{bmatrix} + \boldsymbol{D}u(\mu) \tag{4.14}$$

但し、

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{A}_{11} & \boldsymbol{A}_{12} & \hat{\boldsymbol{B}}_1\hat{\boldsymbol{C}}_3 & \cdots & \hat{\boldsymbol{B}}_1 \prod_{i=2}^{m-2} \hat{\boldsymbol{D}}_{i,i+1}\hat{\boldsymbol{C}}_m \\ & \boldsymbol{A}_{22} & \boldsymbol{A}_{23} & \cdots & \hat{\boldsymbol{B}}_2 \prod_{i=3}^{m-2} \hat{\boldsymbol{D}}_{i,i+1}\hat{\boldsymbol{C}}_m \\ & & \ddots & \ddots & \vdots \\ & 0 & & \ddots & \boldsymbol{A}_{m-1,m} \\ & & & & \boldsymbol{A}_{mm} \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{B} = \left[\left(\hat{\boldsymbol{B}}_1 \prod_{i=2}^{m-1} \hat{\boldsymbol{D}}_{i,i+1}\tilde{\boldsymbol{D}}_{m2} \right)^T ,\ \left(\hat{\boldsymbol{B}}_2 \prod_{i=3}^{m-1} \hat{\boldsymbol{D}}_{i,i+1}\tilde{\boldsymbol{D}}_{m2} \right)^T ,\cdots,\ \left(\hat{\boldsymbol{B}}_{m-1}\tilde{\boldsymbol{D}}_{m2} \right)^T ,\ \tilde{\boldsymbol{B}}_m^T \right]^T$$

$$\boldsymbol{C} = \left[\tilde{\boldsymbol{C}}_1 ,\ \tilde{\boldsymbol{D}}_{11}\hat{\boldsymbol{C}}_2 ,\cdots,\ \tilde{\boldsymbol{D}}_{11} \prod_{i=1}^{m-2} \hat{\boldsymbol{D}}_{i,i+1}\hat{\boldsymbol{C}}_{m-1} ,\ \tilde{\boldsymbol{D}}_{11} \prod_{i=1}^{m-1} \hat{\boldsymbol{D}}_{i,i+1}\hat{\boldsymbol{C}}_m \right]$$

$$\boldsymbol{D} = \left[\tilde{\boldsymbol{D}}_{11} \prod_{i=1}^{m-1} \hat{\boldsymbol{D}}_{i,i+1}\tilde{\boldsymbol{D}}_{m2} \right].$$

ここで、

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \tilde{\boldsymbol{B}}_i \\ \tilde{\boldsymbol{D}}_{i2} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} \bar{\boldsymbol{B}}_i\bar{\boldsymbol{C}}_{i+1} & \bar{\boldsymbol{B}}_i\bar{\boldsymbol{D}}_{i+1,1} \\ \bar{\boldsymbol{D}}_{i2}\bar{\boldsymbol{C}}_{i+1} & \bar{\boldsymbol{D}}_{i2}\bar{\boldsymbol{D}}_{i+1,1} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \boldsymbol{A}_{i,i+1} & \hat{\boldsymbol{B}}_i \\ \hat{\boldsymbol{C}}_{i+1} & \hat{\boldsymbol{D}}_{i,i+1} \end{bmatrix}, \quad i=1,2,\cdots,k-1 \\ \begin{bmatrix} \tilde{\boldsymbol{C}}_i & \tilde{\boldsymbol{D}}_{i1} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} \bar{\boldsymbol{B}}_{i-1}\bar{\boldsymbol{C}}_i & \bar{\boldsymbol{B}}_{i-1}\bar{\boldsymbol{D}}_{i,1} \\ \bar{\boldsymbol{D}}_{i-1,2}\bar{\boldsymbol{C}}_i & \bar{\boldsymbol{D}}_{i-1,1}\bar{\boldsymbol{D}}_{i2} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \boldsymbol{A}_{i-1,i} & \hat{\boldsymbol{B}}_{i-1} \\ \hat{\boldsymbol{C}}_i & \hat{\boldsymbol{D}}_{i-1,i} \end{bmatrix}, \quad i=k+1,k+2,\cdots,m. \end{aligned} \tag{4.15}$$

である。

状態空間行列 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B},\boldsymbol{C}$ および $\boldsymbol{D}$ の導出に必要な行列 $\boldsymbol{A}_{i,i+1}, \hat{\boldsymbol{B}}_i, \hat{\boldsymbol{C}}_i, \hat{\boldsymbol{D}}_{i,i-1}$ は式 (4.15) のように単に行列を分割するだけで得られ、実際には、式 (4.11) に示される行列の分解は必要ないことに注意する必要がある。

4.3 フィルタ設計法

所望の m 次元ディジタルフィルタが次式によって与えられるとする。

$$F(z_1,z_2,\cdots,z_m) = \sum_{i_1=0}^{N_1} \cdots \sum_{i_m=0}^{N_m} f_{i_1\cdots i_m} z_1^{-i_1} \cdots z_m^{-i_m}. \tag{4.16}$$

ここで、式 (4.16) は次のように書き換えられる。

$$F(z_1,z_2,\cdots,z_m) = \boldsymbol{G}_1(z_1)\cdots\boldsymbol{G}_{k-1}(z_{k-1})\boldsymbol{F}_k(z_k)\boldsymbol{G}_{k+1}(z_{k+1})\cdots\boldsymbol{G}_m(z_m) \tag{4.17}$$

但し、

$$k = \begin{cases} \dfrac{m}{2} + 1 \text{ , } m \text{ が偶数のとき} \\ \dfrac{m+1}{2} \text{ , } m \text{ が奇数のとき} \end{cases}$$

$$\boldsymbol{G}_1(z_1) = [1, z_1^{-1}, \cdots, z_1^{-N_1}] \ , \quad \boldsymbol{G}_m(z_m) = [1, z_m^{-1}, \cdots, z_m^{-N_m}]^t$$
$$\boldsymbol{G}_i(z_i) = \left[\boldsymbol{I}_{(N_1+1)\cdots(N_{i-1}+1)}, \cdots, z_i^{-N_i}\boldsymbol{I}_{(N_1+1)\cdots(N_{i-1}+1)}\right], \quad i = 2, 3, \cdots, k-1$$
$$\boldsymbol{G}_i(z_i) = \left[\boldsymbol{I}_{(N_{i+1}+1)\cdots(N_m+1)}, \cdots, z_i^{-N_i}\boldsymbol{I}_{(N_{i+1}+1)\cdots(N_m+1)}\right]^t \quad i = k+1, \cdots, m-1$$

$$\boldsymbol{F}_k(z_k) = \sum_{i_k=0}^{N_k} \boldsymbol{F}_{i_k} z_k^{-i_k}.$$

であり、$\boldsymbol{F}_{i_k}$ は次式にしたがって再帰的に計算される行列である。

$$\boldsymbol{F}_{i_2\cdots i_m} = \begin{bmatrix} f_{0i_2\cdots i_m} \\ \vdots \\ f_{N_1 i_2\cdots i_m} \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{F}_{i_2\cdots i_{m-1}} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{F}_{i_2\cdots i_{m-1}0} & \cdots & \boldsymbol{F}_{i_2\cdots i_{m-1}N_m} \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{F}_{i_3\cdots i_{m-1}} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{F}_{0i_3\cdots i_{m-1}} \\ \vdots \\ \boldsymbol{F}_{N_2 i_3\cdots i_{m-1}} \end{bmatrix}$$
$$\vdots$$
$$\boldsymbol{F}_{i_k} = \begin{cases} \begin{bmatrix} \boldsymbol{F}_{0i_k} \\ \vdots \\ \boldsymbol{F}_{N_{k-1}i_k} \end{bmatrix}, & m \text{ が偶数のとき} \\ \begin{bmatrix} \boldsymbol{F}_{i_k 0} & \cdots & \boldsymbol{F}_{i_k N_{k+1}} \end{bmatrix}, & m \text{ が奇数のとき} \end{cases}$$

$\boldsymbol{F}_k(z_k)$ は次に示すように表すことができる。

$$\begin{aligned} \boldsymbol{F}_k(z_k) &= \boldsymbol{C}_0 \left(z_k \boldsymbol{I}_\xi - \boldsymbol{A}_0\right)^{-1} \boldsymbol{B}_0 + \boldsymbol{F}_0 \\ &= \boldsymbol{C} \left(z_k \boldsymbol{I}_\mu - \boldsymbol{A}\right)^{-1} \boldsymbol{B} + \boldsymbol{F}_0 \end{aligned} \tag{4.18}$$

但し、

$$\boldsymbol{A}_0 = \begin{bmatrix} 0 & \boldsymbol{I}_n & \cdots & 0 \\ & & \ddots & \vdots \\ & & & \boldsymbol{I}_n \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{B}_0 = \begin{bmatrix} \boldsymbol{F}_1 \\ \boldsymbol{F}_2 \\ \vdots \\ \boldsymbol{F}_{N_k} \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{C}_0 = [\boldsymbol{I}_n \ \ 0 \ \cdots \ 0]$$

$$\begin{aligned} \mu &= \operatorname{rank}\left[\boldsymbol{B}_0 \ \ \boldsymbol{A}_0\boldsymbol{B}_0 \ \ \cdots \ \ \boldsymbol{A}_0^{\xi-1}\boldsymbol{B}_0\right] \\ &= \operatorname{rank}\begin{bmatrix} \boldsymbol{F}_1 & \boldsymbol{F}_2 & \cdots & \boldsymbol{F}_{N_k} \\ \boldsymbol{F}_2 & & & \\ \vdots & & & \\ \boldsymbol{F}_{N_k} & & & 0 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

$$\boldsymbol{A} = (\boldsymbol{F}^t\boldsymbol{F})^{-1}\boldsymbol{F}^t\boldsymbol{A}_0\boldsymbol{F} \ , \quad \boldsymbol{B} = (\boldsymbol{F}^t\boldsymbol{F})^{-1}\boldsymbol{F}^t\boldsymbol{B}_0 \ , \quad \boldsymbol{C} = \boldsymbol{C}_0\boldsymbol{F}$$

$$n = (N_1+1)\cdots(N_{k-1}+1) \ , \quad \xi = nN_k$$

であり、$\boldsymbol{F}$ は

$$[\boldsymbol{B}_0 \ \ \boldsymbol{A}_0\boldsymbol{B}_0 \ \ \cdots \ \ \boldsymbol{A}_0^{\xi-1}\boldsymbol{B}_0]$$

に含まれるμ個の線形独立な列から成る大きさ$\xi \times \mu$の行列である。

次に、$\boldsymbol{F}_k(z_k)$ の最小実現 $(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}, \boldsymbol{C})_\mu$ から平衡実現が求められる。可制御性および可観測性グラミアン$\boldsymbol{K}$、$\boldsymbol{W}$が以下に示すリアプノフ方程式を解くことによって求められる。

$$\begin{aligned} \boldsymbol{K} &= \boldsymbol{A}\boldsymbol{K}\boldsymbol{A}^t + \boldsymbol{B}\boldsymbol{B}^t \\ \boldsymbol{W} &= \boldsymbol{A}^t\boldsymbol{W}\boldsymbol{A} + \boldsymbol{C}^t\boldsymbol{C} \end{aligned} \tag{4.19}$$

正定行列$\boldsymbol{W}$ は、次のように分解できる。

$$\boldsymbol{W} = \boldsymbol{S}^t\boldsymbol{S}. \tag{4.20}$$

$\boldsymbol{S}\boldsymbol{K}\boldsymbol{S}^t$に固有値－固有ベクトル分解を施すことによって、次式が得られる。

$$\boldsymbol{S}\boldsymbol{K}\boldsymbol{S}^t = \boldsymbol{U}\boldsymbol{\Sigma}^2\boldsymbol{U}^t \tag{4.21}$$

ここで、$\boldsymbol{\Sigma}$ は $\boldsymbol{S}\boldsymbol{K}\boldsymbol{S}^t$の固有値の平方根を要素にもつ対角行列である。

$$T = S^{-1}U\Sigma^{1/2}, \tag{4.22}$$

とおくことによって、次式が得られる。

$$T^{-1}KT^{-t} = T^tWT = \Sigma. \tag{4.23}$$

式 (4.23) より、$(T^{-1}AT, T^{-1}B, CT)_\mu$ は平衡実現であることが確認できる。ここで、Σ を次のように 2 つに分解する。

$$\begin{aligned} \Sigma &= \begin{bmatrix} \Sigma_1 & 0 \\ 0 & \Sigma_2 \end{bmatrix} \\ \Sigma_1 &= \mathrm{diag}(\sigma_1, \sigma_2, \cdots, \sigma_p) \\ \Sigma_2 &= \mathrm{diag}(\sigma_{p+1}, \sigma_{p+2}, \cdots, \sigma_\mu). \end{aligned} \tag{4.24}$$

この分割にしたがって、状態空間行列は次のように表すことができる。

$$T^{-1}AT = \begin{bmatrix} A_{kk} & * \\ * & * \end{bmatrix}, \quad T^{-1}B = \begin{bmatrix} \tilde{B}_k \\ * \end{bmatrix}, \quad CT = \begin{bmatrix} \tilde{C}_k & * \end{bmatrix}. \tag{4.25}$$

このとき、実現 $(A_{kk}, \tilde{B}_k, \tilde{C}_k)_p$ は $(A, B, C)_\mu$の低次元近似となっている。すなわち、

$$F_k(z_k) \simeq H_k(z_k) = \tilde{C}_k(z_kI_p - A_{kk})^{-1}\tilde{B}_k + F_0. \tag{4.26}$$

このとき、式 (4.17) は次のように表される。

$$\begin{aligned} F(z_1, z_2, \cdots, z_m) &\simeq G_1(z_1)\cdots G_{k-1}(z_{k-1})H_k(z_k)G_{k+1}(z_{k+1})\cdots G_m(z_m) \\ &= G_1(z_1)\cdots G_{k-1}(z_{k-1})\begin{bmatrix}\tilde{C}_k & \tilde{D}_{k1}\end{bmatrix} \\ &\quad \cdot \begin{bmatrix} (z_kI_p - A_{kk})^{-1} & 0 \\ 0 & I_q \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \tilde{B}_k \\ \tilde{D}_{k2} \end{bmatrix} G_{k+1}(z_{k+1})\cdots G_m(z_m) \end{aligned} \tag{4.27}$$

但し、

$$F_0 = \tilde{D}_{k1}\tilde{D}_{k2}, \quad \mathrm{rank}(F_0) = q.$$

いま、

$$F_{k-1}(z_{k-1}) = G_{k-1}(z_{k-1})\begin{bmatrix}\tilde{C}_k & \tilde{D}_{k1}\end{bmatrix}, \quad F_{k+1}(z_{k+1}) = \begin{bmatrix} \tilde{B}_k \\ \tilde{D}_{k2} \end{bmatrix} G_{k+1}(z_{k+1}). \tag{4.28}$$

を定義する。

式 (4.18) から、式 (4.28) を導出するのと同様の手続きを繰り返すことにより、次に示す結果が得られる。

$$\begin{aligned} F_1(z_1) &= G_1(z_1)\begin{bmatrix}\tilde{C}_2 & \tilde{D}_{21}\end{bmatrix} \\ &= \sum_{i_1=0}^{N_1} f_{i_1 1} z_1^{-i_1} \\ F_m(z_m) &= \begin{bmatrix} \tilde{B}_{m-1} \\ \tilde{D}_{m-1,2} \end{bmatrix} G_m(z_m) \\ &= \sum_{i_m=0}^{N_m} f_{i_m m} z_m^{-i_m} \end{aligned} \tag{4.29}$$

但し、$f_{i_1 1}$ ($f_{i_m m}$) は適当な大きさの行（列）ベクトルである。このとき、$F_1(z_1)$ および $F_m(z_m)$ はそれぞれ次のように表される。

$$\begin{aligned} F_1(z_1) &= \bar{C}(z_1I_{N_1} - \bar{A})^{-1}\bar{B} + f_{01} \\ F_m(z_m) &= \hat{C}(z_mI_{N_m} - \hat{A})^{-1}\hat{B} + f_{0m} \end{aligned} \tag{4.30}$$

但し、

$$\bar{A} = \begin{bmatrix} 0 & & & \\ \vdots & & I_{N_1-1} & \\ 0 & & & \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}, \quad \bar{B} = \begin{bmatrix} f_{11} \\ f_{21} \\ \vdots \\ f_{N_1 1} \end{bmatrix}, \quad \bar{C} = [1\ 0 \cdots 0]$$

$$\hat{A} = \begin{bmatrix} 0 & \cdots & 0 & 0 \\ & & & 0 \\ & I_{N_m-1} & & \vdots \\ & & & 0 \end{bmatrix}, \quad \hat{B} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \hat{C} = [f_{1m}\ \ f_{2m}\ \cdots\ f_{N_m m}].$$

$F_1(z_1)$ および $F_m(z_m)$ のインパルス応答グラミアンを、それぞれ$\bar{Q}$ および$\hat{Q}$と表す。$\bar{Q}$および$\hat{Q}$は以下に示すリアプノフ方程式を解くことによってそれぞれ求めることができる。

$$\begin{aligned} \bar{Q} &= \bar{A}\bar{Q}\bar{A}^t + \bar{B}\bar{B}^t \\ \hat{Q} &= \hat{A}^T\hat{Q}\hat{A} + \hat{C}^T\hat{C}. \end{aligned} \tag{4.31}$$

$\bar{Q}$ と$\hat{Q}$に固有値ー固有ベクトル分解を施すことにより、次式が得られる。

$$
\begin{aligned}
\bar{V}^T\bar{Q}\bar{V} = \bar{\Delta} &= \begin{bmatrix} \bar{\Delta}_1 & \mathrm{o} \\ 0 & \bar{\Delta}_2 \end{bmatrix} \\
\hat{V}^T\hat{Q}\hat{V} = \hat{\Delta} &= \begin{bmatrix} \hat{\Delta}_1 & \mathrm{o} \\ 0 & \hat{\Delta}_2 \end{bmatrix}
\end{aligned}
\tag{4.32}
$$

但し、$\bar{V}$ および $\hat{V}$ はそれぞれ$\bar{Q}$ および $\hat{Q}$の固有ベクトルから成る直交行列であり、

$$\bar{\Delta} = \mathrm{diag}(\bar{\delta}_1, \bar{\delta}_2, \cdots, \bar{\delta}_{N_1}), \quad (\bar{\delta}_i \geq \bar{\delta}_{i+1})$$

$$\hat{\Delta} = \mathrm{diag}(\hat{\delta}_1, \hat{\delta}_2, \cdots, \hat{\delta}_{N_m}), \quad (\hat{\delta}_i \geq \hat{\delta}_{i+1})$$

はそれぞれ$\bar{Q}$ および $\hat{Q}$の固有値から成る対角行列である。

いま、

$$
\begin{aligned}
\bar{\Delta}_1 &= \mathrm{diag}(\bar{\delta}_1, \bar{\delta}_2, \cdots, \bar{\delta}_r) \\
\hat{\Delta}_1 &= \mathrm{diag}(\hat{\delta}_1, \hat{\delta}_2, \cdots, \hat{\delta}_l).
\end{aligned}
\tag{4.33}
$$

に選ぶ。この分割にしたがって、状態空間行列は次のように表される。

$$
\begin{aligned}
\bar{V}^T\bar{A}\bar{V} &= \begin{bmatrix} A_{11} & * \\ * & * \end{bmatrix}, \quad \bar{V}^T\bar{B} = \begin{bmatrix} \tilde{B}_1 \\ * \end{bmatrix}, \quad \bar{C}\bar{V} = [\tilde{C}_1 \quad *] \\
\hat{V}^T\hat{A}\hat{V} &= \begin{bmatrix} A_{mm} & * \\ * & * \end{bmatrix}, \quad \hat{V}^T\hat{B} = \begin{bmatrix} \tilde{B}_m \\ * \end{bmatrix}, \quad \hat{C}\hat{V} = [\tilde{C}_m \quad *].
\end{aligned}
\tag{4.34}
$$

このとき、$(A_{11}, \tilde{B}_1, \tilde{C}_1)$ および $(A_{mm}, \tilde{B}_m, \tilde{C}_m)$ はそれぞれ $(\bar{A}, \bar{B}, \bar{C})$ および $(\hat{A}, \hat{B}, \hat{C})$ の低次数近似となる。すなわち、

$$
\begin{aligned}
F_1(z_1) \simeq H_1(z_1) &= \tilde{C}_1(z_1 I_r - A_{11})^{-1}\tilde{B}_1 + f_{01} \\
F_m(z_m) \simeq H_m(z_m) &= \tilde{C}_m(z_m I_l - A_{mm})^{-1}\tilde{B}_m + f_{0m}.
\end{aligned}
\tag{4.35}
$$

式 (4.30) が正準形であることから、状態空間行列は次のように求められる。

$$
\begin{aligned}
A_{11} &= \bar{V}(1:N_1-1, 1:r)^t\bar{V}(2:N_1, 1:r) \\
\tilde{B}_1 &= \bar{V}(1:N_1, 1:r)^t\bar{B}\ , \quad \tilde{C}_1 = \bar{V}(1, 1:m) \\
A_{mm} &= \hat{V}(2:N_m:1:l)^t\hat{V}(1:N_m-1, 1:l) \\
\tilde{B}_m &= \hat{V}(1, 1:l)^t, \quad \tilde{C}_m = \hat{C}\hat{V}(1:N_m, 1:l)
\end{aligned}
\tag{4.36}
$$

但し、$V(i;j,k;l)$ は行列Vの i 行から j行および k列から l列を取り出したものである。行列$A_{11}, \tilde{B}_1, \tilde{C}_1, A_{mm}, \tilde{B}_m$ および$\tilde{C}_m$ は、式 (4.36) を用いることによって逆行列を求めることなく導出できることに注意されたい。

以上の結果より、次式が得られる。

$$
\begin{aligned}
F(z_1, z_2, \cdots, z_m) &\simeq H(z_1, z_2, \cdots, z_m) \\
&= \begin{bmatrix} \tilde{C}_1 & \tilde{D}_{11} \end{bmatrix} \prod_{i=1}^{k-1} V_i(z_i) \begin{bmatrix} (z_k I_{n_k} - A_{kk})^{-1} & 0 \\ 0 & I_{r_k} \end{bmatrix} \prod_{i=k+1}^{m} W_i(z_i) \begin{bmatrix} \tilde{B}_m \\ \tilde{D}_{m2} \end{bmatrix}
\end{aligned}
\tag{4.37}
$$

但し、$V_i(z_i)(i = 1, 2, \cdots, k-1)$ および$W_i(z_i)(i = k+1, k+2, \cdots, m)$ は式 (4.10) および式 (4.8) と同様に定義される。また、$\tilde{D}_{11}$ および $\tilde{D}_{m2}$ は$f_{01} = \tilde{D}_{11}\tilde{D}_{12}$ および$f_{0m} = \tilde{D}_{m1}\tilde{D}_{m2}$ をそれぞれ満足するスカラである。$H(z_1, z_2, \cdots, z_m)$ が求まると、状態空間モデルは (4.14) および (4.15) を用いることによって容易に導出することができる。

以上の議論から、フィルタ設計アルゴリズムは以下のようにまとめられる。

設計アルゴリズム

所与の m 次元 FIRディジタルフィルタの係数を $\{\ f_{i_1,\cdots,i_m} | 0 \leq i_k \leq N_k,\ k = 1, 2, \cdots, m\ \}$ とする。

1) 式 (4.18) よりA, B, C およびF_0 を求める。
2) 式 (4.19) を解き、グラミアンK および W を求める。
3) 式 (4.20)-(4.22) より行列Tを求める。
4) 式 (4.24) より次数 p を求め、式 (4.25) から行列$A_{kk}, \tilde{B}_k$および$\tilde{C}_k$を求める。
5) 式 (4.28) より$F_{k-1}(z_{k-1})$ および$F_{k+1}(z_{k+1})$ を求める。
6) 1)-5) と同様の手続きを用いることによって$F_{k-1}(z_{k-1})$ および$F_{k+1}(z_{k+1})$ から$F_{k-2}(z_{k-2})$ および$F_{k+2}(z_{k+2})$ を求める。
7) $F_1(z_1)$ および $F_m(z_m)$ が求まるまで 6) を繰り返す。
8) 式 (4.30) から行列 $\bar{A}, \bar{B}, \bar{C}, f_{01}, \hat{A}, \hat{B}, \hat{C}$ および f_{0m}を求める。
9) 式 (4.31) を解き、グラミアン $\bar{Q}$ および$\hat{Q}$ を求める。
10) 式 (4.32) より行列 $\bar{V}, \bar{\Delta}, \hat{V}$ および$\hat{\Delta}$ を求める。
11) 式 (4.36) より行列 $A_{11}, \tilde{B}_1, \tilde{C}_1, A_{mm}, \tilde{B}_m$ および$\tilde{C}_m$ を求める。

12) 式 (4.14) および (4.15) を用いて局所状態空間モデルを導出する。

本アルゴリズムを図示したものを図 4.1 に示す。

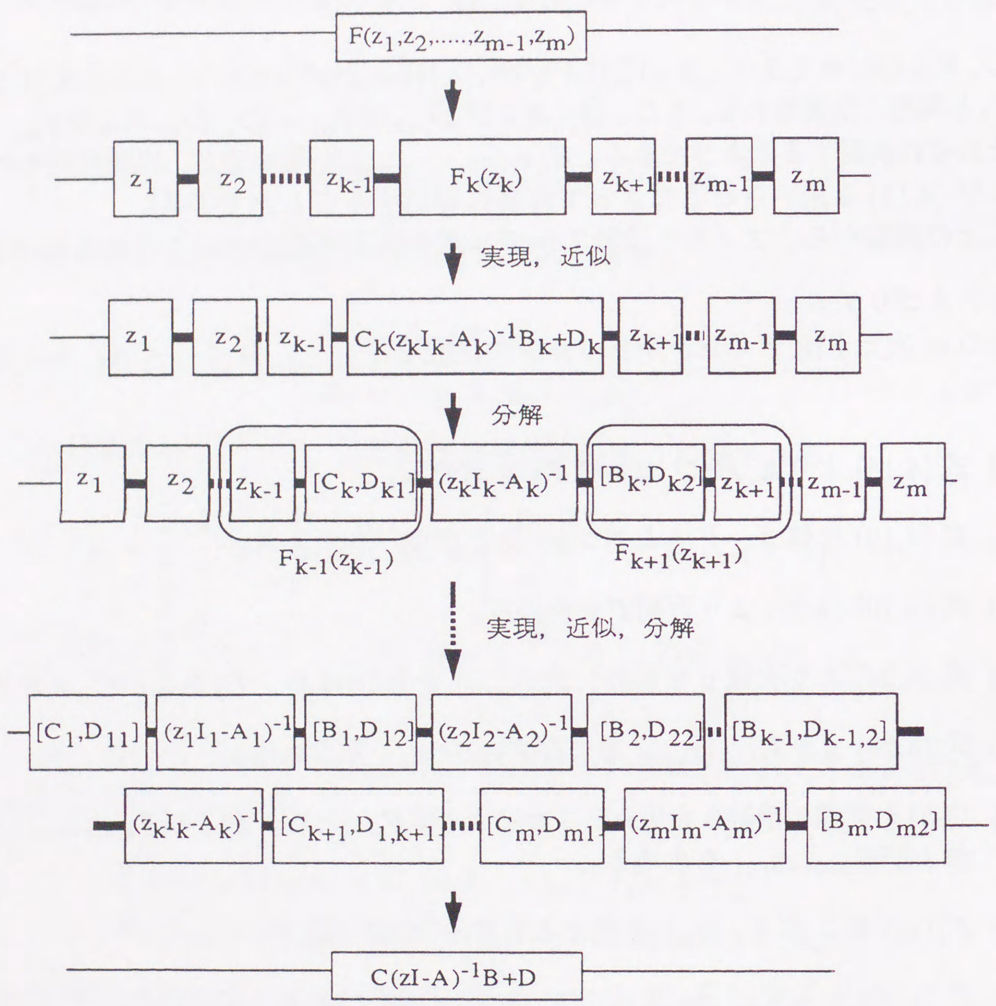


図 4.1 設計アルゴリズム

4.4 設計例

本章では、得られたフィルタの評価に以下で示す正規化 2 乗誤差および正規化最大絶対値誤差を用いる。

$$\varepsilon_2 = \frac{\left[\sum_{i_1=0}^{N_1}\cdots\sum_{i_m=0}^{N_m}(f_{i_1\cdots i_m} - h_{i_1\cdots i_m})^2\right]^{1/2}}{\left[\sum_{i_1=0}^{N_1}\cdots\sum_{i_m=0}^{N_m} f_{i_1\cdots i_m}^2\right]^{1/2}}$$

$$\varepsilon_\infty = \frac{\max\limits_{(0,\cdots,0)\le(i_1,\cdots,i_m)\le(N_1,\cdots,N_m)} |f_{i_1\cdots i_m} - h_{i_1\cdots i_m}|}{\max\limits_{(0,\cdots,0)\le(i_1,\cdots,i_m)\le(N_1,\cdots,N_m))} |f_{i_1\cdots i_m}|} \times 100.$$

但し、$h_{i_1\cdots i_m}$ は得られた局所状態空間モデルのインパルス応答である。

4.4.1 設計例 1　2 次元フィルタの設計

本設計例では、次式によって与えられる「ガウシアンフィルタ」のインパルス応答を近似する 2 次元分母分離形ディジタルフィルタを設計する。

$$f_{i_1 i_2} = 0.256332\exp\{-0.103203[(i_1-4)^2 + (i_2-4)^2]\}$$

但し、$N_1 = N_2 = 10$ とする。

いま、

$$F(z_1, z_2) = \boldsymbol{G}_1(z_1)\boldsymbol{F}_2(z_2)$$

とおく。但し、

$$\boldsymbol{G}_1(z_1) = [1, z_1^{-1}, \cdots, z_1^{-10}]$$

$$\boldsymbol{F}_2(z_2) = \sum_{j=0}^{10} \boldsymbol{f}_{j2} z_2^{-j}$$

$$\boldsymbol{f}_{j2} = (f_{0j}, f_{1j}, \cdots, f_{10j})^T$$

$\boldsymbol{F}_2(z_2)$ を式 (4.30) における $\boldsymbol{F}_m(z_m)$ とみなし、式 (4.31) と式 (4.32) を用いることによって、次式が得られる。

$$\hat{\delta}_1 = 3.53950 \quad \hat{\delta}_2 = 0.43228 \quad \hat{\delta}_3 = 0.02261 \quad \hat{\delta}_4 = 0.00066 \quad \hat{\delta}_5 = 0.00003$$
$$\hat{\delta}_6 = 0.00001 \quad \hat{\delta}_7 = 0.00001 \quad \hat{\delta}_8 = 0.00001 \quad \hat{\delta}_9 = 0.00000 \quad \hat{\delta}_{10} = 0.00000.$$

$\hat{\delta}_3 \gg \hat{\delta}_4$であることから $l = 3$ とした。このとき、式 (4.36) より

$$\boldsymbol{A}_{22} = \begin{bmatrix} 0.86382 & -0.16074 & -0.01102 \\ 0.45996 & 0.59513 & -0.17254 \\ -0.13791 & 0.75442 & 0.35615 \end{bmatrix}$$

$$\tilde{\boldsymbol{B}}_2 = \begin{bmatrix} 0.47734 & -0.63596 & 0.51120 \end{bmatrix}^T$$

$$\tilde{\boldsymbol{C}}_2 = \begin{bmatrix} 0.08728 & 0.04064 & 0.00747 \\ 0.17975 & 0.08369 & 0.01539 \\ 0.30114 & 0.14021 & 0.02578 \\ 0.41042 & 0.19109 & 0.03513 \\ 0.45504 & 0.21187 & 0.03895 \\ 0.41042 & 0.19109 & 0.03513 \\ 0.30114 & 0.14021 & 0.02578 \\ 0.17975 & 0.08369 & 0.01539 \\ 0.08728 & 0.04064 & 0.00747 \\ 0.03448 & 0.01605 & 0.00295 \\ 0.01108 & 0.00516 & 0.00095 \end{bmatrix}$$

$$\tilde{\boldsymbol{D}}_{21} = \boldsymbol{f}_{02} = \begin{bmatrix} f_{00} \\ f_{10} \\ \vdots \\ f_{10,0} \end{bmatrix}, \quad \tilde{\boldsymbol{D}}_{22} = 1.$$

が得られた。次に、

$$\boldsymbol{F}_1(z_1) = \boldsymbol{G}_1(z_1)[\tilde{\boldsymbol{C}}_2 \ \ \tilde{\boldsymbol{D}}_{21}] = \sum_{i=0}^{10} \boldsymbol{f}_{i1} z_1^{-i}.$$

とおき、式 (4.31) および式 (4.32) を用いることで、

$$\begin{array}{lllll} \bar{\delta}_1 = 3.53929 & \bar{\delta}_2 = 0.43226 & \bar{\delta}_3 = 0.02261 & \bar{\delta}_4 = 0.00066 & \bar{\delta}_5 = 0.00003 \\ \bar{\delta}_6 = 0.00001 & \bar{\delta}_7 = 0.00001 & \bar{\delta}_8 = 0.00001 & \bar{\delta}_9 = 0.00000 & \bar{\delta}_{10} = 0.00000. \end{array}$$

が得られた。$\bar{\delta}_3 \gg \bar{\delta}_4$より、$r = 3$ と選ぶ。このとき、式 (4.36) から次式が得られる。

$$\boldsymbol{A}_{11} = \begin{bmatrix} 0.86382 & 0.45996 & -0.13791 \\ -0.16074 & 0.59513 & 0.75442 \\ -0.01102 & -0.17254 & 0.35615 \end{bmatrix}$$

$$\tilde{\boldsymbol{B}}_1 = \begin{bmatrix} 0.80782 & 0.37612 & 0.06915 & 0.08728 \\ 0.37612 & 0.17512 & 0.03219 & 0.04064 \\ 0.06915 & 0.03219 & 0.00592 & 0.00747 \end{bmatrix}$$

$$\tilde{\boldsymbol{C}}_1 = \begin{bmatrix} 0.47734 & -0.63596 & 0.51120 \end{bmatrix}$$

$$\tilde{\boldsymbol{D}}_{11} = 1\,, \quad \tilde{\boldsymbol{D}}_{12} = \boldsymbol{f}_{01}.$$

式 (4.14) におけるその他の行列は式 (4.14) および式 (4.15) から次のように求められる。

$$\boldsymbol{A}_{12} = \begin{bmatrix} 0.80782 & 0.37612 & 0.06915 \\ 0.37612 & 0.17512 & 0.03219 \\ 0.06915 & 0.03219 & 0.00592 \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{B}_1 = \begin{bmatrix} 0.08728 & 0.04064 & 0.00747 \end{bmatrix}^T$$

$$\boldsymbol{C}_2 = \begin{bmatrix} 0.08728 & 0.04064 & 0.00747 \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{D} = 0.00943$$

但し、$\boldsymbol{B} = [\boldsymbol{B}_1^T,\ \tilde{\boldsymbol{B}}_2^T]^T$ および$\boldsymbol{C} = [\tilde{\boldsymbol{C}}_1,\ \boldsymbol{C}_2]$ である。本手法および従来法との比較を表 4.1 に示す。この表より本手法で従来法と同精度のフィルタが得られていることがわかる。

4.4.2　設計例 2　3 次元フィルタの設計

所与のフィルタのインパルス応答を

$$f_{i_1 i_2 i_3} = 0.256332 \exp\{-0.103203[(i_1 - 5)^2 + (i_2 - i_1)^2 + (i_3 - 5)^2]\}$$

とする。但し、$N_1 = 12, N_2 = 16, N_3 = 12$ である。

いま、

$$F(z_1, z_2, z_3) = \boldsymbol{G}_1(z_1)\boldsymbol{F}_2(z_2)\boldsymbol{G}_3(z_3)$$

とおく。但し、

$$\boldsymbol{G}_1(z_1) = [1, z_1^{-1}, \cdots, z_1^{-12}]$$

$$\boldsymbol{F}_2(z_2) = \sum_{k=0}^{16} \boldsymbol{F}_k z_2^{-k}$$

$$\boldsymbol{F}_k = \begin{bmatrix} f_{0k0} & f_{0k1} & \cdots & f_{0k12} \\ f_{1k0} & f_{1k1} & \cdots & f_{1k12} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ f_{12k0} & f_{12k1} & \cdots & f_{12k12} \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{G}_3(z_3) = [1, z_3^{-1}, \cdots, z_3^{-12}]^T$$

式 (4.18) より行列$\boldsymbol{A}_0, \boldsymbol{B}_0$ および $\boldsymbol{C}_0$ を導出し、$[\boldsymbol{B}_0,\ \boldsymbol{A}_0\boldsymbol{B}_0,\ \cdots, \boldsymbol{A}_0^{\xi}\boldsymbol{B}_0]$ の階数から$\mu = 16$ とおき、式 (4.18) より $F_2(z_2)$ の最小実現 $(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}, \boldsymbol{C})_\mu$をもとめた。式 (4.19)~(4.21) をもちいて対角行列$\boldsymbol{\Sigma}$が以下のように計算された。

$$\begin{array}{llll} \sigma_1 = 3.92324 & \sigma_2 = 1.85902 & \sigma_3 = 0.76614 & \sigma_4 = 0.29269 \\ \sigma_5 = 0.10611 & \sigma_6 = 0.03688 & \sigma_7 = 0.01234 & \sigma_8 = 0.00399 \\ \sigma_9 = 0.00130 & \sigma_{10} = 0.00058 & \sigma_{11} = 0.00047 & \sigma_{12} = 0.00043 \\ \sigma_{13} = 0.00041 & \sigma_{14} = 0.00039 & \sigma_{15} = 0.00039 & \sigma_{16} = 0.00038 \end{array}$$

式 (4.24) において $p = 4$ と選んだ結果、式 (4.25) より次式が得られた。

$$\boldsymbol{A}_2 = \begin{bmatrix} 0.89584 & 0.22077 & -0.03017 & 0.00617 \\ -0.25888 & 0.73518 & -0.28190 & 0.05841 \\ 0.06231 & 0.37547 & 0.59649 & -0.30517 \\ -0.03871 & -0.07922 & 0.44507 & 0.47697 \end{bmatrix}$$

$$\tilde{\boldsymbol{B}}_2 = \begin{bmatrix} 0.03171 & 0.02791 & -0.01665 & 0.00826 \\ 0.08029 & 0.07066 & -0.04214 & 0.02090 \\ 0.16534 & 0.14553 & -0.08679 & 0.04304 \\ 0.27700 & 0.24381 & -0.14540 & 0.07210 \\ 0.37753 & 0.33228 & -0.19817 & 0.09827 \\ 0.41857 & 0.36841 & -0.21971 & 0.10895 \\ 0.37753 & 0.33228 & -0.19817 & 0.09827 \\ 0.27700 & 0.24381 & -0.14540 & 0.07210 \\ 0.16534 & 0.14553 & -0.08679 & 0.04304 \\ 0.08029 & 0.07066 & -0.04214 & 0.02090 \\ 0.03171 & 0.02791 & -0.01665 & 0.00826 \\ 0.01019 & 0.00897 & -0.00535 & 0.00265 \\ 0.00266 & 0.00234 & -0.00140 & 0.00069 \end{bmatrix}^T$$

$$\tilde{\boldsymbol{C}}_2 = \begin{bmatrix} 0.01898 & 0.01833 & -0.01092 & 0.00408 \\ 0.06853 & 0.04918 & -0.01509 & -0.00418 \\ 0.17520 & 0.07147 & 0.01781 & -0.03393 \\ 0.32199 & 0.01043 & 0.10189 & -0.04495 \\ 0.43178 & -0.17539 & 0.14062 & 0.03230 \\ 0.42808 & -0.38424 & 0.00875 & 0.12628 \\ 0.31693 & -0.45205 & -0.22078 & 0.06356 \\ 0.17631 & -0.34849 & -0.33400 & -0.12120 \\ 0.07392 & -0.18744 & -0.26682 & -0.21885 \\ 0.02338 & -0.07238 & -0.13686 & -0.16995 \\ 0.00558 & -0.02037 & -0.04810 & -0.07964 \\ 0.00100 & -0.00421 & -0.01195 & -0.02472 \\ 0.00014 & -0.00064 & -0.00213 & -0.00530 \end{bmatrix}$$

行列$\boldsymbol{F}_0$の特異値を調べた結果、$q = 1$ が得られた。このとき、行列$\boldsymbol{F}_0$ は次のように分解

された。

$$
\begin{aligned}
\tilde{\boldsymbol{D}}_{2,1} = [&-0.07978 \quad -0.18216 \quad -0.27525 \quad -0.27525 \quad -0.18216 \\
&-0.07978 \quad -0.02312 \quad -0.00444 \quad -0.00056 \\
&-0.00005 \quad 0.00000 \quad 0.00000 \quad 0.00000]^T \\
\tilde{\boldsymbol{D}}_{2,2} = [&-0.01845 \quad -0.04669 \quad -0.09616 \quad -0.16111 \quad -0.21957 \\
&-0.24344 \quad -0.21957 \quad -0.16111 \quad -0.09616 \\
&-0.04669 \quad -0.01845 \quad -0.00593 \quad -0.00155]
\end{aligned}
$$

この結果、次式が得られた。

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{F}_1(z_1) &= \boldsymbol{G}_1(z_1)[\tilde{\boldsymbol{C}}_2 \ \ \tilde{\boldsymbol{D}}_{12}] = \sum_{i=0}^{12} \boldsymbol{f}_{i1} z_1^{-i} \\
\boldsymbol{F}_3(z_3) &= \begin{bmatrix} \tilde{\boldsymbol{B}}_2 \\ \tilde{\boldsymbol{D}}_{22} \end{bmatrix} \boldsymbol{G}_3(z_3) = \sum_{j=0}^{12} \boldsymbol{f}_{j3} z_3^{-j}.
\end{aligned}
$$

$F_3(z_3)$ を式 (4.29) における $F_m(z_m)$ とみなし、式 (4.30) および式 (4.32) を用いることで次式が得られた。

$$
\begin{array}{llll}
\bar{\delta}_1 = 5.73559 & \bar{\delta}_2 = 2.62467 & \bar{\delta}_3 = 0.96471 & \bar{\delta}_4 = 0.27569 \\
\bar{\delta}_5 = 0.04735 & \bar{\delta}_6 = 0.00380 & \bar{\delta}_7 = 0.00012 & \bar{\delta}_8 = 0.00000 \\
\bar{\delta}_9 = 0.00000 & \bar{\delta}_{10} = 0.00000 & \bar{\delta}_{11} = 0.00000 & \bar{\delta}_{12} = 0.00000
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{llll}
\hat{\delta}_1 = 7.03242 & \hat{\delta}_2 = 1.25505 & \hat{\delta}_3 = 0.10216 & \hat{\delta}_4 = 0.00485 \\
\hat{\delta}_5 = 0.00015 & \hat{\delta}_6 = 0.00000 & \hat{\delta}_7 = 0.00000 & \hat{\delta}_8 = 0.00000 \\
\hat{\delta}_9 = 0.00000 & \hat{\delta}_{10} = 0.00000 & \hat{\delta}_{11} = 0.00000 & \hat{\delta}_{12} = 0.00000
\end{array}
$$

$\bar{\delta}_4 \gg \bar{\delta}_5$ および $\hat{\delta}_4 \gg \hat{\delta}_5$ より、$r = l = 4$ と選ぶ。このとき、式 (4.36) より次式が得ら

れた。

$$
\boldsymbol{A}_{11} = \begin{bmatrix}
0.88977 & 0.41087 & 0.10834 & -0.13111 \\
-0.21611 & 0.71738 & -0.62419 & 0.12032 \\
-0.05457 & 0.27009 & 0.52821 & 0.77590 \\
0.02025 & -0.06839 & -0.26714 & 0.31653
\end{bmatrix}
$$

$$
\tilde{\boldsymbol{B}}_1 = \begin{bmatrix}
0.67666 & -0.25224 & 0.04323 & 0.00504 & -0.46034 \\
0.43365 & -0.62276 & -0.19675 & 0.04079 & 0.09271 \\
-0.00161 & 0.31730 & 0.44553 & 0.13808 & -0.04702 \\
0.01926 & -0.01095 & 0.21022 & 0.28435 & 0.04401
\end{bmatrix}
$$

$$
\tilde{\boldsymbol{C}}_1 = \begin{bmatrix} 0.39771 & -0.48863 & -0.49438 & 0.44436 \end{bmatrix}
$$

$$
\boldsymbol{A}_{33} = \begin{bmatrix}
0.89585 & -0.16822 & -0.01381 & -0.00393 \\
0.39819 & 0.66221 & -0.19637 & -0.01002 \\
-0.11454 & 0.68828 & 0.42691 & -0.18737 \\
0.14967 & -0.16113 & 0.85989 & 0.23174
\end{bmatrix}
$$

$$
\tilde{\boldsymbol{B}}_3 = \begin{bmatrix} 0.41103 & -0.60353 & 0.54385 & -0.36114 \end{bmatrix}^T
$$

$$
\tilde{\boldsymbol{C}}_3 = \begin{bmatrix}
0.69550 & 0.43142 & 0.11092 & 0.01605 \\
0.61215 & 0.37972 & 0.09762 & 0.01413 \\
-0.36507 & -0.22645 & -0.05822 & -0.00842 \\
0.18103 & 0.11230 & 0.02887 & 0.00418 \\
-0.40450 & -0.25091 & -0.06451 & -0.00933
\end{bmatrix}
$$

$$
\tilde{\boldsymbol{D}}_{11} = \tilde{\boldsymbol{D}}_{22} = 1 \ , \quad \tilde{\boldsymbol{D}}_{12} = \boldsymbol{f}_{01} \ , \quad \tilde{\boldsymbol{D}}_{21} = \boldsymbol{f}_{03}
$$

式 (4.14) におけるその他の行列は、式 (4.14) および式 (4.15) から次のように得られた。

$$A_{12} = \begin{bmatrix} 0.67666 & -0.25224 & 0.04323 & 0.00504 \\ 0.43365 & -0.62276 & -0.19675 & 0.04079 \\ -0.00161 & 0.31730 & 0.44553 & 0.13808 \\ 0.01926 & -0.01095 & 0.21022 & 0.28435 \end{bmatrix}$$

$$C_2 = \begin{bmatrix} 0.01898 & 0.01833 & -0.01092 & 0.00408 \end{bmatrix}$$

$$A_{23} = \begin{bmatrix} 0.69550 & 0.43142 & 0.11092 & 0.01605 \\ 0.61215 & 0.37972 & 0.09762 & 0.01413 \\ -0.36507 & -0.22645 & -0.05822 & -0.00842 \\ 0.18103 & 0.11230 & 0.02887 & 0.00418 \end{bmatrix}$$

$$B_2 = \begin{bmatrix} 0.03171 & 0.02791 & -0.01665 & 0.00826 \end{bmatrix}^T$$

$$A_{13} = \hat{B}_1\hat{C}_3 = \begin{bmatrix} 0.18621 & 0.11551 & 0.02970 & 0.00430 \\ -0.03750 & -0.02326 & -0.00598 & -0.00087 \\ 0.01902 & 0.01180 & 0.00303 & 0.00044 \\ -0.01780 & -0.01104 & -0.00284 & -0.00041 \end{bmatrix}$$

$$B_1 = \begin{bmatrix} 0.00849 & -0.00171 & 0.00087 & -0.00081 \end{bmatrix}^T$$

$$C_3 = \begin{bmatrix} 0.03227 & 0.02002 & 0.00515 & 0.00074 \end{bmatrix}$$

$$D = 0.00147$$

但し、$B = (B_1^T, B_2^T, \tilde{B}_3^T)$ および$C = (\tilde{C}_1, C_2, C_3)$ である。得られたフィルタの設計偏差を表 4.2 に示す。

4.5 まとめ

本節では、最小分解と平衡実現に基づく低次数化を用いた空間領域における m 次元分母分離形ディジタルフィルタの設計法について論じた。必要とされる計算量を削減するため、m 次元ディジタルフィルタが 1 次元ディジタルフィルタの縦続接続で与えられることを示した。また、インパルス応答グラミアンを用いることで、部分的に逆行列を不要とし、計算量を削減する方法を示した。1 次元 FIR ディジタルフィルタから実現される状態空間モデルはすべての極を複素平面上の原点に持つため、それを低次数化した IIR フィルタの安定性は常に保証されている。設計例では 2 次元および 3 次元 IIR ディジタルフィルタの設計例を示し、本理論の正当性を確認した。

表 4.1 設計例 1 における設計結果と従来法との比較

	(N_1, N_2)	ε_2	ε_-	Max Negative Ripple
本手法	(3,3)	2.92	3.87	always > 0
文献 [38]	(3,3)	2.92	3.87	always > 0
文献 [42]	(3,3)	2.92	3.92	always > 0

表 4.2 設計例 2 における設計結果

	(N_1, N_2, N_3)	ε_2	ε_-	Max Negative Ripple
本手法	(4,4,4)	7.63	6.00	-0.01010

第 5 章

FM 第 2 モデルに基づく 2 次元状態空間フィルタの適応設計

5.1 概 要

2 次元適応フィルタは、ノイズ除去や画像強調などの分野で使われており、活発に研究が行われている。適応フィルタの回路構成のうち、最も広く用いられているのはトランスバーサル FIR フィルタ [49]~[56] であるが、これは零点のみが調整可能であるため、所望の特性を得るために必要な次数が高くなる場合があるという欠点を持つ。一方、IIR 適応フィルタ [43]~[46],[57],[58] は極と零点の両方を調整することが可能であり、FIR 適応フィルタと比較して、低い次数で所望の特性を実現できる。さらに、状態空間適応フィルタ [47] を用いれば、係数感度や丸め誤差についてより良い特性が得られることが知られている。近年、2 次元においても Roesser モデルに基づく状態空間適応フィルタ [59] が提案され、フィルタ設計や画像処理等への応用例が示されている。また、状態空間モデルは元来高速処理実現に適しているという特長があり、2 次元状態空間適応フィルタに関する高速処理向き実現に関する研究 [60] も行われている。

ところで、Roesser モデルと並んでよく知られている 2 次元局所状態空間モデルに Fornasini-Marchesini(FM) 第 2 モデルがある。これまでに提案された 2 次元状態空間適応フィルタに関する研究は、ほとんどが Roesser モデルに関するものであって、FM 第 2 モデルに関する適応フィルタの研究はほとんど見かけない。本研究では、状態空間モデルとして Fornasini-Marchesini 第 2 モデルを用いた状態空間適応フィルタについて考察し、これをフィルタ設計に応用している。ここでは、係数感度と中間伝達関数の関係から勾配を求めるための新しいシステムを導出し、それを用いて LMS アルゴリズムによる適応フィルタを構成している。また、状態空間モデルの特長であるフィルタ構成における自由度 [48] を利用し、参照信号を入力信号の 1 部として用いることによって、状態空間モデルの次数を低減し、適応に必要な計算量を削減する方法についても論じている。設計例では、これら

のアルゴリズムを 2 次元ガウシアンフィルタの設計に応用し、理論の有効性を確認している。

5.2 FM 第 2 モデルと中間伝達関数

本節では Fornasini と Marchesini によって 2 度目に提案された 2 次元局所状態空間状態空間モデル [20]

$$\begin{aligned}\boldsymbol{x}(i+1,j+1) &= \boldsymbol{A}_1\boldsymbol{x}(i,j+1) + \boldsymbol{A}_2\boldsymbol{x}(i+1,j)\\ &\quad +\boldsymbol{b}_1u(i,j+1) + \boldsymbol{b}_2u(i+1,j) \\ y(i,j) &= \boldsymbol{c}^t\boldsymbol{x}(i,j) + du(i,j)\end{aligned} \tag{5.1}$$

について考える。但し、$\boldsymbol{x}(i,j)$ は $n\times 1$ 局所状態ベクトル、$u(i,j)$ はスカラ入力、$y(i,j)$ はスカラ出力であり、$\boldsymbol{A}_1, \boldsymbol{A}_2, \boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2, \boldsymbol{c}$ および d は適当な大きさをもつ実係数行列である。式 (5.1) の伝達関数は、次式によって与えられる。

$$\begin{aligned}H(z_1,z_2) &= \frac{Y(z_1,z_2)}{U(z_1,z_2)}\\ &= \boldsymbol{c}^T(\boldsymbol{I}_n - z_1^{-1}\boldsymbol{A}_1 - z_2^{-1}\boldsymbol{A}_2)^{-1}(z_1^{-1}\boldsymbol{b}_1 + z_2^{-1}\boldsymbol{b}_2) + d\end{aligned} \tag{5.2}$$

但し、$U(z_1,z_2)$ および $Y(z_1,z_2)$ は入力および出力の z 変換をそれぞれ表す。状態空間モデルのパラメータを適応させるために、このモデルに対する係数感度の式が用いられる。以下に示す 3 つの中間伝達関数を定義する。

$$\begin{aligned}\boldsymbol{F}(z_1,z_2) &= \frac{\boldsymbol{X}(z_1,z_2)}{U(z_1,z_2)}\\ &= (\boldsymbol{I}_n - z_1^{-1}\boldsymbol{A}_1 - z_2^{-1}\boldsymbol{A}_2)^{-1}(z_1^{-1}\boldsymbol{b}_1 + z_2^{-1}\boldsymbol{b}_2)\end{aligned} \tag{5.3}$$

$$\boldsymbol{G}_k^T(z_1,z_2) = z_k^{-1}\boldsymbol{c}^T(\boldsymbol{I}_n - z_1^{-1}\boldsymbol{A}_1 - z_2^{-1}\boldsymbol{A}_2)^{-1}\ , \qquad k=1,2 \tag{5.4}$$

但し、$\boldsymbol{X}(z_1,z_2)$ は状態ベクトル $x(i,j)$ の z 変換を表し、$Y(z_1,z_2) = \boldsymbol{G}_k^T(z_1,z_2)\boldsymbol{\varepsilon}_k(z_1,z_2)$, である。また、$\boldsymbol{\varepsilon}_k(z_1,z_2)$ $(k=1,2)$ は遅延器 $z_k^{-1}\boldsymbol{I}_n$への入力信号を表す。

定義 1: 行列$\boldsymbol{Q}$ を $m\times n$ の実行列とし、 $f(\boldsymbol{Q})$ を行列$\boldsymbol{Q}$のすべての要素で微分可能な関数であるとする。このとき、f の$\boldsymbol{Q}$に関する導関数を次のように定義する。

$$\boldsymbol{S}_Q = \frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{Q}} = [(s_Q)_{kl}]\ , \quad s_{Q\,kl} = \frac{\partial f}{\partial q_{kl}} \tag{5.5}$$

但し、q_{kl} は行列$\boldsymbol{Q}$の第 (k,l) 要素である。

勾配信号を求めるため、出力信号を各係数行列で微分したものが中間伝達関数の立場で表せる。

$$\frac{\partial Y(z_1,z_2)}{\partial \boldsymbol{A}_k} = \boldsymbol{G}_k(z_1,z_2)\boldsymbol{X}^T(z_1,z_2) \tag{5.6}$$

$$\frac{\partial Y(z_1,z_2)}{\partial \boldsymbol{b}_k} = \boldsymbol{G}_k(z_1,z_2)U(z_1,z_2) \tag{5.7}$$

$$\frac{\partial Y(z_1,z_2)}{\partial c} = \boldsymbol{X}(z_1,z_2) \tag{5.8}$$

$$\frac{\partial Y(z_1,z_2)}{\partial d} = U(z_1,z_2)\ , \quad k=1,2 \tag{5.9}$$

式 (5.6)~(5.9) より明らかなように、$\boldsymbol{c}$の適応に必要な勾配信号は状態変数ベクトルを、また、スカラ d を適応させるために必要な勾配信号は入力信号 $u(i,j)$ を用いればよいことがわかる。しかし、$\boldsymbol{A}_k$および$\boldsymbol{b}_k$を適応させるため必要な勾配信号を得るためには、その中間伝達関数が$\boldsymbol{G}_k(z_1,z_2)(k=1,2)$ と等しくなるような新たなシステムが必要になる。これらのシステムは、次式によって与えられる。

$$\begin{aligned}\boldsymbol{W}_1(i+1,j+1) = \boldsymbol{A}_1^T(i,j+1)\boldsymbol{W}_1(i,j+1) + \boldsymbol{A}_2^T(i+1,j)\boldsymbol{W}_1(i+1,j)\\ +\boldsymbol{c}(i,j+1)\boldsymbol{x}^T(i,j+1)\end{aligned} \tag{10a}$$

$$\begin{aligned}\boldsymbol{W}_2(i+1,j+1) = \boldsymbol{A}_1^T(i,j+1)\boldsymbol{W}_2(i,j+1) + \boldsymbol{A}_2^T(i+1,j)\boldsymbol{W}_2(i+1,j)\\ +\boldsymbol{c}(i+1,j)\boldsymbol{x}^T(i+1,j)\end{aligned} \tag{10b}$$

$$\begin{aligned}\boldsymbol{v}_1(i+1,j+1) = \boldsymbol{A}_1^T(i,j+1)\boldsymbol{v}_1(i,j+1) + \boldsymbol{A}_2^T(i+1,j)\boldsymbol{v}_1(i+1,j)\\ +\boldsymbol{c}(i,j+1)u(i,j+1)\end{aligned} \tag{11a}$$

$$\begin{aligned}\boldsymbol{v}_2(i+1,j+1) = \boldsymbol{A}_1^T(i,j+1)\boldsymbol{v}_2(i,j+1) + \boldsymbol{A}_2^T(i+1,j)\boldsymbol{v}_2(i+1,j)\\ +\boldsymbol{c}(i+1,j)u(i+1,j)\end{aligned} \tag{11b}$$

但し、

$$\begin{aligned}\boldsymbol{x}(i+1,j+1) = \boldsymbol{A}_1(i,j+1)\boldsymbol{x}(i,j+1) + \boldsymbol{A}_2(i+1,j)\boldsymbol{x}(i+1,j)\\ +\boldsymbol{b}_1(i,j+1)u(i,j+1) + \boldsymbol{b}_2(i+1,j)u(i+1,j)\end{aligned}$$

であり、上記のシステムの初期値はすべて 0 であるとする。ここで、$\boldsymbol{A}_k(i,j)$ および $\boldsymbol{b}_k(i,j)(k=1,2)$ はそれぞれ点 (i,j) における$\boldsymbol{A}_k$および$\boldsymbol{b}_k$の推定値であり、次節に示す方法によって更新される。

5.3 LMS アルゴリズム

2 次元適応フィルタのブロック図を図 5.1 に示す。いま、$u(i,j)$ および $r(i,j)$ が定常過程であるとする。誤差信号 $e(i,j)$ を参照信号 $r(i,j)$ と出力信号 $y(i,j)$ の差とする。適応過程において適応フィルタの係数は、2 乗誤差 $\mathrm{E}[e^2(i,j)]$ を最小化するように更新される。誤差平面における最小値を求めるために、勾配信号による最急降下法が用いられる。データの大きさを $M\times N$ とする。すなわち、$\{(i,j)|0\le i\le M-1, 0\le j\le N-1\}$ とする。フィルタ係数の更新に最急降下法を用いると、ある係数 p を更新するための更新式は、次のように与えられる。

$$p(i',j') = p(i,j) - \mu\frac{\partial \mathrm{E}[e^2(i,j)]}{\partial p(i,j)} \tag{5.12}$$

但し、μは適応アルゴリズムの収束を制御するステップサイズパラメータで、$p(i',j')$ は (i,j) において更新される係数を表す。ここで、指標 (i',j') は係数更新の方向に応じて、次のように与えられる。

(1) 水平方向：

$$\begin{array}{ll} j'=j+1, & j<N-1 \text{ のとき}\\ i'=i+1, j'=0 & j=N-1 \text{ のとき}\end{array}$$

(2) 垂直方向：

$$\begin{array}{ll} i'=i+1, & i<M-1 \text{ のとき}\\ i'=0, j'=j+1 & i=M-1 \text{ のとき}\end{array}$$

(3) 斜め方向：

$i+j$ が偶数のとき

$$\begin{array}{lll} i'=i+1, & j'=j-1, & i<M-1 \text{ かつ } j\neq 0 \text{ のとき}\\ i'=i+1, & j'=j, & i<M-1 \text{ かつ } j=0 \text{ のとき}\\ i'=i, & j'=j+1, & i=M-1 \text{ のとき}\end{array}$$

$i+j$が奇数のとき

$$\begin{array}{lll} i'=i-1, & j'=j+1\ , & j<N-1 \text{ かつ } i\neq 0 \text{ のとき}\\ i'=i, & j'=j+1\ , & j<N-1 \text{ かつ } i=0 \text{ のとき}\\ i'=i+1, & j'=j\ , & j=N-1 \text{ のとき}\end{array}$$

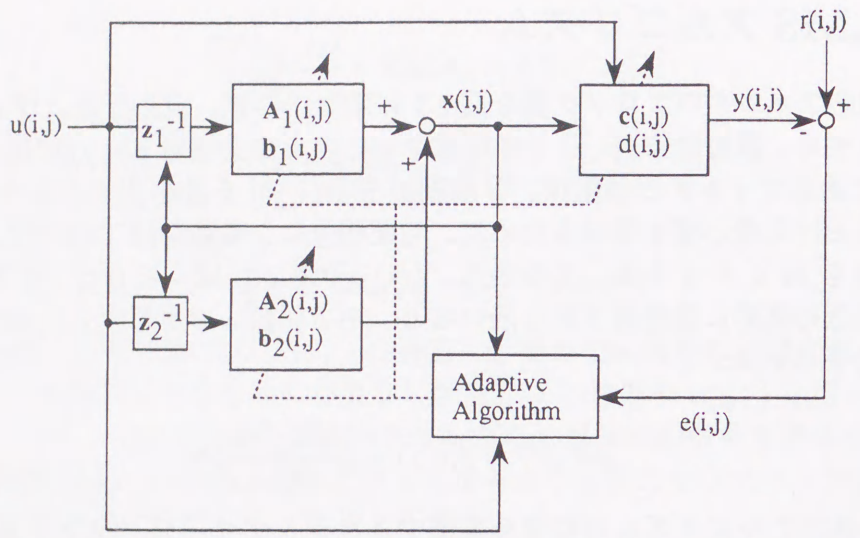


図 5.1 FM 第 2 モデルに基づく状態空間適応フィルタのブロック図

通常、LMS アルゴリズムにおいては、2 乗誤差の期待値のかわりに瞬時値が用いられる。このとき、係数の更新式は次のように書き直される。

$$p(i',j') = p(i,j) + 2\mu e(i,j)\frac{\partial y(i,j)}{\partial p(i,j)} \tag{5.13}$$

式 (5.13) より、フィルタ係数の適応は次式によって与えられる。

$$\boldsymbol{A}_k(i',j') = \boldsymbol{A}_k(i,j) + 2\mu e(i,j)\boldsymbol{W}_k(i,j)\ , \quad k = 1,2 \tag{5.14}$$

$$\boldsymbol{b}_k(i',j') = \boldsymbol{b}_k(i,j) + 2\mu e(i,j)\boldsymbol{v}_k(i,j)\ , \quad k = 1,2 \tag{5.15}$$

$$\boldsymbol{c}(i',j') = \boldsymbol{c}(i,j) + 2\mu e(i,j)\boldsymbol{x}(i,j) \tag{5.16}$$

$$d(i',j') = d(i,j) + 2\mu e(i,j)u(i,j) \tag{5.17}$$

但し、$\boldsymbol{W}_k(i,j)$ および$\boldsymbol{v}_k(i,j)(k=1,2)$ は式 (5.10) および式 (5.11) から与えられる新しいシステムから導出される勾配信号である。以上の議論より、2 次元状態空間フィルタを構成することが可能である。

5.4 低次数 FM 第 2 モデル

状態空間モデルの大きな特長の一つとして、フィルタ構成の自由度が挙げられる。本節では、これを利用してフィルタ次数を下げ、適応に必要な計算量を低減する手法について論じる。

状態変換行列を適当に選ぶことによって、一般性を失うことなく、行列$\boldsymbol{c}_0$を次のように表すことができる。

$$\boldsymbol{c}_0^T = [\ 0\ \ \cdots\ \ 0\ \ 1\ ] \tag{5.18}$$

式 (5.1) および式 (5.18) から状態空間ベクトル$\boldsymbol{x}_0(i,j)$ は、次式のように分割できる。

$$\boldsymbol{x}_0(i,j) = \begin{bmatrix} \boldsymbol{x}(i,j) \\ x_N(i,j) \end{bmatrix} \tag{5.19}$$

但し、

$$x_N(i,j) = y(i,j) - du(i,j)$$

更に、状態空間マトリクスを次のように分割する。

$$\begin{gathered} \boldsymbol{A}_{01} = \left[\begin{array}{c|c} \boldsymbol{A}_1 & \hat{\boldsymbol{a}}_1 \\ \hline \boldsymbol{g}_1^T & a_1 \end{array}\right], \quad \boldsymbol{A}_{02} = \left[\begin{array}{c|c} \boldsymbol{A}_2 & \hat{\boldsymbol{a}}_2 \\ \hline \boldsymbol{g}_2^T & a_2 \end{array}\right] \\ \boldsymbol{b}_{01} = \left[\begin{array}{c} \hat{\boldsymbol{b}}_1 \\ \hline \bar{b}_1 \end{array}\right], \qquad \boldsymbol{b}_{02} = \left[\begin{array}{c} \hat{\boldsymbol{b}}_2 \\ \hline \bar{b}_2 \end{array}\right] \end{gathered} \tag{5.20}$$

式 (5.19) と式 (5.20) を式 (5.1) に代入すれば、次式が得られる。

$$\begin{aligned} \boldsymbol{x}(i+1,j+1) = {} & \boldsymbol{A}_1\boldsymbol{x}(i,j+1) + \boldsymbol{A}_2\boldsymbol{x}(i+1,j) \\ & + \hat{\boldsymbol{a}}_1 y(i,j+1) + \hat{\boldsymbol{a}}_2 y(i+1,j) \\ & + \boldsymbol{b}_1 u(i,j+1) + \boldsymbol{b}_2 u(i+1,j) \\ y(i,j) = {} & \boldsymbol{g}_1^T x(i-1,j) + \boldsymbol{g}_2^T x(i,j-1) \\ & + a_1 y(i-1,j) + a_2 y(i,j-1) \\ & + d_1 u(i-1,j) + d_2 u(i,j-1) + d_0 u(i,j) \end{aligned} \tag{5.21}$$

但し、

$$\boldsymbol{b}_1 = \hat{\boldsymbol{b}}_1 - \hat{\boldsymbol{a}}_1 d\ , \quad \boldsymbol{b}_2 = \hat{\boldsymbol{b}}_2 - \hat{\boldsymbol{a}}_2 d$$
$$d_1 = \bar{b}_1 - a_1 d\ , \quad d_2 = \bar{b}_2 - a_2 d$$

ここで、式 (5.21) において実際の出力 $y(i,j)$ を理想の出力 $y_d(i,j)$ に置き換えることができれば、これは $x(i,j)$ を状態ベクトルとした 2 入力のシステムとみなすことができる。簡単のため、式 (5.21) を次のように書き換える。

$$\begin{aligned} \boldsymbol{x}(i+1,j+1) = {} & \boldsymbol{A}_1\boldsymbol{x}(i,j+1) + \boldsymbol{A}_2\boldsymbol{x}(i+1,j) \\ & + \boldsymbol{B}_1\boldsymbol{u}(i,j+1) + \boldsymbol{B}_2\boldsymbol{u}(i+1,j) \\ y(i,j) = {} & \boldsymbol{g}_1^T\boldsymbol{x}(i-1,j) + \boldsymbol{g}_2^T\boldsymbol{x}(i,j-1) \\ & + \boldsymbol{d}_1^T\boldsymbol{u}(i-1,j) + \boldsymbol{d}_2^T\boldsymbol{u}(i,j-1) + d_0 u(i,j) \end{aligned} \tag{5.22}$$

但し

$$B_l = [\hat{a}_l \mid b_l]\,, \quad d_l^T = [a_l \mid d_l]\,,\ l = 1, 2$$

$$u(i,j) = \begin{bmatrix} u(i,j) \\ y_d(i,j) \end{bmatrix}$$

式 (5.22) より出力信号の z 変換が、次のように得られる。

$$Y(z_1, z_2) = \Big[(z_1^{-1} g_1^T + z_2^{-1} g_2^T)(I - z_1^{-1} A_1 - z_2^{-1} A_2)^{-1} \cdot (z_1^{-1} B_1 + z_2^{-1} B_2) + z_1^{-1} d_1 + z_2^{-1} d_2\Big] U(z_1, z_2) + d_0 U(z_1, z_2) \tag{5.23}$$

但し、$Y(z_1,z_2), X(z_1,z_2), U(z_1,z_2), U(z_1,z_2)$ はそれぞれ $y(i.j), x(i,j), u(i,j), u(i,j)$ の z 変換を表す。このとき、出力 $Y(z_1,z_2)$ に関する各係数行列の導関数は、次のように与えられる。

$$\begin{aligned}
\frac{\partial Y(z_1,z_2)}{\partial A_l} &= z_l^{-1}(I - z_1^{-1}A_1 - z_2^{-1}A_2)^{-1} \\
&\quad \cdot (z_1^{-1} g_1 + z_2^{-1} g_2) X^T(z_1, z_2) \\
\frac{\partial Y(z_1,z_2)}{\partial B_l} &= z_l^{-1}(I - z_1^{-1}A_1 - z_2^{-1}A_2)^{-1} \\
&\quad \cdot (z_1^{-1} g_1 + z_2^{-1} g_2) U^T(z_1, z_2) \\
\frac{\partial Y(z_1,z_2)}{\partial g_l} &= z_l^{-1} X(z_1, z_2) \\
\frac{\partial Y(z_1,z_2)}{\partial d_l} &= z_l^{-1} U(z_1, z_2) \\
\frac{\partial Y(z_1,z_2)}{\partial d_0} &= U(z_1, z_2)\,, \quad l = 1, 2
\end{aligned} \tag{5.24}$$

したがって、この時の係数更新式は次のように与えられる。

$$\begin{aligned}
A_1(k+1) &= A_1(k) + 2\mu e(i,j) W(i-1,j) \\
A_2(k+1) &= A_2(k) + 2\mu e(i,j) W(i,j-1) \\
B_1(k+1) &= B_1(k) + 2\mu e(i,j) V(i-1,j) \\
B_2(k+1) &= B_2(k) + 2\mu e(i,j) V(i,j-1) \\
g_1(k+1) &= g_1(k) + 2\mu e(i,j) x(i-1,j) \\
g_2(k+1) &= g_2(k) + 2\mu e(i,j) x(i,j-1) \\
d_1(k+1) &= d_1(k) + 2\mu e(i,j) u(i-1,j) \\
d_2(k+1) &= d_2(k) + 2\mu e(i,j) u(i,j-1) \\
d_0(k+1) &= d(k) + 2\mu e(i,j) u(i,j)
\end{aligned} \tag{5.25}$$

但し、

$$\begin{aligned}
W(i+1,j+1) &= A_1^T(i,j+1) W_1(i,j+1) + A_2^T(i+1,j) W_1(i+1,j) \\
&\quad + g_1(i,j+1) x^T(i,j+1) + g_2(i+1,j) x_1^T(i+1,j) \\
V(i+1,j+1) &= A_1^T(i,j+1) V_1(i,j+1) + A_2^T(i+1,j) V_1(i+1,j) \\
&\quad + g_1(i,j+1) u^T(i,j+1) + g_2(i+1,j) u_1^T(i+1,j)
\end{aligned}$$

本手法によってフィルタ次数を下げることによって、適応に必要な演算量を低減することが可能になる。例えば、元の次数が $N = 4$ のとき、本手法を用いてフィルタの次数を下げたときの一回の適応に必要な乗算回数は 202 から 162 となり、およそ 20%の計算量の削減になる。しかしながら、本節で得られたフィルタが元のフィルタと同程度の性能を持つためには、フィルタ出力と所望の出力が十分に近くなることが必要であり、フィルタの次数が低い場合など、この条件が満足されない場合には、元のフィルタと低次数化されたフィルタでその性能がかなり異なる可能性のあることに注意する必要がある。

5.5 数値例

ここでは、フィルタ設計に本手法で提案された適応フィルタを応用した数値例を示す。

5.5.1 設計例 1 「2 次元ガウシアンフィルタ」の設計

次式で与えられるガウスフィルタのインパルス応答を次数 4 のフィルタで近似する。

$$h_d(i,j) = 0.256332 \exp\{-0.103203[(i-4)^2 + (j-4)^2]\} \tag{5.26}$$

但し、$N = M = 10$ である。また、設計されたフィルタを以下に示す正規化 2 乗誤差で評価する。

$$\varepsilon_2 = \left[\frac{\sum_{i=0}^{N}\sum_{j=0}^{M}(h(i,j) - h_d(i.j))^2}{\sum_{i=0}^{N}\sum_{j=0}^{M} h_d^2(i.j)}\right]^{1/2}$$

ステップサイズパラメータμを$\mu = 1.0 \times 10^{-2}$とし、繰り返し回数を 1.21×10^7とする。初期値として所望のインパルス応答を $0 \le i,j \le 2$ の範囲で分母分離形 Roesser モデルで実現し、FM 第二モデルに埋め込んだものを使用する。このときの係数行列は次式で与えられる。

$$
\boldsymbol{A}_1 = \begin{bmatrix} 0.000000 & 1.000000 & 0.039996 & 0.067007 \\ 0.000000 & 0.000000 & 0.067007 & 0.112259 \\ 0.000000 & 0.000000 & 0.000000 & 0.000000 \\ 0.000000 & 0.000000 & 0.000000 & 0.000000 \end{bmatrix}
$$

$$
\boldsymbol{A}_2 = \begin{bmatrix} 0.000000 & 0.000000 & 0.000000 & 0.000000 \\ 0.000000 & 0.000000 & 0.000000 & 0.000000 \\ 0.000000 & 0.000000 & 0.000000 & 0.000000 \\ 0.000000 & 0.000000 & 1.000000 & 0.000000 \end{bmatrix}
$$

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{b}_1 &= \begin{bmatrix} 0.019421 & 0.032537 & 0.000000 & 0.000000 \end{bmatrix}^t \\
\boldsymbol{b}_2 &= \begin{bmatrix} 0.000000 & 0.000000 & 1.000000 & 0.000000 \end{bmatrix}^t \\
\boldsymbol{c} &= \begin{bmatrix} 1.000000 & 0.000000 & 0.019421 & 0.032537 \end{bmatrix} \\
d &= 0.009430
\end{aligned}
$$

このときの正規化 2 乗誤差は$\varepsilon_2 = 98.679860$ であった。設計結果を次に示す。

$$
\boldsymbol{A}_1 = \begin{bmatrix} 0.455623 & 0.128063 & -0.080156 & 0.121000 \\ -0.013275 & 0.228108 & 0.002739 & -0.058453 \\ 0.116625 & 0.049272 & 0.584706 & -0.094266 \\ -0.044501 & -0.071365 & 0.714722 & 0.428102 \end{bmatrix}
$$

$$
\boldsymbol{A}_2 = \begin{bmatrix} 0.561062 & 0.542485 & -0.131132 & -0.005710 \\ -0.177631 & 0.481823 & -0.139481 & 0.120184 \\ 0.023666 & 0.092671 & 0.124754 & -0.061968 \\ 0.068525 & -0.005413 & 0.071094 & 0.525130 \end{bmatrix}
$$

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{b}_1 &= \begin{bmatrix} 0.255053 & 0.142635 & 0.072660 & -0.005982 \end{bmatrix}^t \\
\boldsymbol{b}_2 &= \begin{bmatrix} -0.251289 & 0.659951 & 0.041209 & 0.055190 \end{bmatrix}^t \\
\boldsymbol{c} &= \begin{bmatrix} 0.108111 & 0.009203 & -0.073180 & 0.778363 \end{bmatrix} \\
d &= 0.009430
\end{aligned}
$$

このときの正規化 2 乗誤差は$\varepsilon_2 = 2.165942$ であり、文献 [38] で示されている設計結果 $\varepsilon_2 = 2.92$ より良好な結果が得られていることがわかる。

5.5.2 設計例 2　低次数化した FM 第 2 モデルの場合

次に、同じ仕様を低次数化した FM 第 2 モデルを用いて設計した例を示す。初期値として、設計例 1 で用いた初期値を$c = [0 \ \cdots \ 0 \ 1]$ となるように変換し、式 (5.22) に従って低次数化したものを用いた。繰り返し回数を 1.21×10^7 とし、ステップサイズパラメータμを$\mu = 1 \times 10^{-2}$とした。

初期値を次に示す。

$$
\boldsymbol{A}_1 = \begin{bmatrix} 0.000000 & 0.000000 & 0.000000 \\ 0.000000 & 0.000000 & 0.000000 \\ 0.112259 & 0.067007 & 0.000000 \end{bmatrix}
$$

$$
\boldsymbol{A}_2 = \begin{bmatrix} 0.000000 & 1.000000 & 0.000000 \\ 0.000000 & 0.000000 & 0.000000 \\ 0.000000 & 0.000000 & 0.000000 \end{bmatrix}
$$

$$
\boldsymbol{B}_1 = \begin{bmatrix} 0.000000 & 0.000000 \\ 0.000000 & 0.000000 \\ 0.000000 & 0.032537 \end{bmatrix}, \ \boldsymbol{B}_2 = \begin{bmatrix} 0.0000000.000000 \\ 0.0000001.000000 \\ 0.0000000.000000 \end{bmatrix}
$$

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{g}_1 &= \begin{bmatrix} 0.067007 & 0.039996 & 1.000000 \end{bmatrix}^t \\
\boldsymbol{g}_2 &= \begin{bmatrix} 0.000000 & 0.032537 & 0.000000 \end{bmatrix}^t \\
\boldsymbol{d}_1 &= \begin{bmatrix} 0.000000 & 0.019421 \end{bmatrix}^t, \ \boldsymbol{d}_2 = \begin{bmatrix} 0.000000 & 0.019421 \end{bmatrix}^t \\
d_0 &= 0.009430
\end{aligned}
$$

設計結果を次に示す

$$
\boldsymbol{A}_1 = \begin{bmatrix} 0.302797 & 0.144924 & -0.101853 \\ -0.011711 & 0.282371 & -0.015964 \\ 0.020487 & 0.004935 & 0.139194 \end{bmatrix}
$$

$$
\boldsymbol{A}_2 = \begin{bmatrix} 0.563743 & 0.902364 & -0.093846 \\ -0.138132 & 0.532735 & -0.165785 \\ -0.021053 & -0.079042 & -0.078751 \end{bmatrix}
$$

$$
\boldsymbol{B}_1 = \begin{bmatrix} 0.045680 & 0.345874 \\ 0.035089 & 0.341487 \\ -0.178456 & -0.020357 \end{bmatrix}, \ \boldsymbol{B}_2 = \begin{bmatrix} -0.033513 & -0.116973 \\ 0.121606 & 0.820449 \\ -0.428517 & -0.059802 \end{bmatrix}
$$

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{g}_1 &= \begin{bmatrix} 0.035504 & 0.068017 & 1.044198 \end{bmatrix}^t \\
\boldsymbol{g}_2 &= \begin{bmatrix} 0.024990 & 0.043433 & 0.225744 \end{bmatrix}^t \\
\boldsymbol{d}_1 &= \begin{bmatrix} 0.927624 & 0.019421 \end{bmatrix}^t, \ \boldsymbol{d}_2 = \begin{bmatrix} 0.735612 & 0.019421 \end{bmatrix}^t \\
d_0 &= 0.009430
\end{aligned}
$$

これを式 (5.22) に従って逆変換し、設計偏差を求めた結果正規化 2 乗誤差$\varepsilon_2 = 3.65$ が得られた。設計例 1 と比較して少し劣る結果が得られているが、これは所望の出力と実際の出力のずれによる影響によるものと考えられる。

5.6 結 言

本節では、適応アルゴリズムを用いた FM 第 2 モデルに基づくディジタルフィルタの空間領域設計について論じた。まず、中間伝達関数の立場から出力信号に対する各係数行列の勾配信号を表し、勾配信号を求めるための新しいシステムを導出した。次に、LMS アルゴリズムに基づく適応アルゴリズムについて論じた。さらに、状態空間モデルの特長であるフィルタ構造の自由度を利用して参照信号を入力の一部として用いることでフィルタの次数を低減し、計算量を減少させる手法についても論じた。最後に、数値例を示し理論の有効性を確認した。

第 6 章

結 論

本章では、前章までで提案された設計法のまとめをおこない、得られた成果について概観した後、今後に残された問題について言及する。

第 2 章では、最大誤差制約条件下で最小 2 乗誤差となる 2 次元 FIR フィルタの設計法について論じた。最大誤差を制約するために、まず重みつき最小 2 乗誤差に基づくフィルタ設計の逐次繰り返しによる手法を提案し、ついで設計に要する計算量を削減するため、繰り返しの途中でフィルタ係数決定を Lagrange 乗数法に切替える手法を提案した。その後、設計されるフィルタに対して線形位相を保証する方法について述べ、さらに実質的な遷移域を固定した場合についての考察を行った。最後に設計例を示し、本理論の有効性を検証した。

本設計法を用いることによって、ミニマックスフィルタで得られる最大誤差よりわずかに大きな最大誤差を設定することで、大幅に 2 乗誤差が低減されたフィルタを得られること、逆に最小 2 フィルタとほとんど変わらない 2 乗誤差をもちながら、大幅に最大誤差を小さくしたフィルタが得られることが確認された。これより、最大誤差もしくは 2 乗誤差のみを考えればよい場合を除けば、ミニマックスフィルタや最小 2 乗フィルタはかなり不適切なフィルタであることが確認され、より効果の高いフィルタを本手法によって得ることが可能になった。

本章で述べられた手法は最大誤差と 2 乗誤差の双方が考慮されるフィルタを設計する際に有効であるが、2 乗誤差と最大誤差間の重みつけを行うことができないため、得られたフィルタがどの程度 2 乗誤差または最大誤差を重視したものであるのかが非常にわかりにくく、これを判断するためには最小 2 乗フィルタやミニマックスフィルタを別に設計する必要がある。また、実際問題として、本手法でフィルタを設計する際に必要なパラメータを求めるためには、プロトタイプフィルタの設計が不可欠である。今後の課題としては、プロトタイプフィルタの設計なしに適当な設計パラメータを決定する手法の開発などが挙げられる。

第 3 章では、構造的に安定な一般形 2 次元 IIR フィルタの設計法について論じた。本手法は、安定判別の必要な分母多項式に、既に安定となる構造の与えられている 2 次元局

所状態空間モデルより導出される多項式を用いることによって、フィルタの安定性を保証し、分子多項式を線形方程式を解くことによって求め、フィルタ設計に要する計算量を削減する方法である。局所状態空間モデルとして Roesser モデル又は FM 第 2 モデルを使用し、おのおのより導出される矩形入出力マスクまたは三角形入出力マスクを有する 2 次元 IIR ディジタルフィルタについてその設計法を論じた。

本手法を用いることによって、フィルタ設計に必要な時間を従来法と比較して 2 分の 1 から数分の 1 に減少させることが可能になった。

しかしながら、本手法でも従来同様分母多項式は非線形最適化によって求められている。このため、本手法を用いても次数が大きいフィルタを設計することは依然として困難である。この問題を解決するためのより高速な分母多項式の係数設計アルゴリズムの開発が今後の課題として挙げられる。

第 4 章では Roesser モデルによる多次元 IIR ディジタルフィルタの空間領域設計法について論じた。まず、分母分離形多次元ディジタルフィルタが多入力多出力 1 次元 IIR フィルタの縦続接続によって表現できることを示した。ついで多次元 FIR ディジタルフィルタを形式的に多入力多出力の 1 次元 FIR ディジタルフィルタで表し、それを状態空間モデルで実現し、平衡実現を用いて低次数近似する手法を示した。さらに低次数近似したフィルタに最小分解を施し、得られた 2 つの FIR フィルタに対して同様の実現、近似を繰り返すことでフィルタを設計した。また、実現、近似される 1 次元フィルタが 1 入力もしくは 1 出力のときに平衡実現の代わりにインパルス応答グラミアンによる近似を用いることで逆行列の計算を不要にし、計算量の低減を図った。

従来の多次元 IIR ディジタルフィルタの設計法のほとんどは伝達関数表現による周波数領域での設計法であったが、本手法を用いることで実現が不要で、高速処理向きの状態空間モデルによるフィルタの設計が可能になった。

本手法では、フィルタ設計に非線形演算を用いないため、比較的高速なフィルタ設計が可能であるが、得られたフィルタは一般に所定の評価基準に対して最適というわけではない。今後の課題として、得られたフィルタをベースにさらに最適化を進め、何らかの評価基準で最適になるフィルタの設計法が考えられる。

第 5 章では、適応アルゴリズムを用いた、FM 第 2 モデルによる 2 次元ディジタルフィルタの空間領域設計について論じた。最初に中間伝達関数の立場から、出力に対する状態空間モデルの各係数についての勾配をもとめ、勾配信号を導出するための新しいシステムについて論じた。次に、LMS アルゴリズムによる適応フィルタについて論じた。さらに、参照信号を入力の一部として用いることによってフィルタ次数を低減し、計算量を減少するアルゴリズムについて論じた。

本手法によって、Roesser モデルより更に一般的をもつ、FM 第 2 モデルによる適応フィルタを構成することが可能になった。

今後の課題としては最適なステップサイズの導出などが考えられる。

謝　辞

本研究の全過程を通じて、多大な御指導、御鞭撻を賜った広島大学工学部第二類 (電気系) 雛元孝夫教授に心から感謝の意を表します。

本論文をまとめるにあたり、有益な御教示、御指導を賜った広島大学工学部第二類 (電気系) 山下英生教授、中村信人教授、棟安実治助教授に深く感謝します。

広島大学大学院工学研究科で日頃から御指導頂いている佐々木博司教授、坂和正敏教授、尾崎俊治教授、長町三生教授、森田健一教授、瀬藤憲昭教授、岩瀬晃盛教授に厚く御礼申し上げます。

本研究を行うにあたり、御激励を頂いた元広島大学大学院生狩野修治、山本一成、上本栄治、原田健一、山田浩の各氏に御礼申し上げます。

最後に、常日頃からご支援を頂いている広島大学第二類電子制御工学研究室の皆様に御礼申し上げます。

参考文献

[1] J. S. Lim: "Two Dimensional Signal and Image Processing", Englewood Cliffts, NJ:Prentice Hall (1990).

[2] 西川　清: "多次元 FIR ディジタルフィルタの設計", コンピュートロール, no. 30, pp. 26-37 (1990).

[3] S. Sunder and R. P. Ramachandran: "A Least-Squares Design of Nonrecursive Filters Satisfying Prescribed Magnitude and Phase Specifications", *Proc. of IEEE Int. Symp. Circuits & Syst.*, pp.335-338 (May 1993).

[4] S.-C.Pei and J.-J. Shyu : "2-D FIR Eigenfilters: A Least-Squares Approach", *IEEE Trans. Circuits & Syst.*, CAS-37, 1, pp.24-34 (Jan. 1990).

[5] M. O. Ahmod and J.-D. Wang : "An Analytical Least Square Solution to the Design Problem of Two-Dimensional FIR Filters with Guarantally Symmetric or Antisymmetric Frequency Response", *IEEE Trans. Circuits & syst.*, CAS-36, 7,pp.968-979 (July 1989).

[6] C. Charalambous : "The Performance of an Algorithm for Minimax Design of Two-Dimensional Linear Phase FIR Digital Filters", *IEEE Trans. Circuits & Syst.*, CAS-32, 10, pp.1016-1028 (Oct. 1985).

[7] C.-Y. Chi and S.-L. Chou: "A New Iterative WLS Chebyshev Approximation Method for the Design of Two-Dimensional FIR Digital Filters", *Proc. of Int. Symp. Circuits & Syst.*, pp.898-901 (May 1993).

[8] V. R. Algazi, M. Suk and C.-S.Rim: "Design of Almost Minimax FIR Filters in One and Two Dimensions by WLS Techniques", *IEEE Trans. Circuits & Syst.*, CAS-33, 6, pp.590-596 (June 1986).

[9] J. W. Adams : "FIR Digital Filters with Least-Squares Stopbands Subject to Peak-Gain Constraints", IEEE Trans. Circuits & Syst., CAS-38, 4, pp.376-368 (Apr. 1991).

[10] 川又政征: "多次元 IIR ディジタルフィルタの設計", コンピュートロール,no.30, pp.15-25 (1990).

[11] Y. C. Lim, J.-H Lee, C. K. Chen, and R.-H Yang: "A Weighted Least Squares Algorithm for Quasi-Equiripple FIR and IIR Digital Filter Design", *IEEE Trans. Signal Process.*, 40, 3, pp.551-558 (Mar. 1992).

[12] 小郷　寛, 美多　勉:システム制御理論入門, 実教出版 (1979).

[13] T. Lin, M. Kawamata and T. Higuchi: "Design of 2-D Digital Filters with an Arbitrary Responce and No Overflow Oscillations Based on a New Stability Condition", *IEEE Trans. Circuits & Syst.*, CAS-34, 2, pp.113-126 (Feb. 1987).

[14] T. Hinamoto: "2-D Lyapunov Equation and Filter Design Based on the Fornasini-Marchesini second model", *IEEE Trans. Circuits & Syst.*, CAS-40, 2, pp.102-110 (Feb. 1993).

[15] H. K. Kwan and C. L. Chan: "Design of Linear Phase Circularly Symmetric Two-Dimensional Recursive Digital Filters", IEEE Trans. Circuits & Syst., CAS-36, 6, pp.1023-1029 (July 1989).

[16] T. Hinamoto, M. Muneyasu and H. Toda: "Design of 2-D IIR Digital Filters with Symmetry and Constant Group Delays", *Journal of the Franklin Institute*, 329, 2, pp.371-381 (Mar. 1992).

[17] T. Hinamoto and S. Maekawa: "Design of Two-Dimensional Recursive Digital Filters Using Mirror-Image Polynomials", *IEEE Trans. Circuits & Syst.*, CAS-33, 8, pp.750-758 (Aug 1986).

[18] S. A. H. Aly and M. M. Fahmy: "Design of Two-Dimensional Recursive Digital Filters with Specified Magnitude and Group Delay Characteristics", *IEEE Trans. Circuits Syst.*, CAS-25, 11, pp.908-916 (Nov. 1978).

[19] R. P. Roesser: "A Discrete State-Space Model for Linear Image Processing", *IEEE Trans. Autom. Control*, AC-20, pp.1-10 (Feb. 1975).

[20] E. Fornasini and G. Marchesini: "Doubly-Indexed Dynamical Systems:State-Space Models and Structural Properties", Math. Syst. Theory, 12, pp.59-72 (1978).

[21] C. S. Koo and C. T. Chen: "Fadeeva's Algorithm for Spatial Dynamical Equations", *Proc. IEEE*, 65, pp.975-976 (June 1977).

[22] W. H. Swann:"Direct Search Methods", in Numerical Methods for Unconstrained Optimization, W. Murray, Ed., New York: Academic Press (1972).

[23] 小川典孝、伊藤正美: "指定された群遅延および振幅特性を持つ 2 次元巡回形ディジタルフィルタの一設計法": 電子情報通信学会論文誌 A 分冊, J64-A, 3, pp.173-178 (1981-03).

[24] 樋口龍雄、大木真、川又政征: "3 次元ＦＩＲディジタルフィルタの最適設計－線形計画法による設計法及び対称性の利用による計算量の低減－", 電子情報通信学会論文誌 A 分冊, J70-A, 7, pp.1042-1050 (1987-07).

[25] 雛本孝夫、中辻昭裕、前川禎男: "対称性を持つ 3 次元巡回形ディジタルフィルタの設計", 電子情報通信学会論文誌 A 分冊, J71-A, 6, pp.1234-1241 (1988-06).

[26] 吉田、西原、藤井: "マクレラン変換を用いた 3 次元帯域制限フィルタの設計", 第 7 回ディジタル信号処理シンポジウム講演論文集, B2-4, pp.133-138 (1992-11).

[27] K. Hirano, M. Sakane and M. Z. Mulk: "Design of Three-Dimensional Recursive Digital Filters", *IEEE Trans. Circuits & Syst.*, CAS-31, pp. 550-561 (June 1984).

[28] H. Mutuly and M. M. Fahmy: "Frequency-Domain Design of N-D Digital Filters", *IEEE Trans. Circuits & Syst.*, CAS-32, 12, pp. 1226-1233 (Dec. 1985).

[29] M. E. Zervakis and A. N. Venetsanopoulos: "Design of Three-Dimensional Digital Filters Using Two-Dimensional Rotated Filters", *IEEE Trans. Circuits & Syst.*, CAS-34, 12, pp.1452-1469 (Dec. 1987).

[30] J. K. Pitas and A. N. Venetsanopoulos: "The Use of Symmetries in the Design of Multidimensional Digital Filters", *IEEE Trans. Circuits & Syst.*, CAS-33, 9, pp. 863-873 (Sept. 1986).

[31] T. Hinamoto, T. Hamanaka and S. Maekawa: "Rational Approximation of Three-Dimensional Digital Filters", *Journal of the Franklin institute*, 323, 3, pp. 373-383 (May 1987).

[32] T. Hinamoto, T. Hamanaka, S. Maekawa and A. N. Venetsanopoulos: "Approximation and Minimum Roundoff Noise Synthesis of 3-D Separable-Denominator Recursive Digital Filters", *Journal of the Franklin Institute*, 325, 1, pp. 27-47 (Jan. 1988).

[33] H. K. Kwan and C. L. Chan: "Design of Multidimensional Spherically Symmetric and Constant Group Delay Recursive Digital Filters with Sum of Power-of-Two Coefficients", *IEEE Trans. Circuits & Syst.*, CAS-37, pp. 1027-1035 (Aug. 1990).

[34] M. Muneyasu and T. Hinamoto: "Analytical Design of Multidimensional Recursive Digital Filters with Cubic Symmetry and Constant Group Delays", *Journal of Franklin Institute*, 330, 6, pp. 1087-1100 (Nov. 1993).

[35] 棟安実治、雛元孝夫:"3 次元直線位相 FIR ディジタルフィルタの解析的最小 2 乗設計", 電子情報通信学会論文誌 A 分冊, J74-A, 4, pp.598-604 (1993-04).

[36] A. Zilouchain and R. L. Carroll: "Optimal Synthesis of Multidimensional State-Space Digital Filters: A General Analysis", *Multidimensional Systems and Signal Processing*, 3, pp. 7-27 (1993).

[37] T. Lin, M. Kawamata and T. Higuchi: "Decomposition of 2-D Separable-Denominator Systems: Existence, Uniqueness, and Applications", *IEEE Trans. Circuits & Syst.*, CAS-34, pp. 292-296 (Mar. 1987).

[38] T. Lin, M. Kawamata and T. Higuchi: "Design of 2-D Separable-Denominator Digital Filters Based on the Reduced-Dimensional Decomposition", *IEEE Trans. Circuits & Syst.*, CAS-34, pp. 934-941 (Agu. 1987).

[39] C. -T. Chen: *Linear System Theory and Design*, New York: CBS College Publishing (1984).

[40] B. Beliczynski, I. Kale and G. D. Cain: "Approximation of FIR by IIR Digital Filters: An Algorithm Based on Balanced Model Reduction", *IEEE Trans. Signal Processing*, 40, pp. 532-542 (Mar. 1992).

[41] T. Hinamoto and H. Toda: "The Use of Impulse Response Grammians in the Design of 2-D Separable-Denominator Digital Filters", in *Proc. IEEE Int. Conf. Acoustics, Speech, and Signal Processing*, Toronto, Canada, pp.2881-2884 (1991).

[42] L. Penebo and L. M. Silverman: "Model Reduction via Balanced State Space Representations", *IEEE. Trans. Autom. Control*, AC-27, pp.382-387 (Apr. 1982).

[43] P. L. Feintuch: "An Adaptive Recursive LMS Filter", *Proc. IEEE*, 64, pp.1622-1624 (Nov. 1976).

[44] M. G. Larimore, J. R. Treichler and C. R. Johnson: "SHARF: An Algorithm for Adapting IIR Digital Filters", *IEEE Trans. Acoust., Speech, Signal Processing*, ASSP-28, pp.428-440 (Aug. 1980).

[45] T. C. Hsia: "A Simplified Adaptive Recursive Filter Design", *Proc. IEEE*, 69, pp.1153-1155 (Sept. 1981).

[46] H. Fan and W. K. Jenkins: "A New Adaptive IIR Filter", *IEEE Trans. Circuits & Syst.*, CAS-33, 10, pp.939-947 (Oct. 1986).

[47] D. A. Johns, W. M. Snelgrove and A. S. Sedra: "Adaptive Recursive State-Space Filters Using a Gradient-Based Algorithm", *IEEE Trans. Circuits & Syst.*, CAS-37, 6, pp.673-684 (June 1990).

[48] M. Nayeri and W. K. Jenkins: "Analysis of Alternate Realizations of Adaptive IIR Filters", in *proc. of IEEE Int. Symp. Circuits & Syst.*, pp.2157-2160 (June 1988).

[49] M. M. Hadhoud and D. W. Thomas: "The Two-Dimensional Adaptive LMS (TDLMS) Algorithm", *IEEE Trans. Circuits Syst.*, CAS-35, 3, pp.485-494 (May 1988).

[50] M. Ohki and S. Hashiguchi: "Two-Dimensional LMS Adaptive Filters", *IEEE Trans. Consumer Electronics*, 37, 2, pp.66-73 (Feb. 1991).

[51] W. B. Mikhael and S. M. Ghosh: "Two-Dimensional Variable Step-Size Sequential Adaptive Gradient Algorithms with applications", *IEEE Trans. Circuits & Syst.*, CAS-38, 12, pp.1577-1580 (Dec. 1991).

[52] W. B. Mikhael and S. M. Ghosh: "Two-Dimensional Block Adaptive Filtering Algorithms", in *Proc. of IEEE Int. Symp. Circuits & Syst.*, pp.1219-1222 (May 1992).

[53] S.-C. Pei, C.-Y. Lin and C.-C. Tsung: "Two-Dimensional LMS Adaptive Linear Phase Filters", in *Proc. of IEEE Int. Symp. Circuits & Syst.*, pp.311-314 (May 1993).

[54] W. B. Mikhael and S. M. Ghosh: "Two-Dimensional Optimum Block Adaptive Filtering Algorithms for Image Restoration and Enhancement", in *Proc. of IEEE Int. Symp. Circuits & Syst.*, pp.419-422 (May 1993).

[55] J. C. Strait and W. K. Jenkins: "A Fast Two-Dimensional Quasi-Newton Adaptive Filter", in *Proc. of IEEE Int. Symp. Circuits & Systems*, 2, pp.149-152, (May-June 1994).

[56] S.-G. Chen and Y.-A. Kao: "A New Efficient 2-D LMS Adaptive Filtering Algorithm", in *Proc. of IEEE Int. Symp. Circuits & Systems*, 2, pp.233-236 (May-June 1994).

[57] M. Kawamata, E. Kawakami and T. Higuchi: "Realization of Lattice-Form Separable-Denominator 2-D Adaptive Filters", in *Proc. of IEEE Int. Symp. Circuits & Syst.*, pp.295-298 (May 1993).

[58] A. C. Tan and S.-T. Chen: "Two-Dimensional Adaptive LMS IIR Filter", in *Proceeding of IEEE Int. Symp. Circuits & Syst.*, pp.299-302 (May 1993).

[59] 棟安実治、雛元孝夫:"LMS 法を用いた 2 次元状態空間適応フィルタ", 電子情報通信学会論文誌 A 分冊,J76-A, 4, pp.598-604, (1993-04).

[60] 棟安実治、雛元孝夫:"分母分離形 2 次元状態空間フィルタの並列形実現", 電子情報通信学会論文誌 A 分冊,J77-A, 6, pp.844-853 (1994-07).

付録 A

式(2.11)の導出

式 (2.10) で、次の与えられる制約条件下で評価関数

$$
\begin{aligned}
\hat{E}(a) &= \sum_{(p,q)\in\Omega}\sum \left| a^t c(\omega_1, \omega_2) - H_d(p,q) \right|^2 \\
&= a^t \hat{Q} a - 2a^t \hat{d} + \sum_{(p,q)\in\Omega}\sum H_d(p,q)^2
\end{aligned} \tag{6.1}
$$

を極小にする点aでは、Lagrange 関数

$$
L(a, \lambda) = \hat{E}(a) + \lambda^t (Ca - e) \tag{6.2}
$$

について

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial L}{\partial a} &= \frac{\partial \hat{E}}{\partial a} + \frac{\partial \lambda^t (Ca - e)}{\partial a} \\
&= 2\hat{Q}a - 2\hat{d} + C^t \lambda \\
&= 0
\end{aligned} \tag{6.3}
$$

および

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial L}{\partial \lambda} &= Ca - e \\
&= 0
\end{aligned} \tag{6.4}
$$

が成り立つことが必要である [12]。式 (6.3) より

$$
a = \hat{Q}^{-1}\hat{d} - \frac{1}{2}\hat{Q}^{-1} C^T \lambda \tag{6.5}
$$

が得られる。式 (6.5) を式 (6.4) に代入して

$$
C(\hat{Q}^{-1}\hat{d} - \frac{1}{2}\hat{Q}^{-1} C^T \lambda) - e = 0 \tag{6.6}
$$

となる。これより

$$
\lambda = 2[(C\hat{Q}^{-1}C^T)^{-1} C\hat{Q}^{-1} d - (C\hat{Q}^{-1}C^T)^{-1} e] \tag{6.7}
$$

が導ける。式 (6.7) を (6.5) に代入して

$$
\begin{aligned}
a &= \hat{Q}^{-1}\hat{d} - \hat{Q}^{-1}C^T((C\hat{Q}^{-1}C^T)^{-1}C\hat{Q}^{-1}\hat{d} \\
&\quad + \hat{Q}^{-1}C^T(C\hat{Q}^{-1}C^T)^{-1}e \\
&= [I - \hat{Q}^{-1}C^T(C\hat{Q}^{-1}C^T)^{-1}C]\hat{Q}^{-1}\hat{d} \\
&\quad + \hat{Q}^{-1}C^T(C\hat{Q}^{-1}C^T)^{-1}e
\end{aligned}
$$

を得る。これは式 (2.11) に一致する。