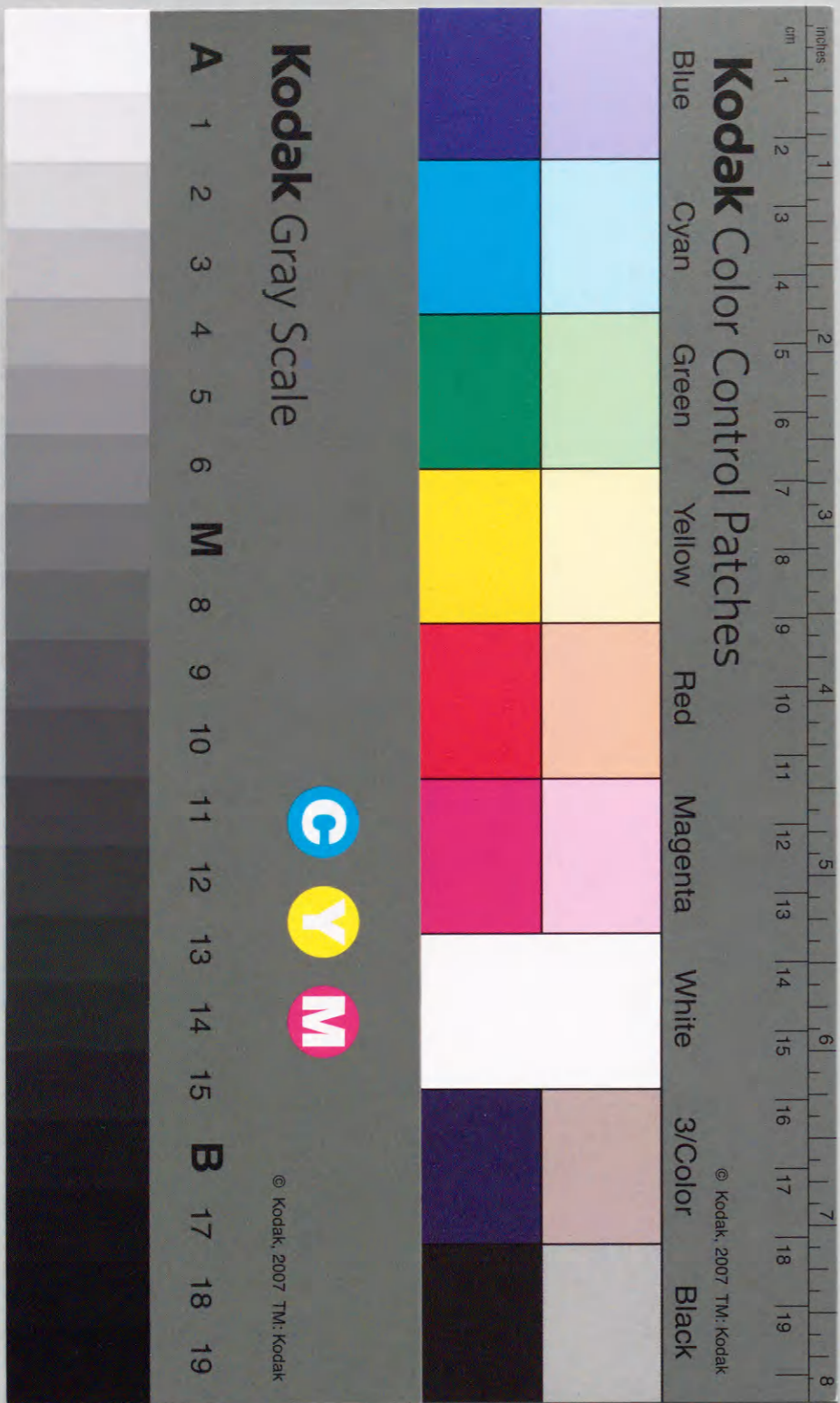


開水路網非定常流の数値計算手法に関する研究

1993年

金本 満



①

開水路網非定常流の数値計算手法に関する研究

1993年

金本満

目次

第 1 章 緒論	1
1.1 従来の研究と本研究の目的	1
1.2 本論文の構成	3
参考文献	6
第 2 章 開水路網形態のグラフ表示	9
2.1 緒言	9
2.2 グラフ理論の概説	9
2.2.1 グラフの定義	9
2.2.2 グラフの行列表示	10
2.3 グラフ理論による開水路網形態の定量的表示	12
2.3.1 単一開水路のグラフ表示	12
2.3.2 開水路網のグラフ表示	13
2.4 結言	15
参考文献	16
第 3 章 特性曲線法による開水路網非定常流の解析方法	17
3.1 緒言	17
3.2 単一開水路の基礎方程式の特性表示	18
3.3 特性方程式の離散化と行列表示	19
3.3.1 特性方程式の離散化	19
3.3.2 差分方程式の行列表示	23
3.3.3 開水路網のシステム・モデルの定式化と解法	26
3.4 解析手順	31

3.5 結言	32
参考文献	33
第4章 直接差分法による開水路網非定常流の解析方法	35
4.1 緒言	35
4.2 4点陰形式差分法による解析方法	36
4.2.1 単一開水路における基礎方程式の離散化	37
4.2.2 開水路網のシステム・モデルの定式化と解法	44
4.2.3 解析手順	52
4.3 MacCormack法による解析方法	53
4.3.1 単一開水路における基礎方程式の離散化	53
4.3.2 開水路網のシステム・モデルの定式化と解法	56
4.3.3 解析手順	60
4.4 結言	60
参考文献	62
第5章 分流点・合流点のエネルギー損失を考慮した開水路網非定常流の解析方法	65
5.1 緒言	65
5.2 分流点・合流点に対する運動方程式	66
5.2.1 分流点・合流点のモデル化	66
5.2.2 分流点・合流点における運動方程式	67
5.2.3 x 方向の水面幅のベクトル表示	70
5.2.4 運動方程式の行列表示	75
5.3 分流点・合流点の貯留方程式	77
5.3.1 分流・合流点のモデル化	77
5.3.2 貯留方程式の行列表示	78
5.4 開水路網のシステム・モデルの定式化と解法	79
5.4.1 枝方程式	80
5.4.2 節点方程式	80
5.4.3 行列解法	82
5.5 結言	82

参考文献	83
第6章 モデル水路および実河川網への適用例	85
6.1 緒言	85
6.2 モデル水路における数値計算例	86
6.2.1 モデル水路	86
6.2.2 計算条件	88
6.2.3 各種解析手法による計算結果の比較	90
6.3 低平地河川網の洪水流解析	100
6.3.1 対象開水路網とグラフ表示	100
6.3.2 計算条件	102
6.3.3 計算結果および考察	104
6.4 山地河川網の洪水流解析	109
6.4.1 対象河川網とグラフ表示	109
6.4.2 計算条件	109
6.4.3 計算結果および考察	112
6.5 結言	117
参考文献	119
第7章 結論	121
付録A ソースに水位を与えた場合のシステム方程式の行列表示	125
A.1 エネルギー損失を考慮しない場合	125
A.2 エネルギー損失を考慮した場合	126

第1章 緒論

1.1 従来の研究と本研究の目的

わが国の年間平均降水量は、約 1,800mm 程度であり、これは、全世界の年平均降水量の約 2.5 倍で、比較的水資源に恵まれた国土といえる¹⁾。しかし、わが国の地形は急峻で、降雨は時間分布、空間分布が偏っており、河状係数が他国に比較して大きい。すなわち、流域に降った雨は短時間に流下し、洪水を引き起こして、その後急速に流量が減少し低水の状態となることが特徴である²⁾。このように、わが国の河川は勾配が比較的急で、流量変動も大きいため、河道の平面形状や縦断形状の変化も大きく、下流河川に対する土砂の供給はかなり大きいものと想像される。山地域から供給される土砂は、河川の勾配が緩くなったところで堆積し、扇状地や三角州などの沖積地を作るが、沖積地を貫流する河川は、ネットワーク状の河川網を形成している場合が少ない。

わが国では、このような沖積地に人口と資産が過度に集中しており、単に基本高水、計画高水だけにとどまらず、それを上回る超過洪水をも想定した治水対策の重要性が認識されている。したがって、沖積地などに形成される河川網の洪水時の流況を把握することはきわめて重要であり、そのための簡単かつ実用的な数値シミュレーション技法を確立することは水理学上の重要な一課題である。

従来、河川網に代表される開水路網の非定常流の水理解析に際しては、簡便なことからしばしば定常不等流解析法が準用されているが、たとえば、デルタ地帯に発達する低平地河川網では、河口潮位の変化と上流からの流入流量の変化が相まって、系内が複雑な流況を示すことが予想され、定常不等流で解析すると、現実の流況とかけ離れた結果を得ることもある。したがって、このような場所で水防計画、内水処理計画などを的確に策定しようとするれば、より現実に近い開水路網非定常流としての流況を把握することが必要になってくる。

河川網の非定常流況を把握するためには、支川の分流・合流を横流出入に置き換えて、単一開

水路の非定常流計算に帰着させて解析することもあるが、短区間で分流・合流を繰り返すわが国河川の特徴を踏まえれば、かえって解析が複雑になる場合も生じる。また、横流入量のハイドログラフの設定の仕方にも問題が残る。したがって、河川を単一のものとして扱うよりも、むしろ、河川網全体を一つのシステムとして扱う方が、より現実的であると考えられる。

河川網の分流・合流の形態が様々であることを考えると、河川網全体を一つのシステムとして扱うには、解析手順が一般化され、しかも、系統化されていることが必要となる。そこで、河川の連結構造に着目したシステム論的な新しい開水路網の水理解析法の開発が考えられるが、定常流に関してはすでに汎用的な行列解析法^{3, 4)}が提案されている。

一方、非定常流れを対象とした場合も検討は行われているが、非定常流では開水路網を構成する各水路において場所的に流量が変化するため、従来提案されている計算法は、一次元漸変非定常流の基礎方程式を直接差分法し、分流・合流点における水位と流量の連続条件を考慮に入れて解く方法⁵⁾⁻⁹⁾がほとんどである。これらの方法は一般的なネットワーク・モデルを構築するという視点に欠けており、複雑な開水路網系一般の系統的な数値計算法の開発を志向したものとしては、以下のようなものが見られるにすぎない。

すなわち、開水路漸変非定常流の特性方程式の陰的数値解法¹⁰⁾を開水路網に拡張した計算法¹¹⁾、漸変非定常流の基礎方程式系を4点陰形式差分法を用いて離散化し、非線形連立方程式をNewton-Raphson法を適用して開水路網系全体について解く方法¹²⁾、分流・合流点に対しては連続方程式の積分形である貯留方程式を用いた基礎方程式系をグラフの接続行列で表現し、これをStaggered-schemeで差分近似して計算する方法¹³⁾がある。しかし、これらの解法のいずれにおいても、基礎となる数理モデルはネットワーク・モデルとして系統的に、しかも簡潔に定式化されるまでには至っていない。

一般に、開水路網系の幾何学的形態は節点と枝から成るグラフでモデル化され得るが、定常流と同じように枝の通過変数として流量を選んで数理モデルを構築しようとするれば、非定常流ではグラフの枝に対して唯一つの流量を定義し得ないので、枝上で定義される流量の取り扱いに何らかの工夫が必要である。また、それによってシステム・モデルの定式化の巧拙が大きく左右されるので、この難点を解決すれば、開水路網非定常流の系統的な水理解析法の展開は可能になるものと考えられる。

そこで有向グラフの1本の枝に対して2個の流量が定義される場合の開水路網非定常流の新しい解析手法が提案されている¹⁴⁾。この方法は、本来、分布パラメータ・モデルある非定常流の基礎方程式を集中パラメータ・モデルに変換することによって得られるシステム・モデルで、枝(単

一開水路)の上・下流端に導入される条件式(枝方程式)と節点における条件式(節点方程式)をグラフの接続行列を用いて関連づけ、外部点(単一開水路の上・下流端の断面)の未知水量と内部点(単一開水路の上・下流端以外の断面)の未知水量とを独立に求める方法である。

また、このように集中化できないモデルについても、離散化された基礎方程式を見かけ上、集中モデルとして扱い、擬似的に枝方程式を集中化して、開水路網内の未知水量すべてを一度に解く方法も提案されている¹⁵⁾。

以上のことを踏まえて、本研究では、定常流と同様にグラフ理論を用いて開水路網の形態を定量的に表示し、開水路網の連結構造を組み込んだ非定常流の系統的な解析技法の開発を目的とする。

1.2 本論文の構成

前節で述べたように、本研究は開水路網非定常流の汎用的、系統的な数値解析手法の確立を目指したものであり、以下の章から構成される。

第2章では、開水路網の非定常流解析をシステム論的に展開する手段として、グラフ理論を用いた開水路網形態の定量的な表示を試みる。

第2.1節では、水工学分野へのグラフ理論の適用例を紹介し、開水路網形態も定量的に表示できることを示す。

第2.2節では、グラフ理論を概説し、次章以下で用いる基礎的な行列を定義する。

第2.3節では、開水路網形態をグラフの接続行列を用いて定量的に表示できることを具体例を示すことにより明らかにする。

第3章では、特性曲線法を用いた場合の開水路網非定常流の行列解析法の展開を試みる。

第3.1節では、従来の特性曲線法を用いた開水路非定常流の計算法を整理し、その問題点を抽出するとともに、開水路網の非定常流解析への拡張性を明らかにする。

第3.2節では、非定常流の基礎方程式を特性表示し、得られた特性方程式を空間方向にはGalerkin法、時間方向には後退差分法を用いて、陰的に離散化し行列表示する。そして、外部点の未知水量を求める式と内部点の未知水量を求める式が分離され、モデルが集中化されることを示す。さらに、外部点の未知水量を求めるための枝方程式と、節点に関する水位連続、および、流量連続の条件式を節点方程式として行列表示し、システム・モデルが定式化されることを示す。

第3.3節では、前節までに定式化されたシステム・モデルに基づいた解析手順を述べる。

第4章では、直接差分法を用いた開水路網非定常流の汎用的な解析方法の展開を試みる。

第4.1節では、従来提案されている直接差分法を用いた単一開水路の非定常流解析法を整理し、開水路網の非定常流解析へ展開する場合の問題点を明らかにする。

第4.2節では、陰形式の直接差分法の例として、Preissmannの4点陰形式差分法を取り上げ、汎用的な開水路網非定常流の解析手法を検討する。まず、基礎方程式をPreissmannの4点陰形式差分法により直接離散化し、従来から提案されている一般的な行列表示式を示す。この差分方程式は連立方程式で表されるため、外部点の未知水量を求めるための枝方程式はすべての差分式により構成される必要があるため、モデルの集中化が困難である。そこで、枝方程式を外部点を含む格子で成立する差分式と、内部点のみを含む格子で成立する差分式に分割し、外部枝方程式と内部枝方程式の概念を導入して、モデルを擬似的に集中化する方法を述べる。その後、前章で示した節点方程式を導入し、枝方程式とともに行列表示して、システム・モデルを定式化する。最後に、定式化されたシステム・モデルに基づいた解析手順を述べる。

第4.3節では、陽形式の直接差分法の例として、MacCormack法を取り上げ、汎用的な開水路網非定常流の解析手法を検討する。まず、基礎方程式をMacCormack法により離散化し、内部点の未知水量を求める方法を述べる。つぎに、外部点を含む格子に対して連続方程式を導入し、外部点の未知水量を求めるための枝方程式を行列表示する。その後、節点方程式と枝方程式をまとめて行列表示してシステム・モデルを定式化する。最後に、定式化されたシステム・モデルに基づいた解析手順を述べる。

第5章では、分流・合流点のエネルギー損失を考慮した場合の開水路網非定常流の汎用的な解析手法を検討する。

第5.1節では、従来の分流・合流点に対する取扱い方法を整理する。

第5.2節では、分流・合流点を含む水路を断面急変部としてモデル化し、分流・合流点の形態により、縦断方向には運動量保存則を、横断方向には水位連続の条件を導入する。運動量方程式の水圧項に含まれる水面幅の取扱いは、分流・合流点の形状によって異なるので、形状判定のための行列を定義し、水面幅の汎用的なベクトル表示法を検討する。得られた水面幅ベクトルを用いて枝上・下流端の運動量の流れを成分とするベクトルを求める。

第5.3節では、分流・合流点に設定されたコントロール・ボリュームの貯留効果を導入するため、貯留方程式を定式化しベクトル表示する。

第6章では、第3章～第5章で検討された種々の解析手法に関してその有効性を確認するため、モデル水路網および実河川網を対象として、具体的に数値計算を行った結果を述べる。

第6.1節では、対象とするモデルの概要を示す。

第6.2節では、河川網の基本構成単位であるY型の分岐・合流水路を対象とし、上流端に単射上昇波を与え、単射上昇波の下流への伝播状況を把握するとともに、各解析手法の精度、安定性、演算時間の比較を行う。

第6.3節では、低平地河川網の例として、太田川の感潮河川網を対象として非定常流計算を行い、実績水位との比較を行う。また、分流・合流点のエネルギー損失を考慮した場合と考慮しない場合の計算結果の違いを述べる。

第6.4節では、山地河川網の例として、江の川の河川網を対象として非定常流計算を行い、MacCormack法の山地河川網への適用性を確認するとともに、分流・合流点のエネルギー損失を考慮した場合と考慮しない場合の計算結果の違いを述べる。

第7章では、以上の結果を総括して結論とする。

参考文献

- 1) 岩佐義明：河川工学，森北出版，pp.23-29，1979.
- 2) 室田 明：河川工学，技法堂出版，pp.1-30，1986.
- 3) 神田 徹・井澤元博：開水路網定常流のマトリックス解析法，土木学会論文報告集，第262号，pp.25-40，1977.
- 4) 常松芳昭：定常開水路網流れの解析法，広島大学工学部研究報告，第34巻，第2号，pp.201-209，1986.
- 5) Stoker, J. J. : Water wave , *Interscience Publishers , Inc. , New York* , pp.451-509 , 1957.
- 6) Quinn, F. H. and Wylie, E. B. : Transient analysis of the Detroit River by the implicit method , *Water Resour. Res.* , Vol.8 , No.6 , pp.1461-1469 , 1972.
- 7) Fread, D. L. : Technique for implicit dynamic routing in rivers with tributaries , *Water Resour. Res.* , Vol.9 , No.4 , pp.918-926 , 1973.
- 8) 早瀬吉雄・角屋 睦：分合流点を含む不定流計算法—低平地水田地帯の流出解析に関する研究(II)—，農業土木学会論文集，第67号，pp.37-44，1977.
- 9) Swain, E. D. and Chin, D. C. : Model of flow irregular open-channel networks , *J. Irrig. and Drain. Eng.* , *ASCE* , Vol.116 , No.4 , pp.537-536 , 1990.
- 10) Gunaratnam, D. J. and Perkins, F. E. : Numerical solutions of unsteady flows in open channels , *Hydrodynamics Laboratory Report* , No.127 , *Dep. of Civil Eng. , Mass. Inst. of Technol.* , pp.106-121 , 1970.
- 11) Wood, E. F. , Harley, B. M. and Perkins, F. E. : Transient flow routing in channel networks, *Water Resour. Res.* , Vol.11 , No.3 , pp.423-430 , 1975.
- 12) Joliffe, I. B. : Computation of dynamic waves in channel networks , *J. Hydraul. , Eng.* *ASCE* , Vol.110 , No.10 , pp.1358-1370 , 1984.
- 13) 岩佐義明・綾 史朗・山本正幸：ネットワーク状水路の水理解析，京都大学防災研究所年報，第19号B-2，pp.201-219，1976.

- 14) 金本 満・常松芳昭：グラフ理論による河川網不定流の水理解析，土木学会論文集，No.429/II-15，pp.67-75，1991.
- 15) 金本 満・常松芳昭・金丸昭治・三島隆明：4点陰形式差分法を用いた開水路網非定常流の行列解析法，広島大学工学部研究報告，第40巻，第1号，pp.65-72，1991.

第2章 開水路網形態のグラフ表示

2.1 緒言

グラフ理論¹⁾は、素朴な直感に基づいた単純な公理や定義によって成り立っている理論で、電気回路網系の解析にいち早く利用され、その有効性が実証されている。

水工学の分野においても、常松²⁾が、有向グラフと管路網構造のアナロジーにより、グラフ理論を水理解析に応用して、複雑な系にも適用し得る統一的な水理解析法を提案した。

さらに、管路網の水理解析手法は、開水路網の定常流解析にも利用され、ネットワーク形状を有する水路の水理解析に対するグラフ理論の適用性が検証されている^{3,4)}。

ところで、本研究で対象としている開水路網の非定常流モデルでは、グラフの枝の通過変数である流量を一義的に定めることができないために、グラフ理論を用いた解析法を展開するには何らかの工夫が必要である。そこで、非定常流モデルを集中パラメータ型に変換してグラフ理論を用いる新しい展開法が提案されている⁵⁾。

本研究でもグラフ理論により開水路網形状を表示するが、本章では、次章以降の展開で基本となる事項について概説し、開水路網形状の定量的な表示方法の検討を行う。

2.2 グラフ理論の概説

本節では、グラフ理論の中で以後の展開で重要となる事項について説明するとともに、開水路網形状を表すための種々の行列を定義しておく。

2.2.1 グラフの定義

「グラフとは、いくつかの点とそれらを結ぶ線分からなる構造を有するもの」として定義される。言い換えれば、グラフは任意の点どおしのつながりの形態を表示するトポロジーモデルであると言える。

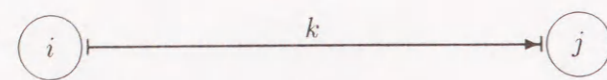


Fig. 2.1 Simple directed graph.

ここで、「点」は点、頂点、岐点、節点などと呼ばれる。また、「線分」は枝、辺などと呼ばれ、その両端には必ず点が存在する。本論文では用語を統一するため、以後これらを「節点」、「枝」と呼ぶことにする。

節点には枝の端点になっているものと、単独に存在している孤立点がある。枝の両端が同一の節点になっているとき、この枝を閉路枝、相異なる節点となっているときには、この枝を開路枝と呼ぶ。

ところで、このような枝は向きの有無を考慮することができ、それに対応して性質の異なるグラフが定義される。これらには、向きを定めない枝で構成される無向グラフ、仮の向きを定めた枝(有向枝)により構成される有向グラフがある。さらに、向きを固定した(すなわち一方通行しか許容しない)枝(定向枝)で構成される定向グラフがある。

2.2.2 グラフの行列表示

本研究のように実河川を対象とする場合、ループ形状のような閉路枝はあり得ない。さらに、実河川の中でも感潮河川では、順流、逆流が存在するために、一義的に枝の方向を決定することができない⁶⁾。したがって、開水路網の形態は前節で示した3種類のグラフのうち閉路枝のみで構成された有向グラフにより表示することが適当と考えられる。そこで、ここでは、開水路網形態を有向グラフで表示するために必要となる諸元をより具体的に定義する。

いま、Fig. 2.1に示すように、1つのグラフを節点*i*から節点*j*に向かう有向枝*k*で表示すると、最も単純な有向グラフが得られる。このとき、有向枝*k*は節点*i*、*j*に連結していると呼ばれる。ただし、以後の展開のため節点*i*は枝*k*の始点、節点*j*は枝*k*の終点と呼ぶことにする。

Fig. 2.1を参考にすると有向枝*k*の節点に対する連結様式には2種類あり、枝*k*は節点*i*から出ているため、枝*k*は節点*i*に出連結、節点*j*に入っているため、枝*k*は節点*j*に入連結していると言われる。

ここで、グラフ形態を定量的に表すために、行に節点、列に枝をとった行列*D*をつぎのように

定義する。

$$D = [D_{ik}] = \begin{cases} 1 & (\text{節点 } i \text{ から枝 } k \text{ が出るとき}), \\ 0 & (\text{節点 } i \text{ に枝 } k \text{ が連結していない場合}), \\ -1 & (\text{節点 } i \text{ に枝 } k \text{ が入っているとき}). \end{cases} \quad (2.1)$$

式(2.1)に示した行列は、節点と枝の連結様式を表しているので節点・枝接続行列(または単に接続行列)と呼ばれる。

このような接続行列を用いる場合、一つの行に着目するとつぎのように節点分類される⁷⁾。すなわち、*i*行の要素が0と1のみで構成されている場合、当該節点に接続する枝はすべて出連結しており、あたかも節点から流れが発生するような構造となっているので、これをソースと呼ぶ。

*i*行の要素が0と-1のみで構成されている場合、当該節点に接続する枝はすべて入連結しており、あたかも節点に流れが吸収されるような構造となっているので、これをシンクと呼ぶ。

その他の場合、すなわち、*i*行が-1, 0, 1の混在した要素で構成されている場合、節点は常にソースからシンクへ至る路の途中に位置していることからこれを中間ノードと呼ぶ。

*i*行の要素がすべて0の場合は、グラフ理論においては孤立点と称しているが、本研究のような水理解析には存在し得ないものであるから対象からは除外する。

なお、このような節点の分類はシステム外部の影響をシステム内部に取り入れる場合に、その取り入れ方が異なってくるので非常に重要である。

さらに、接続行列は出連結に関する行列と、入連結に関する行列に分割することができ、つぎのように、出連結行列 D^+ 、入連結行列 D^- として定義される。

$$D^+ = [D_{ik}^+] = \begin{cases} 1 & (\text{節点 } i \text{ に枝 } k \text{ が出連結の場合}), \\ 0 & (\text{その他の場合}). \end{cases} \quad (2.2)$$

$$D^- = [D_{ik}^-] = \begin{cases} 1 & (\text{節点 } i \text{ に枝 } k \text{ が入連結の場合}), \\ 0 & (\text{その他の場合}). \end{cases} \quad (2.3)$$

明らかに、接続行列と出連結行列、入連結行列の間にはつぎの関係がある。

$$D = [D_{ik}] = D^+ - D^-. \quad (2.4)$$

式(2.2)、(2.3)と節点の特性から、出連結行列、入連結行列の要素はつぎのような性質を持っている。すなわち、シンクには入連結の枝のみ接続しているから、出連結行列のシンクに対応する行の要素はすべて0である。また、ソースには出連結の枝のみ接続しているから、入連結行列のソースに関する行の要素はすべて0である。

このように、基本的には式(2.1)により、枝の接続状況、節点の特性など任意のグラフ形状を表現し得ることが理解できる。

以上定義された基本となる行列から導かれる行列の要素にはつぎのような特性があり、枝ごとの接続状況を詳細に知ることができる。なお、グラフは e 本の枝で構成されているものとし、また、上付きの添字 T は転置を表す。

- (1) $(D^+)^T D^+$ は枝に関する e 行 e 列の行列であり、第 a 行第 b 列 (ただし、 $a \neq b$ である) の要素が1の場合、枝 a と枝 b の始点が一つの節点を共有している。
- (2) $(D^-)^T D^-$ は枝に関する e 行 e 列の行列であり、第 a 行第 b 列 (ただし、 $a \neq b$ である) の要素が1の場合、枝 a と枝 b の終点が一つの節点を共有している。
- (3) $(D^-)^T D^+$ は枝に関する e 行 e 列の行列であり、第 a 行第 b 列 (ただし、 $a \neq b$ である) の要素が1の場合、枝 a の終点側に枝 b の始点側が接続している。
- (4) $(D^+)^T D^-$ は枝に関する e 行 e 列の行列であり、第 a 行第 b 列 (ただし、 $a \neq b$ である) の要素が1の場合、枝 a の始点側に枝 b の終点側が接続している。

2.3 グラフ理論による開水路網形態の定量的表示

先述したように、開水路の非定常流の基礎方程式は分布パラメータ・モデルであるため、節点間のつながりだけを念頭においた展開法、すなわち、集中型のモデルを対象としたグラフ理論をそのまま適用するには、基礎方程式の離散化に工夫が必要である。グラフ理論を適用できるように、水理モデルの集中化は後章にゆずることにして、ここでは、基礎方程式が何らかの方法で集中化されたものとして開水路網の定量的なグラフ表示を検討する。

2.3.1 単一開水路のグラフ表示

いま、1本の開水路を枝に、上流端を枝の始点に、下流端を枝の終点に対応させれば、1本の開水路の幾何学的構造は、Fig.2.1に示したようなグラフで表現し得る。すなわち、Fig.2.2に示すように1本の開水路の上流端を節点 i に、下流端を節点 j に、開水路を枝 k に対応させると、単一開水路の形態は節点 i から節点 j に向かう1本の有向枝 k で表される。前節で示したように、枝 k の連結様式は節点 i に出連結、節点 j には入連結となっている。

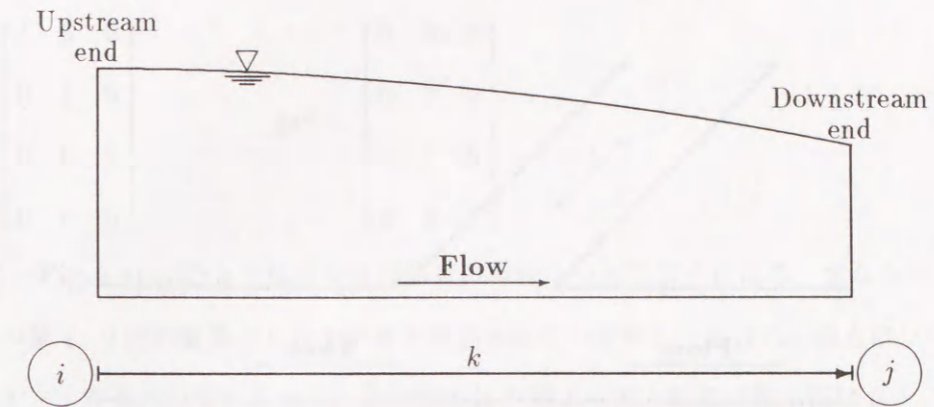


Fig.2.2 Sketch of directed graph for a single channel.

なお、先述したように開水路はすでに集中モデルとして扱っているので、定義された枝 k には長さの概念が存在しない。

2.3.2 開水路網のグラフ表示

単一開水路のグラフ表示は、そのまま河川網のグラフ表示に拡張できる。いま、Fig.2.3に示すように開水路網の基本となる最も単純で典型的なY型に合流した河川を考える。ここで、1本の開水路の上・下流端および合流点を節点とし、開水路を枝とすれば、Fig.2.4(a)のようなグラフ表示ができる。もちろん、開水路の任意の場所にも節点を設定することが可能であり、Fig.2.4(b)のように表示することもできる。ただし、算用数字は節点の番号、ローマ数字は枝の番号を示す。

Fig.2.4(a)について具体的に接続行列を作成すれば以下ようになる。たとえば、枝 I を取り上げると、枝 I は節点 1 に出連結であり、節点 3 に入連結であるから、接続行列の第 1 行第 1 列の要素を 1、第 3 行第 1 列の要素を -1 とする。以下同様に、枝 II については、第 2 行第 2 列を 1、第 3 行第 2 列を -1 とする。枝 III については、第 3 行第 3 列を 1、第 4 行第 3 列を -1 とする。その他の要素はすべて 0 である。以上から、接続行列はつぎようになる。

$$D = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \quad (2.5)$$

さらに、出連結行列は接続行列の要素の 1 を残して、あとの要素を 0 とすれば得られる。また、

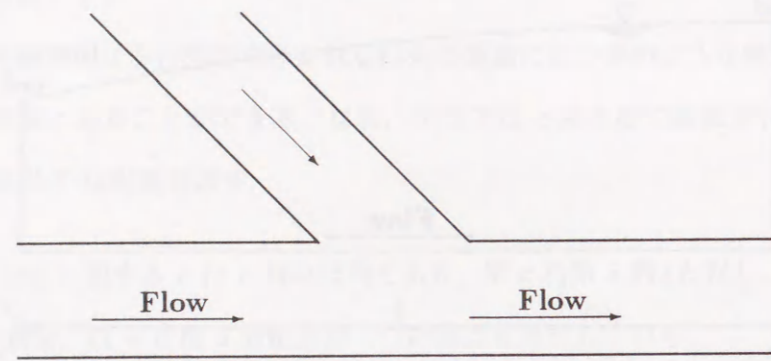


Fig.2.3 Sketch of simple Y-channel consisting of confluence.

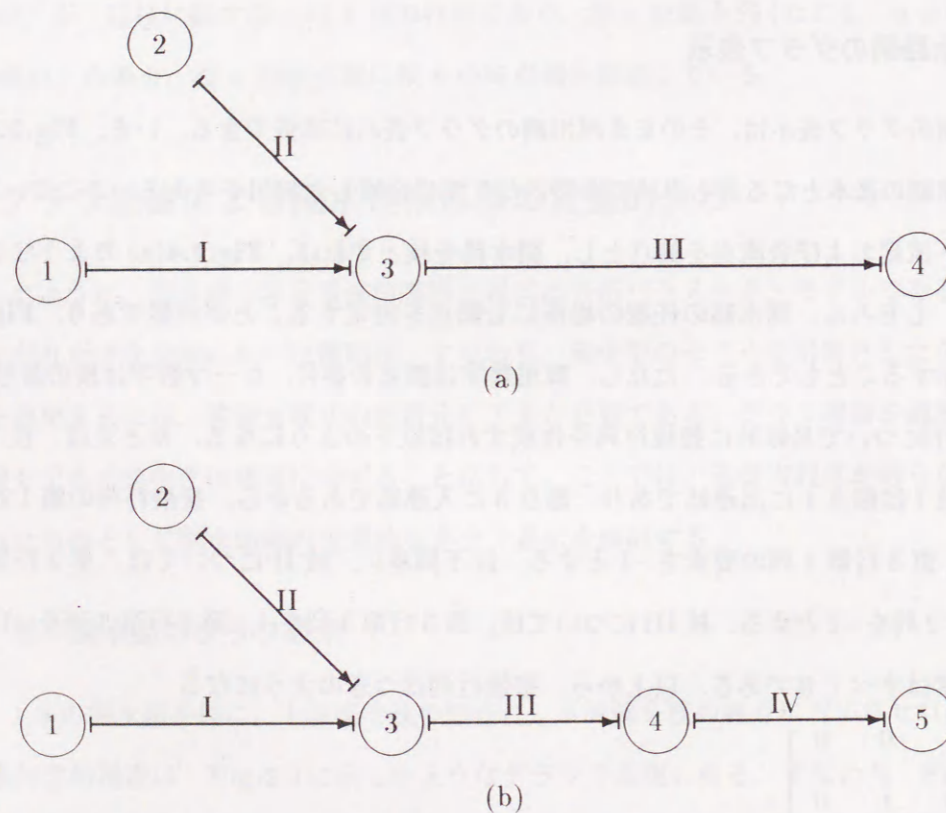


Fig.2.4 Directed graph of Y-channel.

入連結行列は -1 を 1 として、あとの要素を 0 とすれば得られるので、それぞれつぎのようになる。

$$D^+ = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad D^- = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad (2.6)$$

以上から、Fig.2.4(a)のようなグラフの節点の特性はつぎのようになる。すなわち、接続行列の式(2.6)の第1, 2行の要素は0と1のみで構成されているから、これらの節点はソースとなる。第3行は-1と1が混在しているから、この節点は中間ノードとなる。第4行は0と-1のみで構成されているから、この節点はシンクである。

また、比較のため Fig.2.4(b) に対する接続行列、入・出連結行列を示せば以下のようなになる。

$$D = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}, \quad D^+ = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad D^- = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad (2.7)$$

2.4 結言

本章ではグラフ理論の概説をするとともに、それを用いた開水路網形態の定量的表示方法を具体例を挙げながら検討した。開水路網の形態は管路網系と同様に接続行列により、一般的・汎用的に表示できることが示された。

しかし、先述したように、開水路網の非定常流解析を行う場合には、基礎方程式が分布型のシステムであるため、枝の通過変数を一義的に定めることが困難である。このようなことから、代表断面の水深と断面間の平均流速を用いてモデルを集中化し、グラフ理論を適用して解析している例⁸⁾もあるが、これらの集中化方法は基本的には基礎方程式の離散化方法に依存するため、次章以下では解析方法ごとに検討する。

参考文献

- 1) 小野寺力男：グラフ理論の基礎，森北出版，1968.
- 2) 常松芳昭：水の輸送・配分システムの解析に関する研究，京都大学博士論文，1973.
- 3) 常松芳昭：定常開水路網流れの解析法，広島大学工学部研究報告，第34巻，第2号，pp.201-209，1986.
- 4) 神田 徹・井澤元博：開水路網定常流のマトリックス解析法，土木学会論文報告集，第262号，pp.25-40，1977.
- 5) 金本 満・常松芳昭：グラフ理論による河川網不定流の水理解析，土木学会論文集，No.429/II-15，pp.67-75，1991.
- 6) 常松芳昭・金本 満：開水路網非定常流の行列解析，広島大学工学部研究報告，第38巻，第1号，pp.95-103，1990.
- 7) 前掲5).
- 8) 土木学会編：土木工学における数値解析/流体解析編，サイエンス社，pp.118-133，1974.

第3章 特性曲線法による開水路網非定常流の解析方法

3.1 緒言

本章では，開水路非定常流の基礎方程式を特性曲線法を用いて特性表示し，得られた特性方程式を離散化するとともに，開水路網非定常流のシステム・モデルを行列表示し，グラフ理論が適用できる形式に集中化する方法を検討する．さらに，分流・合流点の条件式も同時に行列表示し，特性曲線法を用いた開水路網非定常流の系統的な水理解析法を提案する．

本章で用いる特性曲線法は，特性曲線上で成立する特性方程式に基づいて，流れの状態を求めていく方法であり，特性曲線法の持つ物理的意味からも理解しやすい方法である．開水路境界点についても，常流を仮定した場合，上流境界点では負の特性曲線により下流の影響を取り入れることができるため，水理学的には適切な計算法であるといえる¹⁾．

特性曲線法による解析法は， $x-t$ 平面を特性曲線によって網状に覆う特性曲線網法²⁾と， $x-t$ 平面にあらかじめ設定された格子点について解を求める固定格子点法³⁾に分けられる．前者の方法は，特性曲線の交点が所要の点と一致するとは限らないから，知りたい時刻，場所での解を求めるには複雑な内挿法を必要とし，本研究で対象としている開水路網の解析を系統的に展開するには不便である．一方，後者の方法では，前者の方法に比較して精度は劣るものの，知りたい時刻，場所での解を求めることができ，境界条件や分流・合流点の条件を導入する場合に便利である．

したがって，本章においては固定格子点法⁴⁾により解析を進めることとするが，同じ族の特性曲線が交差しない範囲，すなわち，低平地河川網のように流れが常に常流である場合を対象とする．

つぎに，特性方程式の離散化方法であるが，陽形式の差分法を用いる場合と，陰形式の差分法を用いる場合とがある⁵⁾．一般に，後者の方が数値的に安定しており，保存性に関して精度が高いことが確認されている⁶⁾．また，Courant-Friedrichs-Lewy条件⁷⁾を満たす限り，特性曲線の影響感知域は2個の差分格子内に含まれるから，6つの格子点を用いた差分方程式が有効である

と考えられる。このような点を考慮して、本章では、空間方向には Galerkin 法、時間方向には後退差分法を用いて離散化することとする。

本章ではまず、特性曲線法により得られる特性方程式を提示し、その方程式を空間方向には Galerkin 法、時間方向には後退差分法を用いて離散化を行う。その際、実河川網に適用することを念頭におき、空間方向の距離間隔が一定でない場合の離散表示式を検討する。つぎに、得られた差分方程式を行列表示し、未知水量が外部点(単一開水路の上・下流端の断面)と内部点(単一開水路の上・下流端以外の断面)とに分けて計算でき、開水路網非定常流のシステム・モデルが集中型モデルとして扱えることを示す。最後に、境界条件および分流・合流点における条件を定式化し、外部点における条件式が行列表示できることを示す。

3.2 単一開水路の基礎方程式の特性表示

本章では、先述したように低平地河川のような比較的流れの緩やかな河川への適用を念頭におき、漸変非定常流の基礎方程式としては、広幅水路に対する式(3.1)、(3.2)のような流量と水位を未知量とする非保存形の連続方程式および運動方程式を用いる⁸⁾。

$$B \frac{\partial z}{\partial t} + \frac{\partial q}{\partial x} = 0, \quad (3.1)$$

$$\frac{1}{gA} \left(\frac{\partial q}{\partial t} + 2v \frac{\partial q}{\partial x} \right) = -(1 - F_r^2) \frac{\partial z}{\partial x} + s_0 F_r^2 - s_f. \quad (3.2)$$

ここに、 t は時間、 x は下流方向に測った距離、 q は流量、 z は水位、 v は断面平均流速、 A は流水断面積、 B は水面幅、 s_0 は河床勾配、 g は重力加速度、 F_r は Froude 数 (v/c)、 c は微小じょう乱の伝播速度 ($\sqrt{gA/B}$) である。なお、摩擦勾配については、式(3.3)に示すような Manning 形式のものを用いた。

$$s_f = \frac{n_m^2 q |q|}{A^2 R^{4/3}}. \quad (3.3)$$

ただし、 n_m は Manning の粗度係数、 R は径深である。

これらの漸変非定常流の基礎方程式は、特性曲線法を用いるとつぎのような特性方程式に変換される⁹⁾。

$$\frac{\partial z}{\partial t} + (v \pm c) \frac{\partial z}{\partial x} - \frac{1}{B(v \mp c)} \left\{ \frac{\partial q}{\partial t} + (v \pm c) \frac{\partial q}{\partial x} \right\} = -\frac{gA}{B(v \mp c)} (s_0 F_r^2 - s_f). \quad (3.4)$$

以下の議論に便利のように式(3.4)を次のように表示しておく。

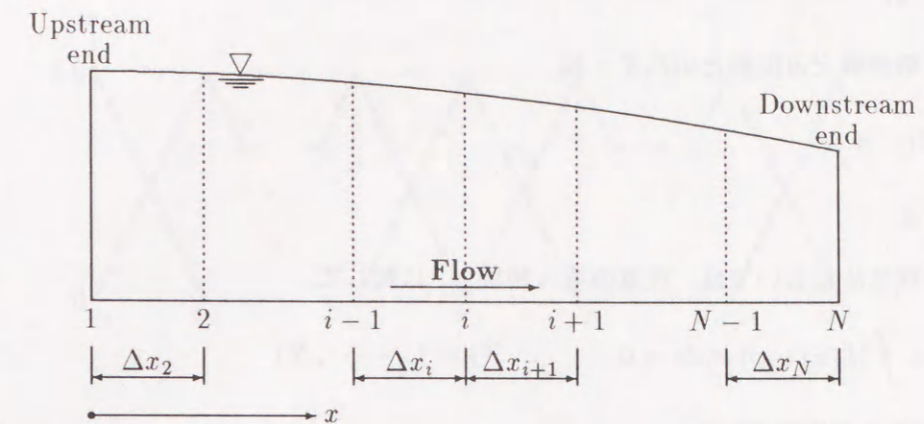


Fig.3.1 Definition sketch of a single channel reach.

$$L(u) = z_t + \lambda z_x - \frac{1}{B\lambda} (q_t + \lambda q_x) = \phi. \quad (3.5)$$

ただし、 u は偏微分方程式の厳密解であり、

$$u \equiv u(z(x,t), q(x,t)) \quad (3.6)$$

である。また、添字 t 、 x はそれぞれ時間 t 、距離 x に関する偏微分を表している。さらに、 $\lambda = v + c$ 、 $\bar{\lambda} = v - c$ であり、 ϕ は式(3.4)の右辺を表す。

式(3.5)は、本来、非線形な特性方程式であるが、簡単のため、ここでは、 λ 、 $\bar{\lambda}$ 、 ϕ が微小時間内で局所的に一定値であると仮定し、これを線形近似式として扱うことにする。

3.3 特性方程式の離散化と行列表示

式(3.5)で示した偏微分方程式の離散化は、距離に関しては重み付き残差法の一つである Galerkin 法¹⁰⁾を、時間に関しては後退差分を用いるが、実河川では河道断面の資料が一定距離間隔で得られているとは限らないので、このような場合も想定して、ここでは一般に距離間隔の異なる離散表示式を示すことにする。

3.3.1 特性方程式の離散化

いま、単一水路を Fig.3.1に示すように $(N-1)$ 個の小区間に分割し、水路の始点・終点となる 1 、 N の断面を外部点、それ以外の $2, \dots, N-1$ の断面を内部点と呼ぶことにする。

式(3.6)で示された偏微分方程式の近似解を

$$\beta = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & & & & \\ -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & & & \\ & \ddots & \ddots & & & \\ & & & -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ & & & & \ddots & \ddots \\ & & & & & -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ & & & & & & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix},$$

$$z = \begin{bmatrix} z_1 \\ \vdots \\ z_i \\ \vdots \\ z_N \end{bmatrix}, \quad q = \begin{bmatrix} q_1 \\ \vdots \\ q_i \\ \vdots \\ q_N \end{bmatrix}, \quad r = \begin{bmatrix} \frac{1}{2}\Delta x_2 \\ \vdots \\ \frac{1}{2}\Delta x_i + \frac{1}{2}\Delta x_{i+1} \\ \vdots \\ \frac{1}{2}\Delta x_N \end{bmatrix}.$$

さらに、式(3.16)は時間に関して離散化しなければならないが、ここでは次のような単純な後退差分スキームを用いることとする。

$$\left(\frac{dz}{dt}\right)^{m+1} = \frac{z^{m+1} - z^m}{\Delta t}, \quad \left(\frac{dq}{dt}\right)^{m+1} = \frac{q^{m+1} - q^m}{\Delta t}. \quad (3.17)$$

上式において、 m は時刻 $t = m\Delta t$ を表す添字である。

式(3.17)を用いて式(3.16)を差分表示すれば、枝上流端の外部点 ($i=1$)、枝下流端の外部点 ($i=N$)、枝の内部点 ($i=2, \dots, N-1$) に対してそれぞれ以下のような差分方程式が得られる。

まず、上流外部点に対しては、後退特性曲線のみ存在するから、

$$\begin{aligned} & \left(\frac{1}{3}\Delta x_2 - \frac{\lambda}{2}\Delta t\right)z_1^{m+1} + \left(\frac{1}{6}\Delta x_2 + \frac{\lambda}{2}\Delta t\right)z_2^{m+1} \\ & - \frac{1}{B\lambda} \left\{ \left(\frac{1}{3}\Delta x_2 - \frac{\lambda}{2}\Delta t\right)q_1^{m+1} + \left(\frac{1}{6}\Delta x_2 + \frac{\lambda}{2}\Delta t\right)q_2^{m+1} \right\} \\ & = \frac{\phi^m}{2}\Delta x_2\Delta t + \frac{1}{3}\Delta x_2z_1^m + \frac{1}{6}\Delta x_2z_2^m - \frac{1}{B\lambda} \left\{ \frac{1}{3}\Delta x_2q_1^m + \frac{1}{6}\Delta x_2q_2^m \right\} \end{aligned} \quad (3.18)$$

である。ただし、上式において、 $\lambda = v - c$ 、 $\bar{\lambda} = v + c$ である。

つぎに、下流外部点に対しては、前進特性曲線のみ存在するから、

$$\begin{aligned} & \left(\frac{1}{6}\Delta x_N - \frac{\lambda}{2}\Delta t\right)z_{N-1}^{m+1} + \left(\frac{1}{6}\Delta x_N + \frac{\lambda}{2}\Delta t\right)z_N^{m+1} \\ & - \frac{1}{B\lambda} \left\{ \left(\frac{1}{6}\Delta x_N - \frac{\lambda}{2}\Delta t\right)q_{N-1}^{m+1} + \left(\frac{1}{6}\Delta x_N + \frac{\lambda}{2}\Delta t\right)q_N^{m+1} \right\} \\ & = \frac{\phi^m}{2}\Delta x_N\Delta t + \frac{1}{6}\Delta x_Nz_{N-1}^m + \frac{1}{3}\Delta x_Nz_N^m - \frac{1}{B\lambda} \left\{ \frac{1}{6}\Delta x_Nq_{N-1}^m + \frac{1}{3}\Delta x_Nq_N^m \right\} \end{aligned} \quad (3.19)$$

である。ただし、この式において、 $\lambda = v + c$ 、 $\bar{\lambda} = v - c$ である。

さらに、内部点については、前進と後退の2つの特性曲線が存在するので、

$$\begin{aligned} & \left(\frac{1}{6}\Delta x_i - \frac{\lambda}{2}\Delta t\right)z_{i-1}^{m+1} + \frac{1}{3}(\Delta x_i + \Delta x_{i+1})z_i^{m+1} + \left(\frac{1}{6}\Delta x_{i+1} + \frac{\lambda}{2}\Delta t\right)z_{i+1}^{m+1} \\ & - \frac{1}{B\lambda} \left\{ \left(\frac{1}{6}\Delta x_i - \frac{\lambda}{2}\Delta t\right)q_{i-1}^{m+1} + \frac{1}{3}(\Delta x_i + \Delta x_{i+1})q_i^{m+1} + \left(\frac{1}{6}\Delta x_{i+1} + \frac{\lambda}{2}\Delta t\right)q_{i+1}^{m+1} \right\} \\ & = \frac{\phi^m}{2}(\Delta x_i + \Delta x_{i+1})\Delta t + \frac{1}{6}\Delta x_iz_{i-1}^m + \frac{1}{3}(\Delta x_i + \Delta x_{i+1})z_i^m + \frac{1}{6}\Delta x_{i+1}z_{i+1}^m \\ & - \frac{1}{B\lambda} \left\{ \frac{1}{6}\Delta x_iz_{i-1}^m + \frac{1}{3}(\Delta x_i + \Delta x_{i+1})q_i^m + \frac{1}{6}\Delta x_{i+1}q_{i+1}^m \right\} \end{aligned} \quad (3.20)$$

のようになる。ただし、 $\lambda = v \pm c$ 、 $\bar{\lambda} = v \mp c$ (複号同順) であるから、式(3.20)は実質的には2つの式を表している。

3.3.2 差分方程式の行列表示

単一水路に対する漸変非定常流の基礎方程式の離散化表示式は、式(3.18)~(3.20)によって構成されるが、記述の便宜上、これらの代数方程式を次のような形式で簡単に表示する。

すなわち、式(3.18)を

$$b_3z_1^{m+1} + c_3z_2^{m+1} + b_4q_1^{m+1} + c_4q_2^{m+1} = R_1, \quad (3.21)$$

また、式(3.19)を

$$a_1^N z_{N-1}^{m+1} + b_1^N z_N^{m+1} + a_2^N q_{N-1}^{m+1} + b_2^N q_N^{m+1} = R_N \quad (3.22)$$

のように書く。

さらに、式(3.20)を前進特性曲線については、

$$a_1^i z_{i-1}^{m+1} + b_1^i z_i^{m+1} + c_1^i q_{i+1}^{m+1} + a_2^i q_{i-1}^{m+1} + b_2^i q_i^{m+1} + c_2^i q_{i+1}^{m+1} = R_i, \quad (3.23)$$

後退特性曲線については、

$$a_3^i z_{i-1}^{m+1} + b_3^i z_i^{m+1} + c_3^i q_{i+1}^{m+1} + a_4^i q_{i-1}^{m+1} + b_4^i q_i^{m+1} + c_4^i q_{i+1}^{m+1} = R_i' \quad (3.24)$$

のように書く。

式(3.30)を式(3.27), (3.29)に代入して X_{up} , X_{dn} について整理すれば, 次式が得られる.

$$\begin{bmatrix} A_1 - A_2 A^{-1} A_4 & A_2 A^{-1} A_5 \\ -A_7 A^{-1} A_4 & A_8 - A_7 A^{-1} A_5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_{up} \\ X_{dn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} B_{up} - A_2 A^{-1} B_{int} \\ B_{dn} - A_7 A^{-1} B_{int} \end{bmatrix}. \quad (3.31)$$

式(3.31)は外部点の水量に関して成立すべき関係式であり, 4つの水量 (z_1, z_N, q_1, q_N) のうちの2つを境界条件として与えると他の2つの未知量を決定できることを表している. つまり, 内部点とは独立して外部点の未知量を決定できることになり, モデルが集中型で表されたことに等しい.

さらに, ベクトル X_{up} , X_{dn} が決定されると, これを式(3.30)に代入すれば, 内部点の未知ベクトル X_{int} , すなわち未知量 ($z_2, q_2, \dots, z_{N-1}, q_{N-1}$) を求めることができる.

3.3.3 開水路網のシステム・モデルの定式化と解法

前節で行列表示した数理モデルの式(3.31)を単一水路の連結したものとみなされる開水路網に拡張して適用するためには, 単一水路外部点の接続状況を定量的に表示することが必要になる. ここで, 開水路網の連結構造を表す手段として, 第2章で示したグラフ理論の基礎的概念¹³⁾を利用して, 開水路網全体に対するシステム・モデルの定式化を行うことにする.

(1) 枝方程式

いま, 開水路網は, e 本の枝と n 個の節点から成る開路枝のみで構成される有向グラフで表現されているものとする.

まず, 単一水路の外部点の水量のみを用いて記述されている式(3.31)を, 開水路網の有向グラフの任意の枝に適用できるようにするために, つぎのような e 次元の列ベクトルを定義する.

$$z_{up} = \begin{bmatrix} z_1^1 \\ \vdots \\ z_1^e \end{bmatrix}, \quad z_{dn} = \begin{bmatrix} z_N^1 \\ \vdots \\ z_N^e \end{bmatrix}, \quad q_{up} = \begin{bmatrix} q_1^1 \\ \vdots \\ q_1^e \end{bmatrix}, \quad q_{dn} = \begin{bmatrix} q_N^1 \\ \vdots \\ q_N^e \end{bmatrix}. \quad (3.32)$$

ただし, z_{up} は枝上流端の水位を成分とする列ベクトル, z_{dn} は枝下流端の水位を成分とする列ベクトル, q_{up} は枝の上流側節点からの流出流量を成分とする列ベクトル, q_{dn} は枝の下流側節点への流入流量を成分とする列ベクトルである. また, 各ベクトル内の要素の上付き添字は枝の番号を, 下付き添字は場所を表す.

これらの列ベクトルの要素を用いると有向グラフの任意の枝 k について式(3.31)は,

$$\begin{bmatrix} P_{11}^k & P_{12}^k & P_{13}^k & P_{14}^k \\ P_{21}^k & P_{22}^k & P_{23}^k & P_{24}^k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_1^k \\ q_1^k \\ z_N^k \\ q_N^k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} G_{up}^k \\ G_{dn}^k \end{bmatrix}. \quad (3.33)$$

のように表示できる. ただし,

$$[P_{11}^k \ P_{12}^k] = A_1 - A_2 A^{-1} A_4, \quad [P_{13}^k \ P_{14}^k] = -A_2 A^{-1} A_5,$$

$$[P_{21}^k \ P_{22}^k] = -A_7 A^{-1} A_4, \quad [P_{23}^k \ P_{24}^k] = A_8 - A_7 A^{-1} A_5,$$

$$G_{up}^k = B_{up} - A_2 A^{-1} B_{int}, \quad G_{dn}^k = B_{dn} - A_7 A^{-1} B_{int}$$

である.

任意の枝 k について成立している式(3.33)を e 本全部の枝に適用するには, 式(3.33)を単純に重ね合わせて, つぎのように表示する.

$$\begin{bmatrix} P_{11}^1 & & & P_{12}^1 & & & & P_{13}^1 & & & & P_{14}^1 \\ P_{21}^1 & & & P_{22}^1 & & & & P_{23}^1 & & & & P_{24}^1 \\ & & \ddots & & & \ddots & & & & \ddots & & \\ & & & & & & & P_{11}^e & & & & P_{12}^e \\ & & & & & & & P_{21}^e & & & & P_{22}^e \\ & & & & & & & & & & & P_{13}^e \\ & & & & & & & & & & & P_{14}^e \\ & & & & & & & & & & & P_{23}^e \\ & & & & & & & & & & & P_{24}^e \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_{up} \\ q_{up} \\ z_{dn} \\ q_{dn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} G_{up}^1 \\ G_{dn}^1 \\ \vdots \\ G_{up}^e \\ G_{dn}^e \end{bmatrix}. \quad (3.34)$$

ここで, 式(3.34)左辺の係数行列を4つに分割し, それらを要素とする部分行列を用い, また, 右辺をベクトル G によって表示すれば, 式(3.34)は,

$$[P_1 \ P_2 \ P_3 \ P_4] \begin{bmatrix} z_{up} \\ q_{up} \\ z_{dn} \\ q_{dn} \end{bmatrix} = G \quad (3.35)$$

のように簡単に表示できる. ただし,

$$P_l = \begin{bmatrix} P_{1l}^1 \\ P_{2l}^1 \\ \vdots \\ P_{1l}^e \\ P_{2l}^e \end{bmatrix}, \quad (l = 1, \dots, 4)$$

である。

ところで、河川網の分流・合流点では流況が複雑であり、局所的なエネルギー損失があるが、これは非定常性の弱い通常の洪水などの流れでは、水深に比べて小さく無視される。このように仮定すると、分流・合流点条件としては水位連続の条件式を用いることができる。

これを有向グラフの節点に対して一般的に表現するため、ここで次のように n 個の節点で定義される水位を成分とする列ベクトルを導入する。

$$Z = \begin{bmatrix} Z_1 \\ \vdots \\ Z_n \end{bmatrix}. \quad (3.36)$$

先に定義した枝上・下流端の水位に関する列ベクトル z_{up} , z_{dn} は、節点水位ベクトル Z を用いて定められ、明らかに、

$$z_{up} = (D^+)^T Z, \quad z_{dn} = (D^-)^T Z \quad (3.37)$$

である。ただし、 D^+ は n 行 e 列の出連結行列、 D^- は n 行 e 列の入連結行列であり、上付き添字 T は転置を表す。式 (3.37) は節点での水位連続の条件式に他ならない。

そこで、式 (3.35) を展開して式 (3.37) を代入すれば、

$$\{P_1(D^+)^T + P_3(D^-)^T\}Z + P_2q_{up} + P_4q_{dn} = G \quad (3.38)$$

を得る。

式 (3.38) は単一水路の漸変非定常流の基礎方程式を基本にして、開水路網のトポロジー・モデルである有向グラフの枝すべてについて同時に成立すべき方程式として導かれたものである。本文ではこの式を枝方程式と呼ぶことにする。これは、Wood ら¹⁴⁾の影響関数を用いた展開法と基本的には同じものであるが、表現形式がより単純化されている点で異なる。

(2) 節点方程式

開水路網の水力計算を行うには、ソース、シンクに対する境界条件式、および、中間ノードに対する条件式が必要であるが、低平地河川網の非定常流を問題とする場合、普通、ソースには流量ハイドログラフ、シンクには水位ハイドログラフが境界条件式として与えられる。

また、中間ノードにおいては、水位の条件ならびに流量の条件が必要である。前者については、先述したように水位連続の条件式を用いているが、これはすでに枝方程式の中に組み込まれてい

る。一方、後者は流量の連続式であることは明白である。これらの条件式はすべて節点に対して記述されるものであるから、以後、節点方程式と呼ぶことにする。

いま、開水路網内の有向グラフの総節点数 n 個のうち、ソースは n_+ 個、中間ノードは n_0 個、シンクは n_- 個であるとし、ソース、中間ノード、シンクの順に 1 から n までの節点番号が付けられているとする。また、ある時刻にシステム外部から各節点に流出入する流量をつぎのような n 次元列ベクトルで定義する。

$$Q = \begin{bmatrix} Q_1 \\ \vdots \\ Q_n \end{bmatrix}. \quad (3.39)$$

ここで、枝の分割点を含むコントロール・ボリュームにおける貯留効果が無視できるものとするれば、任意の節点 j から流出する枝流量からその節点に流入する枝流量を引いた正味の流出流量は、システム外部より節点 j に流入する流量に等しくなければならない。このような各節点に対する流量連続の条件はまとめて、

$$D^+q_{up} - D^-q_{dn} = Q \quad (3.40)$$

で表される¹⁵⁾。

ここで、入・出連結行列、および節点で定義された水位、流量を成分とする列ベクトルをソース、中間ノード、シンクに関する部分行列および部分ベクトルに分割し、式 (3.41) のように表示する。

$$D^+ = \begin{bmatrix} D_+^+ \\ D_0^+ \\ D_-^+ \end{bmatrix}, \quad D^- = \begin{bmatrix} D_+^- \\ D_0^- \\ D_-^- \end{bmatrix}, \quad Z = \begin{bmatrix} Z_+ \\ Z_0 \\ Z_- \end{bmatrix}, \quad Q = \begin{bmatrix} Q_+ \\ Q_0 \\ Q_- \end{bmatrix}. \quad (3.41)$$

ただし、下付き添字の $+$ はソース、 0 は中間ノード、 $-$ はシンクを表す。ソース、中間ノード、シンクの特性を考慮して、

$$D_+^- = 0, \quad D_0^+ = 0, \quad Q_0 = 0 \quad (3.42)$$

であることに注意し、式 (3.41) を式 (3.40) に代入して展開すると、節点に関する流量連続の条件は、

$$D_+^+q_{up} = Q_+, \quad (3.43)$$

$$D_0^+q_{up} + D_0^-q_{dn} = 0, \quad (3.44)$$

$$D^- q_{dn} = -Q_- \quad (3.45)$$

のようになる。

さらに、前述したように、ソースとシンクの境界条件としてそれぞれ流量ハイドログラフ、水位ハイドログラフが与えられるとし、これらを時間の関数として、

$$Q_+ = f_+(t), \quad (3.46)$$

$$Z_- = f_-(t) \quad (3.47)$$

のように表す。ただし、 f_+ は時間 t の既知関数を成分に持つ n_+ 次元の列ベクトル、 f_- は時間 t の既知関数を成分に持つ n_- 次元の列ベクトルである。

式(3.46)を式(3.43)に代入すると、ソースに対して成立すべき式は、

$$D_+^+ q_{up} = f_+ \quad (3.48)$$

となる。一方、シンクに対しては、シンクへの流入流量 q_{dn} が求まれば、式(3.45)より Q_- が自動的に定められる。したがって、行列とベクトルにより表示された式(3.44)、(3.47)、(3.48)の3つの式が節点方程式ということになる。

(3) 行列解法

河川網非定常流のシステム・モデルは枝方程式(3.38)と節点方程式(3.44)、(3.47)、(3.48)で定式化されたが、これらはまとめて行列表示することができる。すなわち、式(3.38)の左辺第1項の係数行列に式(3.41)を代入して、式(3.42)を考慮し、ソース、中間ノード、シンクに関する成分に分ければ、式(3.49)のように変換できる。

$$\left(P_1(D^+)^T + P_3(D^-)^T \right) Z = P_1(D_+^+)^T Z_+ + \left(P_1(D_0^+)^T + P_3(D_0^-)^T \right) Z_0 + P_3(D_-)^T Z_- \quad (3.49)$$

したがって、節点の水位ベクトル Z 、節点から流出する枝流量のベクトル q_{up} 、節点に流入する枝流量のベクトル q_{dn} を変数とするシステム・モデルは、次のように行列方程式の形に定式

化される。

$$\begin{bmatrix} P_1(D^+)^T & P_1(D_0^+)^T + P_3(D_0^-)^T & P_3(D_-)^T & P_2 & P_4 \\ O & O & E & O & O \\ O & O & O & D_+^+ & O \\ O & O & O & D_0^+ & -D_0^- \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Z_+ \\ Z_0 \\ Z_- \\ q_{up} \\ q_{dn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} G \\ f_+ \\ f_- \\ 0 \end{bmatrix} \quad (3.50)$$

ただし、 O は零行列であり、 E は n_- 行 n_- 列の単位行列である。

上式において左辺の係数行列は $(2e+n)$ 行 $(2e+n)$ 列の正方非特異行列であるから、式(3.50)は行列演算によって容易に解くことができる。

このように、節点に関連する未知水理量が求められると、式(3.37)および式(3.30)を用いて各枝の内部点の未知水理量を計算することができる。

以上述べたことから明らかなように、行列演算による本解析手法は、節点と枝の内部点とを形式上分離して別々に計算しているため、開水路網全体を1つの単位として取り扱う場合よりも行列の次元が小さくなり、行列の巨大化を避けうるという利点を有している。

3.4 解析手順

以上述べた開水路網非定常流の数学的定式化に基づいて、具体的な解析手順を示せば次のようになる。

- (1) 開水路網の形態に対応する有向グラフから出連結行列 D^+ 、入連結行列 D^- を作成する。
- (2) 開水路網内すべての断面における時刻 $t=0$ の初期水位および初期流量を入力する。
- (3) 時刻 $t+\Delta t$ のソースの条件 f_+ 、シンクの条件 f_- を入力する。
- (4) 差分方程式(3.21)~(3.23)左辺の係数、および、右辺の定数を現時刻 t の既知水理量から計算する。
- (5) 係数行列 A 、 $A_1 \sim A_8$ 、および、定数項ベクトル B_{int} 、 B_{up} 、 B_{dn} を作成する。
- (6) e 本の枝に適用するため単純に重ね合わせて行列 $P_1 \sim P_4$ 、ベクトル G を作成する。
- (7) 式(3.50)を解くことにより、節点水位 Z および枝上・下流端流量 q_{up} 、 q_{dn} を計算する。
- (8) 式(3.37)により節点水位ベクトルを枝上・下流端の水位ベクトル z_{up} 、 z_{dn} に変換する。

- (9) 得られた枝上・下流端の水位および流量を成分とするベクトル z_{up} , z_{dn} , q_{up} , q_{dn} を式 (3.30) に代入し, 内部点の未知量を成分とするベクトルを求める.
- (10) 所定の計算時間が終了するまで (3)~(9) の計算手順を繰り返す.

3.5 結言

本章では, 特性曲線法を用いた場合について, 開水路網の非定常流計算が標準化されるようにシステム・モデルを行列とベクトルを用いて定式化した. 得られた結果をまとめれば以下のとおりである.

- (1) 実河川への適用を念頭におき, 距離に関する差分間隔が異なる場合について, Galerkin 法を用いた差分表示法を検討した.
- (2) 得られた差分方程式と節点における変数との関係を用いて各枝ごとに行列表示し, 枝方程式 (3.38) が得られ, これらのモデルが集中化されたことを示した.
- (3) 節点における流量連続の関係, および, ソース, シンクにおける境界条件式が節点方程式 (3.44), (3.47), (3.48) として簡単に定式化された.
- (4) 提示した行列解法は節点と枝内部とを分離して計算できるので, 行列の巨大化が避けられることに利点がある.
- (5) 開水路網の連結構造は, グラフの入・出連結行列を用いて一般的に表示されているので, 任意の河川網形状を取り扱うことが可能である.

参考文献

- 1) 岩佐義朗・井上和也・片山 猛: 開水路非定常流の数値計算法について, 京都大学防災研究所年報, 第19号B, pp.187-200, 1976.
- 2) Liggett, J. A. and Woolhiser, D. A. : Difference solutions of the shallow-water equation, *J. Eng. Mech. Div., Proc. ASCE*, Vol.93, EM2, pp.39-71, 1967.
- 3) Stoker, J. J. : Water wave, *Interscience Publishers, Inc., New York*, pp.451-509, 1957.
- 4) 井上和也: 開水路流れの数値解析, 水工学に関する夏期研修会講義集, Aコース, 土木学会, pp.A-6-1-26, 1980.
- 5) Ralston, A. and Wilf, H. S. : Mathematical method for digital computers, Vol.1, *John Wiley & Sons, Inc.*, pp.165-179, 1980.
- 6) 金本 満・常松芳昭: 変断面河道における洪水流の数値解析について, 広島大学工学部研究報告, 第38巻, 第1号, pp.105-115, 1989.
- 7) 土木学会編: 水理公式集(昭和46年改訂版), p.180, 1971.
- 8) 前掲4).
- 9) Gunaratnam, D. J. and Perkins, F. E. : Numerical solutions of unsteady flows in open channels, *Hydrodynamics Laboratory Report*, No.127, *Dep. of Civil Eng., Mass. Inst. of Technol.*, pp.106-121, 1970.
- 10) 棚橋隆彦: GSMAC-FEM, 数値流体力学の基礎とその応用, アイピーシー, pp.370-387, 1991.
- 11) 常松芳昭・金本 満: 開水路網非定常流の行列解析, 広島大学工学部研究報告, 第38巻, 第1号, pp.95-103, 1990.
- 12) 金本 満・常松芳昭: グラフ理論による河川網不定流の水理解析, 土木学会論文集, No.429/II-15, pp.67-75, 1991.
- 13) 小野寺力男: グラフ理論の基礎, 森北出版, 1968.
- 14) Wood, E. F., Harley, B. M. and Perkins, F. E. : Transient flow routing in channel networks, *Water Resour. Res.*, Vol.11, No.3, pp.423-430, 1975.

15) 前掲 8).

第4章 直接差分法による開水路網非定常流の解析方法

4.1 緒言

本章では、基礎方程式を直接、差分方程式に変換した場合の開水路網非定常流解析に対する統一的な定式化方法を検討する。

直接差分法は、現時刻 t における既知量と、次時刻 $t + \Delta t$ における未知量とを連立して計算する陰形式差分法と、現時刻 t における既知量から、次時刻 $t + \Delta t$ における未知量を計算する陽形式差分法に分けることができる。

前者の代表例としては、Crank-Nicholson 法、Preissmann 法、Amein 法などの差分スキームがあり、後者の代表例としては、Two-step Lax-Wendroff 法、Leap-Frog 法、Staggered 法、MacCormack 法など種々の方法が提案されている¹⁾。

本研究においては、陰形式の直接差分法として、単一開水路の非定常流解析に最もよく用いられる Preissmann の4点陰形式差分法²⁾を、陽形式差分法の例として、近年、山地河川の流況計算に用いられるようになった MacCormack 法³⁾を対象とした開水路網非定常流の系統的な水理解析法を検討する。

陰形式差分法の一つである Preissmann 法は、一つの差分格子に含まれる4点の水量により離散化する方法で、時間方向の重み係数 θ ($0 \leq \theta \leq 1$) を含んだ差分スキームである。 $\theta = 0.5$ のときは Amein の差分スキーム^{4, 5)}に一致する。重み係数が $0.5 \leq \theta \leq 1.0$ の範囲では数値解は安定であるが、 $\theta = 1.0$ に近づくほど数値解が平滑化されることが確認されている⁶⁾。Quinn ら⁷⁾は重み係数の範囲をさらに細分化して、 $\theta = 0.5$ で中立安定、 $0.5 < \theta < 0.6$ で弱安定、 $0.6 \leq \theta \leq 1.0$ で強安定であるとして、 $\theta = 0.75$ を採用している。また、 $\theta = 0.55 \sim 0.60$ 程度の値を採ることによって、段波解析に適用された例⁸⁾もある。

このように、Preissmann の陰形式差分法に対しては種々の検討が行われているが、一方では、常流を仮定した場合でも、上流端に2つの境界条件を与えれば解を得ることができるという水理

学的には矛盾を持った差分法である⁹⁾。しかし、時間の差分間隔を比較的大きくとれるため、演算処理時間を節約できること、水路の内部点と境界点を含む差分スキームを同形式に採ることができるため、境界における数値解の精度を内部点におけるそれと等しくできるとことなどの理由から、非定常流解析にはしばしば用いられている。

本手法は、開水路網の非定常流解析にも用いられているが^{10)–13)}、開水路網の形態を定量化した汎用的な解析手法を検討した例はきわめて少ない^{14, 15)}。

したがって、まず、本章の第2節では、陰形式の直接差分法の例として Preissmann の4点陰形式差分法により離散化された差分方程式を Newton-Raphson 法で解く場合の開水路網非定常流の系統的な解析手法を検討する。

一方、MacCormack 法は、不連続現象を含む流れの解析に対して有用であるため、近年、注目されている差分法である¹⁶⁾。本手法は、Two-step Lax-Wendroff 法同様に2次精度の差分スキームであるが、格子の中間点が計算の対象とならないため、境界条件を導入する場合に便利である¹⁷⁾。また、Burgers 方程式のステップ波解により Two-step Lax-Wendroff 法と比較した結果、MacCormack 法のほうが数値振動が小さいことが確認されている¹⁸⁾。これら両手法の数値振動は2次精度の差分スキームに特有の奇数微係数項の分散作用によるものであり、条件によっては数値解の不安定さが増大することになるので、高次の人工粘性項を導入することが推奨されている^{19, 20)}。

本手法は、差分スキームの特質上、河床変動の解析²¹⁾、山地河川の分岐・合流の流れの解析²²⁾などのように山地河道の水理解析に用いられているが、山地河川網システムを念頭においた統一的な解析手法が検討された例はきわめて少ない²³⁾。

そこで、本章の第3節では、陽形式の直接差分法の例として MacCormack 法を用いた場合の開水路網非定常流の系統的な解析手法を検討する。

4.2 4点陰形式差分法による解析方法

本節ではまず、Preissmann の4点陰形式差分法²⁴⁾により基礎方程式を離散化し、従来から用いられている一般的な行列表示式を示す。4点陰形式差分法では差分方程式が非線形の連立方程式となり、システム・モデルを前章のように簡単に集中化できないため、行列とベクトルの要素を入れ換えることによって、枝方程式を擬似的に集中化する方法を示す。さらに、前章と同様な節点方程式を導入し、枝方程式とともに行列・ベクトル表示して、開水路網内の未知水理量を一

度に計算する方法を示す。

4.2.1 単一開水路における基礎方程式の離散化

(1) 基礎方程式

本節では、広幅水路に対する漸変非定常流の基礎方程式として、第3章同様に流量と水位を未知量とする非保存形の連続方程式および運動方程式を用いる²⁵⁾。

$$B \frac{\partial z}{\partial t} + \frac{\partial q}{\partial x} = 0, \quad (4.1)$$

$$\frac{1}{gA} \left(\frac{\partial q}{\partial t} + 2v \frac{\partial q}{\partial x} \right) = -(1 - F_r^2) \frac{\partial z}{\partial x} + s_0 F_r^2 - s_f. \quad (4.2)$$

なお、比較のため保存形で表示した基礎方程式²⁶⁾が必要になる場合は、つぎの式を用いることとする。

$$\frac{\partial A}{\partial t} + \frac{\partial q}{\partial x} = 0, \quad (4.3)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{q}{A} \right) + \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{q^2}{2A^2} + gz \right) = -gs_f. \quad (4.4)$$

ここに、 t は時間、 x は下流方向に測った距離、 q は流量、 z は水位、 v は断面平均流速、 A は流水断面積、 B は水面幅、 s_0 は河床勾配、 g は重力加速度、 F_r は Froude 数 (v/c)、 c は微小じょう乱の伝播速度 ($\sqrt{gA/B}$) である。なお、 s_f は摩擦勾配であり、式(4.5)に示すような Manning 形式のものを用いた。

$$s_f = \frac{n_m^2 q |q|}{A^2 R^{4/3}}. \quad (4.5)$$

ただし、 n_m は Manning の粗度係数、 R は径深である。

(2) 基礎方程式の離散化

いま、前章同様に1本の開水路が、Fig.4.1に示すように $(N-1)$ 個の小区間に分割されているものとし、1、 N の断面を外部点、2、 \dots 、 $N-1$ の断面を内部点と呼ぶことにする。

Preissmann の4点陰形式差分法は、場所 x 、時間 t の任意の関数 $\alpha(x, t)$ に関して Fig.4.2に示すような差分格子をとり、 M 点に対してつぎのように差分化するものである。

$$\frac{\partial \alpha}{\partial x} \approx \frac{1}{\Delta x_i} \left\{ \theta (\alpha_{i+1}^{m+1} - \alpha_i^{m+1}) + (1 - \theta) (\alpha_{i+1}^m - \alpha_i^m) \right\},$$

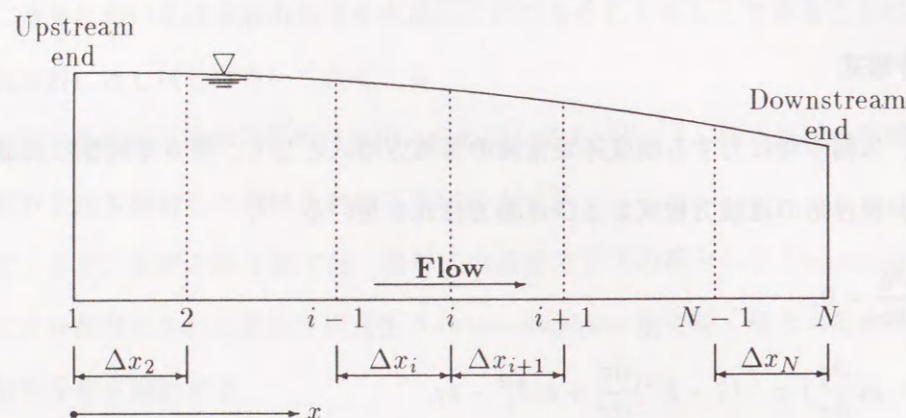


Fig.4.1 Definition sketch of a single channel reach.

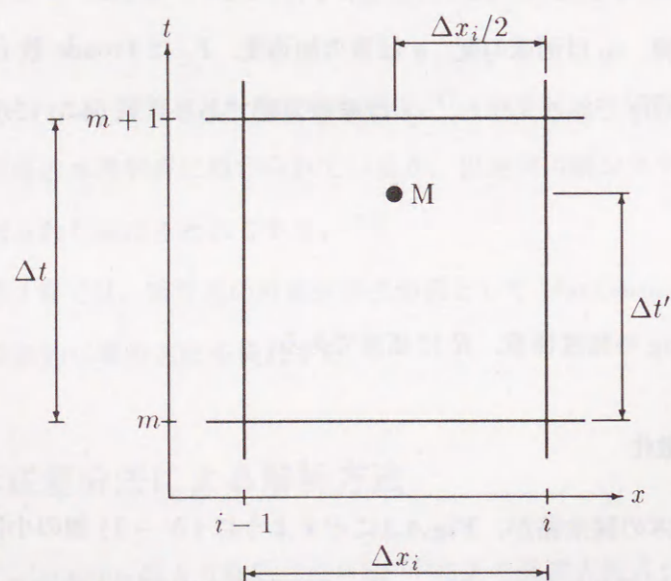


Fig.4.2 Definition of grid for 4-point Implicit Method.

$$\frac{\partial \alpha}{\partial t} \approx \frac{1}{2\Delta t} \{(\alpha_{i+1}^{m+1} + \alpha_i^{m+1}) - (\alpha_{i+1}^m + \alpha_i^m)\}, \quad (4.6)$$

$$\bar{\alpha} \approx \frac{1}{2} \{ \theta(\alpha_{i+1}^{m+1} + \alpha_i^{m+1}) + (1-\theta)(\alpha_{i+1}^m + \alpha_i^m) \}.$$

ここに、 θ は重み係数 ($= \Delta t' / \Delta t$) であり、一般に、 $0 \leq \theta \leq 1$ である。

式(4.6)を用いて、式(4.1)、(4.2)を差分化すると式(4.7)および式(4.8)のようになる。

$$\frac{1}{4\Delta t} (B_{i+1} + B_i) \{ (z_{i+1}^{m+1} + z_i^{m+1}) - (z_{i+1}^m + z_i^m) \} + \frac{1}{\Delta x_i} \{ \theta(q_{i+1}^{m+1} - q_i^{m+1}) + (1-\theta)(q_{i+1}^m - q_i^m) \} = 0, \quad (4.7)$$

$$\begin{aligned} & \frac{1}{4g\Delta t} \left\{ \theta \left(\left(\frac{1}{A} \right)_{i+1}^{m+1} + \left(\frac{1}{A} \right)_i^{m+1} \right) + (1-\theta) \left(\left(\frac{1}{A} \right)_{i+1}^m + \left(\frac{1}{A} \right)_i^m \right) \right\} \\ & \cdot \{ (q_{i+1}^{m+1} + q_i^{m+1}) - (q_{i+1}^m + q_i^m) \} \\ & + \frac{1}{g\Delta x_i} \left\{ \theta \left(\left(\frac{q}{A^2} \right)_{i+1}^{m+1} + \left(\frac{q}{A^2} \right)_i^{m+1} \right) + (1-\theta) \left(\left(\frac{q}{A^2} \right)_{i+1}^m + \left(\frac{q}{A^2} \right)_i^m \right) \right\} \\ & \cdot \{ \theta(q_{i+1}^{m+1} - q_i^{m+1}) + (1-\theta)(q_{i+1}^m - q_i^m) \} \\ & - \frac{1}{4g\Delta x_i} (B_{i+1}^2 + B_i^2) \left\{ \theta \left(\left(\frac{q}{A^3} \right)_{i+1}^{m+1} + \left(\frac{q}{A^3} \right)_i^{m+1} \right) + (1-\theta) \left(\left(\frac{q}{A^3} \right)_{i+1}^m + \left(\frac{q}{A^3} \right)_i^m \right) \right\} \\ & \cdot \{ \theta(z_{i+1}^{m+1} - z_i^{m+1}) + (1-\theta)(z_{i+1}^m - z_i^m) \} \\ & - \frac{s_0}{4g} (B_{i+1}^2 + B_i^2) \left\{ \theta \left(\left(\frac{q}{A^3} \right)_{i+1}^{m+1} + \left(\frac{q}{A^3} \right)_i^{m+1} \right) + (1-\theta) \left(\left(\frac{q}{A^3} \right)_{i+1}^m + \left(\frac{q}{A^3} \right)_i^m \right) \right\} \\ & + \frac{n_m^2}{2} \left\{ \theta \left(\left(\frac{q|q|}{A^2 R^{4/3}} \right)_{i+1}^{m+1} + \left(\frac{q|q|}{A^2 R^{4/3}} \right)_i^{m+1} \right) + (1-\theta) \left(\left(\frac{q|q|}{A^2 R^{4/3}} \right)_{i+1}^m + \left(\frac{q|q|}{A^2 R^{4/3}} \right)_i^m \right) \right\} = 0. \end{aligned} \quad (4.8)$$

また、式(4.3)、(4.4)を離散化すればつぎのようになる。

$$\frac{1}{2\Delta t} \{ (A_{i+1}^{m+1} + A_i^{m+1}) - (A_{i+1}^m + A_i^m) \} + \frac{1}{\Delta x_i} \{ \theta(q_{i+1}^{m+1} - q_i^{m+1}) + (1-\theta)(q_{i+1}^m - q_i^m) \} = 0, \quad (4.9)$$

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2\Delta t} \left\{ \left(\left(\frac{q}{A} \right)_{i+1}^{m+1} + \left(\frac{q}{A} \right)_i^{m+1} \right) - \left(\left(\frac{q}{A} \right)_{i+1}^m + \left(\frac{q}{A} \right)_i^m \right) \right\} \\ & + \frac{1}{\Delta x_i} \left\{ \theta \left(\left(\frac{q^2}{2A^2} \right)_{i+1}^{m+1} - \left(\frac{q^2}{2A^2} \right)_i^{m+1} \right) + (1-\theta) \left(\left(\frac{q^2}{2A^2} \right)_{i+1}^m - \left(\frac{q^2}{2A^2} \right)_i^m \right) \right\} \\ & + \frac{g}{\Delta x_i} \{ \theta(z_{i+1}^{m+1} - z_i^{m+1}) + (1-\theta)(z_{i+1}^m - z_i^m) \} \\ & + \frac{gn_m^2}{2} \left\{ \theta \left(\left(\frac{q|q|}{A^2 R^{4/3}} \right)_{i+1}^{m+1} + \left(\frac{q|q|}{A^2 R^{4/3}} \right)_i^{m+1} \right) + (1-\theta) \left(\left(\frac{q|q|}{A^2 R^{4/3}} \right)_{i+1}^m + \left(\frac{q|q|}{A^2 R^{4/3}} \right)_i^m \right) \right\} = 0. \end{aligned} \quad (4.10)$$

ただし、以下の諸量を用いている。

$$v_i = \frac{q_i}{A_i}, \quad F_{ri} = \sqrt{\frac{q_i^2 B_i}{g A_i^3}}, \quad s_{fi} = \frac{n_m^2 q_i |q_i|}{A_i^2 R_i^{4/3}}.$$

また、 $i = 1, \dots, N-1$ であり、上付きの添字 m は時刻を表す。

ところで、時刻 m の諸量は、初期条件あるいは前ステップの計算により求めることができるので、これらは既知量であり定数として扱える。そこで、記述の便宜上、式(4.7)、(4.8)を時刻を表す上付き添字 $m+1$ を省略して、それぞれ式(4.11)、(4.12)のように簡単に表示する。なお、式(4.9)、(4.10)も同様に表示できることは明らかである。

$$F_i(z_i, q_i, z_{i+1}, q_{i+1}) = 0, \quad (4.11)$$

$$G_i(z_i, q_i, z_{i+1}, q_{i+1}) = 0. \quad (4.12)$$

このように離散化された連続方程式(4.7)あるいは(4.9)、および運動方程式(4.8)あるいは(4.10)は、1本の開水路について合計 $2(N-1)$ 個存在する。これらは互いに従属関係にあり、第3章に示した特性曲線法による方法のように、外部点の未知水理量から内部点の未知水理量を陽的に求めることができないので、外部点の未知水理量を含む方程式のみを枝方程式にとることはできない。すなわち、離散化された連続方程式、運動方程式のすべてを枝方程式にとる必要がある。

ここで、以後の展開の便宜上、枝方程式を2つに分割し、外部点の未知水理量が含まれる枝方程式を外部枝方程式、内部点の未知水理量のみが含まれる枝方程式を内部枝方程式と呼ぶことにする。

枝方程式は $2N-2$ 個の差分方程式として定式化されているが、未知水理量は $2N$ 個であるから、すべての未知量を求めるためには、さらに残り2つの式が必要である。これらは前章で定義した節点方程式に対応するものであり、ソース、シンクに対する境界条件と中間ノードに対する条件式とがあるが、未だ、分流・合流点などの枝分割点の条件は導入していないので、ここでは仮に境界方程式と呼び、つぎのように表示しておく。

$$C_0(z_1, q_1) = 0, \quad (4.13)$$

$$C_N(z_N, q_N) = 0. \quad (4.14)$$

(3) Newton-Raphson 法による解法

式(4.11)~(4.14)は $2N$ 元の連立方程式であり、まとめて式(4.15)のように表示できる。

$$F(\mathbf{X}) = \mathbf{0}. \quad (4.15)$$

ここに、 F は枝方程式、および、境界方程式を表すベクトル関数、 \mathbf{X} は未知水理量を表すベクトルである。

明らかに式(4.15)は非線形であるから、ここではこれを解くのに反復法の一つである Newton-Raphson 法²⁷⁾を用いる。

式(4.15)を \mathbf{X} の近似値 \mathbf{X}^k の近傍で Taylor 展開し、2次以上の微小項を無視すれば式(4.16)のようになる。

$$F(\mathbf{X}) = F(\mathbf{X}^k) + \frac{\partial F(\mathbf{X}^k)}{\partial \mathbf{X}^k} (\mathbf{X} - \mathbf{X}^k) = \mathbf{0}. \quad (4.16)$$

ここで、 $\mathbf{X} = \mathbf{X}^{k+1}$ とすれば、Newton-Raphson 法の反復公式(4.17)を得る。

$$\frac{\partial F(\mathbf{X}^k)}{\partial \mathbf{X}^k} (\mathbf{X}^{k+1} - \mathbf{X}^k) = -F(\mathbf{X}^k). \quad (4.17)$$

ただし、 k は Newton-Raphson 法の反復回数 of 指標である。

一般的に、式(4.17)は未知量の修正ベクトル $\Delta \mathbf{X} (= \mathbf{X}^{k+1} - \mathbf{X}^k)$ を用いて、

$$\frac{\partial F(\mathbf{X}^k)}{\partial \mathbf{X}^k} \Delta \mathbf{X} = -F(\mathbf{X}^k) \quad (4.18)$$

とし、連立一次方程式の解法により $\Delta \mathbf{X}$ を計算して、 $k+1$ 回目の未知量ベクトルを求めることになる。

さらに、つぎのような収束条件を満たしたときの未知量 \mathbf{X}^{k+1} を次時刻の水理量とする。

$$\|\Delta \mathbf{X}\| \leq \varepsilon. \quad (4.19)$$

ただし、 ε は収束判定値である。

式(4.18)をより具体的に行列表示すれば、式(4.20)のようになる。

$$\begin{array}{ccccc}
 \begin{matrix} e_0 & f_0 & & & \\ a_1 & b_1 & c_1 & d_1 & \\ e_1 & f_1 & g_1 & h_1 & \\ & & \dots & \dots & \\ & & & a_i & b_i & c_i & d_i \\ & & & e_i & f_i & g_i & h_i \\ & & & & & \dots & \dots \\ & & & & & & a_{N-1} & b_{N-1} & c_{N-1} & d_{N-1} \\ & & & & & & e_{N-1} & f_{N-1} & g_{N-1} & h_{N-1} \\ & & & & & & & g_N & h_N \end{matrix} & \begin{matrix} \Delta z_1 \\ \Delta q_1 \\ \vdots \\ \vdots \\ \Delta z_i \\ \Delta q_i \\ \vdots \\ \vdots \\ \Delta z_N \\ \Delta q_N \end{matrix} & \\
 = [-C_0 & -F_1 & -G_1 & \dots & -F_i & -G_i & \dots & -F_{N-1} & -G_{N-1} & -C_N]^T. & (4.20)
 \end{array}$$

ただし、

$$e_0 = \frac{\partial C_0}{\partial z_1}, \quad f_0 = \frac{\partial C_0}{\partial q_1}, \quad g_N = \frac{\partial C_N}{\partial z_N}, \quad h_N = \frac{\partial C_N}{\partial q_N},$$

$$a_i = \frac{\partial F_i}{\partial z_i}, \quad b_i = \frac{\partial F_i}{\partial q_i}, \quad c_i = \frac{\partial F_i}{\partial z_{i+1}}, \quad d_i = \frac{\partial F_i}{\partial q_{i+1}},$$

$$e_i = \frac{\partial G_i}{\partial z_i}, \quad f_i = \frac{\partial G_i}{\partial q_i}, \quad g_i = \frac{\partial G_i}{\partial z_{i+1}}, \quad h_i = \frac{\partial G_i}{\partial q_{i+1}}$$

である。

これらの微係数をより具体的に計算すればつぎのようになる。非保存形の式(4.1)、(4.2)につ

いては、

$$\frac{\partial F_i}{\partial z_i} = \frac{1}{4\Delta t}(B_{i+1} + B_i), \quad \frac{\partial F_i}{\partial z_{i+1}} = -\frac{1}{4\Delta t}(B_{i+1} + B_i),$$

$$\frac{\partial F_i}{\partial q_i} = -\frac{\theta}{\Delta x_i}, \quad \frac{\partial F_i}{\partial q_{i+1}} = \frac{\theta}{\Delta x_i},$$

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial G_i}{\partial z_i} &= -\frac{\theta}{4g\Delta t} \left(\frac{1}{A^2}\right)_i^{m+1} \left(\frac{\partial A}{\partial z}\right)_i^{m+1} \{(q_{i+1}^{m+1} + q_i^{m+1}) - (q_{i+1}^m + q_i^m)\} \\
 &\quad - \frac{2\theta}{g\Delta x_i} \left(\frac{q}{A^3}\right)_i^{m+1} \left(\frac{\partial A}{\partial z}\right)_i^{m+1} \{\theta(q_{i+1}^{m+1} - q_i^{m+1}) + (1-\theta)(q_{i+1}^m - q_i^m)\} - \frac{\theta}{\Delta x_i}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &+ \frac{3\theta}{4g\Delta x_i} (B_{i+1}^2 + B_i^2) \left(\frac{q}{A^4}\right)_i^{m+1} \left(\frac{\partial A}{\partial z}\right)_i^{m+1} \{\theta(z_{i+1}^{m+1} - z_i^{m+1}) + (1-\theta)(z_{i+1}^m - z_i^m)\} \\
 &+ \frac{\theta}{4g\Delta x_i} (B_{i+1}^2 + B_i^2) \left(\frac{\partial A}{\partial z}\right)_i^{m+1} \left\{ \theta \left(\left(\frac{q}{A^3}\right)_{i+1}^{m+1} - \left(\frac{q}{A^3}\right)_i^{m+1} \right) + (1-\theta) \left(\left(\frac{q}{A^3}\right)_{i+1}^m - \left(\frac{q}{A^3}\right)_i^m \right) \right\} \\
 &+ \frac{3\theta s_0}{4g} (B_{i+1}^2 + B_i^2) \left(\frac{q}{A^4}\right)_i^{m+1} \left(\frac{\partial A}{\partial z}\right)_i^{m+1} - n_m^2 \theta \left\{ \left(\frac{q|q|}{A^3 R^{4/3}}\right)_i^{m+1} + \frac{2}{3} \left(\frac{q|q|}{A^2 R^{7/3}}\right)_i^{m+1} \right\},
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial G_i}{\partial z_{i+1}} &= -\frac{\theta}{4g\Delta t} \left(\frac{1}{A^2}\right)_{i+1}^{m+1} \left(\frac{\partial A}{\partial z}\right)_{i+1}^{m+1} \{(q_{i+1}^{m+1} + q_i^{m+1}) - (q_{i+1}^m + q_i^m)\} \\
 &\quad - \frac{2\theta}{g\Delta x_i} \left(\frac{q}{A^3}\right)_{i+1}^{m+1} \left(\frac{\partial A}{\partial z}\right)_{i+1}^{m+1} \{\theta(q_{i+1}^{m+1} - q_i^{m+1}) + (1-\theta)(q_{i+1}^m - q_i^m)\} + \frac{\theta}{\Delta x_i} \\
 &+ \frac{3\theta}{4g\Delta x_i} (B_{i+1}^2 + B_i^2) \left(\frac{q}{A^4}\right)_{i+1}^{m+1} \left(\frac{\partial A}{\partial z}\right)_{i+1}^{m+1} \{\theta(z_{i+1}^{m+1} - z_i^{m+1}) + (1-\theta)(z_{i+1}^m - z_i^m)\} \\
 &\quad - \frac{\theta}{4g\Delta x_i} (B_{i+1}^2 + B_i^2) \left(\frac{\partial A}{\partial z}\right)_{i+1}^{m+1} \left\{ \theta \left(\left(\frac{q}{A^3}\right)_{i+1}^{m+1} - \left(\frac{q}{A^3}\right)_i^{m+1} \right) + (1-\theta) \left(\left(\frac{q}{A^3}\right)_{i+1}^m - \left(\frac{q}{A^3}\right)_i^m \right) \right\} \\
 &+ \frac{3\theta s_0}{4g} (B_{i+1}^2 + B_i^2) \left(\frac{q}{A^4}\right)_{i+1}^{m+1} \left(\frac{\partial A}{\partial z}\right)_{i+1}^{m+1} - n_m^2 \theta \left\{ \left(\frac{q|q|}{A^3 R^{4/3}}\right)_{i+1}^{m+1} + \frac{2}{3} \left(\frac{q|q|}{A^2 R^{7/3}}\right)_{i+1}^{m+1} \right\},
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial G_i}{\partial q_i} &= \frac{1}{4g\Delta t} \left\{ \theta \left(\left(\frac{1}{A}\right)_{i+1}^{m+1} + \left(\frac{1}{A}\right)_i^{m+1} \right) + (1-\theta) \left(\left(\frac{1}{A}\right)_{i+1}^m + \left(\frac{1}{A}\right)_i^m \right) \right\} \\
 &\quad + \frac{\theta}{g\Delta x_i} \left(\frac{1}{A^2}\right)_i^{m+1} \{\theta(q_{i+1}^{m+1} + q_i^{m+1}) + (1-\theta)(q_{i+1}^m + q_i^m)\} \\
 &\quad - \frac{\theta}{g\Delta x_i} \left\{ \theta \left(\left(\frac{q}{A^2}\right)_{i+1}^{m+1} + \left(\frac{q}{A^2}\right)_i^{m+1} \right) + (1-\theta) \left(\left(\frac{q}{A^2}\right)_{i+1}^m + \left(\frac{q}{A^2}\right)_i^m \right) \right\} \\
 &\quad - \frac{\theta}{4g\Delta x_i} (B_{i+1} + B_i) \left(\frac{1}{A^3}\right)_i^{m+1} \{\theta(q_{i+1}^{m+1} + q_i^{m+1}) + (1-\theta)(q_{i+1}^m + q_i^m)\} \\
 &\quad + \frac{\theta s_0}{4g} (B_{i+1} + B_i) \left(\frac{1}{A^3}\right)_i^{m+1} - \frac{n_m^2 \theta}{2} \left(\frac{2|q|}{A^2 R^{4/3}}\right)_i^{m+1},
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial G_i}{\partial q_{i+1}} &= \frac{1}{4g\Delta t} \left\{ \theta \left(\left(\frac{1}{A}\right)_{i+1}^{m+1} + \left(\frac{1}{A}\right)_i^{m+1} \right) + (1-\theta) \left(\left(\frac{1}{A}\right)_{i+1}^m + \left(\frac{1}{A}\right)_i^m \right) \right\} \\
 &\quad + \frac{\theta}{g\Delta x_i} \left(\frac{1}{A^2}\right)_{i+1}^{m+1} \{\theta(q_{i+1}^{m+1} + q_i^{m+1}) + (1-\theta)(q_{i+1}^m + q_i^m)\} \\
 &\quad + \frac{\theta}{g\Delta x_i} \left\{ \theta \left(\left(\frac{q}{A^2}\right)_{i+1}^{m+1} + \left(\frac{q}{A^2}\right)_i^{m+1} \right) + (1-\theta) \left(\left(\frac{q}{A^2}\right)_{i+1}^m + \left(\frac{q}{A^2}\right)_i^m \right) \right\} \\
 &\quad - \frac{\theta}{4g\Delta x_i} (B_{i+1} + B_i) \left(\frac{1}{A^3}\right)_{i+1}^{m+1} \{\theta(q_{i+1}^{m+1} + q_i^{m+1}) + (1-\theta)(q_{i+1}^m + q_i^m)\} \\
 &\quad + \frac{\theta s_0}{4g} (B_{i+1} + B_i) \left(\frac{1}{A^3}\right)_{i+1}^{m+1} - \frac{n_m^2 \theta}{2} \left(\frac{2|q|}{A^2 R^{4/3}}\right)_{i+1}^{m+1}.
 \end{aligned}$$

一方、保存形の式(4.3)、(4.4)を用いた場合にはつぎのようになる。

$$\frac{\partial F_i}{\partial z_i} = \frac{1}{2\Delta t} \left(\frac{\partial A}{\partial z}\right)_i^{m+1}, \quad \frac{\partial F_i}{\partial z_{i+1}} = \frac{1}{2\Delta t} \left(\frac{\partial A}{\partial z}\right)_{i+1}^{m+1},$$

$$\frac{\partial F_i}{\partial z_i} = -\frac{\theta}{\Delta x_i}, \quad \frac{\partial F_i}{\partial q_{i+1}} = \frac{\theta}{\Delta x_i},$$

$$\frac{\partial G_i}{\partial z_i} = -\frac{1}{2\Delta t} \left(\frac{q}{A^2}\right)_i^{m+1} \left(\frac{\partial A}{\partial z}\right)_i^{m+1} + \frac{\theta}{\Delta x_i} \left(\frac{q^2}{A^3}\right)_i^{m+1} \left(\frac{\partial A}{\partial z}\right)_i^{m+1},$$

$$-\frac{g\theta}{\Delta x_i} - gn_m^2 \theta \left(\frac{q|q|}{A^3 R^{4/3}}\right)_i^{m+1} - \frac{2gn_m^2 \theta}{3} \left(\frac{q|q|}{A^2 R^{7/3}}\right)_i^{m+1},$$

$$\frac{\partial G_i}{\partial z_{i+1}} = -\frac{1}{2\Delta t} \left(\frac{q}{A^2}\right)_{i+1}^{m+1} \left(\frac{\partial A}{\partial z}\right)_{i+1}^{m+1} - \frac{\theta}{\Delta x_i} \left(\frac{q^2}{A^3}\right)_{i+1}^{m+1} \left(\frac{\partial A}{\partial z}\right)_{i+1}^{m+1}$$

$$+ \frac{g\theta}{\Delta x_i} - gn_m^2 \theta \left(\frac{q|q|}{A^3 R^{4/3}}\right)_{i+1}^{m+1} - \frac{2gn_m^2 \theta}{3} \left(\frac{q|q|}{A^2 R^{7/3}}\right)_{i+1}^{m+1},$$

$$\frac{\partial G_i}{\partial q_i} = \frac{1}{2\Delta t} \left(\frac{1}{A}\right)_i^{m+1} - \frac{\theta}{\Delta x_i} \left(\frac{q}{A^2}\right)_i^{m+1} + \frac{gn_m^2 \theta}{2} \left(\frac{q}{A^2 R^{4/3}}\right)_i^{m+1},$$

$$\frac{\partial G_i}{\partial q_{i+1}} = \frac{1}{2\Delta t} \left(\frac{1}{A}\right)_{i+1}^{m+1} + \frac{\theta}{\Delta x_i} \left(\frac{q}{A^2}\right)_{i+1}^{m+1} + \frac{gn_m^2 \theta}{2} \left(\frac{q}{A^2 R^{4/3}}\right)_{i+1}^{m+1}.$$

4.2.2 開水路網のシステム・モデルの定式化と解法

前節で示した単一開水路における非定常流の差分方程式は互いに従属関係にあり、そのままではすべての差分方程式を枝方程式としなければならないので、システム・モデルの集中化は困難である。そこで、ここでは先に定義した外部枝方程式と内部枝方程式とを別々に行列表示することによってモデルを擬似的に集中化し²⁸⁾、汎用的な開水路網非定常流のシステム・モデルの定式化方法を示す。

(1) 開水路網に対する方程式数

前節の考察から、 $(N-1)$ 個の小区間に分割された1本の開水路に対して、すべての未知水量を求めるには、 $2N$ 個の方程式が必要である。これらの方程式群を e 本の枝、 n 個の節点で構成される開水路網に適用する場合を考える。

いま、 e 本の枝は $k=1, \dots, e$ のように番号付けされているとし、任意の枝 k の断面数を N_k とすれば、開水路網内の未知水量を求めるために必要となる方程式の数 L_1 は、

$$L_1 = \sum_{k=1}^e (2N_k) \quad (4.21)$$

となる。

このうち、各枝の上・下流端にはそれぞれ一つずつの外部点が存在するため、式(4.21)に示した方程式のなかには $2e$ 個の境界方程式が含まれる。これらの境界方程式は、ソース、シンクと与えられる流量あるいは水位のハイドログラフ、および、中間ノードにおける水位、流量の連続条件式であることは先述したとおりである。境界方程式のうち、中間ノードにおける流量連続の条

件式は、各々の中間ノードに対して一つずつ存在するものであるから、ソース、シンクの条件式と中間ノードにおける流量連続の式を合わせると、開水路網の節点数、すなわち n 個になる。したがって、残りの境界方程式である中間ノードにおける水位連続の条件式の数 L_2 は、

$$L_2 = 2e - n \quad (4.22)$$

となる。

ところで、前章で導入したように枝の上・下流端で定義された水位を節点の定義量に変換することができる。枝方程式のなかに節点における水位連続の条件を自動的に組み込むことができる。このような場合には、開水路網全体の未知水量を求めるために必要な方程式数 L は、

$$L = L_1 - L_2 = \sum_{k=1}^e (2N_k) - (2e - n) \quad (4.23)$$

となる。

式(4.23)はさらにつぎのように書き換えることができる。

$$L = \sum_{k=1}^e (2N_k - 2) + n. \quad (4.24)$$

式(4.24)の右辺第1項は、開水路網における枝方程式の総数を表し、第2項は節点方程式(シンク、ソースに与えられるハイドログラフ、および、中間ノードにおける流量連続の式)の総数を表している。このことは、本来、連立方程式として定式化された式(4.20)を枝方程式と節点方程式に分離して表示するためには、枝上・下流端で定義される水位を節点で定義される水位に変換すれば良いことを示している。

(2) 枝方程式

前項で考察したように、ここでは枝方程式のなかに中間ノードにおける水位連続の条件が組み込めるような行列表示法を検討する。

いま、単一開水路に対して導かれた式(4.20)のうち枝方程式のみを取り出して行列表示すれば、

$$\begin{bmatrix} a_1 & b_1 & c_1 & d_1 \\ e_1 & f_1 & g_1 & h_1 \\ & & \ddots & \ddots \\ & & & \ddots & \ddots \\ & & & & a_i & b_i & c_i & d_i \\ & & & & e_i & f_i & g_i & h_i \\ & & & & & & \ddots & \ddots \\ & & & & & & & \ddots & \ddots \\ & & & & & & & & a_{N-1} & b_{N-1} & c_{N-1} & d_{N-1} \\ & & & & & & & & e_{N-1} & f_{N-1} & g_{N-1} & h_{N-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta z_1 \\ \Delta q_1 \\ \vdots \\ \Delta z_i \\ \Delta q_i \\ \vdots \\ \Delta z_N \\ \Delta q_N \end{bmatrix} \\ = [-F_1 \quad -G_1 \quad \cdots \quad -F_i \quad -G_i \quad \cdots \quad -F_{N-1} \quad -G_{N-1}]^T \quad (4.25)$$

のようになる。

節点における水位連続の条件式は、外部枝方程式に含まれるものであるから、ここで、外部枝方程式と内部枝方程式とが別々に行列・ベクトル表示できるように、式(4.25)の行列・ベクトル内の要素を入れ替えてつぎのように表示する。

$$\begin{bmatrix} a_1 & b_1 & 0 & 0 & c_1 & 0 & \cdots & 0 & d_1 & 0 & \cdots & 0 \\ e_1 & f_1 & 0 & 0 & g_1 & 0 & \cdots & 0 & h_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & a_{N-1} & b_{N-1} & 0 & \cdots & 0 & c_{N-1} & 0 & \cdots & 0 & d_{N-1} \\ 0 & 0 & e_{N-1} & f_{N-1} & 0 & \cdots & 0 & g_{N-1} & 0 & \cdots & 0 & h_{N-1} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a_2 & b_2 & & c_2 & d_2 & & & \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & e_2 & f_2 & & g_2 & h_2 & & & \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \ddots & & & \ddots & & & \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & & \ddots & & \ddots & & & \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & & & a_{N-1} & b_{N-1} & & c_{N-1} & d_{N-1} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & e_{N-1} & f_{N-1} & & g_{N-1} & h_{N-1} & & & \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta z_1 \\ \Delta q_1 \\ \Delta z_N \\ \Delta q_N \\ \Delta z_2 \\ \vdots \\ \Delta z_{N-1} \\ \Delta q_2 \\ \vdots \\ \Delta q_{N-1} \end{bmatrix} \\ = [-F_1 \quad -G_1 \quad -F_{N-1} \quad -G_{N-1} \quad -F_2 \quad -G_2 \quad \cdots \quad -F_{N-2} \quad -G_{N-2}]^T \quad (4.26)$$

ここで、式(4.26)を部分行列および部分ベクトルを用いて、任意の枝 k に対して式(4.27)のよ

うに表示する。

$$\begin{bmatrix} U_1^k & U_2^k & O & O & U_5^k & U_6^k \\ O & O & U_3^k & U_4^k & U_7^k & U_8^k \\ O & O & O & O & U_9^k & U_{10}^k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta z_1^k \\ \Delta q_1^k \\ \Delta z_N^k \\ \Delta q_N^k \\ \Delta z_{int}^k \\ \Delta q_{int}^k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -B_{up}^k \\ -B_{dn}^k \\ -B_{int}^k \end{bmatrix} \quad (4.27)$$

ただし、

$$U_1^k = \begin{bmatrix} a_1 \\ e_1 \end{bmatrix}, \quad U_2^k = \begin{bmatrix} b_1 \\ f_1 \end{bmatrix}, \quad U_3^k = \begin{bmatrix} a_{N-1} \\ e_{N-1} \end{bmatrix}, \quad U_4^k = \begin{bmatrix} b_{N-1} \\ f_{N-1} \end{bmatrix},$$

$$U_5^k = \begin{bmatrix} c_1 & 0 & \cdots & 0 \\ g_1 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}, \quad U_6^k = \begin{bmatrix} d_1 & 0 & \cdots & 0 \\ h_1 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix},$$

$$U_7^k = \begin{bmatrix} 0 & \cdots & 0 & c_{N-1} \\ 0 & \cdots & 0 & g_{N-1} \end{bmatrix}, \quad U_8^k = \begin{bmatrix} 0 & \cdots & 0 & d_{N-1} \\ 0 & \cdots & 0 & h_{N-1} \end{bmatrix},$$

$$U_9^k = \begin{bmatrix} a_2 & b_2 \\ e_2 & f_2 \\ \vdots & \ddots \\ a_{N-2} & b_{N-2} \\ e_{N-2} & f_{N-2} \end{bmatrix}, \quad U_{10}^k = \begin{bmatrix} c_2 & d_2 \\ g_2 & h_2 \\ \vdots & \ddots \\ c_{N-2} & d_{N-2} \\ g_{N-2} & h_{N-2} \end{bmatrix},$$

$$\Delta z_{int}^k = \begin{bmatrix} \Delta z_2 \\ \vdots \\ \Delta z_{N-1} \end{bmatrix}, \quad \Delta q_{int}^k = \begin{bmatrix} \Delta q_2 \\ \vdots \\ \Delta q_{N-1} \end{bmatrix},$$

$$B_{up}^k = \begin{bmatrix} F_1 \\ G_1 \end{bmatrix}, \quad B_{dn}^k = \begin{bmatrix} F_{N-1} \\ G_{N-1} \end{bmatrix}, \quad B_{int}^k = \begin{bmatrix} F_2 \\ G_2 \\ \vdots \\ F_{N-2} \\ G_{N-2} \end{bmatrix}$$

であり、 O は零行列である。

式(4.27)を e 本の枝を持つ開水路網に適用するには、単純に重ね合わせて次のように行列表示する。

$$\begin{bmatrix} P_1 & P_2 & O & O & P_5 & P_6 \\ O & O & P_3 & P_4 & P_7 & P_8 \\ O & O & O & O & P_9 & P_{10} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta z_{up} \\ \Delta q_{up} \\ \Delta z_{dn} \\ \Delta q_{dn} \\ \Delta z_{int} \\ \Delta q_{int} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -G_{up} \\ -G_{dn} \\ -G_{int} \end{bmatrix}. \quad (4.28)$$

ただし、

$$P_l = \begin{bmatrix} U_l^1 & & \\ & \ddots & \\ & & U_l^e \end{bmatrix}, \quad (l = 1, \dots, 10),$$

$$\Delta z_{up} = \begin{bmatrix} \Delta z_1^1 \\ \vdots \\ \Delta z_1^e \end{bmatrix}, \quad \Delta z_{dn} = \begin{bmatrix} \Delta z_N^1 \\ \vdots \\ \Delta z_N^e \end{bmatrix}, \quad \Delta q_{up} = \begin{bmatrix} \Delta q_1^1 \\ \vdots \\ \Delta q_1^e \end{bmatrix}, \quad \Delta q_{dn} = \begin{bmatrix} \Delta q_N^1 \\ \vdots \\ \Delta q_N^e \end{bmatrix},$$

$$\Delta z_{int} = \begin{bmatrix} \Delta z_{int}^1 \\ \vdots \\ \Delta z_{int}^e \end{bmatrix}, \quad \Delta q_{int} = \begin{bmatrix} \Delta q_{int}^1 \\ \vdots \\ \Delta q_{int}^e \end{bmatrix},$$

$$G_{up} = \begin{bmatrix} B_{up}^1 \\ \vdots \\ B_{up}^e \end{bmatrix}, \quad G_{dn} = \begin{bmatrix} B_{dn}^1 \\ \vdots \\ B_{dn}^e \end{bmatrix}, \quad G_{int} = \begin{bmatrix} B_{int}^1 \\ \vdots \\ B_{int}^e \end{bmatrix}$$

であり、 O は零行列、各要素の上付き添字は枝の番号を表す。また、 Δz_{up} 、 Δz_{dn} は、それぞれ各枝の上・下流端の水位を成分とするベクトルの修正量、 Δq_{up} 、 Δq_{dn} は、同様に各枝の上・下流端の流量を成分とするベクトルの修正量である。式(4.28)を展開すると、

$$P_1 \Delta z_{up} + P_2 \Delta q_{up} + P_5 \Delta z_{int} + P_6 \Delta q_{int} = -G_{up}, \quad (4.29)$$

$$P_3 \Delta z_{dn} + P_4 \Delta q_{dn} + P_7 \Delta z_{int} + P_8 \Delta q_{int} = -G_{dn}, \quad (4.30)$$

$$P_9 \Delta z_{int} + P_{10} \Delta q_{int} = -G_{int} \quad (4.31)$$

のようになる。

ところで、節点における水位の連続条件は、第3章で述べたとおり、各枝の上・下流端で定義される水位ベクトル z_{up} 、 z_{dn} 、および、節点で定義される水位ベクトル Z を用いると、

$$z_{up} = (D^+)^T Z, \quad z_{dn} = (D^-)^T Z \quad (4.32)$$

のように記述できる。ただし、 D^+ は出連結行列、 D^- は入連結行列、 T は転置を表す。

さらに、式(4.32)より、Newton-Raphson法を用いる場合の逐次修正量に関してつぎのような関係式が成立する。

$$\Delta z_{up} = (D^+)^T \Delta Z, \quad \Delta z_{dn} = (D^-)^T \Delta Z. \quad (4.33)$$

ここで、式(4.33)を枝上・下流端の未知水理量を含む外部枝方程式(4.29)、(4.30)に代入すれば、以下の式が得られる。

$$P_1 (D^+)^T \Delta Z + P_2 \Delta q_{up} + P_5 \Delta z_{int} + P_6 \Delta q_{int} = -G_{up}, \quad (4.34)$$

$$P_3 (D^-)^T \Delta Z + P_4 \Delta q_{dn} + P_7 \Delta z_{int} + P_8 \Delta q_{int} = -G_{dn}. \quad (4.35)$$

節点における水位連続の条件を考慮した外部枝方程式(4.34)、(4.35)は、内部点の未知量と外部点の未知量が含まれているものの、内部枝方程式(4.31)とは形式上分離されている。このような表示形式を以後、擬似的に集中化されたモデルと呼ぶことにする。

以上より、内部点の未知水理量のみで記述されている内部枝方程式(4.31)、および、枝上・下流端の未知水理量を含む外部枝方程式(4.34)、(4.35)が定式化され e 本の枝を持つ開水路網に対する枝方程式が得られた。

(3) 節点方程式

ここでは、先に定義した境界方程式を節点方程式として定式化するが、開水路網の節点(n 個)は、 n_+ 個のソース、 n_0 個の中間ノード、 n_- 個のシンクにより構成されているものとする。

前章同様に、入・出連結行列 D^+ 、 D^- 、節点水位ベクトル Z 、節点流量ベクトル Q をソース(+), 中間ノード(0), シンク(-)に関する要素に分割しつぎのようなベクトルを定義する。

$$D^+ = \begin{bmatrix} D_+^+ \\ D_0^+ \\ D_-^+ \end{bmatrix}, \quad D^- = \begin{bmatrix} D_+^- \\ D_0^- \\ D_-^- \end{bmatrix}, \quad Z = \begin{bmatrix} Z_+ \\ Z_0 \\ Z_- \end{bmatrix}, \quad Q = \begin{bmatrix} Q_+ \\ Q_0 \\ Q_- \end{bmatrix}. \quad (4.36)$$

前章の検討結果をそのまま用いることとすれば、節点方程式は式(4.37)~(4.39)のようになる。

$$D_+^+ \mathbf{q}_{up} = \mathbf{f}_+(t), \quad (4.37)$$

$$D_0^+ \mathbf{q}_{up} - D_0^- \mathbf{q}_{dn} = \mathbf{0}, \quad (4.38)$$

$$\mathbf{Z}_- = \mathbf{f}_-(t), \quad (4.39)$$

ここに、 \mathbf{f}_+ はソースに与えられる流量ハイドログラフ、 \mathbf{f}_- はシンクに与えられる水位ハイドログラフである。

これらの節点方程式を Newton-Raphson 法の適用に便利なようにつぎのように置く。

$$\mathbf{C}_+ = D_+^+ \mathbf{q}_{up} - \mathbf{f}_+, \quad (4.40)$$

$$\mathbf{C}_0 = D_0^+ \mathbf{q}_{up} - D_0^- \mathbf{q}_{dn}, \quad (4.41)$$

$$\mathbf{C}_- = \mathbf{Z}_- - \mathbf{f}_-, \quad (4.42)$$

式(4.40)~(4.42)を未知水量の近似値近傍で Taylor 展開し、2次以上の微小項を無視すれば、

$$D_+^+ \Delta \mathbf{q}_{up} = -\mathbf{C}_+, \quad (4.43)$$

$$D_0^+ \Delta \mathbf{q}_{up} - D_0^- \Delta \mathbf{q}_{dn} = -\mathbf{C}_0, \quad (4.44)$$

$$E \Delta \mathbf{Z}_- = -\mathbf{C}_-, \quad (4.45)$$

が得られる。ただし、 E は n_- 行 n_- 列単位行列である。

式(4.43)~(4.45)は n 個の方程式を構成し、補正流量、補正水位に関する節点方程式を表している。

(4) 行列解法

前節で示した開水路網の枝方程式および節点方程式は単純に結合できて、一つにまとめて行列表示することができる。

外部枝方程式(4.34)、(4.35)に式(4.36)を代入し、節点の特性を考慮すれば、

$$P_1(D_+^+)^T \Delta \mathbf{Z}_+ + P_1(D_0^+)^T \Delta \mathbf{Z}_0 + P_2 \Delta \mathbf{q}_{up} + P_5 \Delta \mathbf{z}_{int} + P_6 \Delta \mathbf{q}_{int} = -\mathbf{G}_{up}, \quad (4.46)$$

$$P_3(D_0^-)^T \Delta \mathbf{Z}_0 + P_3(D_-^-)^T \Delta \mathbf{Z}_- + P_4 \Delta \mathbf{q}_{dn} + P_7 \Delta \mathbf{z}_{int} + P_8 \Delta \mathbf{q}_{int} = -\mathbf{G}_{dn} \quad (4.47)$$

が得られるから、これらの式と内部点の未知量のみで記述されている内部枝方程式(4.31)、および、節点方程式(4.43)~(4.45)をまとめて行列表示すると、

$$\begin{bmatrix} P_1(D_+^+)^T & P_1(D_0^+)^T & O & P_2 & O & P_5 & P_6 \\ O & P_3(D_0^-)^T & P_3(D_-^-)^T & O & P_4 & P_7 & P_8 \\ O & O & O & O & O & P_9 & P_{10} \\ O & O & O & D_+^+ & O & O & O \\ O & O & O & D_0^+ & -D_0^- & O & O \\ O & O & E & O & O & O & O \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta \mathbf{Z}_+ \\ \Delta \mathbf{Z}_0 \\ \Delta \mathbf{Z}_- \\ \Delta \mathbf{q}_{up} \\ \Delta \mathbf{q}_{dn} \\ \Delta \mathbf{z}_{int} \\ \Delta \mathbf{q}_{int} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\mathbf{G}_{up} \\ -\mathbf{G}_{dn} \\ -\mathbf{G}_{int} \\ -\mathbf{C}_+ \\ -\mathbf{C}_0 \\ -\mathbf{C}_- \end{bmatrix} \quad (4.48)$$

となる。

式(4.48)は Newton-Raphson 法に基づく逐次反復計算式であり、これにより得られた節点水位ベクトル \mathbf{Z} を式(4.32)に代入すれば、枝上・下流端の水位ベクトル \mathbf{z}_{up} 、 \mathbf{z}_{dn} を計算することができ、開水路網内のすべての未知水量を求めることができる。

しかし、本節のような定式化の下では、開水路網内の全断面の未知量を一度に解くため、連立方程式の次数が大きくなる欠点がある。実際問題においては、係数行列が帯行列になるように行と列を入れ換えることにより、演算処理時間を短縮しようとする方法²⁹⁾も提案されているが、本論文のような定式化の下では、系統的に行と列を入れ換えることは困難である。したがって、式(4.48)を解くに当たっては、Gupta らが提案したような大規模な非対称疎行列の解析方法³⁰⁾を併用するなどの計算技術上の工夫が必要となる。

一般に、Preissmann の4点陰形式差分法で離散化した場合、差分方程式が互いに従属関係にあり、特性曲線法のように枝方程式を外部点の未知水量を含む方程式のみで記述できないために、モデルを完全に集中化することは不可能である。そこで、本節では枝方程式を内部枝方程式と外部枝方程式とに分割して行列表示し、節点における水位連続の条件を組み込んだ形式の外部枝方程式を導いた。本文では、これを擬似的に集中化されたモデルと呼んだが、このような手法によれば4点陰形式差分法を用いた場合でも、汎用的な開水路網非定常流のシステム・モデルを展開できることがわかる。

4.2.3 解析手順

以上述べた開水路網非定常流のシステム・モデルの数学的定式化に基づいて、具体的な解析手順を示せば次のようになる。

- (1) 開水路網の形態に対応する有向グラフから出連結行列 D^+ 、入連結行列 D^- を作成する。
- (2) 開水路網内すべての断面における時刻 $t = 0$ の初期水位および初期流量を入力する。
- (3) 時刻 $t + \Delta t$ のソースの条件 f_+ 、シンクの条件 f_- を入力する。
- (4) 現時刻の水量から単一水路について記述された式 (4.27) の左辺係数行列の要素 $U_1 \sim U_{10}$ 、および、右辺定数項ベクトルの要素 B_{up} 、 B_{dn} 、 B_{int} を求める。
- (5) e 本の枝に適用するため、式 (4.27) を単純に重ね合わせて、式 (4.28) の左辺係数行列の要素 $P_1 \sim P_{10}$ 、および、右辺定数項ベクトルの要素 G_{up} 、 G_{dn} 、 G_{int} を作成する。
- (6) 式 (4.43)~(4.45) により C_+ 、 C_0 、 C_- を計算する。
- (7) 連立一次方程式を解くことによって式 (4.48) の修正量ベクトルを求める。
- (8) 式 (4.19) の条件を満たすまで計算手順 (4)~(7) を繰り返し、次時刻の未知水量を求める。
- (9) 得られた未知水量のうち、節点上の水位を成分とするベクトル Z に関しては、式 (4.32) に代入することにより枝上・下流端の水位を成分とするベクトル z_{up} 、 z_{dn} に変換する。
- (10) 所定の計算時間が終了するまで (3)~(9) の計算手順を繰り返す。

4.3 MacCormack 法による解析方法

本節では、まず、保存形で示された基礎方程式を MacCormack 法により離散化する。つぎに、MacCormack 法は内部点の未知量のみに対する差分方程式であるから、枝の外部点を含む格子で成立する条件式を行列表示して、システム・モデルが集中化されることを示す。最後に、節点方程式を導入し、枝方程式とともに行列表示して、外部点の未知水量を計算する方法を示す。

4.3.1 単一開水路における基礎方程式の離散化

(1) 基礎方程式

本節においては、射流から常流に遷移する場合に発生する跳水現象などの水理的に不連続な現象を含む流れをも解析できるように、式 (4.49)、(4.50) に示すような保存形で記述された基礎方程式を用いることとする³¹⁾。

$$\frac{\partial A}{\partial t} + \frac{\partial q}{\partial x} = 0, \quad (4.49)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{q}{A} \right) + \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{q^2}{2A^2} + gz \right) = -gs_f. \quad (4.50)$$

ただし、 t は時間、 x は下流方向に測った距離、 A は流水断面積、 q は流量、 z は水位、 g は重力加速度、 s_f は摩擦勾配であり、式 (4.51) に示す Manning 形式のものを用いることとした。

$$s_f = \frac{n_m^2 q |q|}{A^2 R^{4/3}}. \quad (4.51)$$

ただし、 n_m は Manning の粗度係数、 R は径深である。

以後の記述の便宜上、式 (4.49)、(4.50) をまとめて式 (4.52) のように行列表示しておく。

$$\frac{\partial U}{\partial t} + \frac{\partial E}{\partial x} = S. \quad (4.52)$$

ただし、

$$U = \begin{bmatrix} A \\ q/A \end{bmatrix}, \quad E = \begin{bmatrix} q \\ q^2/(2A^2) + gz \end{bmatrix}, \quad S = \begin{bmatrix} 0 \\ -gs_f \end{bmatrix}$$

である。

(2) 基礎方程式の離散化

本節では、先述したように跳水などの不連続な水理現象が発生しやすい山地河川網の水理解析を行う場合、保存形の差分スキームを用いることが必要である。

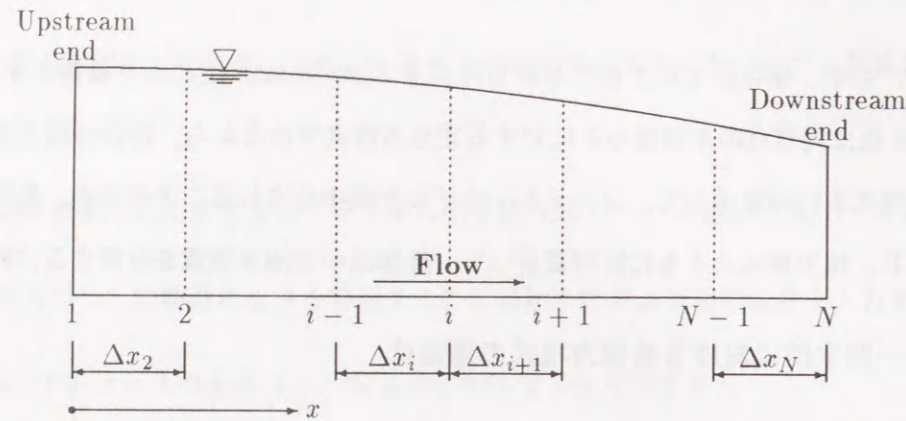


Fig.4.3 Definition sketch of a single channel reach.

保存形差分スキームの代表例として、Two-step Lax-Wendroff 法、MacCormack 法などがあるが、いずれも時間方向、空間方向に2次の精度を有している。しかし、前者よりも後の方が、安定性、収束性が優れていること、また、後者の方は格子点上の水理量のみで差分スキームが記述できることを考慮して、ここでは MacCormack 法³²⁾を用いることとした。

また、このような現象を対象とする場合、物理的に意味のない数値振動を生ずる恐れがあるため、高次の人工粘性項³³⁾を付加することとした。

いま、前章同様に単一水路を Fig.4.3 に示すように $(N-1)$ 個の小区間に分割し、前節同様 1, N の断面を外部点、 $2, \dots, N-1$ の断面を内部点と呼ぶことにする。

任意の内部断面 i に関する予測子、修正子段階の差分方程式は式 (4.53), (4.54) のように表される。

$$\bar{U}_i = U_i^m - \frac{\Delta t}{\Delta x_{i+1}}(E_{i+1}^m - E_i^m) + \frac{\Delta t}{2}(S_{i+1}^m + S_i^m) + \Delta t(V_{i+1} - V_i), \quad (4.53)$$

$$U_i^{m+1} = \frac{1}{2} \left\{ (U_i^m + \bar{U}_i) - \frac{\Delta t}{\Delta x_i}(\bar{E}_i - \bar{E}_{i-1}) + \frac{\Delta t}{2}(\bar{S}_i + \bar{S}_{i-1}) + \Delta t(\bar{V}_i - \bar{V}_{i-1}) \right\}. \quad (4.54)$$

ただし、

$$\bar{E}_i = E_i(\bar{U}_i) \quad , \quad \bar{S}_i = S_i(\bar{U}_i) \quad , \quad \bar{V}_i = V_i(\bar{U}_i)$$

であり、 m は現時刻ステップ t を表す添字、 $m+1$ は $t + \Delta t$ 時刻のステップを表す添字、 Δx_i は $i-1$ 断面と i 断面との距離を表す。

また、 V_i は人工粘性項であり、以下のように2次の差分スキームの精度を変えない形式を採用した。

$$V_i = \nu_i \frac{U_{i+1} - 2U_i + U_{i-1}}{(\Delta x_{i+1} + \Delta x_i)/2}. \quad (4.55)$$

なお、 ν_i は人工粘性係数であり、定数として取り扱った例³⁴⁾もあるが、式 (4.53), (4.54) 中のその他の項の次元との整合性を考慮して、式 (4.56) のような形式を仮定した³⁵⁾。

$$\nu_i = K_v \left(\frac{q_i}{A_i} \right). \quad (4.56)$$

ただし、 K_v は定数であり、安定な数値解が得られるように試行錯誤的に決定することとした。また、本論では K_v を人工粘性係数と呼ぶことにする。

以上の式を流水断面積と流量についてより具体的に記述すれば、予測子段階については、

$$\begin{aligned} \bar{A}_i &= A_i^m - \frac{\Delta t}{\Delta x_{i+1}}(q_{i+1}^m - q_i^m) \\ &+ \Delta t \left\{ \frac{q_{i+1}^m}{A_{i+1}^m} \frac{A_{i+2}^m - 2A_{i+1}^m + A_i^m}{(\Delta x_{i+2} + \Delta x_{i+1})/2} - \frac{q_i^m}{A_i^m} \frac{A_{i+1}^m - 2A_i^m + A_{i-1}^m}{(\Delta x_{i+1} + \Delta x_i)/2} \right\}, \end{aligned} \quad (4.57)$$

$$\begin{aligned} \bar{q}_i &= \bar{A}_i \left[\left(\frac{q}{A} \right)_i^m - \frac{\Delta t}{\Delta x_{i+1}} \left\{ \left(\frac{q^2}{2A^2} + gz \right)_{i+1}^m - \left(\frac{q^2}{2A^2} + gz \right)_i^m \right\} + \frac{g\Delta t}{2}(s_{f_{i+1}}^m + s_{f_i}^m) \right. \\ &\left. + \Delta t \left\{ \frac{q_{i+1}^m}{A_{i+1}^m} \frac{(q/A)_{i+2}^m - 2(q/A)_{i+1}^m + (q/A)_i^m}{(\Delta x_{i+2} + \Delta x_{i+1})/2} - \frac{q_i^m}{A_i^m} \frac{(q/A)_{i+1}^m - 2(q/A)_i^m + (q/A)_{i-1}^m}{(\Delta x_{i+1} + \Delta x_i)/2} \right\} \right]. \end{aligned} \quad (4.58)$$

また、修正子段階については、

$$\begin{aligned} A_i^{m+1} &= \frac{1}{2} \left[(A_i^m + \bar{A}_i) - \frac{\Delta t}{\Delta x_i}(\bar{q}_i - \bar{q}_{i-1}) \right. \\ &\left. + \Delta t \left\{ \frac{\bar{q}_i}{A_i} \frac{\bar{A}_{i+1} - 2\bar{A}_i + \bar{A}_{i-1}}{(\Delta x_{i+1} + \Delta x_i)/2} - \frac{\bar{q}_{i-1}}{A_{i-1}} \frac{\bar{A}_i - 2\bar{A}_{i-1} + \bar{A}_{i-2}}{(\Delta x_i + \Delta x_{i-1})/2} \right\} \right], \end{aligned} \quad (4.59)$$

$$\begin{aligned} q_i^{m+1} &= \frac{1}{2} A_i^{m+1} \left[\left(\frac{q}{A} \right)_i^m + \left(\frac{\bar{q}}{A} \right)_i \right. \\ &- \frac{\Delta t}{\Delta x_i} \left\{ \left(\frac{\bar{q}^2}{2A^2} + g\bar{z} \right)_i - \left(\frac{\bar{q}^2}{2A^2} + g\bar{z} \right)_{i-1} \right\} + \frac{g\Delta t}{2}(\bar{s}_{f_i} + \bar{s}_{f_{i-1}}) \\ &\left. + \Delta t \left\{ \frac{\bar{q}_i}{A_i} \frac{(\bar{q}/\bar{A})_{i+1} - 2(\bar{q}/\bar{A})_i + (\bar{q}/\bar{A})_{i-1}}{(\Delta x_{i+2} + \Delta x_{i+1})/2} - \frac{\bar{q}_{i-1}}{A_{i-1}} \frac{(\bar{q}/\bar{A})_i - 2(\bar{q}/\bar{A})_{i-1} + (\bar{q}/\bar{A})_{i-2}^m}{(\Delta x_i + \Delta x_{i-1})/2} \right\} \right] \end{aligned} \quad (4.60)$$

のようになる。

明らかに、式 (4.53), (4.54) は陽形式の差分式であり、現時刻 m の諸量がわかれば、 $m+1$ 時刻の内部点 ($i = 2, \dots, N-1$) の未知量は計算できる。

4.3.2 開水路網のシステム・モデルの定式化と解法

基礎方程式を MacCormack 法で離散化した場合、内部点に関する $(2N - 4)$ 個の方程式のみが定式化される。したがって、1本の開水路内のすべての未知量を求めるためには、さらに4つの方程式が必要である。これらには、外部点を含む格子に対する条件式と前節で定義した節点方程式とがあるが、外部点と内部点の未知水量は別々に計算することができるので、外部点の未知水量を含む条件式を枝方程式とすれば良い。

(1) 枝方程式

外部点を含む格子に対しても内部点と同様に質量保存則およびエネルギー保存則を満たす必要があるが、本節のような差分格子を用いた場合、両者を導入すれば条件が過多(未知量の数より条件式の数が多くなる)となり、内部点と同様な形式で定式化することはできない。このような場合には、連続方程式、運動方程式のどちらか一方を用いるのが通例である。ここでは、Lax-Wendroff法で用いられるように、外部点を含む格子に対しては連続方程式(4.61)のみを用いることとした³⁶⁾。

$$\frac{\partial A}{\partial t} + \frac{\partial q}{\partial x} = 0. \quad (4.61)$$

ここに、 A は流水断面積、 q は流量である。

式(4.61)の離散化方法にも種々考えられるが、ここでは岡部ら³⁷⁾と同様 Box 型のスキームにより離散化することとした。任意の1本の枝の上・下流端に対する差分式は式(4.62)、(4.63)に示すとおりである。

$$\frac{1}{2}(A_1^{m+1} + A_2^{m+1} - A_1^m - A_2^m) + \frac{\Delta t}{2\Delta x_2}(q_2^{m+1} + q_2^m - q_1^{m+1} - q_1^m) = 0, \quad (4.62)$$

$$\frac{1}{2}(A_{N-1}^{m+1} + A_N^{m+1} - A_{N-1}^m - A_N^m) + \frac{\Delta t}{2\Delta x_N}(q_N^{m+1} + q_N^m - q_{N-1}^{m+1} - q_{N-1}^m) = 0, \quad (4.63)$$

ただし、上付きの添字 m は時刻を、下付きの添字は場所を表している (Fig.4.3参照)。

時刻 $m\Delta t$ の諸量、および A_2^{m+1} , q_2^{m+1} , A_{N-1}^{m+1} , q_{N-1}^{m+1} は、それぞれ前時刻ステップ、および、式(4.53)~(4.54)によりあらかじめ計算されているので、式(4.62)、(4.63)における未知量は、 A_1^{m+1} , q_1^{m+1} , A_N^{m+1} , q_N^{m+1} のみとなる。

ここで、未知水量と既知水量とを区別してつぎのようにおく。

$$A_1^k - \frac{\Delta t}{\Delta x_2^k} q_1^k + C_1^k = 0, \quad (4.64)$$

$$A_N^k + \frac{\Delta t}{\Delta x_N^k} q_N^k + C_N^k = 0. \quad (4.65)$$

ただし、 A_1^k , A_N^k は $m+1$ 時刻の枝 k の上・下流端の流水断面積、 q_1^k , q_N^k は $m+1$ 時刻の枝 k の上・下流端の流量である。また、 C_1^k , C_N^k は m 時刻の枝 k の既知水量より求められるもので、つぎのようになる。

$$C_1^k = A_2^{m+1} - A_1^m - A_2^m + \frac{\Delta t}{\Delta x_2}(q_2^{m+1} + q_2^m - q_1^m),$$

$$C_N^k = A_{N-1}^{m+1} - A_N^m - A_{N-1}^m + \frac{\Delta t}{\Delta x_N}(q_N^m - q_{N-1}^{m+1} - q_{N-1}^m).$$

これらの関係を e 本の枝に適用すれば、まとめてつぎのように表示される。

$$A_{up} + P_2 q_{up} + C_{up} = 0, \quad (4.66)$$

$$A_{dn} + P_4 q_{dn} + C_{dn} = 0. \quad (4.67)$$

ただし、

$$A_{up} = \begin{bmatrix} A_1^1 \\ \vdots \\ A_1^e \end{bmatrix}, \quad A_{dn} = \begin{bmatrix} A_N^1 \\ \vdots \\ A_N^e \end{bmatrix},$$

$$q_{up} = \begin{bmatrix} q_1^1 \\ \vdots \\ q_1^e \end{bmatrix}, \quad q_{dn} = \begin{bmatrix} q_N^1 \\ \vdots \\ q_N^e \end{bmatrix},$$

$$P_2 = \begin{bmatrix} -\frac{\Delta t}{\Delta x_2^1} & & & \\ & \ddots & & \\ & & -\frac{\Delta t}{\Delta x_2^e} & \\ & & & \ddots \end{bmatrix}, \quad P_4 = \begin{bmatrix} \frac{\Delta t}{\Delta x_N^1} & & & \\ & \ddots & & \\ & & \frac{\Delta t}{\Delta x_N^e} & \\ & & & \ddots \end{bmatrix},$$

$$C_{up} = \begin{bmatrix} C_1^1 \\ \vdots \\ C_1^e \end{bmatrix}, \quad C_{dn} = \begin{bmatrix} C_N^1 \\ \vdots \\ C_N^e \end{bmatrix}$$

である。

ここで、式(4.66)、(4.67)を Newton-Raphson 法で解くことができるように、つぎのようにおく。

$$G_{up} = A_{up} + P_2 q_{up} + C_{up}, \quad (4.68)$$

$$\mathbf{G}_{dn} = \mathbf{A}_{dn} + P_4 \mathbf{q}_{dn} + \mathbf{C}_{dn}. \quad (4.69)$$

式(4.68), (4.69)を未知水理量の近似値近傍で Taylor 展開し, 2次以上の微小項を省略すれば,

$$P_1 \Delta \mathbf{z}_{up} + P_2 \Delta \mathbf{q}_{up} = -\mathbf{G}_{up}, \quad (4.70)$$

$$P_3 \Delta \mathbf{z}_{dn} + P_4 \Delta \mathbf{q}_{dn} = -\mathbf{G}_{dn} \quad (4.71)$$

のようになる。ただし,

$$\Delta \mathbf{z}_{up} = \begin{bmatrix} \Delta z_1^1 \\ \vdots \\ \Delta z_1^e \end{bmatrix}, \quad \Delta \mathbf{z}_{dn} = \begin{bmatrix} \Delta z_N^1 \\ \vdots \\ \Delta z_N^e \end{bmatrix}, \quad \Delta \mathbf{q}_{up} = \begin{bmatrix} \Delta q_1^1 \\ \vdots \\ \Delta q_1^e \end{bmatrix}, \quad \Delta \mathbf{q}_{dn} = \begin{bmatrix} \Delta q_N^1 \\ \vdots \\ \Delta q_N^e \end{bmatrix},$$

$$P_1 = \begin{bmatrix} \frac{\partial A_1^1}{\partial z_1^1} & & & \\ & \ddots & & \\ & & \frac{\partial A_1^e}{\partial z_1^e} & \\ & & & \ddots \end{bmatrix}, \quad P_3 = \begin{bmatrix} \frac{\partial A_N^1}{\partial z_N^1} & & & \\ & \ddots & & \\ & & \frac{\partial A_N^e}{\partial z_N^e} & \\ & & & \ddots \end{bmatrix}$$

である。

ここで, 前節同様に各枝上・下流端で定義される水位ベクトル \mathbf{z}_{up} , \mathbf{z}_{dn} と節点で定義される水位ベクトル \mathbf{Z} との関係式

$$\mathbf{z}_{up} = (D^+)^T \mathbf{Z}, \quad \mathbf{z}_{dn} = (D^-)^T \mathbf{Z} \quad (4.72)$$

を用いれば, 式(4.70), (4.71)はつぎのように表される。

$$P_1 (D^+)^T \Delta \mathbf{Z} + P_2 \Delta \mathbf{q}_{up} = -\mathbf{G}_{up}, \quad (4.73)$$

$$P_3 (D^-)^T \Delta \mathbf{Z} + P_4 \Delta \mathbf{q}_{dn} = -\mathbf{G}_{dn}. \quad (4.74)$$

ただし, D^+ は出連結行列, D^- は入連結行列, T は転置を表す。

以上示したことからわかるように, 式(4.73), (4.74)は水位連続の条件を考慮した外部点に対する枝方程式である。

(2) 節点方程式

節点方程式は前節までと同様な行列表示式を用いることとすれば, つぎのようになる。

$$\mathbf{C}_+ = D_0^+ \mathbf{q}_{up} - \mathbf{f}_+(t), \quad (4.75)$$

$$\mathbf{C}_0 = D_0^+ \mathbf{q}_{up} - D_0^- \mathbf{q}_{dn}, \quad (4.76)$$

$$\mathbf{C}_- = \mathbf{Z}_- - \mathbf{f}_-(t). \quad (4.77)$$

ただし, \mathbf{f}_+ はソースに与える流量のハイドログラフ, \mathbf{f}_- はシンクに与える水位のハイドログラフである。また, \mathbf{Z}_- はシンクの水位, D_0^+ はソースに関する出連結行列, D_0^+ および D_0^- は, それぞれ中間ノードに関する出連結行列, 入連結行列を表す。

ここで, 式(4.75)~(4.77)を未知水理量の近似値近傍で Taylor 展開し, 2次以上の微小項を無視すれば,

$$D_0^+ \Delta \mathbf{q}_{up} = -\mathbf{C}_+, \quad (4.78)$$

$$D_0^+ \Delta \mathbf{q}_{up} - D_0^- \Delta \mathbf{q}_{dn} = -\mathbf{C}_0, \quad (4.79)$$

$$E \Delta \mathbf{Z}_- = -\mathbf{C}_- \quad (4.80)$$

が得られる。ただし, E は n_- 行 n_- 列の単位行列である。

(3) 行列解法

枝方程式(4.73), (4.74)をソース・中間ノード・シンクに関する成分に分割し, 節点の特性を考慮するとつぎのようになる。

$$P_1 (D_0^+)^T \Delta \mathbf{Z}_+ + P_1 (D_0^+)^T \Delta \mathbf{Z}_0 + P_2 \Delta \mathbf{q}_{up} = -\mathbf{G}_{up}, \quad (4.81)$$

$$P_3 (D_0^-)^T \Delta \mathbf{Z}_0 + P_3 (D_0^-)^T \Delta \mathbf{Z}_- + P_4 \Delta \mathbf{q}_{dn} = -\mathbf{G}_{dn}. \quad (4.82)$$

節点方程式(4.78)~(4.80), 枝方程式(4.81), (4.82)をまとめて行列表示すれば, 式(4.83)のようになる。

$$\begin{bmatrix} P_1 (D_0^+)^T & P_1 (D_0^+)^T & O & P_2 & O \\ O & P_3 (D_0^-)^T & P_3 (D_0^-)^T & O & P_4 \\ O & O & O & D_0^+ & O \\ O & O & O & D_0^+ & -D_0^- \\ O & O & E & O & O \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta \mathbf{Z}_+ \\ \Delta \mathbf{Z}_0 \\ \Delta \mathbf{Z}_- \\ \Delta \mathbf{q}_{up} \\ \Delta \mathbf{q}_{dn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\mathbf{G}_{up} \\ -\mathbf{G}_{dn} \\ -\mathbf{C}_+ \\ -\mathbf{C}_0 \\ -\mathbf{C}_- \end{bmatrix}. \quad (4.83)$$

式(4.83)の左辺の係数行列は, $(n+2e)$ 行 $(n+2e)$ 列の非特異行列であり, 左辺の外部点に関する未知量ベクトルは連立一次方程式を解くことによって求めることができる。

本節のように、陽形式の直接差分法の一つである MacCormack 法を用いてシステム・モデルを展開すれば、枝方程式は外部点に関する未知水理量のみによって表され、いわゆる集中型モデルが得られることがわかる。したがって、このようなシステム・モデルは行列の次元が小さくなるので行列解法上有利である。

4.3.3 解析手順

以上述べた開水路網非定常流のシステム・モデルの行列表示に基づいて、具体的な解析手順を示せば次のようになる。

- (1) 開水路網の形態に対応する有向グラフから出連結行列 D^+ 、入連結行列 D^- を作成する。
- (2) 開水路網内すべての断面における時刻 $t = 0$ の初期水位および初期流量を入力する。
- (3) 時刻 $t + \Delta t$ のソースの条件 f_+ 、シンクの条件 f_- を入力する。
- (4) 現時刻の水理量から式 (4.53)、(4.54) により、次時刻の内部点の未知水理量を計算する。
- (5) 現時刻の外部点の水理量と次時刻の内部点の水理量により e 本の枝について記述された枝方程式 (4.70)、(4.71) の左辺係数行列 $P_1 \sim P_4$ 、および、右辺定数ベクトル G_{up} 、 G_{dn} を求める。
- (6) 式 (4.75)~(4.77) により節点方程式に関するベクトル C_+ 、 C_0 、 C_- を求める。
- (7) 式 (4.83) を解き、式 (4.19) の条件を満たすまで、計算手順 (5)~(7) を繰り返す。
- (8) 得られた外部点の未知水理量のうち節点上の水位を成分とするベクトル Z を式 (4.72) に代入して枝上・下流端の水位を成分とするベクトル z_{up} 、 z_{dn} を求める。
- (9) 所定の計算時間が終了するまで (3)~(9) の計算手順を繰り返す。

4.4 結言

本章では、陰形式直接差分法の例として4点陰形式差分法、陽形式直接差分法の例として MacCormack 法を取り上げ、開水路網非定常流の計算法の標準化を目的として、行列解法を展開した。

第4.2節では、Preissmann の4点陰形式差分法により離散化した差分方程式を Newton-Raphson 法で解く場合の方法を検討した。得られた結果は以下のとおりである。

- (1) 4点陰形式差分法により離散化した場合、差分方程式が非線形の連立方程式になるため、開水路網内のすべての方程式を枝方程式とする必要があり、集中型のモデルを作成することは困難である。しかし、枝方程式を外部点の未知量を含む外部枝方程式と内部点の未知水理量のみで記述される内部枝方程式とに形式上分離することによって擬似的に集中化した枝方程式 (4.31)、(4.46)、(4.47) を得た。
- (2) 前章と同様な節点方程式を Newton-Raphson 法を用いる形に変換し、枝方程式とともに行列表示した式 (4.48) を得た。
- (3) 4点陰形式差分法のように開水路網内のすべての方程式を枝方程式とした場合も、モデルを擬似的に集中化することにより、入・出連結行列を用いた汎用的な解析手法が可能となった。
- (4) 本解析手法では、行列の次元が巨大化するため、大規模疎行列の解析手法が併用されなければならない。

第4.3節では、MacCormack 法により離散化した場合の解析方法を検討した。得られた結果は以下のとおりである。

- (1) MacCormack 法は内部点の未知水理量のみを計算する差分スキームであるから、外部点を含む格子に対しては連続方程式を利用し、枝方程式として行列表示した式 (4.70)、(4.71) を得た。
- (2) 枝方程式に節点における水位連続の条件式を導入し、集中型モデルの行列表示式 (4.73)、(4.74) を得た。
- (3) システム・モデルとして枝方程式と節点方程式をまとめて行列表示した式 (4.83) が導かれた。
- (4) 本解析手法でも、前章同様に開水路網形態が入・出連結行列を用いて表示されているため汎用性があり、また、集中型のモデルで表示されているために行列の巨大化を避けることができる。

参考文献

- 1) 神田 徹・北田隆久：不定流の数値計算法に関する Critical Review, 建設工学研究所報告, 第17号, pp.43-77, 1975.
- 2) Mahmood, K. and Yevjevich, V. : Unsteady flow in open channel , Volume I , *Water Resour. Publications* , pp.89-182 , 1975.
- 3) Garcia, R. and Kahawita, R. A. : Numerical solution of the St. Venant equations with the MacCormack finite-difference scheme , *Int. J. Num. Methods in Fluid* , Vol.6 , pp.259-274, 1986.
- 4) Amein, M. : An implicit method for numerical flood routing , *Water Resour. Res.* , Vol.4, No.4 , pp.719-726 , 1968.
- 5) Amein, M. and Fang, C. S. : Implicit flood routing in natural channel , *J. Hydraul. Div.* , *ASCE* , Vol.96 , HY12 , pp.2481-2500 , 1970.
- 6) 前掲 2).
- 7) Quinn, F. H. and Wylie, E. B. : Transient analysis of the Detroit River by implicit method, *Water Resour. Res.* , Vol.8 , No.6 , pp.1461-1469 , 1972.
- 8) Chaudhry, Y. M. and Contractor, D. N. : Application of the implicit method to surge in open channels , *Water Resour. Res.* , Vol.9 , No.6 , pp.1605-1612 , 1973.
- 9) 井上和也：開水路流れの数値解析, 第16回水工学に関する夏期研修会講義集, A コース, pp.A-6-1-26, 1980.
- 10) 前掲 7).
- 11) Fread, D. L. : Technique for implicit dynamic routing in river with tributaries , *Water Resour. Res.* , Vol.9 , No.4 , pp.918-926 , 1973.
- 12) 神田 徹・辻 貴之：低平地河川網における洪水流の特性とその制御, 建設工学研究所報告, 第21号, pp.105-132, 1979.

- 13) Joliffe, I. B. : Computation of dynamic wave in channel networks , *J. Hydraul. Eng.* , *ASCE* , Vol.110 , HY10 , pp.1357-1370 , 1984.
- 14) 金本 満・常松芳昭・金丸昭治・三島隆明：4点陰形式差分法を用いた開水路網非定常流の行列解析法, 広島大学工学部研究報告, 第40巻, 第1号, pp.65-72, 1991.
- 15) 金本 満・常松芳昭・金丸昭治：開水路網における洪水流の数値解析法の比較, 水工学論文集, 第36巻, pp.323-330, 1992.
- 16) 日本機械学会編：流れの数値シミュレーション, コロナ社, pp.106-108, 1988.
- 17) 崇田徳彦・清水康行・渡邊康玄：MacCormack法を用いた常・射流計算, 開発土木研究所月報, No.448, pp.23-32, 1990.
- 18) 潮田智道・河村三郎・中谷 剛：保存則系差分法のスキームの特性に関する考察, 土木学会第45回年次学術講演会講演概要集, pp.438-439, 1990.
- 19) 潮田智道・河村三郎：一次元保存則系差分法による数値解析の際に生ずる数値振動の除去法について, 水工学論文集, 第36巻, pp.349-354, 1992.
- 20) 岡部健士・天羽誠二・石垣昌邦：常流・射流の遷移を伴う不等流の数値計算法について, 水工学論文集, 第36巻, pp.337-342, 1992.
- 21) 岡部健士・芦田和男：流れの遷移を伴う一次元河床変動の数値解法, 土木学会論文集, No.434/II-16, pp.37-45, 1991.
- 22) 長谷川和義・石川 伸：山地河川における分岐・合流流れの数値計算法, 土木学会北海道支部論文報告集, pp.263-268, 1989.
- 23) 金本 満・常松芳昭・金丸昭治：山地河川網の水理解析法, 広島大学工学部研究報告, 第41巻, 第1号, pp.45-51, 1992.
- 24) 前掲 2).
- 25) 土木学会編：水理公式集(昭和46年改訂版), p.180, 1971.
- 26) 前掲 19).
- 27) 森 正武：数値解析, 共立出版, pp.59-62, 1963.

- 28) 前掲 14).
- 29) 前掲 12).
- 30) Gupta, S. K. and Tanji, K. K. : Computation program for solution of large , sparse , unsymmetric systems of linear equations , *Int. J. Num. Methods Eng.* , Vol.11 , No.8 , pp.1251-1259 , 1977.
- 31) 前掲 22).
- 32) 前掲 3).
- 33) 前掲 16).
- 34) 前掲 16).
- 35) 前掲 23).
- 36) 土木学会編 : 土木工学における数値解析/流体解析編, サイエンス社, pp.39-43, 1974.
- 37) 前掲 20).

第5章 分流点・合流点のエネルギー損失を考慮した開水路網非定常流の解析方法

5.1 緒言

前章までの解析方法は緩勾配の河川を対象としたものであり、節点におけるエネルギー損失、および、貯留効果は無視できるものとして展開されたものである。しかし、比較的流れの速い、勾配の急な山地河川では、分流・合流によるエネルギー損失を無視することは適当でない場合もある。

近年、このような分流・合流における流況を詳細に検討するため、室内実験における多次元計測^{1,2)}、多次元の数値解析³⁾などが行われており、徐々に成果があがっている。しかし、これらは分流・合流点を含むコントロール・ボリューム内の流れを局所流として扱った研究であり、開水路網システム全体の水理挙動の把握を目的とした本研究の立場とは基本的に異なる。

一方、分流・合流点の影響を単純化して一次元解析に適用した例としては、合流モデルに運動量方程式を利用した研究^{4,5)}、分流点モデルに運動量方程式を利用した研究⁶⁾がある。また、管路の水理解析で用いられる Darcy-Weisbach 型の損失式を開水路の分流・合流点のエネルギー損失に応用した例⁷⁾⁻¹⁰⁾もある。しかし、開水路網システムに関して定常流を対象として分流・合流のエネルギー損失を考慮した統一的解析方法を展開した例¹³⁾はあるが、非定常流を対象とした研究はみられない。

実際問題として、分流・合流の流況は非常に複雑であり、未解明な部分が多いので、開水路網システムの一部として、分流・合流点を組み入れ、その水理特性を反映した解析方法を展開しようとする場合、まず、第一段階として、単純な取扱いによりエネルギー損失を考慮した解析方法が追求されて良いであろう。

そこで、本章ではまずはじめに、分流・合流点の断面急変部としてのモデルリングについて述べ、それに対する運動方程式を導く。その運動方程式を開水路網システムの一部として取り込めるように、前章までと同様な方法で行列表示する。その際、前章までとは異なり、節点内の非定

常特性, すなわち, 貯留効果が無視できない場合を想定し, 節点の貯留効果を考慮した流量連続の条件式を使用する.

なお, 本章の解析法は, 山地河川網の非定常流解析を念頭におき, 内部点に関する基礎方程式系は MacCormack 法で離散化する. また, 枝方程式は, 前章と同様に外部点を含む格子に対する連続方程式を用いることとし, 節点方程式に関しては本章で新たな定式化を行う.

5.2 分流点・合流点に対する運動方程式

秋元¹¹⁾は, 定常流における断面変化部の運動量方程式を分流・合流水路について提案しているので, ここでも, これと同様に分流・合流点を断面急変部として扱うことにする.

なお, 秋元は合流水路モデルとして, 合流点上流の2本の水路幅の合計値が, 合流点下流の水路幅よりも広い水路の形状のみを対象としているので, ここでは, 任意形状の水路を取り扱うことができるように, 種々の形状に対応する運動方程式を導くこととする.

開水路網は前章までと同様に e 本の枝と n 個の節点で構成されているものとする. また, 節点は n_+ 個のソース, n_0 個の中間ノード, n_- 個のシンクで構成されているとするが, 中間ノードはすべて分流点または合流点となっており, n_d 個の分流点, n_c 個の合流点で構成されているものとする.

5.2.1 分流点・合流点のモデル化

簡単のため, 分流・合流点のモデル化にあたってはつぎのように仮定する.

- (1) 分流・合流点近傍の水利特性は急拡水路あるいは急縮水路のそれで近似できる.
- (2) 分流・合流点の上・下流の断面形状は矩形であり, 分流・合流点を含むコントロール・ボリューム内の水路床は水平である.
- (3) 壁面および底面摩擦によるエネルギー損失は, 分流・合流による形状損失に比較して小さく無視できる.
- (4) コントロール・サーフェイスの水路断面は流水断面として全領域有効である. すなわち, 死水領域はコントロール・ボリュームに内包されている.

Fig.5.1は合流点の模式図であり, 水路0に沿って x 軸をとり, x 軸と直交して y 軸をとったものである. 上記の仮定(1)より合流点は, Fig.5.2(a)または(b)のようにモデル化される.

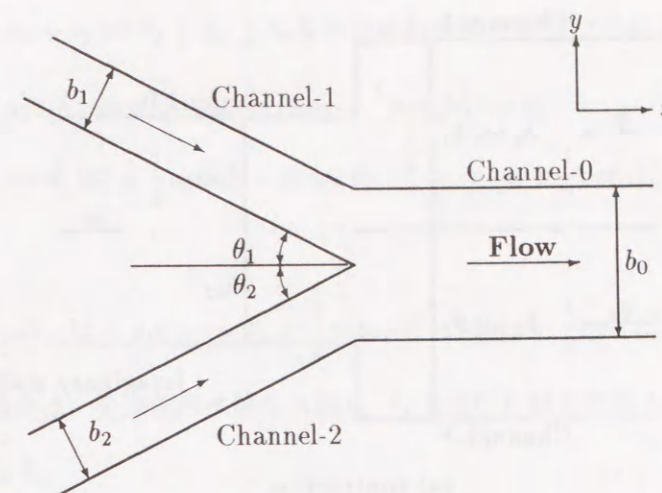


Fig.5.1 Plane view of a confluence channel.

5.2.2 分流点・合流点における運動方程式

(1) x 方向の運動方程式

Fig.5.2のように分流・合流点を水路急変部としてモデリングすれば, x 方向の運動方程式は運動量保存則を適用して導かれる.

いま, 簡単のため, Fig.5.2に示すように合流点下流部の水路に仮想的な壁面を考える. 仮想壁面により分割された後の水路幅は流量比によって設定された例¹²⁾もあるが, ここでは単純に合流前の2本の水路の水路幅の比率により設定できるものと仮定すれば, つぎのようになる.

$$b_{01} = \frac{b_1 \sec \theta_1}{b_1 \sec \theta_1 + b_2 \sec \theta_2} b_0, \quad b_{02} = \frac{b_2 \sec \theta_2}{b_1 \sec \theta_1 + b_2 \sec \theta_2} b_0. \quad (5.1)$$

ただし,

$$b_0 = b_{01} + b_{02} \quad (5.2)$$

である.

前述したとおり本モデルでは分流・合流点を開水路の断面急変部として取り扱うため, 急拡および急縮の形状に応じた運動量方程式を導くこととする. なお, Fig.5.2において流れの方向が逆の場合を考えると, これは, 分流点のモデリングに相当するので, 以下では合流点の運動量方程式の定式化の過程を示すことにし, 分流点については結果のみを示すことにする.

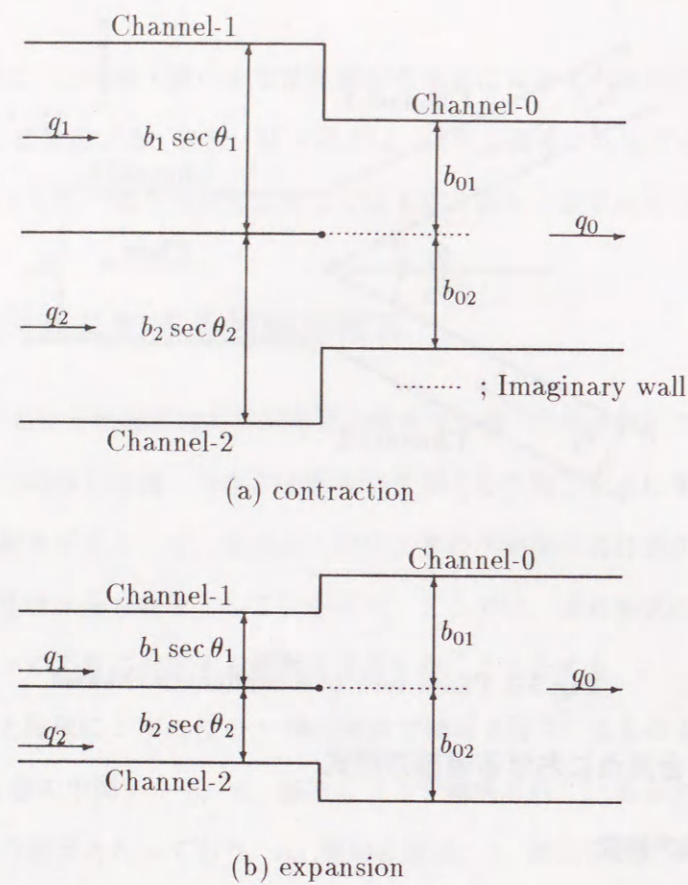


Fig.5.2 Confluence model treated as expanding or contracting channels.

ρ を流水密度, b を水面幅 (水路幅), q を流量, v を流速, h を水深とし, 下付き添字を水路番号として, 前述の仮定 (2), (3) を考慮すると, 分流・合流に対する運動量方程式は以下のようになる¹⁴⁾.

a. 合流点が急縮の場合

この場合は $b_1 \sec \theta_1 + b_2 \sec \theta_2 \geq b_0$ となるので運動量保存則はつぎのようになる.

$$\begin{aligned} & \rho q_1 v_1 \cos \theta_1 + \frac{1}{2} \rho g b_1 h_1^2 \sec \theta_1 + \rho q_2 v_2 \cos \theta_2 + \frac{1}{2} \rho g b_2 h_2^2 \sec \theta_2 \\ & = \rho q_0 v_0 + \frac{1}{2} \rho g b_0 h_0^2 + \frac{1}{2} \rho g (b_1 \sec \theta_1 - b_{01}) h_1^2 + \frac{1}{2} \rho g (b_2 \sec \theta_2 - b_{02}) h_2^2. \end{aligned}$$

整理すると,

$$\begin{aligned} & \rho q_1 v_1 \cos \theta_1 + \frac{1}{2} \rho g b_1 h_1^2 \sec \theta_1 + \rho q_2 v_2 \cos \theta_2 + \frac{1}{2} \rho g b_2 h_2^2 \sec \theta_2 \\ & - \rho q_0 v_0 - \frac{1}{2} \rho g (b_1 \sec \theta_1 + b_2 \sec \theta_2) h_0^2 = 0. \end{aligned} \quad (5.3)$$

b. 合流点が急拡の場合

この場合は $b_1 \sec \theta_1 + b_2 \sec \theta_2 \leq b_0$ となるので運動量保存則はつぎのようになる.

$$\begin{aligned} & \rho q_1 v_1 \cos \theta_1 + \frac{1}{2} \rho g b_1 h_1^2 \sec \theta_1 + \rho q_2 v_2 \cos \theta_2 + \frac{1}{2} \rho g b_2 h_2^2 \sec \theta_2 \\ & + \frac{1}{2} \rho g (b_{01} - b_1 \sec \theta_1) h_1^2 + \frac{1}{2} \rho g (b_{02} - b_2 \sec \theta_2) h_2^2 = \rho q_0 v_0 + \frac{1}{2} \rho g b_0 h_0^2. \end{aligned}$$

整理すると,

$$\rho q_1 v_1 \cos \theta_1 + \frac{1}{2} \rho g b_{01} h_1^2 + \rho q_2 v_2 \cos \theta_2 + \frac{1}{2} \rho g b_{02} h_2^2 - \rho q_0 v_0 - \frac{1}{2} \rho g b_0 h_0^2 = 0. \quad (5.4)$$

一方, 分流点の場合は, 分流前の水路を水路 0, 分流後の水路を水路 1, 2 として結果のみを示せば以下のようになる.

c. 分流点が急縮の場合

この場合は $b_1 \sec \theta_1 + b_2 \sec \theta_2 \leq b_0$ となるので運動量保存則はつぎのようになる.

$$\rho q_1 v_1 \cos \theta_1 + \frac{1}{2} \rho g b_{01} h_1^2 + \rho q_2 v_2 \cos \theta_2 + \frac{1}{2} \rho g b_{02} h_2^2 - \rho q_0 v_0 - \frac{1}{2} \rho g b_0 h_0^2 = 0. \quad (5.5)$$

d. 分流点が急拡の場合

この場合は $b_1 \sec \theta_1 + b_2 \sec \theta_2 \geq b_0$ となるので運動量保存則はつぎのようになる.

$$\begin{aligned} & \rho q_1 v_1 \cos \theta_1 + \frac{1}{2} \rho g b_1 h_1^2 \sec \theta_1 + \rho q_2 v_2 \cos \theta_2 + \frac{1}{2} \rho g b_2 h_2^2 \sec \theta_2 \\ & - \rho q_0 v_0 - \frac{1}{2} \rho g (b_1 \sec \theta_1 + b_2 \sec \theta_2) h_0^2 = 0. \end{aligned} \quad (5.6)$$

このように, 分流あるいは合流の形態により, 壁面に作用する水圧の方向や大きさが異なってくるため, それぞれに応じて水圧項を計算するための水面幅の取扱いを変える必要がある.

たとえば, 式 (5.3) の第 6 項は水路 0 に作用する水圧であるが, 急縮壁面に作用する水圧を含めているため, 見かけの水面幅として $b_1 \sec \theta_1 + b_2 \sec \theta_2$ を用いることになる. これは実際の水面幅 b_0 とは異なるので, 以後本文ではこれを仮想水面幅と呼ぶことにする. また, 水路 1, 2 については実際の水面幅 $b_1 \sec \theta_1$, $b_2 \sec \theta_2$ を用いているので, これを実水面幅と呼ぶ.

(2) y 方向の運動方程式

y 方向の運動方程式としては, 室田らの合流水路に関する実験結果¹⁵⁾, および, 秋元の仮定¹⁶⁾ を参考にして水位連続の条件を用いる. すなわち, 合流点上流の 2 本の水路, あるいは, 分流点

下流の2本の水路に対してつぎのように仮定する.

$$z_1 = z_2 \quad \text{or} \quad h_1 = h_2. \quad (5.7)$$

ただし, z は水位であり, 下付き添字は水路番号を表す.

5.2.3 x 方向の水面幅のベクトル表示

式(5.3)~(5.6)に示したように, 分流・合流点の形態により x 方向の運動量方程式中の水圧項の計算に用いられる水面幅が異なってくるため, これを統一的に表示するためには若干の工夫が必要である.

そこで, 以後の展開のため n_0 個の中間ノードに関する入・出連結行列をさらに合流点 (n_c 個) に関するものと分流点 (n_d 個) に関するものとに分割しつぎのように表示する.

$$D^+ = \begin{bmatrix} D_+^+ \\ D_c^+ \\ D_d^+ \\ D_-^+ \end{bmatrix}, \quad D^- = \begin{bmatrix} D_+^- \\ D_c^- \\ D_d^- \\ D_-^- \end{bmatrix}. \quad (5.8)$$

ここに, 上付き添字の $+$ は出連結行列に関するもの, $-$ は入連結行列に関するもの, 下付き添字の $+$ はソース, c は合流点, d は分流点, $-$ はシンクに関するものを表す.

さらに, 各枝上・下流端の x 方向の実水面幅を成分とするつぎのような e 次元のベクトルを定義する.

$$B_{x,up} = \begin{bmatrix} B_1^+ |\sec \theta_1^+| \\ \vdots \\ B_1^e |\sec \theta_1^e| \end{bmatrix}, \quad B_{x,dn} = \begin{bmatrix} B_N^+ |\sec \theta_N^+| \\ \vdots \\ B_N^e |\sec \theta_N^e| \end{bmatrix}.$$

ここで, B は水路幅, 上付き添字は枝の番号を, 下付きの 1 は枝の上流端, N は下流端を表す添字である. ただし, 分流・合流点に対する枝の角度 θ の定義は, Fig.5.3に示すとおりである.

(1) 仮想水面幅のベクトル表示

ここでは, まず, 仮想水面幅を成分とするベクトルを作成する前段階として, 第2章で示した行列の性質を利用し, 式(5.1)に含まれる水面幅の比率を成分とする行列を作成する.

まず, 合流点の場合, 式(5.1)の分母を一般的に表示するためには, 任意の1つの合流点に入連結する枝下流端の合計水面幅を求めなければならない. これには各枝下流端の水面幅を成分とするベクトルに入連結行列を掛けて $D_c^- B_{x,dn}$ を計算すれば求めることができる. さらに, これを

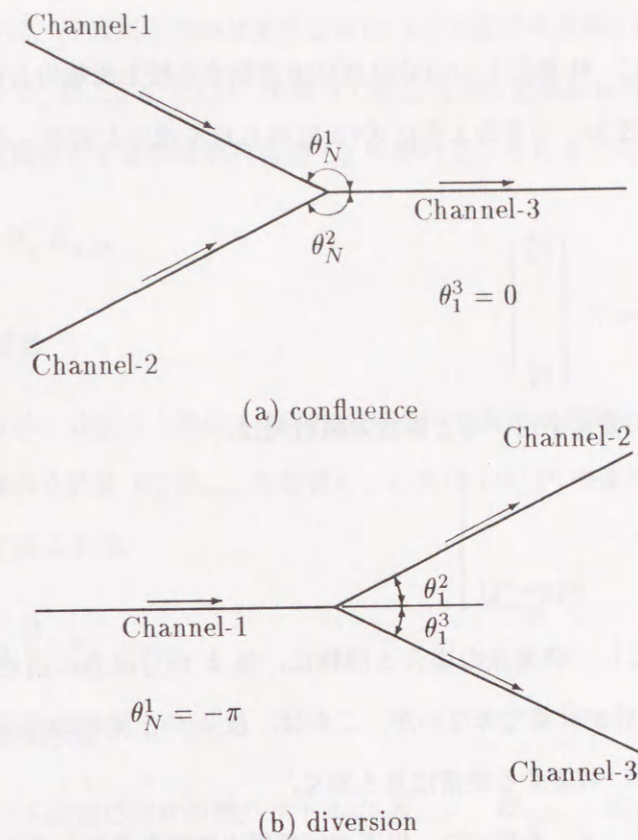


Fig.5.3 Definition sketch of channel angle.

枝下流端の定義量に変換するために $(D_c^-)^T$ を掛けると, つぎのような式(5.1)の係数の分母を成分とする e 次元のベクトルが作成される.

$$R_c = (D_c^-)^T D_c^- B_{x,dn} = \begin{bmatrix} r_c^1 \\ \vdots \\ r_c^e \end{bmatrix}. \quad (5.9)$$

ただし, 上付き添字の T は転置を表す.

ベクトル R_c の要素を用いると, つぎのように合流点に関する仮想水面幅を求めるための係数を対角成分とする e 行 e 列の行列が定義される.

$$C_c = \begin{bmatrix} \frac{B_1^+ |\sec \theta_1^+|}{r_c^1} & & \\ & \ddots & \\ & & \frac{B_1^e |\sec \theta_1^e|}{r_c^e} \end{bmatrix}. \quad (5.10)$$

ただし, 枝 k が合流点に入連結していないときは $r_c^k = 0$ となり, C_c の成分が計算できないが,

これは、枝 k の下流端が合流点には無関係であることを意味しているため、対応する対角要素は 0 とおく。

分流点の場合も同様に、任意の 1 つの分流点に出連結する枝上流端の合計水面幅 $D_d^+ B_{x,up}$ を計算し、 $(D_d^+)^T$ を掛けると、つぎのように式 (5.1) の分母を成分とする e 次元のベクトルが作成される。

$$R_d = (D_d^+)^T D_d^+ B_{x,up} = \begin{bmatrix} r_d^1 \\ \vdots \\ r_d^e \end{bmatrix}. \quad (5.11)$$

さらに、ベクトル R_d の要素を用いると係数対角行列は、

$$C_d = \begin{bmatrix} \frac{B_N^1 |\sec \theta_N^1|}{r_d^1} & & \\ & \ddots & \\ & & \frac{B_N^e |\sec \theta_N^e|}{r_d^e} \end{bmatrix} \quad (5.12)$$

のように表される。ただし、合流点の場合と同様に、枝 k が分流点に出連結していないときは $r_d^k = 0$ となり、 C_d の成分が計算できないが、これは、枝 k の上流端が分流点には無関係であることを意味しているため、対応する要素は 0 とおく。

以上の係数対角行列 C_c 、 C_d を用いて、以下では仮想水面幅を成分とするベクトルを作成する。

a. 合流点が急縮の場合

合流点が急縮の場合は、合流点下流の 1 本の水路について仮想水面幅が設定される。これには、合流点上流の実水面幅の合計値 $D_c^- B_{x,dn}$ を計算し、 $(D_c^-)^T$ を掛けて枝上流端の定義量に変換することによって得られる。

$$B_{c,up}^{img.} = (D_c^-)^T D_c^- B_{x,dn}. \quad (5.13)$$

b. 合流点が急拡の場合

合流点が急拡の場合は、合流点上流の 2 本の水路について仮想水面幅が設定される。これには、合流点下流の実水面幅 $D_c^+ B_{x,up}$ に $(D_c^+)^T$ を掛けて枝下流端の定義量に変換し、先に定義した合流点上流の水面幅の比率を成分とする係数対角行列 C_c を掛けることによって得られる。

$$B_{c,dn}^{img.} = C_c (D_c^+)^T D_c^+ B_{x,up}. \quad (5.14)$$

c. 分流点が急縮の場合

分流点が急縮の場合は、分流点下流の 2 本の水路について仮想水面幅が設定される。これには、分流点下流の実水面幅 $D_d^- B_{x,up}$ に $(D_d^-)^T$ を掛けて枝上流端の定義量に変換し、先に定義した分流点上流の水面幅比を成分とする係数対角行列 C_d を掛けることによって得られる。

$$B_{d,up}^{img.} = C_d (D_d^-)^T D_d^- B_{x,up}. \quad (5.15)$$

d. 分流点が急拡の場合

分流点が急拡の場合は、分流点上流の 1 本の水路について仮想水面幅が設定される。これには、分流点下流の実水面幅の合計値 $D_d^+ B_{x,up}$ を計算し、これに $(D_d^+)^T$ を掛けて枝上流端の定義量に変換することによって得られる。

$$B_{d,dn}^{img.} = (D_d^+)^T D_d^+ B_{x,up}. \quad (5.16)$$

(2) 水面幅成分の抽出方法

先に定義した枝上・下流端の実水面幅ベクトルの $B_{x,up}$ 、 $B_{x,dn}$ 、および、分流・合流点の形態を考慮して作成された仮想水面幅ベクトルの $B_{c,up}^{img.}$ 、 $B_{c,dn}^{img.}$ 、 $B_{d,up}^{img.}$ 、 $B_{d,dn}^{img.}$ は、それを構成するすべての成分が、運動量方程式の水圧項の水面幅として使用されるわけではない。すなわち、節点毎の分流・合流点の形態に対応して、実水面幅、仮想水面幅ベクトル内の成分を抽出する必要がある。

したがって、ここではそれらの成分の抽出方法を述べるとともに、抽出された水面幅を成分とするベクトルを作成する。

はじめに、つぎのような分流・合流点を区別するための行列 α と急拡・急縮の形状を判定するための行列 β を定義する。ただし、これらの行列は、中間ノードに対してのみ導入されるから、 n_0 行 n_0 列の対角行列である。

$$\alpha = [\alpha_{jj}] = \begin{cases} 1 & (\text{節点 } j \text{ が合流点の場合}), \\ 0 & (\text{節点 } j \text{ が分流点の場合}). \end{cases} \quad (5.17)$$

$$\beta = [\beta_{jj}] = \begin{cases} 1 & (\text{節点 } j \text{ が急拡部の場合}), \\ 0 & (\text{節点 } j \text{ が急縮部の場合}). \end{cases} \quad (5.18)$$

まず、第1段階として、分流・合流の違いによって、仮想水面幅ベクトル内から抽出される成分が決定される。

枝の上流端では、合流の場合にはベクトル $B_{c,up}^{img.}$ 内の成分が抽出され、分流の場合にはベクトル $B_{d,up}^{img.}$ 内の成分が抽出される。すなわち、次式のように抽出後の仮想水面幅ベクトル $B_{x,up}^{img.}$ が定義される。

$$B_{x,up}^{img.} = (D_0^+)^T \{ \alpha D_0^+ B_{c,up}^{img.} + (E - \alpha) D_0^+ B_{d,up}^{img.} \}. \quad (5.19)$$

同様に枝の下流端では、合流の場合にはベクトル $B_{c,dn}^{img.}$ 内の成分が抽出され、分流の場合にはベクトル $B_{d,dn}^{img.}$ 内の成分が抽出される。すなわち、次式のように抽出後の仮想水面幅ベクトル $B_{x,dn}^{img.}$ が定義される。

$$B_{x,dn}^{img.} = (D_0^-)^T \{ \alpha D_0^- B_{c,dn}^{img.} + (E - \alpha) D_0^- B_{d,dn}^{img.} \}. \quad (5.20)$$

ただし、 E は n_0 行 n_0 列の単位行列である。各項に D_0^+ 、 D_0^- を掛けているのは、枝の上・下流端で定義された水面幅ベクトルを節点定義量に変換し、節点の形態を導入するため、また、各式に $(D_0^+)^T$ 、 $(D_0^-)^T$ を掛けているのは、節点定義量を枝定義量に戻すためである。

つぎに、第2段階では分流・合流点形状の急拡、急縮の違いにより、仮想水面幅、または、実水面幅ベクトル内から抽出される成分が決定される。

まず、枝上流端では、急拡の場合には実水面幅ベクトル内の成分が抽出され、急縮の場合には仮想水面幅ベクトル内の成分が抽出される。したがって、運動量方程式の水圧項に使用する水面幅を成分とするベクトル $\bar{B}_{x,up}$ は対角行列 β を用いてつぎのように設定される。

$$\bar{B}_{x,up} = (D_0^+)^T \{ \beta D_0^+ B_{x,up}^{real} + (E - \beta) D_0^+ B_{x,up}^{img.} \}. \quad (5.21)$$

一方、枝下流端では、急縮の場合には実水面幅ベクトルの成分が抽出され、急拡の場合には仮想水面幅ベクトルの成分が抽出される。したがって、運動量方程式の水圧項に使用する水面幅を成分とするベクトル $\bar{B}_{x,dn}$ は対角行列 β を用いてつぎのように設定される。

$$\bar{B}_{x,dn} = (D_0^-)^T \{ (E - \beta) D_0^- B_{x,dn}^{real} + \beta D_0^- B_{x,dn}^{img.} \}. \quad (5.22)$$

なお、各項に D_0^+ 、 D_0^- を掛けているのは、枝の上・下流端で定義された水面幅ベクトルを節点定義量に変換し、節点の形態を導入するため、また、各式に $(D_0^+)^T$ 、 $(D_0^-)^T$ を掛けているのは、節点定義量を枝定義量に戻すためである。

5.2.4 運動方程式の行列表示

ここでは、運動方程式の行列表示法を検討する。前節において x 方向の運動量方程式に使用される水面幅を成分とするベクトルが設定されたが、展開の便宜上それらの水面幅ベクトルを要素をつぎのように書くことにする。

$$\bar{B}_{x,up} = \begin{bmatrix} \bar{B}_{x,1}^1 \\ \vdots \\ \bar{B}_{x,1}^e \end{bmatrix}, \quad \bar{B}_{x,dn} = \begin{bmatrix} \bar{B}_{x,N}^1 \\ \vdots \\ \bar{B}_{x,N}^e \end{bmatrix}. \quad (5.23)$$

また、枝上・下流端の水位を成分とするベクトルをつぎのように定義する。

$$z_{up} = \begin{bmatrix} z_1^1 \\ \vdots \\ z_1^e \end{bmatrix}, \quad z_{dn} = \begin{bmatrix} z_N^1 \\ \vdots \\ z_N^e \end{bmatrix}. \quad (5.24)$$

ただし、ベクトル内の要素の上付き添字は枝の番号を、下付きの1は枝の上流端、 N は下流端を表す添字である。

以上のように分流・合流点の形態の差異によって抽出された水面幅を成分とするベクトルを用いると、枝上・下流端の x 方向の比力が求められる。

まず、運動量は水路の角度 θ を Fig.5.3のように定義すれば、その流入方向が自動的に考慮される。また、水圧は流れの方向を正とすれば、枝の上流端では負の方向から、枝の下流端では正の方向から作用するので、枝上・下流端の x 方向の比力を成分とするベクトルはつぎようになる。

$$F_{x,up} = \begin{bmatrix} \frac{\rho(q_1^1)^2}{A_1^1} \cos \theta_1^1 - \frac{1}{2} \rho g \bar{B}_{x,1}^1 (h_1^1)^2 \\ \vdots \\ \frac{\rho(q_1^e)^2}{A_1^e} \cos \theta_1^e - \frac{1}{2} \rho g \bar{B}_{x,1}^e (h_1^e)^2 \end{bmatrix}, \quad (5.25)$$

$$F_{x,dn} = \begin{bmatrix} \frac{\rho(q_N^1)^2}{A_N^1} \cos \theta_N^1 + \frac{1}{2} \rho g \bar{B}_{x,N}^1 (h_N^1)^2 \\ \vdots \\ \frac{\rho(q_N^e)^2}{A_N^e} \cos \theta_N^e + \frac{1}{2} \rho g \bar{B}_{x,N}^e (h_N^e)^2 \end{bmatrix}. \quad (5.26)$$

さらに、 y 方向の運動方程式は水位のみを成分とするベクトルを定義すれば良いが、作用方向に対して正負の識別が必要であるから、水路の角度 θ を Fig.5.3のように定義して、つぎのように正負のみを設定するための係数を定義する。

$$\eta_1^k = \frac{\sin \theta_1^k}{|\sin \theta_1^k|}, \quad \eta_N^k = \frac{\sin \theta_N^k}{|\sin \theta_N^k|}, \quad \theta \neq -\pi, \pi. \quad (5.27)$$

ただし、上付きの添字 k は枝の番号、下付き添字の 1 は枝上流端、 N は下流端を表す。したがって、この係数を水位に掛けた成分で構成されるつぎのようなベクトル

$$\mathbf{F}_{y,up} = \begin{bmatrix} \eta_1^1 z_1^1 \\ \vdots \\ \eta_1^e z_1^e \end{bmatrix}, \quad (5.28)$$

$$\mathbf{F}_{y,dn} = \begin{bmatrix} \eta_N^1 z_N^1 \\ \vdots \\ \eta_N^e z_N^e \end{bmatrix} \quad (5.29)$$

を用いると、 x 、 y 方向それぞれの運動方程式は、まとめてつぎのように表示できる。

$$D_0^+ \mathbf{F}_{x,up} + D_0^- \mathbf{F}_{x,dn} = \mathbf{0}, \quad (5.30)$$

$$D_0^+ \mathbf{F}_{y,up} + D_0^- \mathbf{F}_{y,dn} = \mathbf{0}. \quad (5.31)$$

これらを Newton-Raphson 法によって解くためにつぎのようにおく。

$$\mathbf{G}_x = D_0^+ \mathbf{F}_{x,up} + D_0^- \mathbf{F}_{x,dn}, \quad (5.32)$$

$$\mathbf{G}_y = D_0^+ \mathbf{F}_{y,up} + D_0^- \mathbf{F}_{y,dn}. \quad (5.33)$$

未知水理量 z_{up} 、 q_{up} 、 z_{dn} 、 q_{dn} の近似値近傍で Taylor 展開すると、

$$D_0^+ (P_5 \Delta z_{up} + P_6 \Delta q_{up}) + D_0^- (P_7 \Delta z_{dn} + P_8 \Delta q_{dn}) = -\mathbf{G}_x, \quad (5.34)$$

$$D_0^+ P_9 \Delta z_{up} + D_0^- P_{10} \Delta z_{dn} = -\mathbf{G}_y \quad (5.35)$$

のようになる。ただし、 Δ は Newton-Raphson 法における修正量、係数行列 $P_5 \sim P_{10}$ はつぎに示すような e 行 e 列の対角行列である。

$$P_5 = \begin{bmatrix} \left(-\frac{(q_1^1)^2}{(A_1^1)^2} \cos \theta_1^1 - \frac{gA_1^1}{B_{x,1}^1} \frac{\partial A_1^1}{\partial z_1^1}\right) & & & \\ & \ddots & & \\ & & \left(-\frac{(q_1^e)^2}{(A_1^e)^2} \cos \theta_1^e - \frac{gA_1^e}{B_{x,1}^e} \frac{\partial A_1^e}{\partial z_1^e}\right) & \\ & & & \ddots \end{bmatrix},$$

$$P_6 = \begin{bmatrix} \frac{2q_1^1}{A_1^1} \cos \theta_1^1 & & & \\ & \ddots & & \\ & & \frac{2q_1^e}{A_1^e} \cos \theta_1^e & \\ & & & \ddots \end{bmatrix},$$

$$P_7 = \begin{bmatrix} \left(-\frac{(q_N^1)^2}{(A_N^1)^2} \cos \theta_N^1 + \frac{gA_N^1}{B_{x,N}^1} \frac{\partial A_N^1}{\partial z_N^1}\right) & & & \\ & \ddots & & \\ & & \left(-\frac{(q_N^e)^2}{(A_N^e)^2} \cos \theta_N^e + \frac{gA_N^e}{B_{x,N}^e} \frac{\partial A_N^e}{\partial z_N^e}\right) & \\ & & & \ddots \end{bmatrix},$$

$$P_8 = \begin{bmatrix} \frac{2q_N^1}{A_N^1} \cos \theta_N^1 & & & \\ & \ddots & & \\ & & \frac{2q_N^e}{A_N^e} \cos \theta_N^e & \\ & & & \ddots \end{bmatrix},$$

$$P_9 = \begin{bmatrix} \eta_1^1 & & & \\ & \ddots & & \\ & & \eta_1^e & \\ & & & \ddots \end{bmatrix}, \quad P_{10} = \begin{bmatrix} \eta_N^1 & & & \\ & \ddots & & \\ & & \eta_N^e & \\ & & & \ddots \end{bmatrix}.$$

5.3 分流域・合流点の貯留方程式

前節で示したように分流・合流点を含む節点にコントロール・ボリュームを設定してモデル化した場合、節点内の貯留効果を無視できない場合が生じる。そこで、本節では中間ノードにおける貯留効果を考慮した流量連続の条件を貯留方程式として定式化し、行列表示する。

5.3.1 分流・合流点のモデル化

いま、Fig.5.4に示すような合流点のモデルを考える。前節同様に比率 γ で分割される仮想壁面を設定すると、任意の中間ノード j における貯留量 V_j は、

$$V_j \approx \frac{l_1}{2}(a_1 + \gamma a_0) + \frac{l_2}{2}\{a_2 + (1 - \gamma)a_0\} \quad (5.36)$$

となる。ただし、 a はそれぞれの水路の流水断面積、下付き添字は水路番号を表す。

ここで、コントロール・ボリュームを

$$l \equiv l_1 = l_2 \quad (5.37)$$

となるように設定できるものとすれば、

$$V_j = \frac{l}{2}(a_1 + a_2 + a_0) \quad (5.38)$$

のように簡単に表示できる。

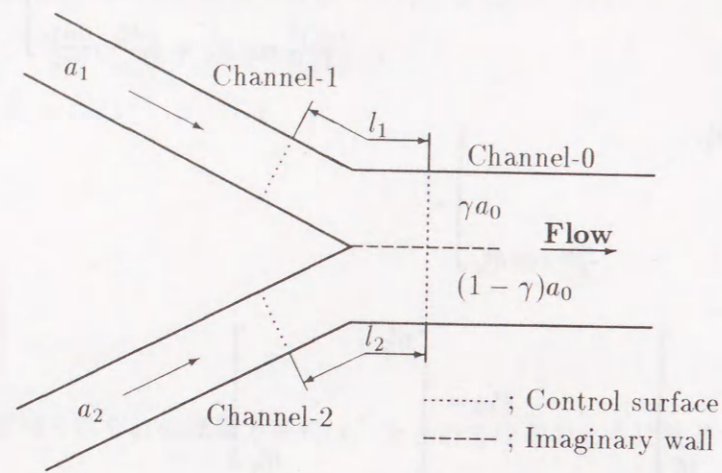


Fig.5.4 Definition of control volume for storage equation.

5.3.2 貯留方程式の行列表示

一般に n_0 個の中間ノードに対する貯留方程式を定式化するために節点に関するつぎのような行列・ベクトルを定義する.

$$L = \begin{bmatrix} L_1 & & \\ & \ddots & \\ & & L_{n_0} \end{bmatrix}, \quad V = \begin{bmatrix} V_1 \\ \vdots \\ V_{n_0} \end{bmatrix} \quad (5.39)$$

L はコントロール・ボリュームの長さを対角成分とする行列, V は中間ノードの貯留量を成分とするベクトルである.

また, 枝上・下流端の流水断面積を成分とするつぎのような e 次元のベクトルを定義する.

$$A_{up} = \begin{bmatrix} A_1^1 \\ \vdots \\ A_1^e \end{bmatrix}, \quad A_{dn} = \begin{bmatrix} A_N^1 \\ \vdots \\ A_N^e \end{bmatrix} \quad (5.40)$$

ただし, 各要素の下付き添字 1 は枝の上流端, N は下流端を表す.

A_{up} , A_{dn} に入・出連結行列を掛けると節点に関する定義量に変換できるから, 結局, 中間ノードの貯留量を成分とするベクトル V はつぎのように表される.

$$V = \frac{L}{2}(D_0^+ A_{up} + D_0^- A_{dn}) \quad (5.41)$$

ところで, ある時間内に流入する水量から流出する水量を差し引いたものは, その間にコントロール・ボリュームに貯留された量に等しいので, 貯留方程式は,

$$\frac{dV}{dt} = D_0^+ q_{up} - D_0^- q_{dn} \quad (5.42)$$

のようになる.

数値解の安定性を考慮して式(5.42)を陰形式の後退差分により離散化すれば,

$$\frac{V^{m+1} - V^m}{\Delta t} = D_0^+ q_{up}^{m+1} - D_0^- q_{dn}^{m+1} \quad (5.43)$$

のようになる. ただし, m は時刻を表す添字である.

さらに, 式(5.43)に式(5.41)を代入すると,

$$\frac{L}{2\Delta t} \{ D_0^+ (A_{up}^{m+1} - A_{up}^m) + D_0^- (A_{dn}^{m+1} - A_{dn}^m) \} = D_0^+ q_{up}^{m+1} - D_0^- q_{dn}^{m+1} \quad (5.44)$$

のようになる.

未知水量と既知水量をまとめて Newton-Raphson 法を適用しやすいようにつぎのようにおく.

$$C_0 = \frac{L}{2\Delta t} \{ D_0^+ A_{up}^{m+1} + D_0^- A_{dn}^{m+1} \} - D_0^+ q_{up}^{m+1} + D_0^- q_{dn}^{m+1} - \frac{L}{2\Delta t} \{ D_0^+ A_{up}^m + D_0^- A_{dn}^m \} \quad (5.45)$$

ここで, 時刻に関する添字 m を省略して, 未知水量の近似値近傍で Taylor 展開すれば,

$$\frac{L}{2\Delta t} \{ D_0^+ P_{11} \Delta z_{up} + D_0^- P_{12} \Delta z_{dn} \} - D_0^+ \Delta q_{up} + D_0^- \Delta q_{dn} = -C_0 \quad (5.46)$$

のようになる. ただし,

$$P_{11} = \begin{bmatrix} \frac{\partial A_1^1}{\partial z_1^1} & & \\ & \ddots & \\ & & \frac{\partial A_1^e}{\partial z_1^e} \end{bmatrix}, \quad P_{12} = \begin{bmatrix} \frac{\partial A_N^1}{\partial z_1^1} & & \\ & \ddots & \\ & & \frac{\partial A_N^e}{\partial z_1^e} \end{bmatrix} \quad (5.47)$$

である.

5.4 開水路網のシステム・モデルの定式化と解法

ここでは, 前章までと同様に枝方程式と節点方程式の行列表示法を検討する.

5.4.1 枝方程式

本章では、内部点に関しては MacCormack 法を用いて離散化することになっているので、枝方程式としては、外部点を含む格子に対する条件式を用いればよい。これには、第 4.3 節で導入した外部点を含む格子で成立する連続方程式に基づいて行列・ベクトル表示されたつぎの式を用いる。

$$G_{up} = A_{up} + P_2 q_{up} + C_{up}, \quad (5.48)$$

$$G_{dn} = A_{dn} + P_4 q_{dn} + C_{dn}. \quad (5.49)$$

ただし、 A_{up} 、 A_{dn} は式 (5.40) と同様に枝上・下流端の流水断面積を成分とするベクトルであり、 q_{up} 、 q_{dn} は枝上・下流端の流量を成分とするベクトル、 C_{up} 、 C_{dn} は枝上・下流端の既知水量を成分とするベクトルである。

$$q_{up} = \begin{bmatrix} q_1^1 \\ \vdots \\ q_1^e \end{bmatrix}, \quad q_{dn} = \begin{bmatrix} q_N^1 \\ \vdots \\ q_N^e \end{bmatrix},$$

$$P_2 = \begin{bmatrix} -\frac{\Delta t}{\Delta x_2} & & & \\ & \ddots & & \\ & & -\frac{\Delta t}{\Delta x_2^e} & \\ & & & \ddots \end{bmatrix}, \quad P_4 = \begin{bmatrix} \frac{\Delta t}{\Delta x_N} & & & \\ & \ddots & & \\ & & \frac{\Delta t}{\Delta x_N^e} & \\ & & & \ddots \end{bmatrix},$$

$$C_{up} = \begin{bmatrix} C_1^1 \\ \vdots \\ C_1^e \end{bmatrix}, \quad C_{dn} = \begin{bmatrix} C_N^1 \\ \vdots \\ C_N^e \end{bmatrix}.$$

なお、上付き添字は枝番号を、下付きの 1 は枝の上流端、 N は下流端を表す添字である。また、 C_1^k 、 C_N^k については離散化された連続方程式の既知水量により構成され、以下のとおりである。

$$C_1^k = A_2^{m+1} - A_1^m - A_2^m + \frac{\Delta t}{\Delta x_2} (q_2^{m+1} + q_2^m - q_1^m),$$

$$C_N^k = A_{N-1}^{m+1} - A_{N-1}^m - A_N^m + \frac{\Delta t}{\Delta x_N} (q_N^m - q_{N-1}^{m+1} - q_{N-1}^m).$$

ただし、上付きの m は時刻を表す添字である。

5.4.2 節点方程式

節点方程式としては、節点における運動方程式、貯留方程式、および、ソース、シンクにおける境界条件式があるが、運動方程式と貯留方程式は前節までで定式化されているので、ここではソース、シンクの境界条件式を行列表示する。

いままでと同様にソースに対しては流量ハイドログラフを、シンクに対しては水位ハイドログラフを与えることにする。

まず、ソースに対する条件式は枝上流端の流量により定式化されていたので、そのまま用いることができつぎのようになる。

$$D_+^+ q_{up} = f_+(t). \quad (5.50)$$

すなわち、ソースに関する出連結行列を枝上流端の流量を成分とするベクトルに掛けて、流量を節点定義量に変換することによってソースの境界条件が導入されている。

一方、シンクに対してもソースと同様の考え方をを用いると、シンクに関する入連結行列を枝下流端の水位を成分とするベクトルに掛ければ、つぎのように節点定義量に変換されてシンクの境界条件が導入できる。

$$D_-^- z_{dn} = f_-(t). \quad (5.51)$$

ただし、このような式が許容されるためには、一つのシンクに接続する枝は唯一つであることが条件である。

これらを Newton-Raphson 法が適用できるようにつぎのようにおく。

$$C_+ = D_+^+ q_{up} - f_+, \quad (5.52)$$

$$C_- = D_-^- z_{dn} - f_-. \quad (5.53)$$

さらに、未知水量の近似値近傍で Taylor 展開すると、

$$D_+^+ \Delta q_{up} = -C_+, \quad (5.54)$$

$$D_-^- \Delta z_{dn} = -C_-. \quad (5.55)$$

のようになる。

5.4.3 行列解法

運動量方程式 (5.34), (5.35), 貯留方程式 (5.46), ソース, シンクの境界条件式 (5.54), (5.55) はまとめて行列表示することができ, つぎのようになる.

$$\begin{bmatrix} P_1 & O & P_2 & O \\ O & P_3 & O & P_4 \\ D_0^+ P_5 & D_0^- P_6 & D_0^+ P_7 & D_0^- P_8 \\ D_0^+ P_9 & O & D_0^+ P_{10} & O \\ O & D_0^+ & O & O \\ \frac{L}{2\Delta t} D_0^+ P_{11} & -D_0^+ & \frac{L}{2\Delta t} D_0^- P_{12} & D_0^- \\ O & O & D_0^- & O \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta z_{up} \\ \Delta q_{up} \\ \Delta z_{dn} \\ \Delta q_{dn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -G_{up} \\ -G_{dn} \\ -G_x \\ -G_y \\ -C_+ \\ -C_0 \\ -C_- \end{bmatrix} \quad (5.56)$$

ここに, O は零行列である.

式 (5.56) は, Newton-Raphson 法に基づく開水路網非定常流のシステム・モデルであり, 連立一次方程式の解法を用いることによって, 枝上・下流端の未知水理量を求めることができる. 外部点の未知水理量が求められると第 4.3 節で示した MacCormack 法の差分スキームにより, 内部点の未知水理量を求めることができる.

5.5 結言

本章では, 分流・合流部のエネルギー損失を考慮するため, 分流・合流点を断面急変部としてモデル化し, それに対する運動方程式と貯留方程式を導入した場合の開水路網のシステム・モデルの定式化を行った. 得られた結果をまとめれば以下のようなになる.

- (1) 開水路網システムにおいて, 分流・合流点の水理特性を考慮に入れてるため, 運動量方程式の水圧項に関する水面幅として実水面幅, 仮想水面幅の概念を導入し, 水面幅の統一的な表示法を示した. そして, x, y 方向の運動方程式を Newton-Raphson 法で解く場合の行列表示式 (5.34), (5.35) を得た.
- (2) 分流・合流点の貯留効果を導入するために節点における貯留方程式を検討し, 運動方程式と同様に Newton-Raphson 法で解く場合の行列表示式 (5.46) を得た.
- (3) 入・出連結行列を用いて枝方程式および節点方程式が行列表示され, システム・モデルは式 (5.56) のように定式化された. これは, 任意の開水路網形状に適用することができる.

参考文献

- 1) 藤田一郎・河村三郎: 開水路合流部流れの三次元構造, 水工学論文集, 第 34 巻, pp.301-306, 1990.
- 2) Weerakoon, S. B., Tamai, N. and Kawahara, Y.: Bed topography, bed shear stress distribution and velocity field in a confluence, *Proc. of Hydraul. Eng., JSCE*, Vol.34, pp.307-312, 1990.
- 3) Cheng, L., Komura, S. and Fujita, I.: Numerical simulation of the confluence flow by using $k-\epsilon$ model, *Proc. of Hydraul. Eng., JSCE*, Vol.36, pp.169-174, 1992.
- 4) 室田 明・多田博登: 一次元水面形解析における合流点モデルに関する研究, 土木学会論文集, 第 405 号/II-11, pp.129-138, 1989.
- 5) Chow, V. T.: *Open-channel hydraulics*, McGraw-Hill Book Company, Inc., pp.512-516, 1959.
- 6) Law, S. W. and Reynolds, A. J.: Dividing flow in an open channel, *J. Hydraul. Div., Proc. ASCE*, pp.207-231, Vol.92, HY2, 1966.
- 7) 神田 徹・山崎 篤: 開水路合流部の流れの水理学的特性, 建設工学研究所報告, 第 19 巻, pp.137-153, 1977.
- 8) 神田 徹・井澤元博: 開水路網定常流のマトリックス解析法, 土木学会論文報告集, 第 262 号, pp.25-40, 1977.
- 9) 神田 徹・桑田明仁: 都市河川網における洪水追跡に関する二, 三の検討, 第 22 回水理講演会論文集, pp.245-252, 1977.
- 10) Lin, J. D. and Soong, H. K.: Junction losses in open channel flow, *Water Resour. Res.*, Vol.15, No.2, pp.414-418, 1979.
- 11) 秋元 保: 開水路不定流の数値解析法, 第 14 回水理講演会講演集, pp.79-84, 1969.
- 12) 前掲 6).

- 13) 常松芳昭:定常開水路網流れの解析法, 広島大学工学部研究報告, 第34巻, 第2号, pp.201-209, 1986.
- 14) 岸 力著:水理学演習(1), 学献社, pp.206-217, 1968.
- 15) 前掲4).
- 16) 前掲11).

第6章 モデル水路および実河川網への適用例

6.1 緒言

本章では, 前章までに得られた各種解析方法を用いて具体的に数値計算を行って, 提案した手法の非定常流計算に対する有効性を検討する.

まずはじめに, 本章の第2節では河川網形態の基本単位であるY型のモデル水路を対象として非定常流の数値シミュレーションを行い, 数値解の精度, 安定性, および, 演算処理時間の比較を行う.

つぎに, 各種計算手法の実用性を確認するため, 現実の河川網を対象とした非定常流計算のうち, ここでは洪水流に限定した解析を行うことにする. 実河川の形態は, 一般に溪流, 山地河川, 平地河川の3種類に分けられ¹⁾, それぞれにおいて流路の形態や流れの性質が異なるので²⁾, 本章の第3節では平地河川の例として広島デルタに発達する太田川の感潮河川網を取り上げ, また, 本章の第4節では山地河川の例として扇状地形を有する広島県の三次市付近の合流部を取り上げて, それぞれについて洪水流解析を行う.

Table 6.1 (a) Conditions of subreaches (confluence model).

Channel number	I	II	III
Length(m)	1,000	1,000	3,000
Width(m)	50	50	100
Slope	1/1,000	1/1,000	1/1,000
Manning's roughness	0.025	0.025	0.025

Table 6.1 (b) Conditions of subreaches (diversion model).

Channel number	I	II	III
Length(m)	1,000	3,000	3,000
Width(m)	100	50	50
Slope	1/1,000	1/1,000	1/1,000
Manning's roughness	0.025	0.025	0.025

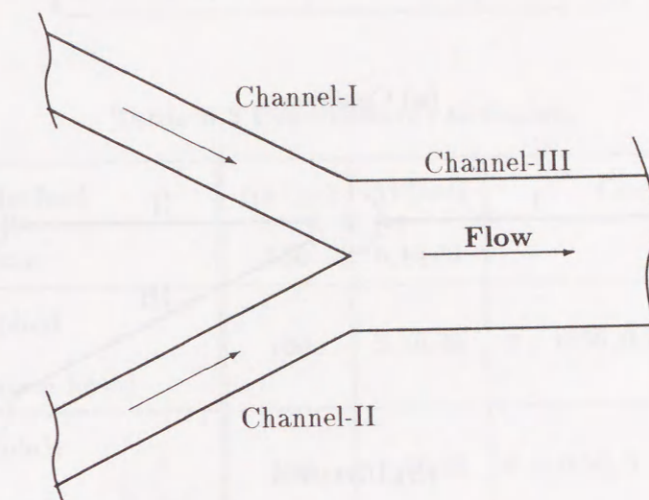
6.2 モデル水路における数値計算例

本節では、前章までに示した各種解析手法の有効性を比較するため、河川網の基本形である Y 型の分岐・合流水路における非定常流の解析を行う。

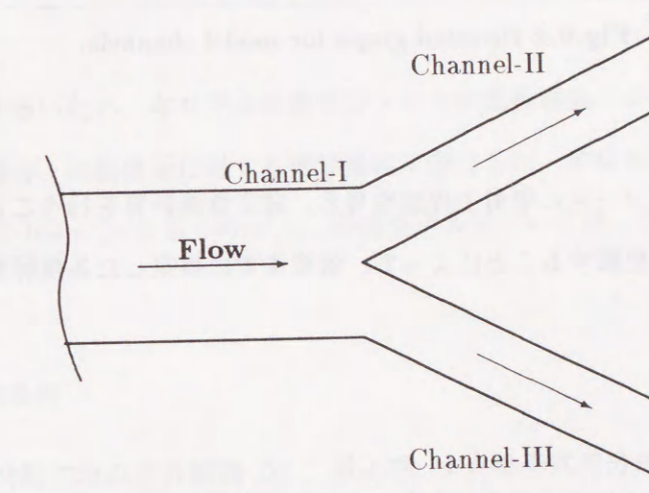
6.2.1 モデル水路

モデル水路としては Fig.6.1 に示すような河川網の構成単位である Y 型の分岐・合流水路を対象とする。対象モデルの諸元を Table 6.1 に示す。各水路はいずれも長方形断面である。

Fig.6.1 に対して、上流端をソース、下流端をシンク、分流・合流点を中間ノードとしてグラフ表示したものが Fig.6.2 である。ここに、算用数字は節点番号、ローマ数字は枝番号を表す。なお、下流側の水路（合流モデルでは枝 III、分流モデルでは枝 II, III）を上流側の水路より長く設定しているのは、分流・合流後において等流状態に十分漸近させるためであり、さらに、後述するように下流端の境界条件を固定するため、下流端に到達した微小擾乱が上流へ反射する影響を除去するためである。



(a) Confluence



(b) Diversion

Fig.6.1 Y-Type model channels.

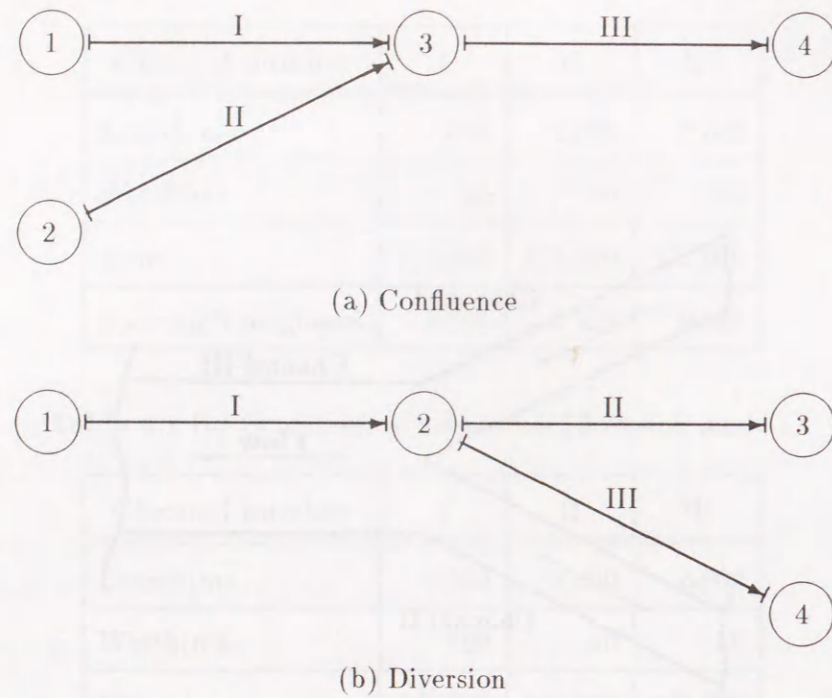


Fig.6.2 Directed graph for model channels.

6.2.2 計算条件

本節における計算は、ソースに単射上昇波を与え、非定常流計算を行うことにより、単射上昇波の下流への伝播状況を把握することによって、前章までに提案した各種解析手法の有効性を検討する。

(1) 初期条件

まずはじめに、Table 6.2に示す条件のもとで定常計算を行い、その結果得られた水面形を初期条件として与えた。すなわち、初期状態における各枝の流量は、合流モデルの場合、枝 I, II は $100\text{m}^3/\text{s}$ 、枝 III は $200\text{m}^3/\text{s}$ 、分流モデルの場合、枝 I は $200\text{m}^3/\text{s}$ 、枝 II, III は $100\text{m}^3/\text{s}$ である。

(2) 境界条件

境界条件としてはソースに単射上昇波を与え、シンクの水位は初期状態と同じとして固定した。なお、通例、単射上昇波は水位上昇で与えられるが、実河川網の非定常流計算では、ソースには

Table 6.2 Boundary conditions in initial state.

Model	Confluence	Diversion
Source(discharge)	$100\text{m}^3/\text{s}$	$200\text{m}^3/\text{s}$
Sink(depth)	2.0m	2.0m

Table 6.3 Conditions of calculation.

Method	Δx (m)	Δt (sec)	Coefficient
Characteristic	100	5,10,30	—
4-point Implicit (Conservation form)	100	5,10,30	$\theta = 0.55, 0.75, 1.00$
4-point Implicit (Non conservation form)	100	5,10,30	$\theta = 0.55, 0.75, 1.00$
MacCormack	100	5,10,30	$K_v = 0.0, 10^{-3}, 10^{-2}, 10^{-1}$

流量を与えることが多いため、本モデル水路ではソースの流量増加によって単射上昇波を与えることにした。その場合、初期流量に対する増加量は2割とした。すなわち、合流モデルについては、ソースの流量は $100\text{m}^3/\text{s}$ から $120\text{m}^3/\text{s}$ 、分流モデルについては、 $200\text{m}^3/\text{s}$ から $240\text{m}^3/\text{s}$ に増加させた。

(3) その他の計算条件

本検討に用いた時間方向の差分間隔 Δt 、および、4点陰形式差分法に含まれる重み係数 θ 、MacCormack 法に含まれる人工粘性係数 K_v は Table 6.3のとおりとした。これらの計算条件のうち $\Delta t = 5, 10$ (sec) は Courant-Friedrichs-Lewy 条件⁵⁾ (以後、C.F.L. 条件と略記する) を満たしている例、 $\Delta t = 30$ (sec) は C.F.L. 条件を満たしていない例として設定した条件である。

本来このような数値計算では空間方向の差分間隔 Δx も検討すべきパラメータであるが、実河川では断面距離間隔は河道断面資料の面から制約を受け、あらかじめ与えられることが普通である。したがって、ここでは各水路とも Δx は固定値とし、 Δt 、あるいは、4点陰形式差分法の θ 、MacCormack 法の K_v の特性について検討することとした。

Table 6.4 (a) Numerical stability of calculations (Characteristic).

Δt	—
5	stable
10	stable
30	stable

Table 6.4 (b) Numerical stability of calculations (4-point Implicit).

Δt	$\theta = 0.55$	$\theta = 0.75$	$\theta = 1.00$
5	damping	damping	damping
10	damping	stable	stable
30	stable	stable	stable

Table 6.4 (c) Numerical stability of calculations (MacCormack).

Δt	$K_v = 0.0$	$K_v = 10^{-3}$	$K_v = 10^{-2}$	$K_v = 10^{-1}$
5	stable	stable	stable	stable
10	stable	stable	stable	stable
30	not run	not run	not run	not run

6.2.3 各種解析手法による計算結果の比較

(1) 数値解の安定性

各種解析手法による数値解の安定性は、分流・合流とも同様な結果であったのでまとめて表示すれば、Table 6.4に示すとおりである。また、4点陰形式差分法では保存形および非保存形表示した2種類の基礎方程式を利用しているが、両者とも同様な傾向であったのでまとめて表示している。

さらに詳細にみるため、分流・合流点 (1.0km) を単射上昇波が通過する状況を示したものが Fig. 6.3および Fig. 6.4である。

まず、特性曲線法を用いた場合には、Fig. 6.3(a), Fig. 6.4(a) に示すようにいずれの場合にも安定した解が得られているが、ソースに単射上昇波のような急激な変化を与えたにも関わらず Δt

が大きくなるほど水深の変化が平滑化されている。とくに、この傾向は分流・合流点を通過した後に著しい。

C.F.L. 条件を満たしていない $\Delta t = 30$ (sec) の場合にも安定な解が得られているが、特性方程式を単純に前進差分法などで陽的に離散化した場合には、数値解は不安定となり、計算不能となるはずである³⁾。これは本研究のように Galerkin 法による陰形式差分法で離散化した場合は、従来のように特性方程式を前進差分法で陽的に離散化したものに比較して、安定な解が得られることを示していると考えられるが、特性曲線法では C.F.L. 条件を満たすことが前提であるから、実際に非定常流計算を行う場合には留意しなければならない点である。

つぎに、4点陰形式差分を用いた場合には、保存形、非保存形表示で若干の違いはあるものの、ほぼ同様な傾向であったのでまとめて表示すれば、Fig. 6.3(b)~(d), Fig. 6.4(b)~(d) に示すようになる。重み係数 θ 、および、 Δt の組み合わせにより数値解がまったく異なった挙動を示していることがわかる。たとえば、 $\theta = 0.55$ の場合には、著しい振動を起こしており、このような傾向は Δt が小さくなるほど顕著である。しかし、水深が大きくなるとそのような傾向は見られず、安定した解が得られている。神田ら⁴⁾は、このような傾向を次式に示す無次元量 K を用いて議論している⁵⁾。

$$K = 2\theta(\sqrt{gh} + v)\left(\frac{\Delta t}{\Delta x}\right). \quad (6.1)$$

ただし、 g は重力加速度、 h は水深、 v は流速である。

神田らの提案した無次元量 K を初期状態における水量により計算すると Table 6.5 のようになる。ただし、水深 h は 1.3m、流速 v は 1.5m/s である。また、簡単のため合流モデルで得られた結果のみを示している。

これらの結果から、無次元量 K が 0.6 より小さい場合には計算結果に振動が現れていることがわかる。また、 K が 1.0 以上で θ が大きくなると水深の変化が平滑化され、とくにこの傾向は、特性曲線法のとくと同様に、分流・合流点を通過した後に著しい。

基礎方程式を保存形表示した場合と非保存形表示した場合は明確な差は見られないことは先述したとおりであるが、これは、基礎方程式を保存形表示したにもかかわらず、4点陰形式差分法で差分化した場合に、 $\theta = 0.5$ 以外では保存則差分スキームにはならないためであると考えられる⁶⁾。

³⁾神田らは、 $K \approx 1.0$ では θ の値に関わらず安定な解が得られ、 $K < 1.0$ では解は不安定となることを指摘している。また、 $K > 1.0$ では $0.5 < \theta \leq 0.6$ のとき波先の再現性は優れるが振動する恐れがあり、 $0.6 < \theta \leq 1.0$ では安定性はあるが波先は平滑化されるとしている。

Table 6.5 Nondimensional value "K"

Δt	$\theta = 0.55$	$\theta = 0.75$	$\theta = 1.00$
5	0.3	0.4	0.5
10	0.6	0.8	1.0
30	1.7	2.2	3.0

さらに、特性曲線法のとくと同様に水深が大きくなると安定した結果が得られているのは、流量が増加することによって伝播速度 $\sqrt{gh} + v$ が大きくなり相対的に K が大きくなったことが原因として考えられる。

つぎに、MacCormack 法を用いた場合には Fig.6.3(e)~(h), Fig.6.4(e)~(h) に示すように計算条件の差異による計算結果の違いはほとんど見られない。しかし、先に述べた特性曲線法や4点陰形式差分法とは異なった傾向を示している。すなわち、波先はソースの境界条件の急激な変化に追従しており、分流・合流点を通過した後も数値解が平滑化されることなく単射上昇波が下流へ伝播していることがわかる。したがって、MacCormack 法のような保存形差分スキームを用いると、急激な変化の非定常流計算に対しても有効であることがわかる。

また、人工粘性係数 K_v の違いによる差異はほとんど見られないが、これは常流から常流への遷移流れを対象としているためと考えられる。射流を含む流れを対象とする場合、人工粘性係数の値によっては数値振動を起こす可能性もあり、人工粘性係数の取扱いは非常に重要である⁷⁾。

なお、C.F.L. 条件を満たしていない $\Delta t = 30$ (sec) の場合、枝の上・下流端付近から不安定性が生じ、数ステップで計算が不能となった。

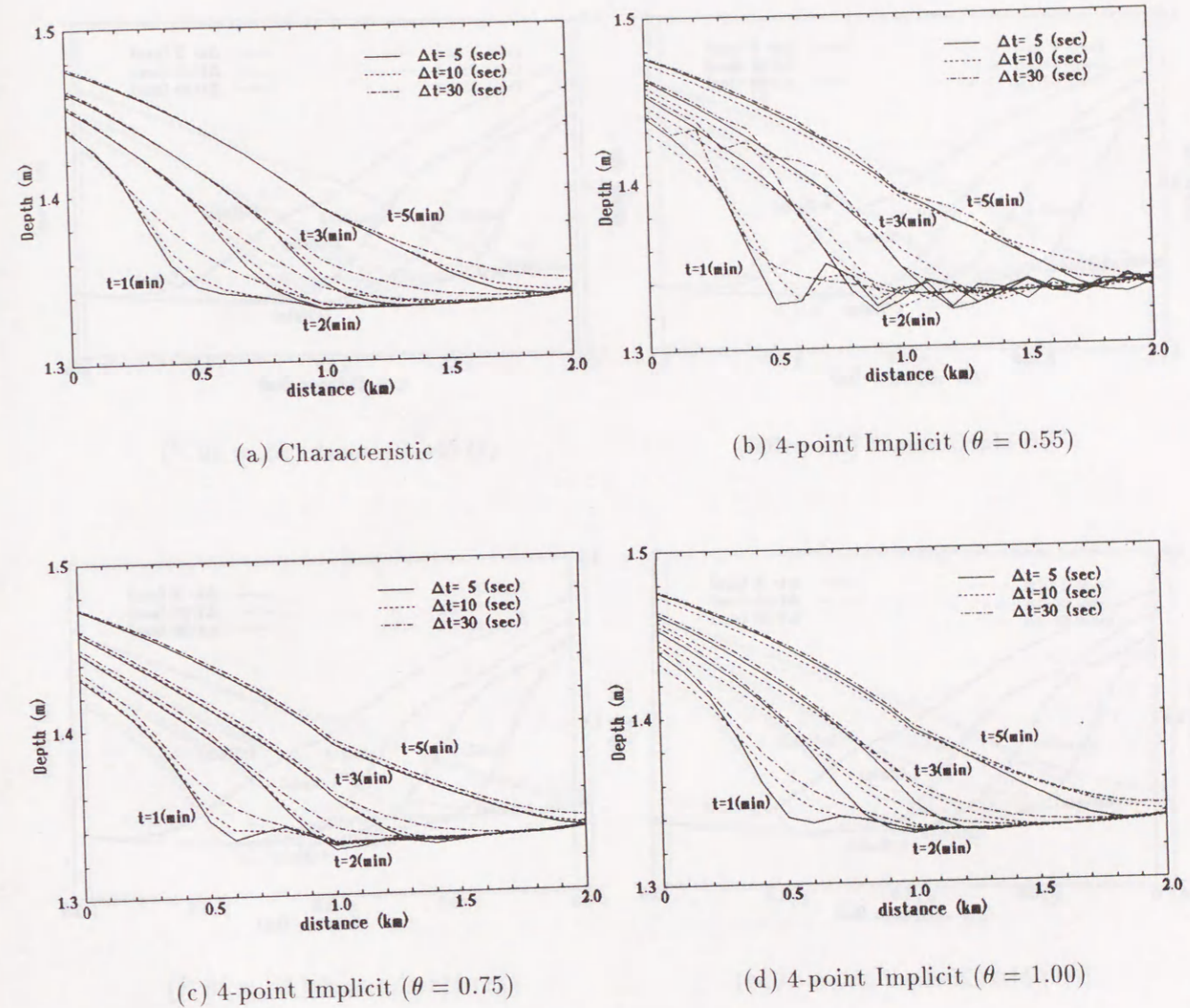
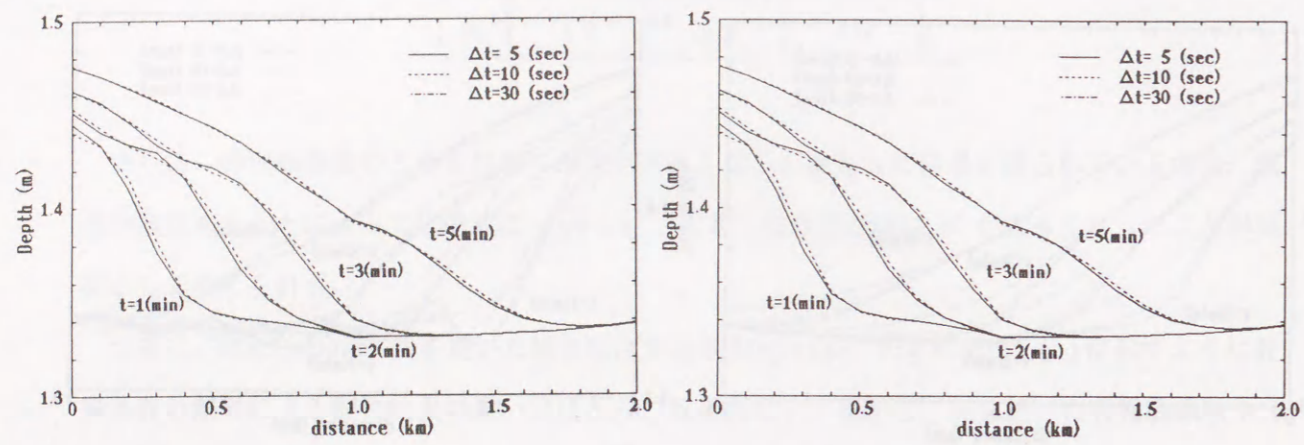
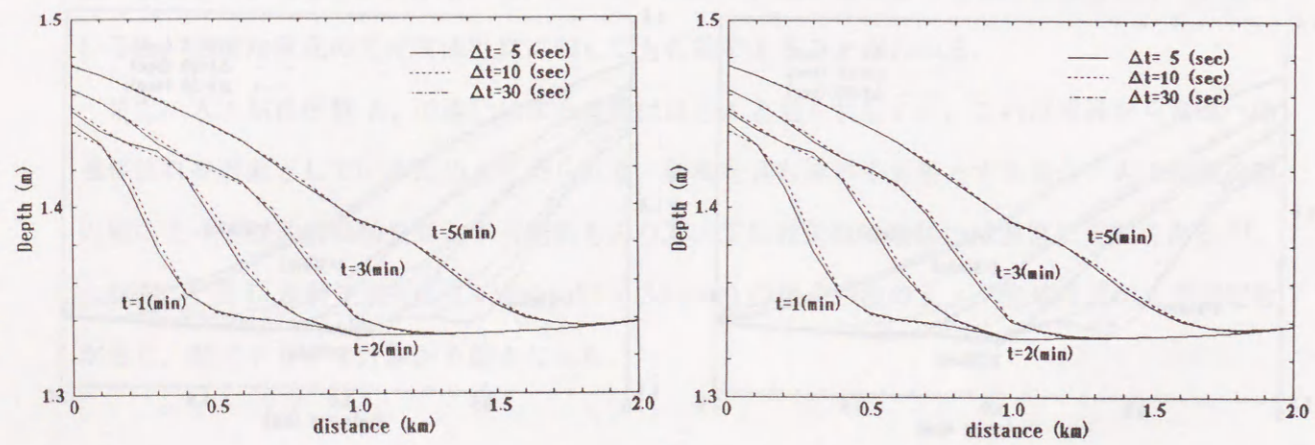


Fig.6.3 Depth in confluence channel.



(e) MacCormack ($K_v = 0.0$)

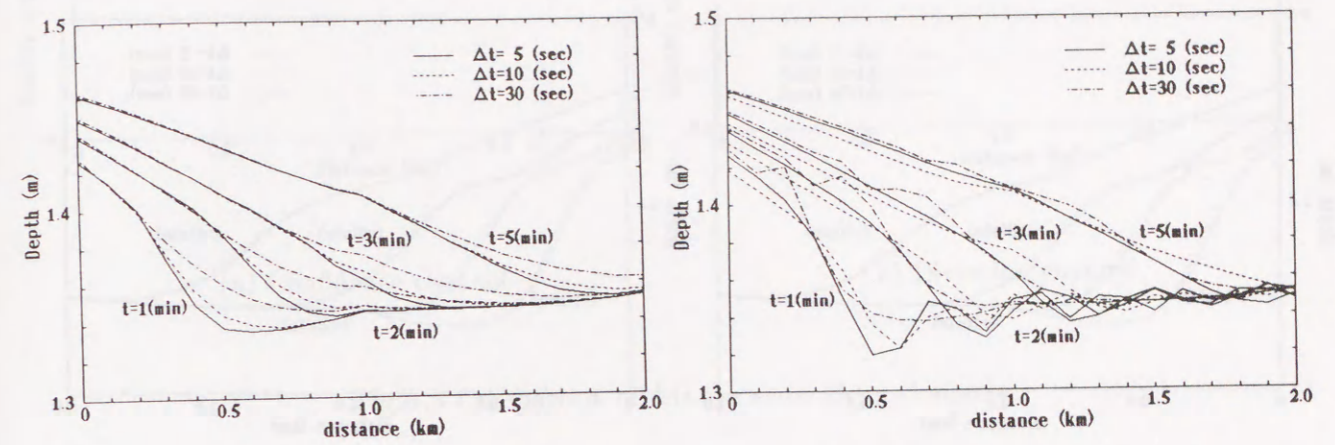
(f) MacCormack ($K_v = 10^{-3}$)



(f) MacCormack ($K_v = 10^{-2}$)

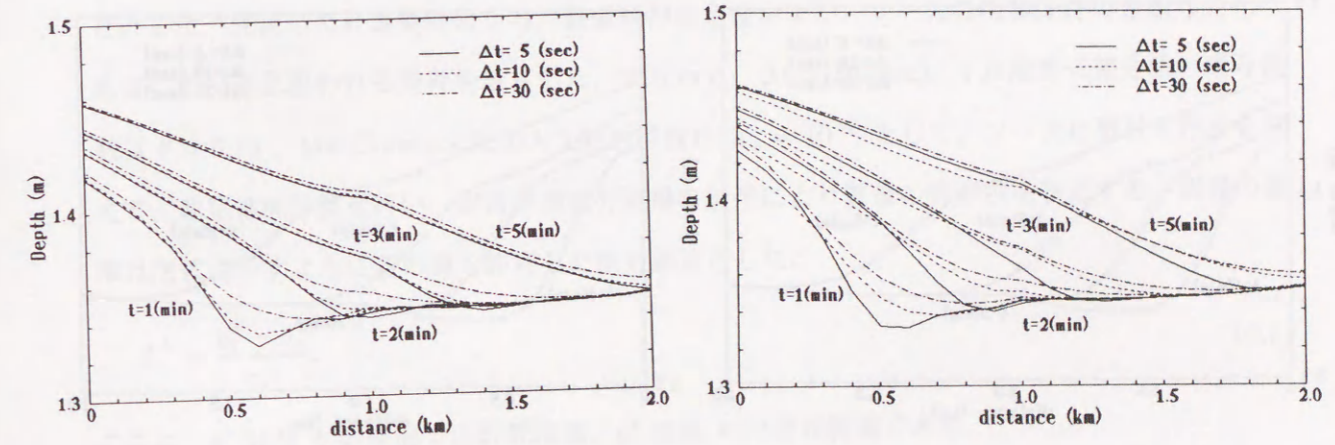
(f) MacCormack ($K_v = 10^{-1}$)

Fig.6.3 Depth in confluence channel(continued).



(a) Characteristic

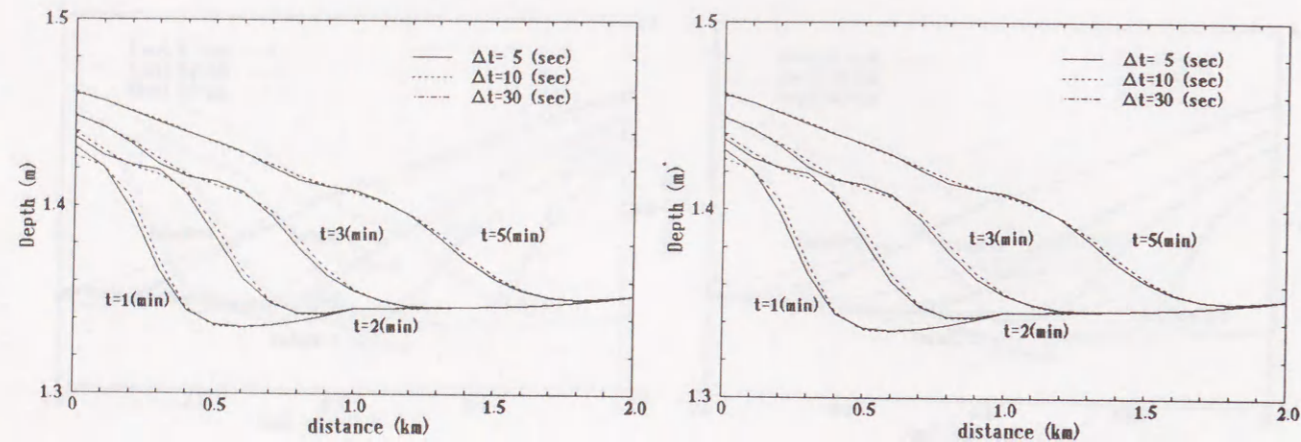
(b) 4-point Implicit ($\theta = 0.55$)



(c) 4-point Implicit ($\theta = 0.75$)

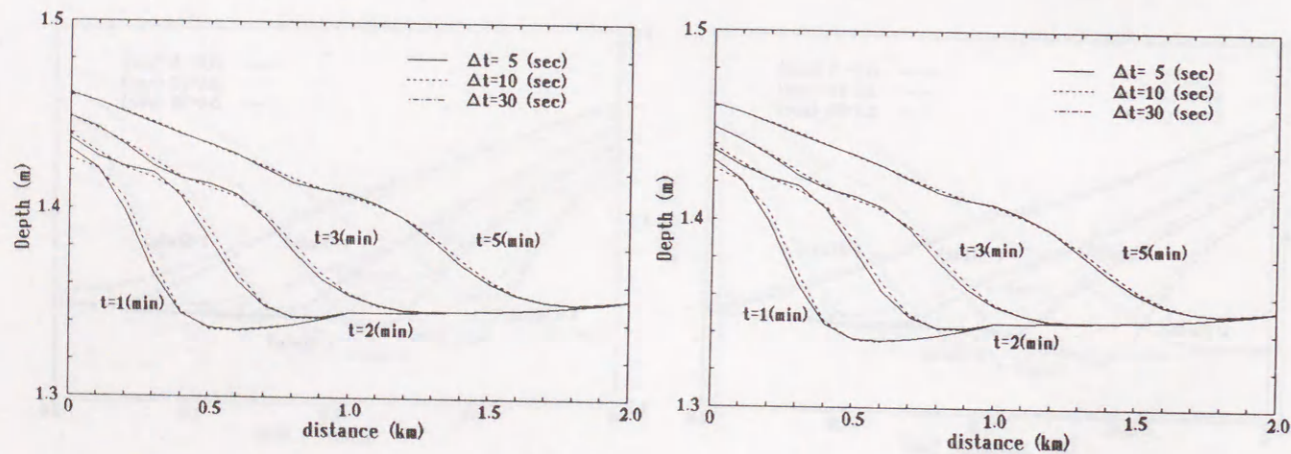
(d) 4-point Implicit ($\theta = 1.00$)

Fig.6.4 Depth in diversion channel.



(e) MacCormack ($K_v = 0.0$)

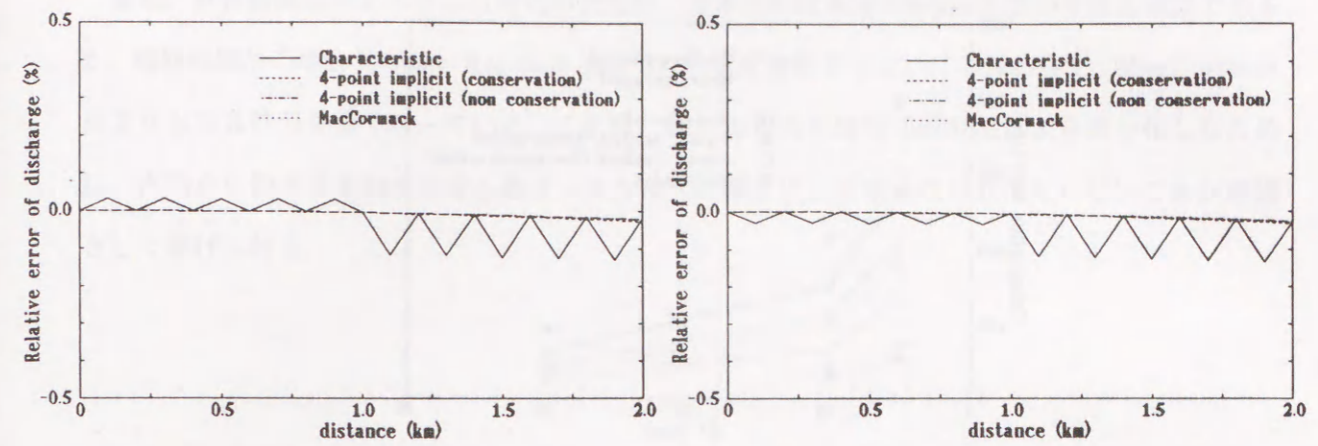
(f) MacCormack ($K_v = 10^{-3}$)



(f) MacCormack ($K_v = 10^{-2}$)

(f) MacCormack ($K_v = 10^{-1}$)

Fig.6.4 Depth in diversion channel(continued).



(a) Confluence channel

(b) Diversion channel

Fig.6.5 Comparison of relative error along channels.

(2) 数値解の精度

数値解の精度は、定常到達時の流量をもとに質量の保存性を検証することによって確認することとした。先述した計算条件のうち、数値解の安定性がよく、ソースの境界条件の急激な変化に追従していると思われる条件を設定した。すなわち、 $\Delta t = 10$ (sec)、4点陰形式差分法の重み係数は $\theta = 0.75$ 、MacCormack法の人工粘性係数は $K_v = 10^{-3}$ として、ソースに単射上昇波を与えて、非定常流計算を行い、定常到達後の流量の誤差により質量の保存性を検討する。誤差の基準は次式に示すように負の値も許容した相対誤差とした。

$$E_i^k = \frac{q_i^k - q_c^k}{q_i^k} \tag{6.2}$$

ここに、 q_i^k は枝 k の断面 i の計算流量、 q_c^k は枝 k の定常流量である。

式(6.2)により計算された流量の相対誤差の縦断方向の変化を示したものが、Fig.6.5である。

この図からわかるように、分流・合流点上流では各解析手法とも保存性は優れているが、分流・合流点下流では計算流量が定常流量より若干小さくなっており、分流・合流点を通ると厳密には保存性を満たさなくなることがわかる。また、特性曲線法を用いた場合には、 $2\Delta x$ を周期とする数値振動が生じているが、これは、特性方程式の非斉次項を陽的に付加していることが原因と考えられる。しかし、相対誤差は0.1%程度であり、実際の非定常流計算を行う場合には問題ないと考えられる。

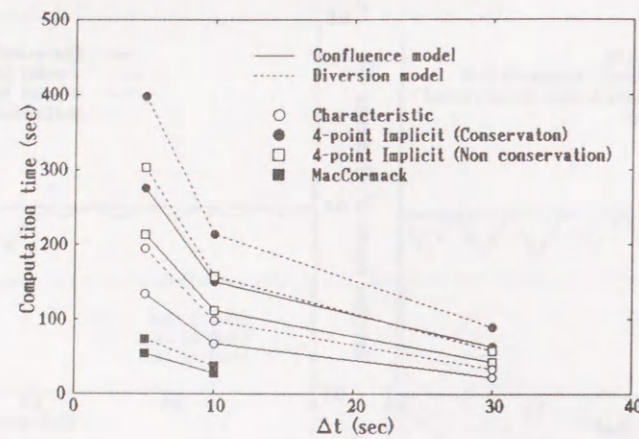


Fig.6.6 Comparison of computation time.

(3) 演算時間

数値計算を行う場合、数値解の精度、安定性の問題と並んで演算処理時間の問題も非常に重要である。ここでは、各解析手法に対する演算処理時間について述べることにする。

モデル水路の形状と諸元は Fig.6.2 および Table 6.1 と同様である。また、計算条件は Table 6.3 と同様であるが、4点陰形式差分法の場合の重み係数は $\theta = 0.75$ 、MacCormack 法の場合の人工粘性係数は $K_v = 10^{-2}$ の1種類のみとした。境界条件も前項同様に単射上昇波をソースに与えて、1時間の非定常流計算を行い、それに要する演算処理時間を比較することとした。

得られた結果は Fig.6.6 に示すように、何れの手法も分流点モデルの方が演算時間が長いことがわかる。これは、合流モデルについては合流前の水路の流量から合流後の水路の流量が陽的に求められるのに対して、分流モデルでは分流前の水路の流量から分流後の水路の流量を陽的に求めることができないため、システム方程式を連立方程式として解く場合の収束計算に多くのステップ数が費やされるためであると考えられる。

また、各解析手法間の演算時間を比較すればつぎのようになる。すなわち、分流・合流モデルとも MacCormack 法が演算時間が最も短く、特性曲線法、非保存形表示した4点陰形式差分法、保存形表示した4点陰形式差分法の順に演算時間は長くなる。4点陰形式差分法の場合は、システム方程式の次元が大きく、Newton-Raphson 法による繰り返し計算のため計算時間が長くなることは明らかであるが、非保存形表示と保存形表示で差異が生じているのは、前者は後者に比べて微係数項が広幅の仮定により単純化されており、非線形性が弱いためと考えられる。

また、特性曲線法のシステム方程式の次元は、基本的には MacCormack 法のそれと同様であるが、特性曲線法の場合 Newton-Raphson 法を用いた収束計算をしないにも関わらず、MacCormack 法よりも演算時間が長くなっている。これは、特性方程式を陰形式差分法により差分化したために、内部点に関する未知水量も連立一次方程式の解法により求めなければならないことが原因として挙げられる。

Model	Method	Time (sec)	Accuracy	Stability
Confluence	MacCormack	20	High	Stable
	Characteristic	50	High	Stable
Diversion	MacCormack	30	High	Stable
	4-point Implicit (Conservation)	100	High	Stable

6.3 低平地河川網の洪水流解析

本節では提示した3つの解析手法の実際問題への適用性を調べるために、手始めとして、広島デルタを流下する太田川の感潮河川網における洪水流況を解析した結果について述べる。

6.3.1 対象開水路網とグラフ表示

低平地河川網の例として取り上げた一級河川太田川は、Fig.6.7に示すように広島デルタに入ると大芝水門、祇園水門により太田川放水路および旧太田川に分派されている。さらに旧太田川は5つの派川に分派しており、典型的な低平地河川網を形成している。

本節においては広島デルタの河川網のうち、大芝水門より下流の河川網を計算の対象とする。なお、Fig.6.7に示すようにNo.1~No.4の4つの地点において水位観測が行われている。

Fig.6.7において大芝水門をソースに、広島湾をシンクに、分流点を中間ノードとしてグラフ表示したものがFig.6.8である。なお、算用数字は節点番号、ローマ数字は枝番号を表す。本対象河川網は感潮域であり、順流、逆流が存在するため、有向枝の向きは順流の方向に大芝水門から広島湾へ向かって定義している。各河川の平均的な水路諸元をTable6.6に示す。

Table 6.6 Channel conditions of Ohta River.

Channel	Length(m)	Width (m)	Slope	Manning's roughness
I	800	190~250	1/800	0.028
II	1,400	150~260	1/800	0.028
III	2,400	60~120	1/1,300	0.028
IV	800	100~150	Level	0.028
V	6,200	60~350	Level	0.028
VI	4,200	70~300	Level	0.028
VII	3,200	50~280	Level	0.028
VIII	3,200	60~180	Level	0.028
IX	5,600	80~250	Level	0.028

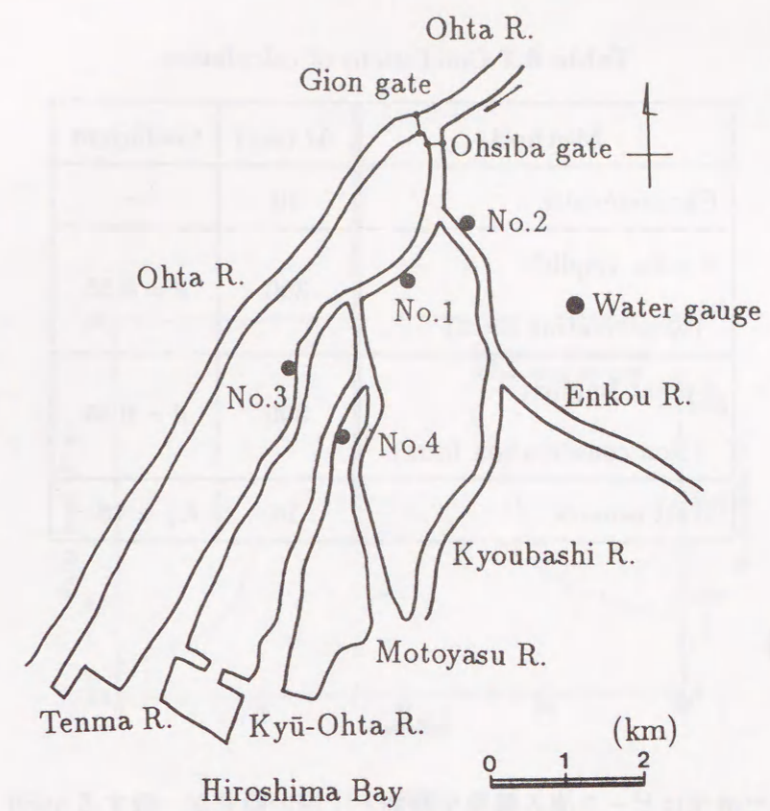


Fig.6.7 Sketch map of Ohta River network.

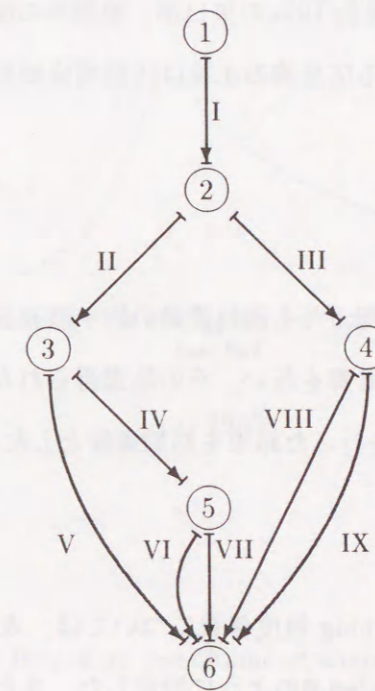


Fig.6.8 Directed graph of Ohta River network.

Table 6.7 Conditions of calculation.

Method	Δt (sec)	Coefficient
Characteristic	10	—
4-point Implicit (Conservation form)	300	$\theta = 0.55$
4-point Implicit (Non conservation form)	300	$\theta = 0.55$
MacCormack	10	$K_v = 10^{-3}$

6.3.2 計算条件

(1) 対象洪水

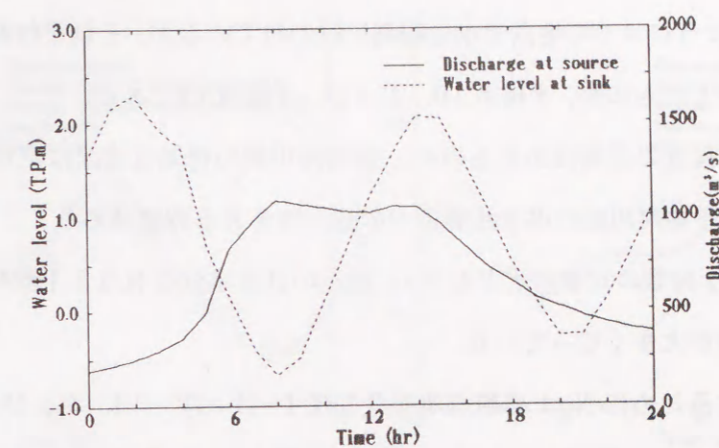
解析の対象とした洪水はピーク流入量発生時刻と干潮の時刻が一致する1980年8月31日の洪水、および、ピーク流入量発生時刻と満潮の時刻が一致する1985年6月27日の洪水である。なお、ソースとなる大芝水門からの流出流量は明確に把握されていないので、大芝水門の操作ルールを参考にして、大芝水門から上流約1kmの矢口第一観測所の流量の1/3が旧太田川に流入するものとした。また、シンクにおける広島湾の水位は江波潮位観測所の資料を用いた。ソース、シンクの境界条件をFig.6.9に示す。

(2) 初期条件

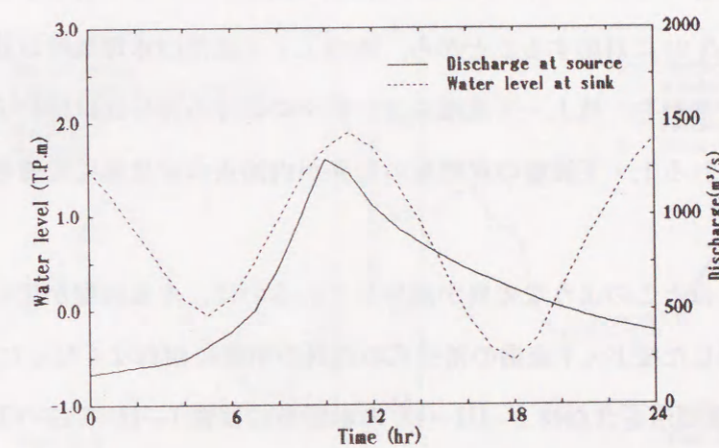
初期条件としては、解析対象時間よりも潮位変動の約1波長前にソースから流入する流量、および、シンクの水位を用いて定常計算を行い、その結果得られた開水路網内の各断面の水位・流量を用いて12時間の非定常計算を行った結果を初期条件とした。

(3) その他の計算条件

その他の計算条件として、Manning粗度係数については、太田川水系の工事实施基本計画⁸⁾で検討されている値をもとにTable6.6のように設定した。また、距離差分間隔は横断面測量結果から $\Delta x = 200$ (m)とした。さらに、時間差分間隔、および、4点陰形式差分法の重み係数、MacCormack法の人工粘性係数 K_v についてはTable6.7のように設定した。



(a) 1980



(b) 1985

Fig.6.9 Boundary conditions at source and sink.

6.3.3 計算結果および考察

(1) 分流・合流点のエネルギー損失を考慮しない場合

ここではまず、分流・合流点のエネルギー損失を考慮していない例として、第3章、第4章で検討した特性曲線法、4点陰形式差分法、MacCormack法により計算された結果を示すことにする。

Fig.6.7に示したように4つの地点で水位観測が行われているが、それぞれの観測地点の実測水位と計算水位を比較したものが、Fig.6.10、および、Fig.6.11である。

局所的には50cm程度の差異はあるものの、感潮河川網の複雑な流況は定性的に再現されており、各解析手法の低平地河川網の洪水流解析への適用性のある程度認めることができる。しかし、1980年、1985年の2種類の対象洪水ともNo.1地点の計算水位を見ると干潮時(5hr)から次第に各種解析手法の差異が大きくなっている。

この原因を確認するためにNo.1の観測所を含む枝I→II→IV→VI、および、No.2の観測所を含む枝I→III→IXに沿って満潮時および干潮時の水面形を示したものがFig.6.12である。この図から、枝I→II→IV→VIでは水面勾配が比較的大きいとき、すなわち、流速が大きいときに解析手法毎の差異が顕著となっている。これらの差異は上流から1kmの付近から発生しており、この付近が分流点(節点2)に対応することから、枝の上・下流端の水理条件の差異によるものと推定される。すなわち、枝上・下流端を含む格子における差分式は解析手法ごとに異なっており、これから得られる上・下流端の水理量の差異が内部点の水理量に影響を及ぼしているためと考えられる。

また、下流へ行くほどこのような差異が減少しているのは、水面勾配が比較的緩やかになって流速が減少し、前述した枝上・下流端の差分式の差異が明確に現れなくなったものと考えられる。

さらに、No.2の観測所を含む枝I→III→IXの水面形には枝I→II→IV→VIほど有意な差は生じていないが、Table.6.6に示したように枝IIの水路幅が枝IIIの水路幅に比較してかなり大きく、枝IIIへの分派流量が小さくなっていることが原因と考えられる。

以上のように、枝上・下流端の差分式や水路条件の差異により、各解析手法ごとに分流点から差異が生じてくるが、比較的流れの緩やかな感潮河川網の洪水流解析では、いずれの手法とも適用性のある程度認めることができる。

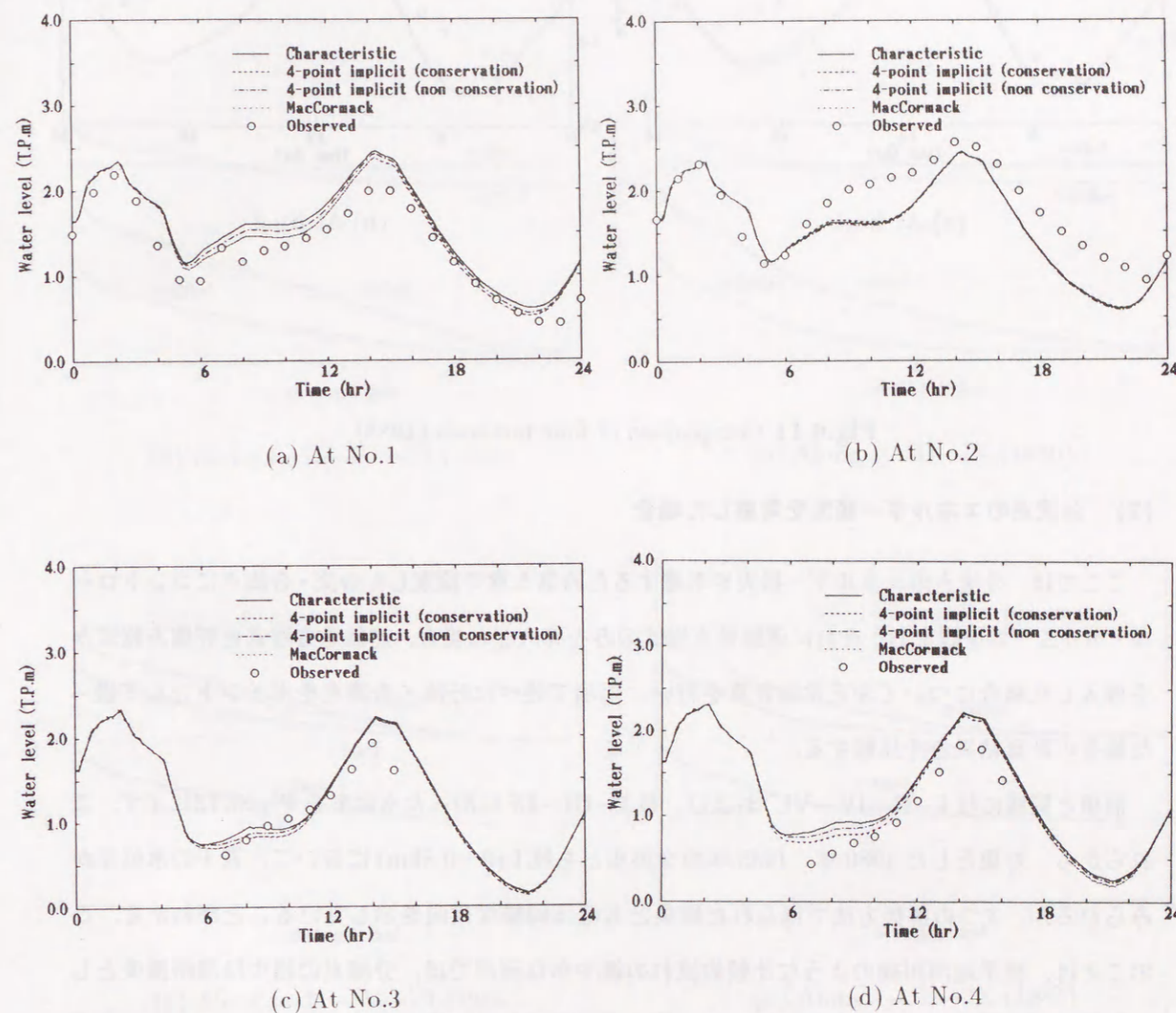


Fig.6.10 Comparison of four methods (1980).

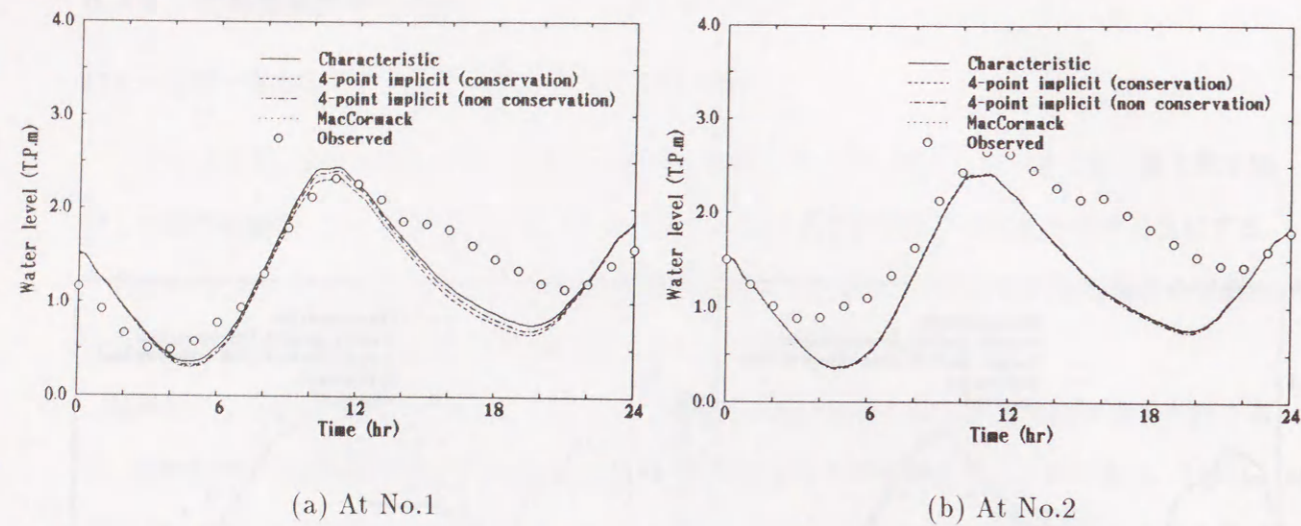
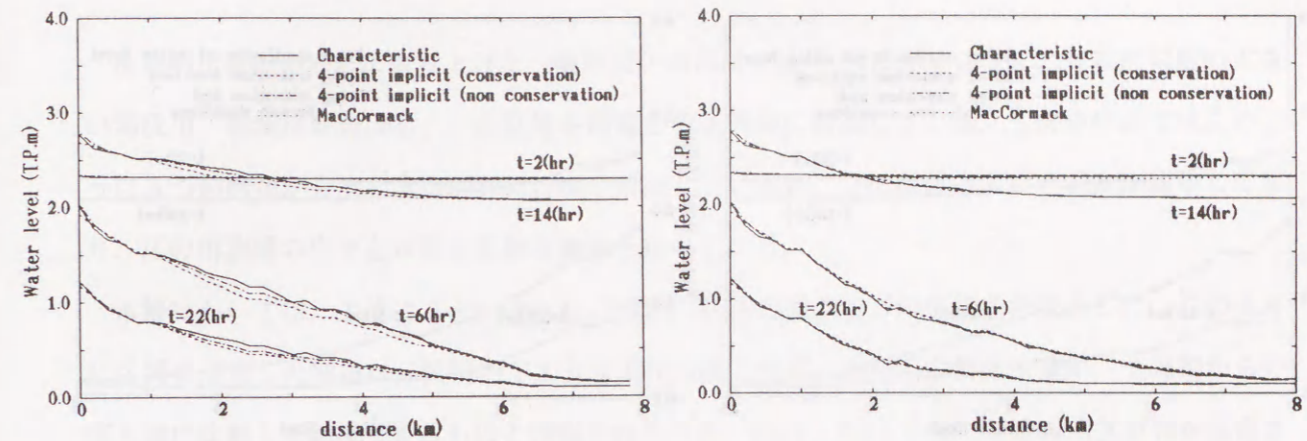


Fig.6.11 Comparison of four methods (1985).

(2) 分流点のエネルギー損失を考慮した場合

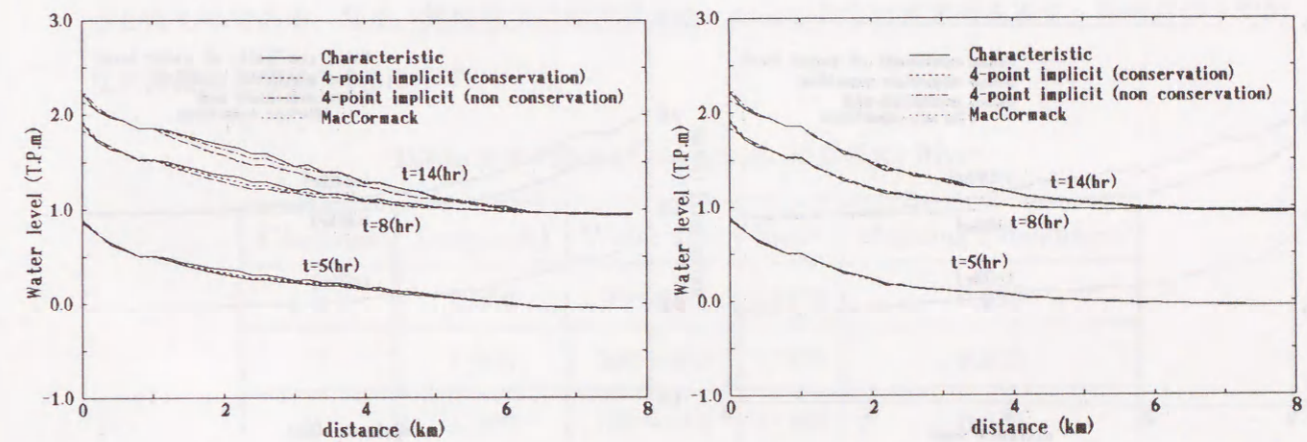
ここでは、分流点のエネルギー損失を考慮するため第5章で提案した分流・合流点にコントロール・ボリュームを設定し、それに運動量方程式のみを導入した場合、運動量方程式と貯留方程式とを導入した場合について非定常流計算を行い、前項で述べた分流・合流点をポイントとして扱った場合の計算結果とを比較する。

前項と同様に枝 I→II→IV→VI、および、枝 I→III→IX に沿った水面形を Fig.6.13 に示す。これらから、対象とした1980年、1985年の2洪水とも枝 I (0~0.8km) において、若干の水位差がみられるが、3つの解析方法で得られた結果ともほぼ同様な傾向を示していることがわかる。このことは、低平地河川網のような比較的流れの緩やかな河川では、分流点の損失は局所損失として無視できる程度のものであり、第3章、第4章で提案した分流・合流点をポイント・ソースで扱って、水位連続および流量連続の条件を用いることの妥当性の証左である。



(a) Along I→II→IV→VI (1980)

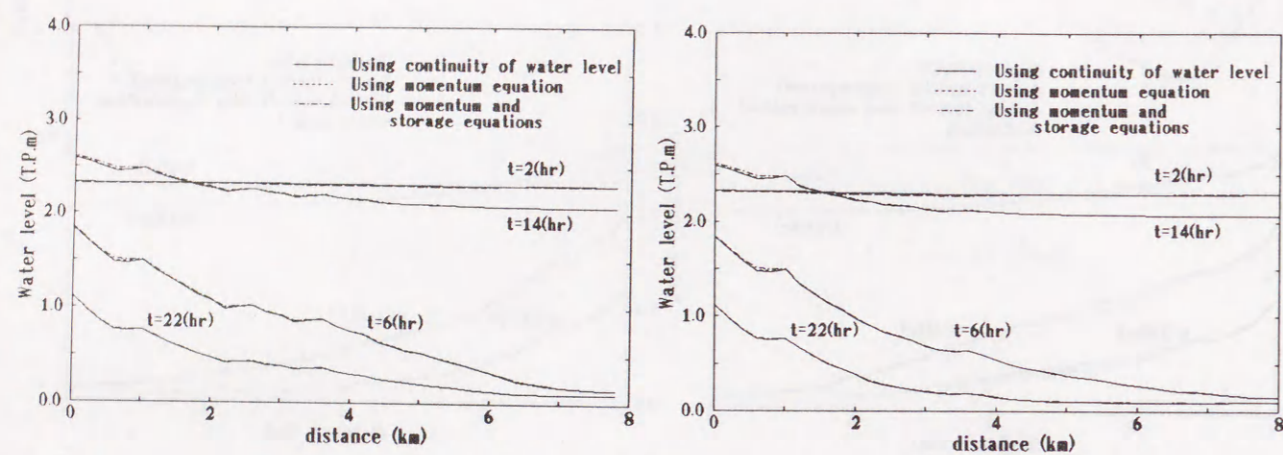
(b) Along I→III→IX (1980)



(c) Along I→II→IV→VI (1985)

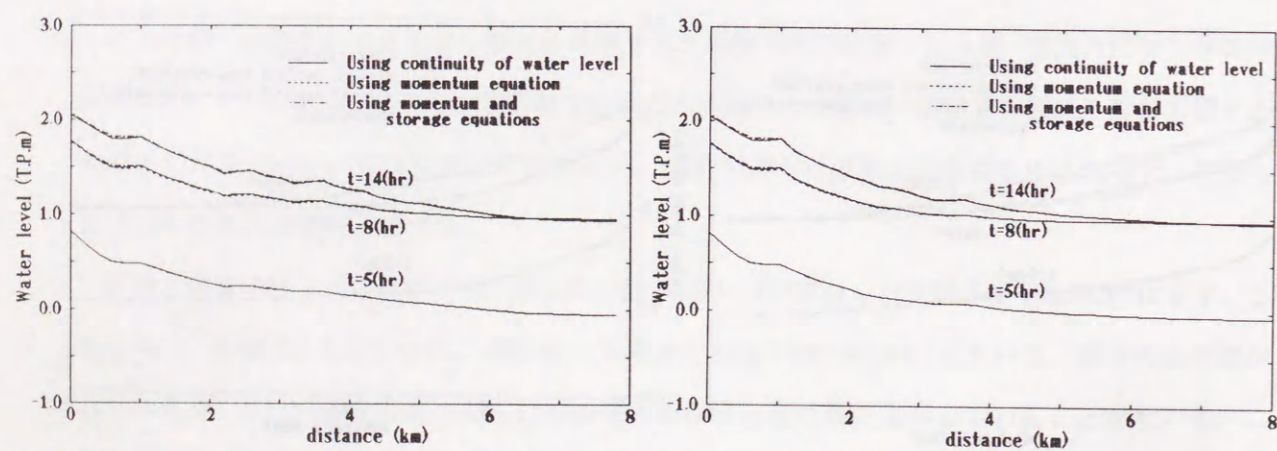
(d) Along I→III→IX (1985)

Fig.6.12 Comparison of water profiles.



(a) Along I→II→IV→VI (1980)

(b) Along I→III→IX (1980)



(c) Along I→II→IV→VI (1985)

(d) Along I→III→IX (1985)

Fig.6.13 Comparison of water profiles.

6.4 山地河川網の洪水流解析

本節では、提示した3つの解析手法の山地河川網への適用性を確認するために、三次盆地を貫流する江の川の河川網を例にして洪水流計算を行った結果について述べる。

6.4.1 対象河川網とグラフ表示

山地河川網の例として取り上げた一級河川江の川は Fig.6.14に示すように、比較的勾配の大きい馬洗川、西城川を合流し、三次盆地を南部から北西部に貫流している。三次市付近ではこのように3つの河川が合流し典型的な河川網を形成しているが、この付近は人口と資産が集中しており、江の川流域の中でも水防上重要な地域となっている。

本節においては、上流は No.1~No.3, 下流は No.4 の地点までの区間を対象とした。このような区間を選定した理由は、区間内で大きな支川は流入せず、各河川の横流入量が、上流端からの流入量に比較して無視できるものと判断されること、No.1~No.4 の地点で水理水文資料が完備されているためである。

Fig.6.15は、No.1~No.3をソースに、No.4をシンクに、合流点を中間ノードとしてグラフ表示したものである。なお、算用数字は節点番号を、ローマ数字は枝番号を表す。各河川の平均的な水路諸元を Table6.8に示す。

Table 6.8 Channel conditions of Gohno River.

Channel	Length(m)	Width (m)	Slope	Manning's roughness
I	2,000	90~150	1/470	0.035
II	4,000	200~360	1/470	0.035
III	1,000	100~150	1/400	0.035
IV	800	190~340	1/470	0.030
V	600	200~250	1/470	0.030

6.4.2 計算条件

対象区間内の河川勾配は比較的急であり、Froude 数が大きくなるため、前章までに提案した3つの各種解析手法のうち、特性曲線法、4点陰形式差分法では解が発散し計算不能であった。したがって、本節においては MacCormack 法により解析した結果についてのみ述べることにする。

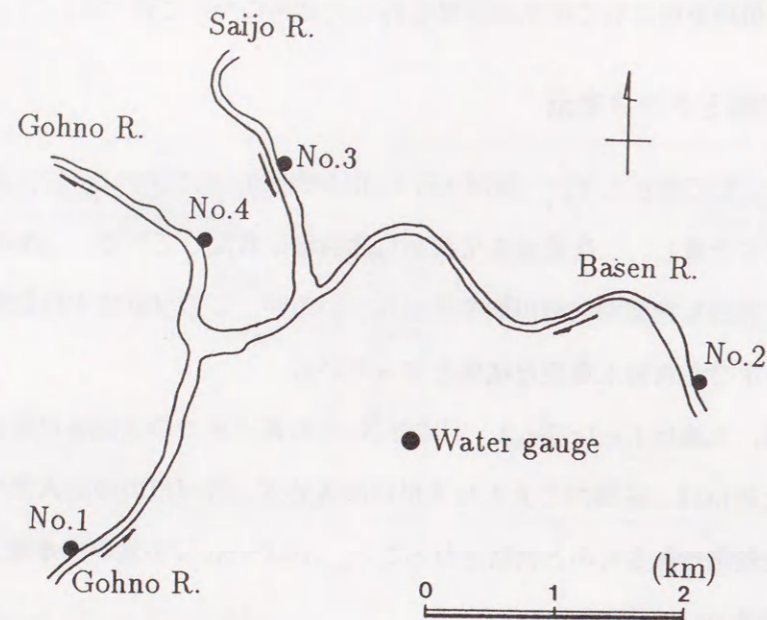


Fig.6.14 Sketch map of Gohno River network.

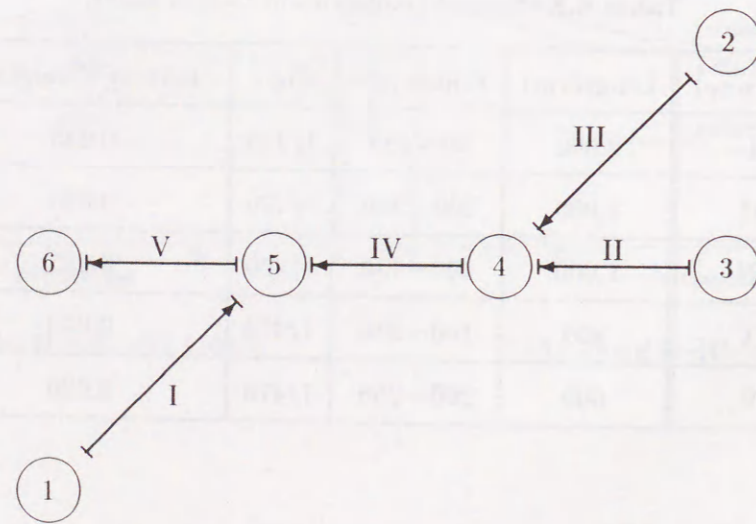


Fig.6.15 Directed graph of Gohno River network.

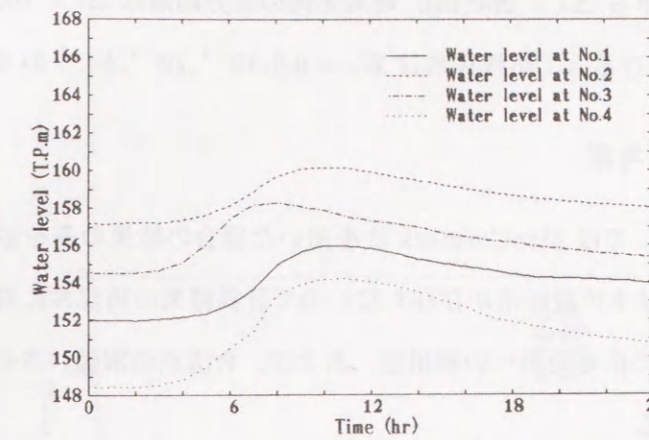


Fig.6.16 Boundary conditions at source and sink.

(1) 対象洪水

解析の対象とした洪水は、馬洗川と江の川の合流部付近にある高水敷が水没しない程度の中規模の洪水として、1983年7月27日の洪水とした。なお、前章までの解析法によるとソースには境界条件として流量のハイドログラフを与えることになるが、それぞれの観測所の流量は不等流計算によって得られた水位～流量関係から算出されたものであり、これをそのまま用いることは水位～流量関係がループを描くような非定常流を扱う場合には適当ではない。そこで、江の川の場合、特殊な例としてソースに対する境界条件も水位のハイドログラフで与えることにした。Fig.6.16に本計算で用いた境界条件を示す。なお、ソースに水位ハイドログラフが与えられた場合のシステム方程式を付録Aに示しておく。

(2) 初期条件

江の川河川網においては、前節で対象とした太田川河川網のようにシンクにおける水位が周期的な変動を示すことはないので、洪水の初期には定常状態が仮定できるため、対象期間初期のソース、シンクにおける水位を境界条件として与え、定常流計算を行うことにより各断面の水位、流量を求めて初期条件とした。

(3) その他の計算条件

その他の計算条件として、Manning 粗度係数については太田川の場合と同様に江の川水系の工事実施基本計画⁹⁾で検討されている値をもとに Table6.8のように設定した。また、距離方向の

差分間隔は横断測量結果から $\Delta x = 200(m)$, 時間方向の差分間隔は $\Delta t = 10(sec)$ とした. さらに, MacCormack 法における人工粘性係数は $K_v = 0.0, 10^{-3}, 10^{-2}, 10^{-1}$ の4種類を設定した.

6.4.3 計算結果および考察

先述した理由から, ここでは MacCormack 法を用いた場合の結果のみを示すことにする. また, 対象区間内においては水位観測所が存在しないので計算結果の再現性に対する議論はできないため, MacCormack 法の山地河川への適用性, および, 合流点の取扱い方の違いによる計算結果の差異について考察する.

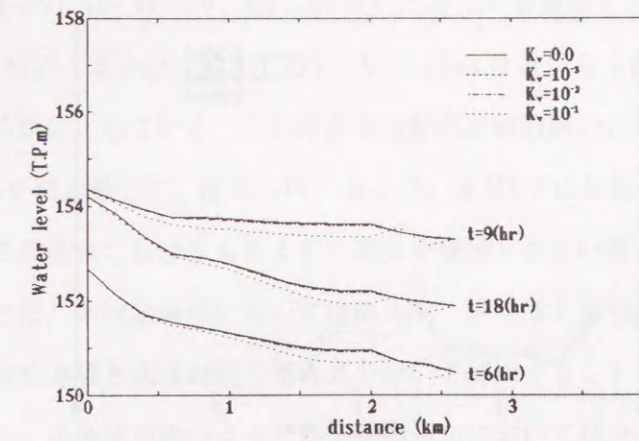
(1) MacCormack 法の山地河川網への適用性

先述した計算条件のもとで非定常流計算を行って得られた結果のうち枝 I→V, II→IV→V, III→IV→V に沿った水面形を Fig.6.17に示す. この図では人工粘性係数が大きな $K_v = 10^{-1}$ の場合を除いて, 人工粘性係数の差異にかかわらず同様の傾向を示しているため, 破線, 一点鎖線は表示されていないが比較的安定な解が得られている. また, 人工粘性係数を考慮していない $K_v = 0.0$ の場合も安定な解が得られていることから, 本対象洪水程度の流れでは人工粘性項を考慮する必要がないようである.

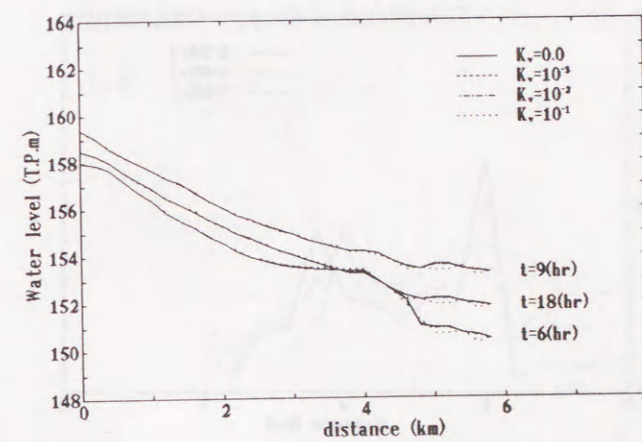
このことをさらに詳しく調べるために水面勾配が大きくなると考えられる増水期(2.4.6hr)のときの Froude 数の縦断的な変化を示したものが Fig.6.18である. この図から, Froude 数は区間全体としてはそれほど大きくないが, 局所的には 1.0 を越えて射流が発生していることがわかる. しかし, Fig.6.17に示したように比較的なめらかな水面形が得られており, MacCormack 法の山地河川網への適用は十分可能であると判断される.

また, 人工粘性係数が $K_v = 10^{-1}$ になると下流端付近で数値振動が生じているが, これは本来結果に影響を及ぼさないはずの高次の人工粘性項が, Froude 数の増大とともに大きくなり結果的に解に影響を及ぼしているためと推定される.

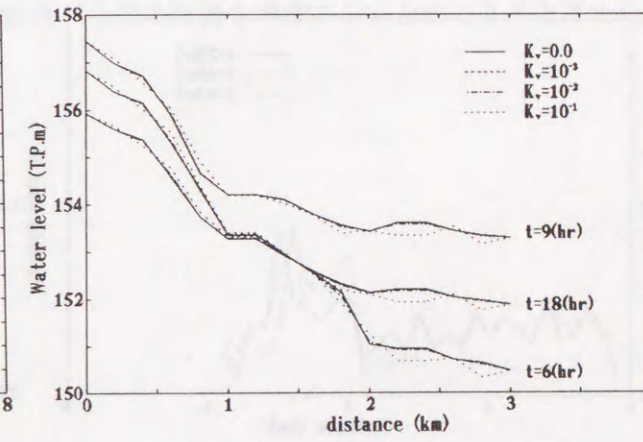
著者ら¹⁰⁾は, 急勾配のモデル水路において水路の全領域にわたって射流が発生するとき, 人工粘性項を考慮しない場合には数値振動が生じるという結果を得ているが, このことを合わせて考えると, 人工粘性係数は $K_v = 10^{-3} \sim 10^{-2}$ 程度の値が適当であると判断される.



(a) Along I→V

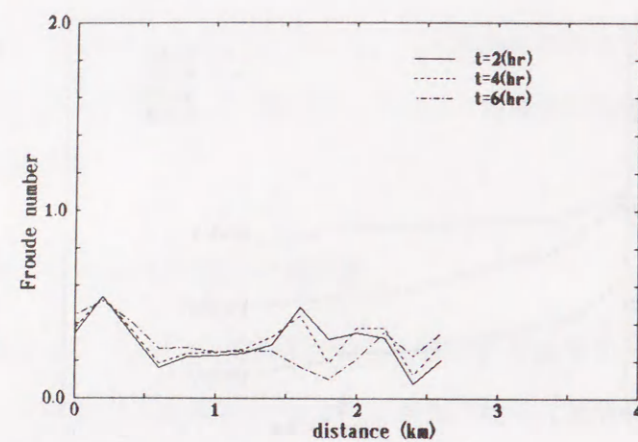


(c) Along II→IV→V

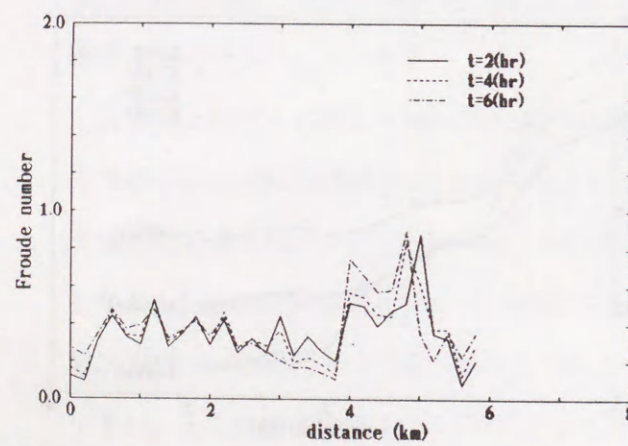


(d) Along III→IV→V

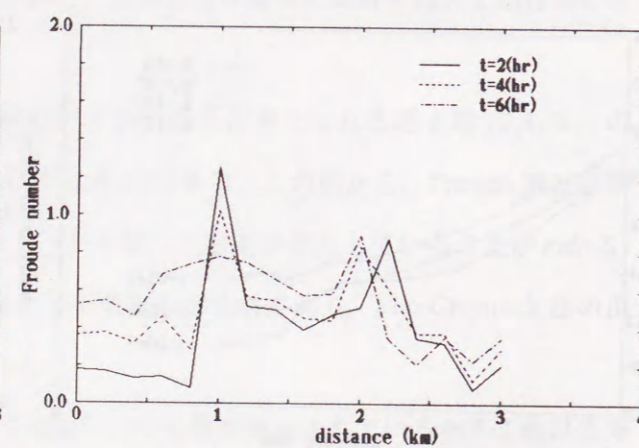
Fig.6.17 Water profiles along channel.



(a) Along I→V



(c) Along II→IV→V



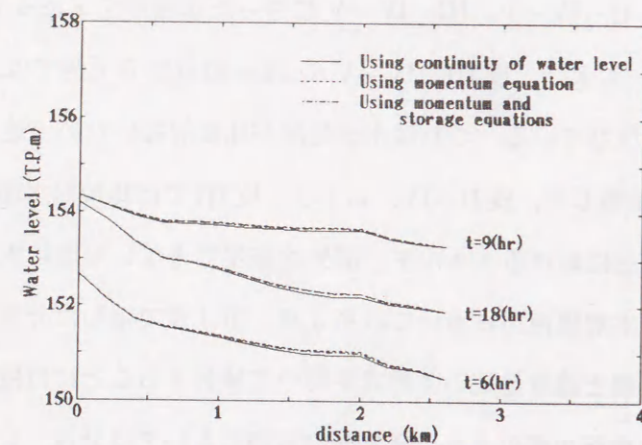
(d) Along III→IV→V

Fig.6.18 Froude number along channels.

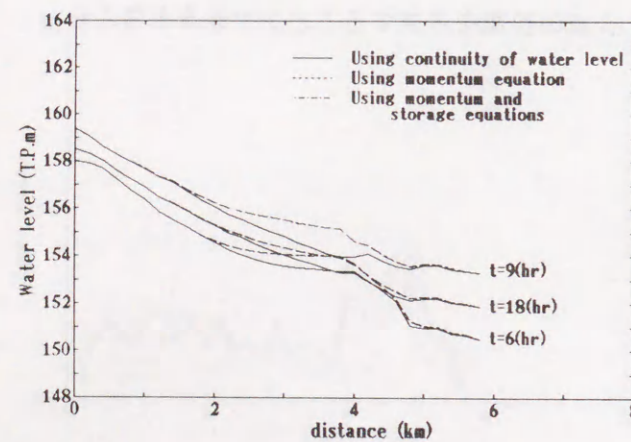
(2) 合流点のエネルギー損失を考慮した解析

ここでは、前節で示したのと同様に合流点に対してコントロール・ボリュームを設定し、運動量方程式のみを適用した場合、および、運動量方程式と貯留方程式を適用した場合について非定常流計算を行い、合流点を単なるポイントとして扱って得られた結果とを比較する。

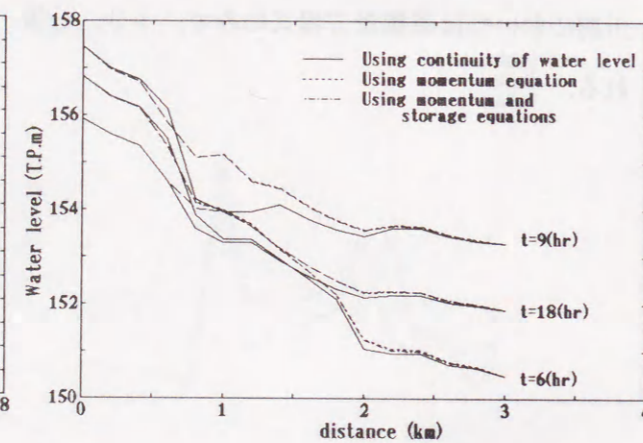
前項と同様に枝 I→V, II→IV→V, III→IV→V に沿った水面形を Fig.6.19 に示す。とくに枝 II→IV→V の 4km 付近、および、枝 III→IV→V の 1km 付近から上流では、合流点の取り扱い方による差異が明らかに生じている。これは水面勾配が比較的緩いため流速が小さくエネルギー損失が小さい枝 I→V に比較して、枝 II→IV、および、枝 III では比較的水面勾配が急で流速が大きく、それに応じて合流点におけるエネルギー損失が無視できない程度に大きくなったためと考えられる。このことは、本対象河川においては第 3 章、第 4 章で示した分流・合流点をポイントとして取り扱って水位連続と流量連続の条件式を用いて解析することには限界があることを意味している。すなわち、山地河川網のように急勾配の河川においては分流・合流点におけるエネルギー損失を考慮するれば、分流・合流点によるせき上げ背水効果を再現できることを示している。また、分流・合流点の貯留効果を考慮するために用いた貯留方程式の効果は見られず、本対象河川網においては運動量方程式のみで、十分、分流・合流の影響を考慮することができると考えられる。



(a) Along I—V



(c) Along II—IV—V



(d) Along III—IV—V

Fig.6.19 Water profiles along channel.

6.5 結言

本章では、第3章～第5章で提案した開水路網非定常流の各種解析手法について、具体的な数値計算を行って、その有効性について検討を行った。

まず、第6.2節では河川網の基本単位であるY型の分岐・合流水路を対象として、ソースに単射上昇波を与え、その下流への伝播状況を把握することによって、各種解析手法で得られる数値解の安定性、精度、演算時間を比較した。得られた結果はつぎのとおりである。

- (1) 特性曲線法では、C.F.L.条件を満たしている範囲において、時間差分間隔 Δt の取り方にかかわらず、安定な解が得られるが、 Δt が大きくなるにつれて数値解が平滑化されることが明らかとなった。また、C.F.L.条件を満たさない Δt を設定した場合でも安定な数値解を得ることができ、Galerkin法による陰形式差分法の有効性が確認されたが、特性曲線法では、C.F.L.条件を満たすことが前提となるので、実際に数値計算を行う場合には注意しなければならない。
- (2) 4点陰形式差分法では保存形、非保存形表示を問わず、 Δt 、および、重み係数 θ の組み合わせによっては、著しい数値振動が発生する可能性があることが明らかとなった。神田らの提案した無次元量 K によると、 K が0.6程度以下では数値振動が生じ、 K の値が1.0以上になると、 Δt 、あるいは、 θ が大きくなるにつれて数値解が平滑化される。
- (3) MacCormack法では、ソースに与えた単射上昇波が数値解が平滑化されことなく下流へ伝播することが確認され、保存形差分スキームの有効性が明らかとなった。
- (4) 定常到達時の流量により質量の保存性を検討した結果、分流・合流点の下流で若干保存性が低下するものの、実用上問題となる程ではない。ただし、特性曲線法の場合は縦断方向に $2\Delta x$ を周期とする数値振動が発生することが確認された。
- (5) 各種解析手法の演算時間を比較した結果、MacCormack法が最も演算時間が短く、ついで、特性曲線法、非保存形表示した4点陰形式差分法、保存形表示した4点陰形式差分法の順に演算時間が長い。

つぎに、低平地河川網の例として、広島デルタを流下する太田川の感潮河川網の非定常流計算より得られた結果はつぎのとおりである。

- (1) 各種解析手法とも同様な傾向を示し、再現性は良好であり、局所的に 50cm 程度の差異が生じるものの、低平地河川網の非定常流解析への適用性が明らかとなった。
- (2) 分流点下流で各種計算手法による数値解の差異が生じることが確認されたが、これは流量の大きな派川で顕著であり、枝上・下流端の差分式の取り方によるものである。
- (3) 分流点に対してコントロール・ボリュームを設定し、運動量方程式を導入した場合、運動量方程式と貯留方程式を導入した場合、および、分流点をポイントとして取り扱った場合の計算結果を比較したところ、3者に対する数値解の差異はほとんど生じなかった。すなわち、低平地河川網のような比較的流れの緩やかな河川では、分流・合流点の条件として水位連続の条件を用いれば十分である。

さらに、山地河川網の例として、広島県北部の三次市を貫流する江の川の河川網の非定常流計算より得られた結果はつぎのとおりである。

- (1) 山地河川網を対象とする場合、流速が大きくなり、常流・射流が混在する可能性があるため、特性曲線法、4点陰形式差分法では数値解が発散し計算不能となった。
- (2) MacCormack 法により解析した結果、局所的に射流が生じているにもかかわらず、安定な解を得ることができ、山地河川網の非定常流計算への保存形差分スキームの有効性が明らかとなった。また、人工粘性係数は $K_v = 10^{-3} \sim 10^{-2}$ 程度の値が適当である。
- (3) 合流点に対してコントロール・ボリュームを設定し、運動量方程式を導入した場合、運動量方程式と貯留方程式を導入した場合、および、合流点をポイントとして取り扱った場合の計算結果を比較したところ、水面勾配の大きな河川についてはコントロール・ボリュームを設定してエネルギー損失を考慮すれば、合流点によるせき上げ背水効果が再現されることが明らかとなった。すなわち、このような山地河川においては分流・合流点のエネルギー損失を精度良く取り入れることが重要である。
- (4) 合流点に設定されたコントロール・ボリュームに貯留方程式を導入した影響は明瞭ではなく、本対象河川網においては、運動量方程式のみを導入すれば十分である。

参考文献

- 1) 吉川秀夫：河川工学，朝倉書店，pp.1-8，1966.
- 2) 長谷川和義：山地河川の形態と流れ，第24回水工学に関する夏期研修会講義集，pp.A-8-1-22，1988.
- 3) Stoker, J. J. : Water wave , Interscience Publishers , Inc. , New York , pp.451-509 , 1957.
- 4) 神田 徹・辻 貴之：低平地河川網における洪水流の特性とその制御，建設工学研究所報告，第21号，pp.105-132，1979.
- 5) 土木学会編：水理公式集(昭和46年改訂版)，pp.192-193，1971.
- 6) 伊藤 剛編：数値計算の応用と基礎(水理学を中心として)，アテネ出版，pp.197-222，1971.
- 7) 金本 満・常松芳昭・金丸昭治：山地河川網の水理解析法，広島大学工学部研究報告，第41巻，第1号，pp.45-51，1992.
- 8) 建設省河川局編：太田川水系工事実施基本計画参考資料，p.431，1975.
- 9) 建設省河川局編：江の川水系工事実施基本計画参考資料，p.776，1973.
- 10) 前掲7).

第7章 結論

本論では、開水路網における非定常流の水理解析法に関して、いくつかの計算手法を提案するとともに、その有効性を検討するため、これらの手法をモデル水路網、および、実河川網における非定常流解析に適用した。得られた結果を要約すればつぎのとおりである。

第1章においては、従来の研究成果を基に本研究の目的と意義について論じた。

第2章においては、開水路網の非定常流解析をシステム論的に展開する手段として、グラフ理論を用いた開水路網形態の定量的な表示法の検討を行った。

第2.1節では、水工学の分野へのグラフ理論の適用例を紹介し、本研究で対象とする開水路網の形態が定量的に表現できることを明示した。

第2.2節では、グラフ理論の基礎的概念を概説し、開水路網形態の定量的表示のため、節点・枝接続行列(本論では単に接続行列と呼んだ)を導入した。さらに、接続行列から導かれる出連結行列、入連結行列を定義した。

第2.3節では、本研究で対象とする開水路網の形態は接続行列を用いることによって、定量的な表示が可能であることを具体的に示した。

第3章では、特性曲線法による開水路網非定常流の行列解析法を展開した。

第3.1節では、従来の特性曲線法を用いた解析法を概説し、開水路網の非定常流解析への適用性を明らかにした。

第3.2節では、単一開水路に対する非定常流の基礎方程式を特性曲線法により特性表示し、得られた特性方程式を空間方向には Galerkin 法、時間方向には後退差分法を用いて離散化し行列表示した。その結果、外部点(枝の上・下流端の断面)と内部点(枝の上・下流端以外の断面)に関する未知水量が別々に行列表示された。

さらに、外部点に関する方程式で構成される枝方程式と、節点に関する条件式とを行列・ベクトル表示することにより、開水路網のシステム・モデルを定式化した。その結果、行列演算による汎用的な開水路網非定常流の解析手法が構築された。

第4章では、直接差分法による開水路網非定常流の行列解法について検討した。

第4.1章では、従来の直接差分法の例を紹介し、開水路網の非定常流解析への適用例とその問題点を検討した。

第4.2節では、陰形式差分法の一つである Preissmann の4点陰形式差分法を取り上げ、開水路網非定常流の系統的な解析方法を展開した。

まず、基礎方程式を Preissmann の4点陰形式差分法により離散化し、従来から用いられている一般的な行列表示式を示した。この行列表示式は連立一次方程式のためすべての差分方程式を枝方程式として採用しなければならないので、システム・モデルの集中化は困難である。そこで、枝方程式を外部点を含む格子で成立する差分式と内部点の格子で成立する差分式とに分割することにより、外部枝方程式と内部枝方程式の概念を導入した。つぎに、外部枝方程式のなかに中間ノードで成立する水位連続の条件式を代入し、外部枝方程式を擬似的に集中モデルとして扱って行列・ベクトル表示した。さらに、それを内部枝方程式、節点方程式とともに行列・ベクトル表示し、Newton-Raphson 法に基づくシステム・モデルを定式化した。

第4.3節では、陽形式差分法の一つである MacCormack 法を取り上げ、開水路網非定常流の系統的な解析手法を展開した。

まず、基礎方程式を MacCormack 法により離散化し、単一開水路に対する差分式を示した。つぎに、外部点を含む格子に対して連続方程式のみを導入し、Box 型のスキームで離散化し、行列・ベクトル表示して枝方程式を作成した。それを前節と同様に節点方程式とともに行列表示し、Newton-Raphson 法に基づくシステム・モデルを定式化した。

第5章では、第3章、第4章とは視点を変え、分流・合流点のエネルギー損失を組み込んだ開水路網非定常流の解析方法を展開した。

第5.1節では、従来の分流・合流点の扱いを検証し、本章での解析方法の方針を明らかにした。

第5.2節では、分流・合流点を含む水路を断面急変部としてモデル化する方法について述べ、分流・合流点の種々の形状に対して、縦断方向に関しては運動量保存則を、横断方向に関しては水位連続の条件を用いて、成立すべき条件を定式化した。運動量方程式の中の水圧項に含まれる水面幅の取扱いは、分流・合流点の形態によって異なるため、形状判定のための行列を導入し、水面幅を成分とするベクトルを構築した。さらに、そのベクトルを用いて、縦横断方向の運動量の流れをベクトル表示した。

第5.3節では、分流・合流点を含むコントロール・ボリュームの貯留効果を考慮するため、流量連続の条件式として貯留方程式を導入し、これを行列・ベクトル表示した。そして、分流・合

流点のエネルギー損失を考慮した場合の Newton-Raphson 法に基づくシステム・モデルが定式化された。

第6章では、第3章～第5章で提示した解析手法の有効性を検証するため、モデル水路網、実河川網を対象として具体的に数値計算を行った。

第6.1節では、本章の数値計算に使用するモデル水路と実河川網の概要を示した。

第6.2節では、河川網の構成の基本単位である Y 型の分岐・合流水路を設定し、ソースに単射上昇波を与えて、単射上昇波の分流・合流点の通過状況を把握するとともに、提示した解析手法に対する数値解の安定性、精度、演算時間について検討を行った。

その結果、いずれの手法とも保存性に関しては十分満足できるものであることがわかった。また、特性曲線法では数値解は安定であるが、時間方向の差分間隔 Δt が大きくなると数値解が平滑化されることが明らかとなった。4点陰形式差分法では Δt と重み係数 θ の組み合わせによって、物理的に意味のない数値振動が発生することがわかった。MacCormack 法では数値解は安定であり、水理量の急激な変化にも追従する優れた差分法であることが明らかとなった。

演算時間については、MacCormack 法が最も短く、特性曲線法、4点陰形式差分法の順に演算時間が長いことがわかった。

第6.3節では、低平地河川網の例として広島デルタを流下する太田川の感潮河川網の洪水流解析を行った。各解析手法による計算結果を実測値と比較したところ、水位に関して局所的に 50cm 程度の差異があるものの、全般的には低平地河川網の複雑な流況を定性的に再現できることがわかった。

また、エネルギー損失を考慮した場合と考慮しない場合とを比較した結果、両者の差異はほとんどなく、低平地河川網のように水面勾配が小さく、流速が遅い場合には、分流・合流点の条件として水位連続の条件を用いれば良いことが明らかとなった。

第6.4節では、山地河川網の例として広島県北部の三次盆地を貫流する江の川の河川網の洪水流解析を行った。その結果、特性曲線法と4点陰形式差分法では数値解が発散し計算不能となった。これに対して、MacCormack 法では、常流・射流が混在する流れでも比較的安定な解が得られた。また、人工粘性係数については本対象河川網では $K_v = 10^{-3} \sim 10^{-2}$ 程度の値を用いれば良いことがわかった。

さらに、エネルギー損失を考慮した場合としない場合の計算結果を比較したところ、合流点上流で明らかに水位差が生じ、最大で 1m 程度の水位上昇が認められた。したがって、山地河川網で実際のせき上げ背水効果を計算結果に反映させようとするれば、分流・合流点でのエネルギー損

失を考慮した取り扱いが望ましいことがわかった。

謝 辞

本研究を進めるにあたり、終始懇切丁寧な御指導を賜りました広島大学教授・金丸昭治先生に厚く御礼申し上げます。

また、本論文を御審査いただき、貴重な御助言をいただいた広島大学教授・藤本淳夫先生、同教授・吉國洋先生、同教授・余越正一郎先生、同教授・寺西靖治先生、同助教授・常松芳昭先生に厚く御礼申し上げます。

さらに、広島大学助手・三島隆明先生には、色々な御指導を賜るとともに、貴重な御助言をいただきました。ここに記して厚く感謝の意を表します。

断面資料、水理水文資料などの資料は、建設省太田川工事事務所、同三次工事事務所、広島県土木建築部河川課から御提供いただきました。貴重な資料を御提供いただき、また、御助言をいただいた関係各位に謝意を表します。

本研究における具体的な数値計算は、水工学研究室大学院生の玉田康一君、同学部生の高橋宏尚君の手を煩わせました。両君の御協力に感謝致します。

中電技術コンサルタント株式会社の白木堅固社長をはじめとし、社員各位には、著者の研究のため多大な御支援をいただきました。ここに記して感謝の意を表します。

浅学な著者が本論文をまとめることができたのは、このように多くの方々の御指導、御協力の賜物であることを記して謝辞といたします。

付録 A ソースに水位を与えた場合のシステム方程式の行列表示

A.1 エネルギー損失を考慮しない場合

式(4.37)の代わりにソースに水位条件を与えるものとすれば以下のようなになる。

$$Z_+ = f_+(t) \quad (\text{A.1})$$

ここに、 Z_+ はソースの水位を成分とするベクトル、 f_+ は時間 t の関数でソースに与える境界条件である。

これを Newton-Raphson 法により解法しやすいようにつぎのようにおく。

$$C_+ = Z_+ - f_+ \quad (\text{A.2})$$

未知量の近似値の近傍で Taylor 展開すれば、

$$E\Delta Z_+ = -C_+ \quad (\text{A.3})$$

となる。ただし、 E は単位行列であり、 Δ は Newton-Raphson 法における未知量の修正量を表す。

これを分流・合流点の条件式として水位連続の条件を用いた場合の式(4.83)の中のソースに関する条件式と入れ換えるとつぎのようなになる。

$$\begin{bmatrix} P_1(D_+^+)^T & P_1(D_0^+)^T & O & P_2 & O \\ O & P_3(D_0^-)^T & P_3(D_-^-)^T & O & P_4 \\ E & O & O & O & O \\ O & O & O & D_0^+ & -D_0^- \\ O & O & E & O & O \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta Z_+ \\ \Delta Z_0 \\ \Delta Z_- \\ \Delta q_{up} \\ \Delta q_{dn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -G_{up} \\ -G_{dn} \\ -C_+ \\ -C_0 \\ -C_- \end{bmatrix} \quad (\text{A.4})$$

行列中の記号の説明については第 4.3 節参照。

A.2 エネルギー損失を考慮した場合

式(4.37)の代わりにソースに水位条件を与えるものとすれば以下ようになる。

$$D_+^+ z_{up} = f_+(t) \quad (\text{A.5})$$

ここに、 z_+ は枝上流端の水位を成分とするベクトル、 f_+ は時間 t の関数でソースに与える境界条件である。

これを Newton-Raphson 法により解法しやすいようにつぎのようにおく。

$$C_+ = D_+^+ z_{up} - f_+ \quad (\text{A.6})$$

未知量の近似値の近傍で Taylor 展開すれば、

$$D_+^+ \Delta z_{up} = -C_+ \quad (\text{A.7})$$

となる。ただし、 Δ は Newton-Raphson 法における未知量の修正量を表す。

これを枝方程式と節点方程式を行列表示した式(5.56)の中のソースに関する条件式と入れ換えるとつぎのようになる。

$$\begin{bmatrix} P_1 & O & P_2 & O \\ O & P_3 & O & P_4 \\ D_0^+ P_5 & D_0^- P_6 & D_0^+ P_7 & D_0^- P_8 \\ D_0^+ P_9 & O & D_0^+ P_{10} & O \\ D_+^+ & O & O & O \\ \frac{L}{2\Delta t} D_0^+ P_{11} & -D_0^+ & \frac{L}{2\Delta t} D_0^- P_{12} & D_0^- \\ O & O & D_-^- & O \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta z_{up} \\ \Delta q_{up} \\ \Delta z_{dn} \\ \Delta q_{dn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -G_{up} \\ -G_{dn} \\ -G_x \\ -G_y \\ -C_+ \\ -C_0 \\ -C_- \end{bmatrix} \quad (\text{A.8})$$

行列中の記号の説明については第5章参照。

