発達段階に応じたスパイラルな指導による学習内容の定着をめざして
ー新学習指導要領の改訂のねらいを具体化する指導事例の紹介ー

入川　義克

2008年３月に「新学習指導要領」が公示された。

中学での数学の年間授業時数は１，２，３年の順に105，105，105時間から140，105，140時間に改訂され70時間増になっている。

2002年の改訂で授業時数が105，140，140時間からゆとり教育を進める現行の授業時数105，105，105時間になり70時間の削減から考えると総授業時数は元に戻ったことになる。

ここで，問題にすべきは授業時数の削減と学習内容の精選とのバランスにある。

授業時数が削減されたとき，学力低下を懸念した「ゆとり教育」への批判に対して「高校１年迄のトータルでみると内容面での削減は１割前後でしかない」という分析もあった。

一方，小・中あわせて　1.5割の授業時数を削減し，１割前後の削減した内容を展開するというのは数値の上だけでもゆとりのない授業になってしまう。

実際には，内容面の削減は２割程度で，その部分がしわ寄せとして，高校の内容に移ったことにより，高校での授業が従来よりゆとりがなくなったことも現実である。

これらの反省をふまえて，今回の「新学習指導要領」では

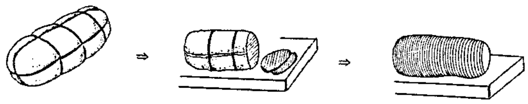
① 発達や学年の段階に応じた反復(スパイラル)による教育課程の実現
① 論理的な考察や知的なコミュニケーションを図るための思考力，判断力，表現力の育成が，改訂のポイントになっている。

ここでは，この改訂のねらいを具体化するいくつかの指導事例を紹介する。

１.立体の体積を求めるいろいろな考え方

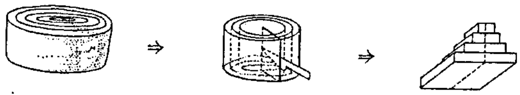
断面積を積分することで，立体の体積が求められるという数学的意味をしっかり理解させながら，初めは，感覚的にいろいろな分割を考え，立体を切断して微小体積の総和として求める《A》～《D》の考え方をイメージさせ，積分を使って，立体の体積を求める授業の導入にしている。

《A》平面スライス型分割による方法



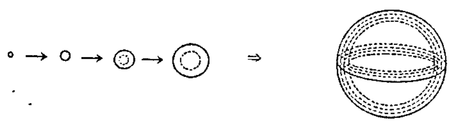
ハムの塊をうすくスライスして，その１枚ずつのスライスの体積を微小体積(断面積×厚さ)として求め，その総和として体積を求める。

《B》バームクーヘン型分割による方法



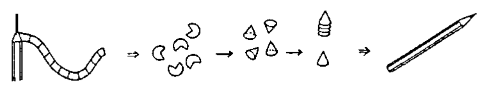
バームクーヘンに切り込みを入れて１枚ずつはがし,その１枚ずつの年輪の体積を直方体の微小体積(長方形の面積×厚さ）として求め，その総和として体積を求める。

C》雪だるま型分割による方法



雪だるまを作るように球の表面に皮膜を１枚ずつ貼り付ける，その１枚ずつの皮膜の体積を球面の微小体積（球の表面積×厚さ）として求め，その総和として体積を求める。

《D》とんがり帽子型分割による方法



鉛筆を鉛筆削りで削るとき，１周分の削りかすは，扇形になるので，その１枚ずつの扇形の体積を微小体積（扇形の側面積×厚さ）として求め，とんがり帽子状に重ねて，その総和として体積を求める。

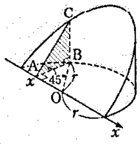
このような指導をしていくと，教科書の例題で扱われている「底面の円の中心を通り，底面と４５°の角をなす平面で円柱を切ったとき，切り取られた立体の体積を求める」問題についても，円柱の切断の仕方を変えるとどのようになるか考えてみようということになる。

いくつかの教科書で，この問題をどのように扱っているかを比較してみると，いずれも切断面が，直角二等辺三角形の場合だけを扱っている。生徒の理解度を確認しながら，いろいろな切断の仕方を試みて，積分を使って体積を求める基本に戻りながら考えさせると，生徒の興味・関心をひき，さらに発展した問題を解く発想を生む授業が展開できる。

《啓林館》の教科書の場合

例題3　中心O，半径 r の円を底面とする円柱がある．点Oを通り，底面と45°の角度で交わる平面によってこの円柱が切りとられる部分の体積を求めよ．

解　Oを原点，底面と切りとる平面との交線を x 軸とし，この軸上の座標 x の点Aで x 軸に垂直に立てた平面を考え，この平面による切り口の直角二等辺三角形ABCの面積を $S(x)$ とすると，



$$S(x)=\frac{1}{2}\mathrm{AB}^2=\frac{1}{2}(r^2-x^2)$$

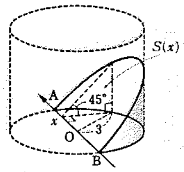
よって，求める体積 V は，

$$V=\int_{-r}^{r}\frac{1}{2}(r^2-x^2)dx=\frac{1}{2}\left[r^2x-\frac{1}{3}x^3\right]_{-r}^{r}$$

$$=\frac{2}{3}r^3$$

《東京書籍》の教科書の場合

例題6　底面の半径が3の円柱がある。右の図のように，底面の直径ABを含み，底面と45°の角をなす平面で円柱を切り取った。この切り取られた立体の体積を求めよ。



解　底面の中心Oを原点とし，ABを x 軸とする。x 軸上の点 $(x,\ 0)$ を通り x 軸に垂直な平面で，与えられた立体を切ったときの断面積を $S(x)$ とすると

$$S(x)=\frac{1}{2}(\sqrt{3^2-x^2})^2=\frac{1}{2}(9-x^2)$$

ゆえに，求める体積 V は

$$V=\frac{1}{2}\int_{-3}^{3}(9-x^2)dx$$

$$=\frac{1}{2}\cdot 2\int_{0}^{3}(9-x^2)dx$$

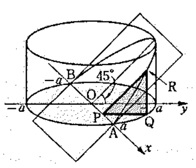
$$=\left[9x-\frac{1}{3}x^3\right]_{0}^{3}=18$$

《実教出版》の教科書の場合

例題5　底面の半径と高さがともに a の直円柱を，底面の1つの直径ABを含み底面と45°の角をなす平面で切ったとき，この平面と底面ではさまれた立体の体積 V を求めよ。

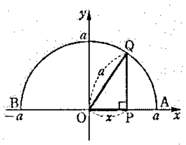
解　底面の中心Oを原点とし，直線ABを x 軸にとる。

右の図のように，AB上の点P(x)を通り，x 軸に垂直な平面によるこの立体の切り口は直角二等辺三角形PQRである。



$$\mathrm{PQ}=\mathrm{QR}=\sqrt{a^2-x^2}$$

であるから，△PQRの面積を $S(x)$ とすると



$$S(x)=\frac{1}{2}\mathrm{PQ}^2=\frac{1}{2}(a^2-x^2)$$

である。

$S(x)$ は偶関数であるから，求める体積 V は

$$V=\int_{-a}^{a}S(x)dx$$

$$=2\int_{0}^{a}S(x)dx$$

$$=2\int_{0}^{a}\frac{1}{2}(a^2-x^2)dx$$

$$=\left[a^2x-\frac{x^3}{3}\right]_{0}^{a}=\frac{2}{3}a^3$$

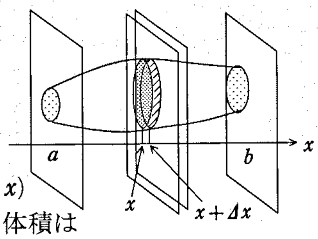
2．立体の体積が定積分によって求められる理由を理解する

《A》平面スライス型分割によって体積を求める

軸に垂直な平面 $x=a$，$x=b$ によって囲まれた立体の体積は，$\mathrm{V}(x)=\int_a^b \mathrm{S}(x)dx$ であることを導く。

（ただし，$\mathrm{S}(x)$は目盛りxを通るx軸に垂直な平面で立体を切断したときの断面積である）

下図のように，x 軸に垂直な平面$x=a$ と目盛りx の点を通りx 軸に垂直な平面で囲まれた立体の体積は x の関数で$\mathrm{V}(x)$ とおける。



x の増分をΔxとする。

i）$\Delta x>0$のとき

区間［x，$x+\Delta x$］

における$\mathrm{S}(x)$の最大値と最小値を$\mathrm{S_M}(x)$，$\mathrm{S_m}(x)$

とすれば，▨ 部分の体積は

$$\mathrm{S_m}(x)\Delta x \leqq \mathrm{V}(x+\Delta x)-\mathrm{V}(x)\leqq \mathrm{S_M}(x)\Delta x$$

このとき，

$$\mathrm{S_m}(x)\leqq\frac{\mathrm{V}(x+\Delta x)-\mathrm{V}(x)}{\Delta x}\leqq \mathrm{S_M}(x)$$

$$\lim_{\Delta x\to 0}\mathrm{S_m}(x)=\lim_{\Delta x\to 0}\mathrm{S_M}(x)=\mathrm{S}(x)$$　だから，

はさみうちの原理より

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\mathrm{V}(x+\Delta x)-\mathrm{V}(x)}{\Delta x}=\mathrm{S}(x)\quad\cdots（※1）$$

ii）$\Delta x<0$のときは，

区間［$x+\Delta x$，x］において，$\mathrm{V}(x)-\mathrm{V}(x+\Delta x)$

を考えると（※1）の式が求められる。

したがって，$\mathrm{V}'(x)=\mathrm{S}(x)$

$\mathrm{V}(x)=\int \mathrm{S}(x)dx=\mathrm{F}(x)+\mathrm{C}$ とおくと

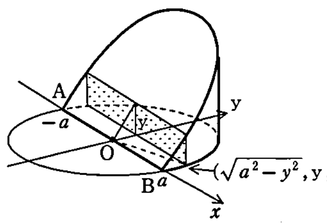
$\mathrm{V}(a)=\mathrm{F}(a)+\mathrm{C}=0$より，$\mathrm{C}=-\mathrm{F}(a)$

以上のことより，

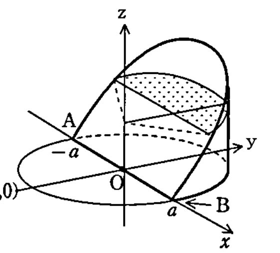
$$\mathrm{V}(b)=\mathrm{F}(b)+\mathrm{C}=\mathrm{F}(b)-\mathrm{F}(a)=\int_a^b \mathrm{S}(x)dx$$である。

微小体積の総和としての積分により，その立体の体積を求めることができるという基本の考え方をしっかり押さえた上で，この立体をいろいろな切断面で切断して考える次のような発想が出てくる。

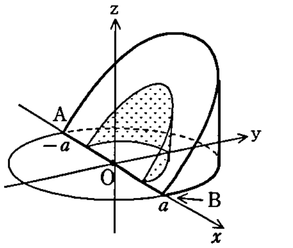
① y軸に垂直な平面で切断する



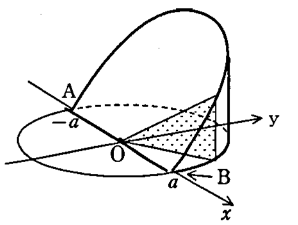
② z軸に垂直な平面で切断する



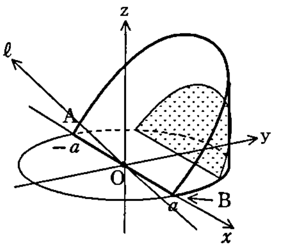
③ Oを同心円の中心とする円を底面にもつ円柱で切断する



④ Oを通り円柱の底面に垂直な平面で切断する



⑤ Oを通り45°の切断面に垂直な直線をℓ軸としてℓ軸に垂直な平面で切断する



この発想と解法の基になっているのは，空間図形の切断や投影図の考えである。これらは現行の中学の指導内容からは削除されているが，柔軟に考えることができる中学生の時期に指導しておきたい内容であると考えている。

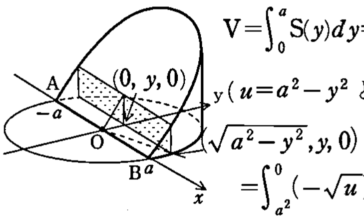
①から⑤の考え方でこの切り取られた立体の体積を求め，生徒が言葉や数式を使って説明しようとする過程を大切にしながら授業を進めていくことにしている。

それぞれの発想による考え方を示しておこう。

《①の考え方》

(0, y, 0)を通り，y軸に垂直な平面でこの立体を切った切断面の面積をS(y)とおくと，$S(y)=2\sqrt{a^2-y^2}\cdot y$

このとき，求める体積Vは，



$$V=\int_0^a S(y)dy=\int_0^a 2\sqrt{a^2-y^2}\cdot y\,dy$$

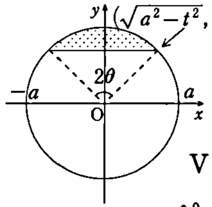
$(u=a^2-y^2$ とおくと $\dfrac{du}{dy}=-2y)$

$$=\int_{a^2}^0(-\sqrt{u})du=\frac{2}{3}a^3$$

《②の考え方》

(0, 0, t)を通り，y軸に垂直な平面でこの立体を切った切断面の面積をS(t)とおくと，

$$S(t)=\frac{1}{2}a^2\cdot 2\theta-\frac{1}{2}a^2\sin 2\theta=a^2\theta-\frac{1}{2}a^2\sin 2\theta$$



(ここで$t=a\cos\theta$より $\dfrac{dt}{d\theta}=-a\sin\theta$)

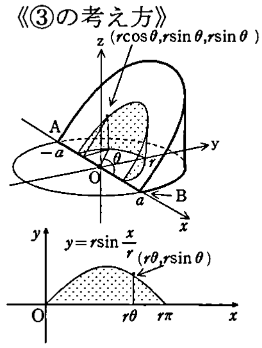
このとき，求める体積Vは，

$$V=\int_0^a S(t)dt$$

$$=\int_{\frac{\pi}{2}}^0\left(a^2\theta-\frac{1}{2}a^2\sin 2\theta\right)\frac{dt}{d\theta}d\theta$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(a^2\theta-\frac{1}{2}a^2\sin 2\theta\right)a\sin\theta d\theta=\frac{2}{3}a^3$$

《③の考え方》



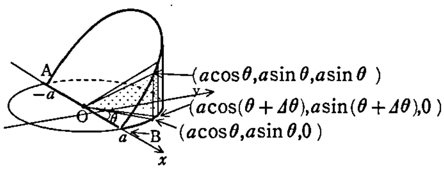
円柱 $x^2+y^2=r^2$ $(0\leqq r\leqq a)$で切り取られる切断面の面積をSとおく

$$S=\int_0^{r\pi}r\sin\frac{x}{r}dx=2r^2$$

このとき，求める体積Vは，

$$V=\int_0^a Sdr=\int_0^a 2r^2dr=\frac{2}{3}a^3$$

《④の考え方》



$\Delta\theta\fallingdotseq 0$のとき，底面積$a\Delta\theta\cdot\sin\theta$　高さaの四角錐の体積が，$V(\theta+\Delta\theta)-V(\theta)$に等しいと考えられる

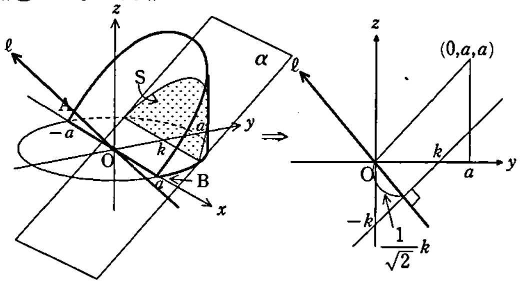
$$V(\theta+\Delta\theta)-V(\theta)\fallingdotseq\frac{1}{3}(a\Delta\theta\cdot a\sin\theta)a$$

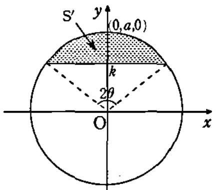
$$\frac{V(\theta+\Delta\theta)-V(\theta)}{\Delta\theta}\fallingdotseq\frac{1}{3}a^3\sin\theta$$

このとき，求める体積Vは，

$$V=\int_0^{\pi}\frac{1}{3}a^3\sin\theta d\theta=\frac{2}{3}a^3$$

《⑤の考え方》





平面αによる円柱の切断面の面積をS，この切断面をxy平面上に正射影した弓形の面積をS′とすると

$$S'=S\cos 45^\circ$$

ここで，$S'=\frac{1}{2}a^2\cdot 2\theta-\frac{1}{2}a^2\sin 2\theta$

$$=a^2\theta-\frac{1}{2}a^2\sin 2\theta$$

また，$\ell=-\frac{1}{\sqrt{2}}k=-\frac{1}{\sqrt{2}}a\cos\theta\quad\left(0\leqq\theta\leqq\frac{\pi}{2}\right)$

求める体積Vは，$V=\int_{-\frac{a}{\sqrt{2}}}^{0}S\,d\ell\ =\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{2}\,S'\frac{d\ell}{d\theta}d\theta$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{2}\left(a^2\theta-\frac{1}{2}a^2\sin 2\theta\right)\left(\frac{1}{\sqrt{2}}a\sin\theta\right)d\theta$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}a^3\left(\theta\sin\theta-\frac{1}{2}\sin 2\theta\sin\theta\right)d\theta=\frac{2}{3}a^3$$

この教材を授業で扱うとき，色々な切り口で立体を切断して，考えた過程を数式や文章で表現させ，まとめたものを教材提示装置で示し，生徒に解説させるようにしている。このような授業の積み重ねが，新たな方策を発見したり，数学を探究する姿勢の育成に繋がると考える。

また，生徒が互いに考えを発表し合うことで，論理的に説明する力が鍛えられ，考えた過程を説明することで，より理解が深まると考えている。

②の解法を理解することができれば，授業の到達目標1つである次の回転体の体積を求めることになる。

（1）回転させて切断と切断して回転はちがう。

★ 放物線 $y=\frac{3}{4}-x^2$ をy軸のまわりに回転してできる曲面K と原点を通り回転軸と45°の角をなす平面Hで囲まれた立体の体積を求めよ。

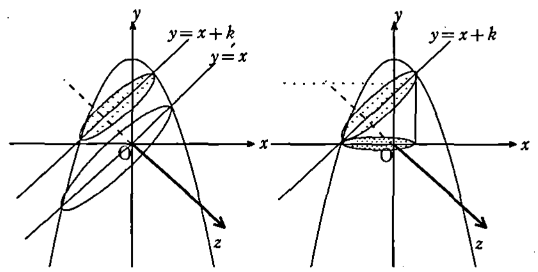
$\boxed{1}$ 曲面Kは，回転放物面といわれる。

y軸上の点P(0, k, 0) に原点Oを通り平面Hに垂直な直線に方向をつけてs 軸を新設し，s 軸上の点でOQ＝s である点Q を対応させる。

曲面K : $y=\frac{3}{4}-x^2-z^2$ を回転軸と45°の角をなす

平面H : $y=x+k$ で切断したときの切断面をzx平面に正射影した図形は

$$\begin{cases}y=\frac{3}{4}-x^2-z^2\\ y=x+k\end{cases}\quad より\quad\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+z^2=1-k$$



切断面の面積をS(k)とおくと

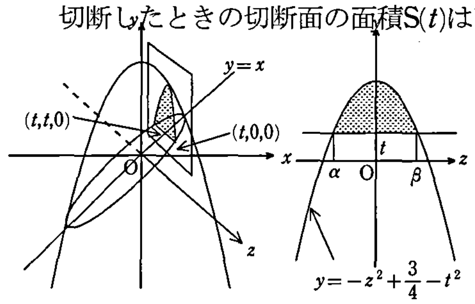
S(k)·cos45°$=\pi\sqrt{1-k^2}$　　$\therefore$ S(k)$=\sqrt{2}\pi(1-k)$

ここで，$s=\frac{1}{\sqrt{2}}k$ だから，$ds=\frac{1}{\sqrt{2}}dk$

したがって，

$$V=\int_0^1 S(k)\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}dk=\sqrt{2}\pi\int_0^1(1-k)\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}dk=\frac{\pi}{2}$$

$\boxed{2}$ 曲面K : $y=\frac{3}{4}-x^2-z^2$と平面H : $y=x$で囲まれた立体をx軸に垂直な平面$x=t$で切断したときの切断面の面積S(t)は下図より



$$S(t)=\int_\alpha^\beta\left\{\left(\frac{3}{4}-t^2-z^2\right)-t\right\}dz=\frac{1}{6}(\beta-\alpha)^3$$

ここで，α，βは，$z^2+t^2+t-\frac{3}{4}=0$の解だから

解と係数の関係より，$\alpha+\beta=0$，$\alpha\beta=t^2+t-\frac{3}{4}$

$$(\beta-\alpha)^2=(\alpha+\beta)^2-4\alpha\beta=-4\left(t^2+t-\frac{3}{4}\right)$$

$$\therefore S(t)=\frac{1}{6}\left\{\sqrt{-4\left(t^2+t-\frac{3}{4}\right)}\right\}^3$$

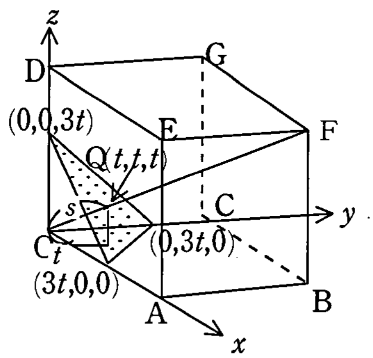
従って，$V=\frac{1}{6}\int_{-\frac{3}{2}}^{\frac{1}{2}}\left\{\sqrt{-4\left(t^2+t-\frac{3}{4}\right)}\right\}^3dt=\frac{1}{2}\pi$

（2）立方体をその対角線のまわりに回転する。

回転体の体積を求める問題の仕上げとして，立方体を対角線のまわりに回転してできる回転体の体積の問題を扱うことにしている。

☆一辺の長さが1の立方体OABC－DEFG　がある。
この立体を対角線OFのまわりに1回転してできる回転体の体積を求めよ。

図のように，x軸上の点P$(t, 0, 0)$　s軸上の点でOQ＝s である点Qを対応させる。
Q(t, t, t)を通り，s軸に垂直な平面 $x+y+z=3t$ で，立方体OABC－DEFG を切断したときの切断面の形とその切断面を回転させたときの面積S(t)は，次のようになる。

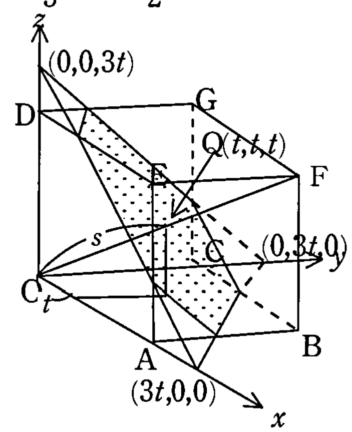


（ア）$0 \leqq t \leqq \frac{1}{3}$ のとき

1辺の長さが $\sqrt{2}\cdot 3t$ の正三角形をOFのまわりに回転した図形は，半径$\sqrt{2}\cdot 3t \times \frac{\sqrt{3}}{2} \times \frac{2}{3}$の円

このとき，$S(t)=\pi(\sqrt{6}t)^2=6\pi t^2$

（イ）$\frac{1}{3} \leqq t \leqq \frac{1}{2}$ のとき



半径$\sqrt{(t-1)^2+\{t-(3t-1)\}^2+t^2}$　の円の面積$S(t)=(6t^2-6t+2)\pi$

（ウ）$\frac{1}{2} \leqq t \leqq \frac{2}{3}$ のとき

対称性より（イ）の場合を反転させた六角形となる。

（エ）$\frac{2}{3} \leqq t \leqq 1$ のとき

対称性より（ア）の場合を反転させた三角形となる。

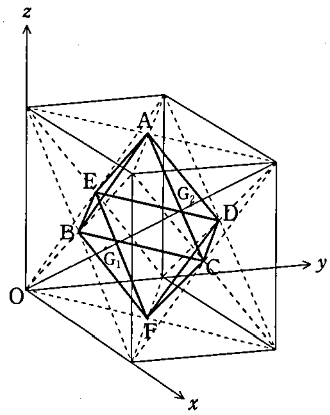
ここで，$s=\sqrt{3}t$　だから，$ds=\sqrt{3}dt$
また，回転体の対称性より，（1）と（2）の場合で回転体の体積を求めて2倍すればよい。
したがって，

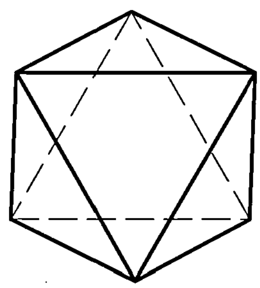
$$V=2\left\{\pi\int_0^{\frac{1}{3}} 6t^2\cdot\sqrt{3}\,dt+\pi\int_{\frac{1}{3}}^{\frac{1}{2}}(6t^2-6t+2)\cdot\sqrt{3}\,dt\right\}$$

$$=\frac{\sqrt{3}}{3}\pi$$

立方体を対角線のまわりに回転させてできる回転体の体積を求める考え方を利用して，正八面体を平行な二つの面の重心を通る直線のまわりに回転させてできる回転体の体積を求める発想も数学的な見方・考え方の素晴らしさを実感させてくれる問題である。

☆1辺の長さが1である正八面体ABCDEFを平行な2つの面の重心G_1，G_2のまわりに回転させたときにできる回転体の体積を求めよ。





1辺の長さが1の立方体を対角線のまわりに回転させたときにできる回転体の体積を求めた発想を利用して，立方体の6つの面（正方形）の対角線の交点を，頂点とする正八面体を考える。このとき，立方体の対角線は正八面体の2つの面の重心を通る。立方体の対角線に垂直な平面でこの正八面体を切断し，その切断面の面積をこの対角線に沿って積分することに気付けば解法が見えてくる。

≪正八面体の１辺の長さが１であることから，
立方体の１辺の長さを$\sqrt{2}$に調整することを
忘れないようにしたい≫
(相似比が１：$\sqrt{2}$ $\Longrightarrow$ 体積比は1^3：$\sqrt{2}^{\,3}$)

回転軸G_1G_2に垂直な平面$x+y+z=3t$と

正八面体の直線AE：$x=z-\dfrac{1}{2}$，$y=\dfrac{1}{2}$及び

直線AB：$x=\dfrac{1}{2}$，$y=z-\dfrac{1}{2}$との交点の座標は，

$$\left(\frac{3t}{2}-\frac{1}{2},\frac{1}{2},\frac{3t}{2}\right)，\left(\frac{1}{2},\frac{3t}{2}-\frac{1}{2},\frac{3t}{2}\right)$$

また，回転軸G_1G_2と垂直な平面$x+y+z=3t$

との交点の座標は(t, t, t)だから

回転体を，この平面で切断した切断面は，

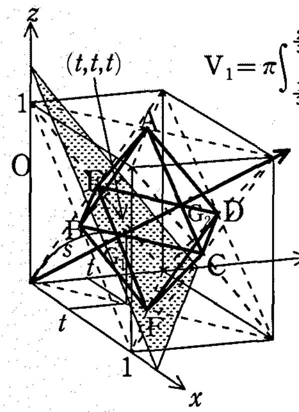
$$半径\quad\sqrt{\left(\frac{3t}{2}-\frac{1}{2}-t\right)^2+\left(\frac{1}{2}-t\right)^2+\left(\frac{3t}{2}-t\right)^2}$$

$$=\sqrt{\frac{3}{2}t^2-\frac{3}{2}t+\frac{1}{2}}\ \text{の円である。}$$

このとき，切断面の面積は，$\pi\left(\dfrac{3}{2}t^2-\dfrac{3}{2}t+\dfrac{1}{2}\right)$

回転軸G_1G_2をs軸とすると$s=\sqrt{3}t$だから

$ds=\sqrt{3}\,dt$　　　この回転体の体積V_1は



$$V_1=\pi\int_{\frac{1}{3}}^{\frac{2}{3}}\left(\frac{3}{2}t^2-\frac{3}{2}t+\frac{1}{2}\right)\sqrt{3}\,dt$$

$$=\frac{5\sqrt{3}}{108}\pi$$

１辺の長さが１の正八面体を回転させるから，

相似比１：$\sqrt{2}$

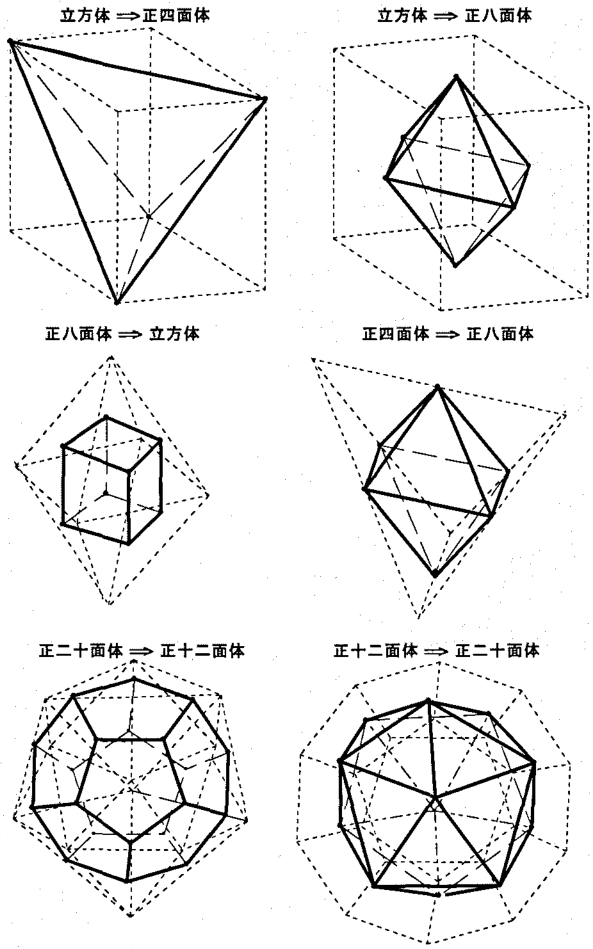
$\Longrightarrow$体積比1^3：$\sqrt{2}^{\,3}$

求める回転体の体積Vは

$$V=2\sqrt{2}\,V_1=\frac{5\sqrt{6}}{54}\quad\cdots\ (答)$$

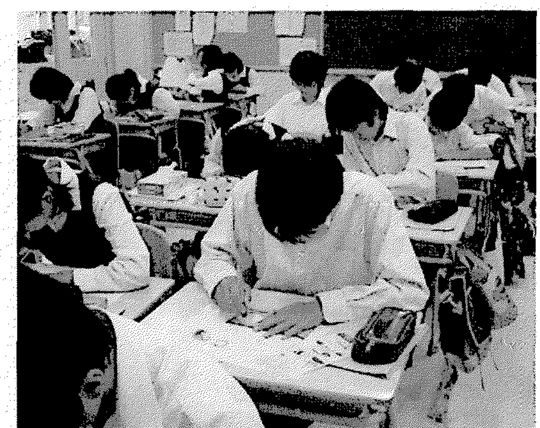
この発想は，次の図のような，正多面体の美しくて不思議な関係を知っていなければ浮かばない。

ユークリッドの時代(紀元前３世紀頃)には，すでに５種類の正多面体が知られていて，哲学者プラトンはその著書「ティマイオス」の中で，これらを自然界の４元素，土(立方体)・水(正二十面体)・火(正四面体)・空気(正八面体)に関連付けていたといわれる神秘的な立体である。。



３．遊びの中から数学を発見する

デザイン定規を使って，自由に描いた図形の規則性や法則性を予測・発見していく中で数学的な考え方を育てる教材である。２年の選択数学の中で扱ってきた題材である。描かれた図形の美しさとコンピュータで描いた図形を再現したときの生徒の反応は感動ものである。



デザイン定規を配って，自由に図を描かせながら

内側の歯車の数をm，外側の歯車の数をn とおいて，表を作らせ，花びらの枚数が歯車の数mとnに関係することに気づかせる。

このとき，デザイン定規で描いた図形から２つの正の整数mとnの最大公約数G.C.D(Greatest Common Divisor)と最小公倍数L.C.M(Least Common Multiple)の関係を求める。

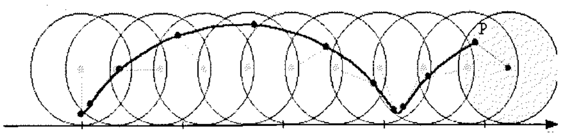
例えば，花びらの枚数をNとするとき，

$N=\dfrac{L}{m}=\dfrac{n}{G}$…① $mn=GL$…② $L=Gm'n'$…③ などである。

(ただし，$m=Gm'$，$n=Gn'$，m'とn'は互いに素)

ここでは，円に内接する回転運動を数直線上で考える発想に気づく所がポイントである。

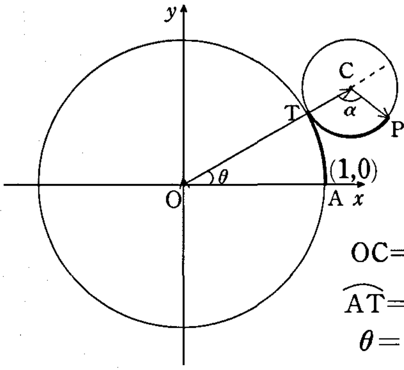
数直線上で初期の状態に戻るまでの歯車の回転数を求めることで，花びらの枚数がわかる。



高校では，デザイン定規で描いた図形を媒介変数を使った式で表し，関数入力させてコンピュータで再現させれば，更に発展させて考察することができる。

（１）エピサイクロイド（外サイクロイド）の軌跡

半径１の円Oの外部にある半径$a(a>0)$の円Cが円Oの円周上を滑ることなく回転するとき円Cの周上の点$P(x, y)$の軌跡を外サイクロイドという。



OC$=1+a$

$\overset{\frown}{AT}=\overset{\frown}{PT}$ より

$\theta=a\alpha$

このとき，

$$(\theta+\alpha)-180^\circ=\left(1+\frac{1}{a}\right)\theta-180^\circ$$

したがって，

$\overrightarrow{OP}=\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{CP}$

$=((1+a)\cos\theta,(1+a)\sin\theta)+(a\cos(\theta+\alpha-180^\circ),a\sin(\theta+\alpha-180^\circ))$

$=((1+a)\cos\theta,(1+a)\sin\theta)+\left(-a\cos\left(1+\frac{1}{a}\right)\theta,-a\sin\left(1+\frac{1}{a}\right)\theta\right)$

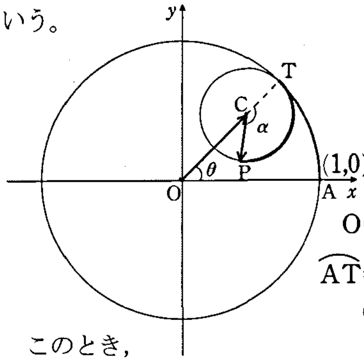
$=\left((1+a)\cos\theta-a\cos\left(1+\frac{1}{a}\right)\theta,(1+a)\sin\theta-a\sin\left(1+\frac{1}{a}\right)\theta\right)$

以上のことより，

$$\begin{cases} x=(1+a)\cos\theta-a\cos\left(1+\dfrac{1}{a}\right)\theta \\ y=(1+a)\sin\theta-a\sin\left(1+\dfrac{1}{a}\right)\theta \end{cases}$$

（２）ハイポサイクロイド（内サイクロイド）の軌跡

半径１の円Oの内部にある半径$a(0<a<1)$の円Cが円Oの円周上を滑ることなく回転するとき円Cの周上の点$P(x, y)$の軌跡を内サイクロイドという。



OC$=1-a$

$\overset{\frown}{AT}=\overset{\frown}{PT}$ より

$\theta=a\alpha$

このとき，

$$\theta-\alpha=\left(1-\frac{1}{a}\right)\theta$$

したがって，

$\overrightarrow{OP}=\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{CP}$

$=((1-a)\cos\theta,(1-a)\sin\theta)+(a\cos(\theta-\alpha),a\sin(\theta-\alpha))$

$=((1-a)\cos\theta,(1-a)\sin\theta)+\left(a\cos\left(1-\frac{1}{a}\right)\theta,a\sin\left(1-\frac{1}{a}\right)\theta\right)$

$=\left((1-a)\cos\theta+a\cos\left(1-\frac{1}{a}\right)\theta,(1-a)\sin\theta+a\sin\left(1-\frac{1}{a}\right)\theta\right)$

以上のことより，

$$\begin{cases} x=(1-a)\cos\theta+a\cos\left(1-\dfrac{1}{a}\right)\theta \\ y=(1-a)\sin\theta+a\sin\left(1-\dfrac{1}{a}\right)\theta \end{cases}$$

サイクロイドの軌跡を求める問題の解法のポイントは

① 滑ることなく回転する⇔弧の長さが等しい

② $\overrightarrow{OP}=\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{CP}$

③ $\overrightarrow{CP}$とx軸の正の方向とのなす角に正，負あり

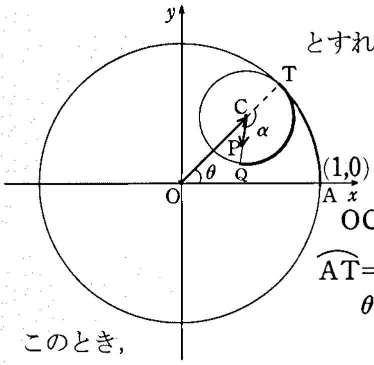
ということになる。

【トロコイドの軌跡】

半径１の円Oの内部にある半径$a(0<a<1)$の円Cが円Oの円周上を滑ることなく回転するとき円Cの内部に，円の中心Cから$b\ (0<b<a)$の距離にある点$P(x, y)$の軌跡をトロコイドという。

内サイクロイドの考え方で $\overrightarrow{CP}=\frac{b}{a}\overrightarrow{CQ}$

とすればよい。



$OC=1-a$

$\overset{\frown}{AT}=\overset{\frown}{QT}$ より

$\theta=a\alpha$

このとき，

$$\theta-\alpha=\left(1-\frac{1}{a}\right)\theta$$

したがって，

$$\overrightarrow{OP}=\overrightarrow{OC}+\frac{b}{a}\overrightarrow{CQ}$$

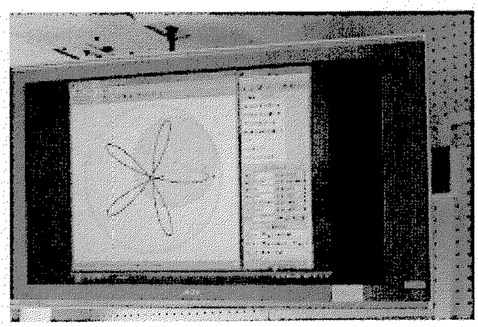
$$=((1-a)\cos\theta,(1-a)\sin\theta)+\frac{b}{a}(a\cos(\theta-\alpha),a\sin(\theta-\alpha))$$

$$=((1-a)\cos\theta,(1-a)\sin\theta)+\left(b\cos\left(1-\frac{1}{a}\right)\theta,b\sin\left(1-\frac{1}{a}\right)\theta\right)$$

$$=\left((1-a)\cos\theta+b\cos\left(1-\frac{1}{a}\right)\theta,(1-a)\sin\theta+b\sin\left(1-\frac{1}{a}\right)\theta\right)$$

以上のことより，

$$\begin{cases} x=(1-a)\cos\theta+b\cos\left(1-\dfrac{1}{a}\right)\theta \\ y=(1-a)\sin\theta+b\sin\left(1-\dfrac{1}{a}\right)\theta \end{cases}$$



4．身近な問題を数学的に処理して考える

広島大学のＴ先生に，生徒を対象として“数学と予測”と題した講演をしていただく機会に恵まれた。身の回りの出来事を数学的に考え，数式化してみごとに解いていく数学の素晴らしさについての話でした。

生徒は勿論，私自身も，その内容の深さと理路整然とした考え方に感動させられました。

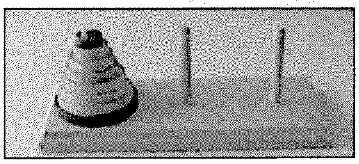
その中で，特に印象に残っているのは，

“１対のうさぎがいる。このうさぎは，毎月１対の子どもを生み，生まれた子どもは２ヶ月後から毎月１対ずつ子どもを生むとする。

このとき，１年後には何対の子どもが生まれたことになるか”というイタリヤの数学者 Leonardo Fibonacci (1170 ～ 1250) の考えた問題でした。

Ｔ先生のお話をきっかけに，私は漸化式の解法についてまとめることにした。

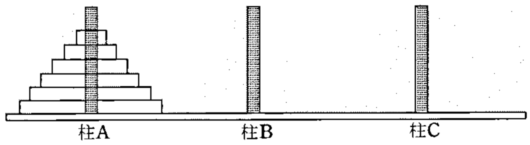
漸化式の授業では，次の「ハノイの塔」の問題を導入に使っている。



３本の柱A，B，Cがあり，柱Aには大きさのちがう円板が下から大きさの順にn枚重ねてある。

この円板を柱Cに次のルールで移しかえていく。 ①円板は１回の１枚ずつ移す。 ②柱Aから柱Bへ，柱Aから柱Cへ，柱Bから柱Aへというように円板を任意の柱に移してよい。 ③小さい円板の上に大きい円板を重ねてはならない。

このようなルールで，柱Aのn枚の円板を全部，柱Cに移しかえるのに要する最小の回数をa_nとする。



(1) $a_1=1$，$a_2=3$である。a_3，a_4，a_5，a_6，a_7を求めよ。

(2) a_nとa_{n+1}の関係式からa_nを求めよ。

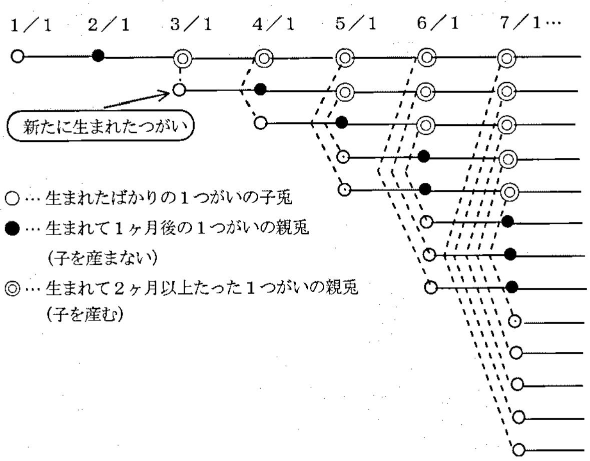
柱Aの$n+1$枚の円板のうち，n枚の円板を柱Bに移しかえるのに要する最小の回数はa_n回，残りの1枚を柱Aから柱Cに移し，続いて柱Bのn枚の円板を柱Bから柱Cに移しかえるのに要する最小の回数がa_n回だから，柱Aの$n+1$枚の円板を柱Cに移しかえる最小の回数a_{n+1}は

$a_{n+1}=2a_n+1$　$(n=1,2,3,\cdots)$ で求めることができる。

この漸化式を求める考え方を生徒の言葉で説明できるようにすることが，数学的な考察や知的なコミュニケーションを図るための思考力，判断力，表現力の育成につながると考えている。

Fibonacci の問題についても，その仕組みを理解し，漸化式を求めるためにどのように考えればよいかを見極めることが大切である。

この問題の漸化式を求めるために試行錯誤を繰り返して作成したのが次の図である。



私は，規則性を見つける問題だと考えて，
1，1，2，3，5，8，… と数えたのですが，先生は，nヶ月後のつがいの数をa_nとおいて，

$a_0=1$，$a_1=1$，$a_{n+2}=a_{n+1}+a_n$ $(n=0,1,2,\cdots)$

として，この漸化式を次のように解かれました。

$t^2-t-1=0$の解をα，β $(\alpha<\beta)$ とすると，上式は，

$a_{n+2}-\alpha a_{n+1}=\beta(a_{n+1}-\alpha a_n)$ …① と変形できる。

①より，数列$\{a_{n+1}-\alpha a_n\}$は，初項$a_1-\alpha a_0=1-\alpha$
公比βの等比数列になり，

$a_{n+1}-\alpha a_n=(1-\alpha)\beta^n$ …①′

同様に，$a_{n+2}-\beta a_{n+1}=\alpha(a_{n+1}-\beta a_n)$ …②

数列$\{a_{n+1}-\beta a_n\}$は，初項$a_1-\beta a_0=1-\beta$ 公比αの等比数列になり，$a_{n+1}-\beta a_n=(1-\beta)\alpha^n$ …②′

①′−②′より$(\beta-\alpha)a_n=(1-\alpha)\beta^n-(1-\beta)\alpha^n$

ここで，$\alpha+\beta=1$より$(\beta-\alpha)a_n=\beta^{n+1}-\alpha^{n+1}$

$\therefore a_n=\dfrac{\beta^{n+1}-\alpha^{n+1}}{\beta-\alpha}$　　α，βを代入すると，

$$a_n=\frac{1}{\sqrt{5}}\left\{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1}-\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1}\right\}$$

$n=12$とすると

$$a_{12}=\frac{1}{\sqrt{5}}\left\{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{13}-\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{13}\right\}$$

$t=\dfrac{1\pm\sqrt{5}}{2}$のとき，$t^2-t-1=0$だから，$t^{13}$の値は，

$t^{13}=(t^2-t-1)(t^{11}+t^{10}+\cdots+89t+144)+233t+144$

より

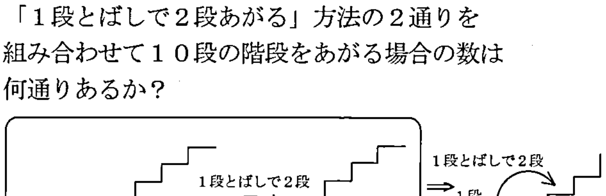
$$\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{13}-\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{13}$$
$$=233\left\{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)-\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)\right\}$$
$$=233\sqrt{5}$$

したがって，$a_{12}=233$になる。

漸化式の解法に加えて，漸化式を求めるときの発想や図表などを工夫する所に数学的な面白さがあると考えた。

(1)階段をあがる場合の数は何通り？

階段をのぼるのに，「1段ずつ階段をあがる」，「1段とばしで2段あがる」方法の2通りを組み合わせて10段の階段をあがる場合の数は何通りあるか？



また，n段の階段をあがる場合の数をa_nとおいて，a_{n+2}，a_{n+1}，a_nの間に成り立つ関係式を求めよ。

《考え方》

$n+2$段の階段をあがるとき，最初に1段あがる場合と1段とばしで2段あがる場合に分けて考える。

最初に1段あがる場合，残りの$n+1$段をあがる場合の数はa_{n+1}通り

最初に1段とばしで2段あがる場合，残りのn段をあがる場合の数はa_n通り

したがって，$n+2$段の階段をあがる場合の数a_{n+2}は

$a_{n+2}=a_{n+1}+a_n$　$(n\geqq1)$

今，$a_1=1$，$a_2=2$ だから

$a_3=a_2+a_1=3$	$a_7=a_6+a_5=21$
$a_4=a_3+a_2=5$	$a_8=a_7+a_6=34$
$a_5=a_4+a_3=8$	$a_9=a_8+a_7=55$
$a_6=a_5+a_4=13$	$a_{10}=a_9+a_8=89$

(2)並び方を変える場合の数は何通り？

n人が1列に並んでいる。このn人の並び方を変えて，どの人も新しく並んだ位置がもとの位置か，またはすぐ隣になるようにしたい。今，このような並び方がa_n通りあるものとする。だたし，全員が動かない場合も1通りとして数えるものとする。

(1)$a_1=1$，$a_2=2$である。a_3，a_4，a_5を求めよ。

(2)a_{n+2}，a_{n+1}，a_nの間に成り立つ関係式を求めよ。

《考え方》

$n+2$が並ぶとき，

i）右端のAが動かない場合。

A
○ ○ ○ … ○ ○ ○ ◍

$n+1$人が並び方を変えることになるので，その並び方はa_{n+1}通り

ii）右端のAが動く場合。隣の人と位置を変わるから

A
○ ○ ○ … ○ ○ ◍ ○

n人が並び方を変えることになるので，その並び方はa_n通り

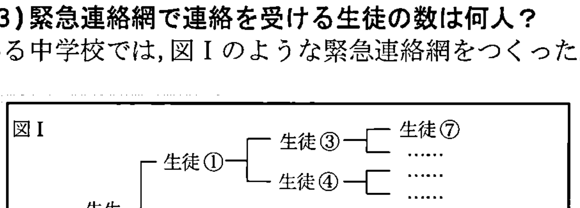
i）ii）より$n+2$人が並ぶとき，その並び方a_{n+2}は

$a_{n+2}=a_{n+1}+a_n$ $(n\geqq1)$

したがって，$a_3=3$，$a_4=5$，$a_5=8$

(3)緊急連絡網で連絡を受ける生徒の数は何人？

ある中学校では，図Ⅰのような緊急連絡網をつくった。



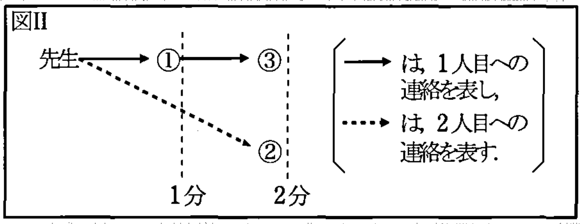
先生および連絡を受けた生徒は，この連絡網にしたがって，それぞれ２人の生徒へ連絡することにする。

緊急連絡が必要になると，先生は最初の生徒 ① に連絡する。

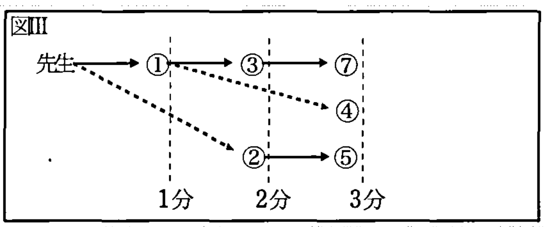
連絡はちょうど１分間で終了し，ただちに次の生徒 ② に連絡する。

それと同時に最初に連絡を受けた生徒 ① は，連絡網にしたがって，生徒 ③ に連絡する。

次の図IIは，このようすを時間の経過とともに表したものである。



次の図IIIは，先生が連絡を開始してから３分までのようすを表したもので，合計６人の生徒が連絡を受けることを表す。



このように，連絡に要する時間はどれもちょうど１分間として，連絡終了後間隔をおかずに次の連絡を始めることにする。

このとき，次の(1)，(2)，(3)の問いに答えよ。

(1) 連絡開始後３分を過ぎてから４分までの１分間に連絡を受ける生徒は何人か。その人数を求めよ。

(2) 連絡を開始してから８分間に合計何人の生徒が連絡を受けることになるか．その人数を求めよ。

(3) 連絡を開始してからn分後に連絡を受ける生徒の数をa_n人とするとき，a_n，a_{n+1}，a_{n+2}の間に成り立つ関係式を求めよ。

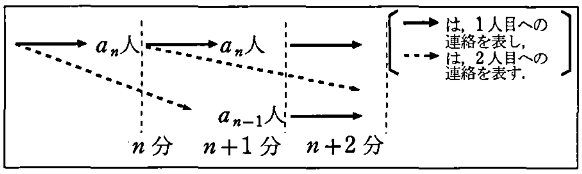
《考え方》

連絡を開始してから$n+2$分後に連絡を受けるa_{n+2}人の生徒を次のように分類する。

①連絡を開始してからn分後に連絡を受けたa_n人から，(２人目への連絡として)連絡を受ける生徒

②連絡を開始してから$n+1$分後に連絡を受けたa_{n+1}人から(１人目への連絡として)連絡を受ける生徒

このとき,$a_1=1$，$a_2=2$，$a_{n+2}=a_{n+1}+a_n(n=1,2,3,\cdots)$である。



(１)～(３)の問題は，身近な出来事として経験できるような問題の設定であり，数学的に考えて隣接三項間の漸化式を導くと，いずれの場合も同じ関係式に行き着く所が興味深い。

漸化式の意味が説明でき，数式で表現したことを，生徒の言葉で説明できる力を育むことがねらいである。このことが，コミュニケーションを図るための思考力，判断力，表現力の育成に役立つと考えている。

中学では具体的な数値をあてはめて考え，高校では一般化して考えることにより，学年の発達段階に応じて指導することができる題材でもある。

Ｔ先生の講演に刺激を受けて，初めは漸化式の解法のパターン化を考えたが，どのように漸化式を解くかという指導より前に，どのように考えてこの関係式を導いたのかという考え方に視点をあてた授業の中に，数学の面白さを求めるようになった。身近な出来事から漸化式を導くことができ,漸化式の表す意味が説明できるようになれば，その漸化式を解いて一般項を求めたいという学習への意欲は自ずと湧いてくる。

５．終わりに

改めて，「生徒にどのような力をつけたいか？」市川伸一氏の考えを紹介して確認しておきたい。

『「学力」というときに，まず第１に思い浮かぶのは知識や技能である。これは，ペーパーテストで測定しやすいものである。第２に，客観的ペーパーテストでは測りにくいが重要な能力として，文章読解力，論述力，討論力，批判的思考力，問題探求力などがある。これら２つを「学んだ結果としての学力」とするならば，第３の学力として「学ぶ力としての学力」と呼ばれるものがある。それは，自発的な学習意欲とか知的好奇心，学習を遂行するための計画力・方法・集中力・持続力さらには，教え合いや話し合いをしながら学んでいくコミュニケーション力などが含まれる』

【参考文献】

・中学校学習指導要領解説 数学編 平成20年3月28日告示

・「立体のとらえかた」 秋山 仁 著 駿台文庫

・数学の広場「３次元の世界」遠山 啓著 ほるぷ出版

・「数学的な考え方を育てる教材の開発」
　－積分を使って立体の体積を楽しく求める－
　広島大学附属福山中・高等学校 研究紀要 第37巻
　pp. 91-105 平成9年3月 入川 義克