高等学校数学の導入となる教材

清水　浩士

生徒が高等学校で初めて出会う数学である整式分野は，以後の数学学習につながる基礎的な分野である。また，高等学校における最初の授業は，生徒が以後の高等学校数学や数学の授業に対するイメージを形成する上で重要な意味を持つ。これらの，高等学校数学の学習内容と，生徒の情意の側面における重要性にもかかわらず，数学Ⅰの教科書の最初の部分は多くの言葉の定義で始まる。最初の授業であるが故に，高校数学の一部を垣間見，そのおもしろさに少しでも触れることができるような整式の題材をとりあげる必要性を感じ，多項式の項数を取りあげた。この題材は，今後生徒が高等学校において学習する展開公式や数列，順列組合せに関連づけることができる。

1．はじめに

筆者は「数学の学習内容は互いに関連づいているにもかかわらず，ともすれば単元ごとの学習に陥りがちである。そのことが生徒の数学的理解を阻み，数学学習の意欲を失なわせてしまうことにもなりかねない。（清水，2007)」という問題意識から「単元内容間の関連付けをすることを通して，[確かな学力] の育成に当たっての重要な視点とされる，知識や技能と思考力・判断力・表現力の相互の関連付け，深化・総合化を図る（中教審答申，2003)」ことに数学教育の立場から寄与することを目的として，単元内容間の関連づけるような授業実施や教材の開発に取り組んできた。このような学習を通して，生徒が数学学習における問題解決場面において，多面的な見方ができるようになることを期待するとともに，学習内容が互いに関連付いていることを感じ取らせたいと思っている。前年度はひとつの題材の学習を通してその学年での数学の学習内容を概観し，まとめとなるような題材を中学校３年と高等学校３年からそれぞれ取りあげた（清水，2007）。

2．教材開発の意義

本年度は前項の問題意識を継続して，高等学校数学の導入になる教材を取りあげる。生徒が高等学校で初めて出会う数学の題材は，おそらく多くの場合数学Ⅰの整式であろう。この題材は，以後の代数演算に必要となるだけではなく，演算を通して整式の構造を観察したり，因数分解から方程式の解，展開公式から二項定理へ発展させるなどの様々な分野に直接つながる基礎的な分野である。

一方生徒からみれば，高等学校の最初に学習する数学内容としての位置づけをもつ。それは生徒が高等学校において初めて出会う数学であり，高等学校数学や数学の授業に対するイメージを形成する上で重要な意味を持ちうる。これを教える側の立場から位置づけなおすと，高等学校の数学ではどのような学習をするのかということを紹介するとともに，授業において生徒にどのような学習を期待するのかというメッセージを送ることでもある。

これらの，高等学校数学の学習内容と，生徒の情意の側面における重要性にもかかわらず，生徒の最初に出会う高校数学教科書数学Ⅰの最初の部分は言葉の定義である。単項式，係数，次数，多項式，項，整式，定数，定数項，同類項など，教科書の索引としてあげられる（本文中では太字で扱われる）90以上の項目のうち十数項目が最初の２ページに登場する(山本ほか，2005文部科学省検定)。むろん言葉の定義は以後の学習の展開において重要であるが，これを教科書のままで扱うことが，生徒にとって数学学習が無味乾燥なものであると感じさせ，敬遠させることになりかねないという危惧の念を抱く。

高等学校数学の最初の授業であるが故に，整式の教材を通して，高校数学の一部を垣間見，そのおもしろさに少しでも触れることができるような題材をとりあげる必要性を感じ，多項式の項数を取りあげた。その題材をとりあげることにより，結果的に，上記にふれた多くの言葉を整理することができる。

3．授業構成の概略

(1) 導入

中学校の復習としてxの1次式$ax+b$，2次式ax^2+bx+cの項数がそれぞれ，2, 3であることを確認する。このことから，生徒はxのn次式

$$a_1x^n+a_2x^{n-1}+\cdots+a_nx+a_{n+1}$$

の項数が$n+1$であることを予測し，確認する。ただし，これ以降も含め，係数と定数項はいずれも0でないとする。

※ここで，教科書に太字で扱われる言葉の多くが登場する。

※添え字を用いた係数の表示をとりあげる。添え字と指数の和がつねに$n+1$であることにも留意する。

(2) 展開

①x, yのn次式の項数を考えることを生徒に提示する。

※2変数の1次式とはどのようなものか，多項式の次数の定義に基づいて言わせる。どのような項があるかを考えさせる。

※2次式は最初に自由にかかせ，次数ごとに整理し，たとえば降べきの順に整理することがよいことに気づかせる。

②x, yの1次式$ax+by+c$，2次式$ax^2+bxy+cy^2+dx+ey+f$から，項数がそれぞれ，3，6であることを確認する。

※まず数えさせる。

③x, yの3次式の項数を予想させる。

生徒はx，yの3次式をかくことによって予想することが想定される。生徒はこのような数学的活動を通して，3次式の項数が10であることを見つける。

※実際に3次式をかくことを通して，式を観察する。

④1次式，2次式，3次式の観察を通して4次式の項数が15であることを予想する。

※同次式の個数に注目する。

$$\boxed{ax+by}+c$$

$$\boxed{ax^2+bxy+cy^2}+\overline{dx+ey+f}$$

$$\boxed{ax^3+bx^2y+cxy^2+dy^3}+\overline{ex^2+fxy+gy^2+hx+iy+j}$$

$$\boxed{ax^3+bx^2y+cxy^2+dy^3}+\boxed{ex^2+fxy+gy^2}+\boxed{hx+iy}+\boxed{j}$$

※定数項，1次の項，2次の項，3次の項の個数をみることから類推する。

個数の変化のみから類推する生徒も予想されるが，増加した5個が4次の同次式の項数であることを確認する。

⑤n次式の項数を予想する。

生徒は

$$1+2+\cdots+n+(n+1)$$

を見つける。

※n次式の項数をa_nとするとき，$a_n-a_{n-1}=n+1$（$n\geqq2$）が成り立つが，$1+2+\cdots+n+(n+1)$としてまとめる。

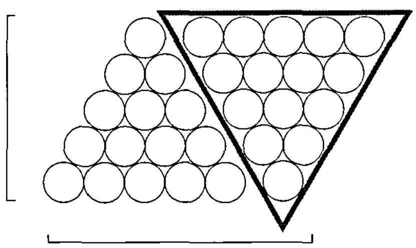
⑥図を用いて

$$1+2+\cdots+n+(n+1)=\frac{(n+1)(n+2)}{2}$$

を予測する。

※次のような具体的な図によって1から5までの和を説明する。nまでの和はこの図からの類推にとどめる。また，この式をx, yの3次式や4次式にあてはめて成り立っていることを確認する。

$n+1$個



$n+2$個

(3) まとめ

今後の展望にふれる。

４．高等学校における数学の学習内容との関連

この教材は，今後生徒が高等学校において学習する内容として，展開公式に直接つながるとともに，主に数列と順列組合せに関連する。この内容から，数列においては数列の和や階差数列，漸化式につながる。順列組合せでは，重複組合せや二項定理，多項定理に関連づけることができる。ここでは重複組合せとの関連にふれる。

先ほどの式において

$$\frac{(n+1)(n+2)}{2} = {}_{n+2}C_2$$

が成り立つ。その式のもつ意味を問い直してみる。x, y の n 次式の項数は $(x+y+1)^n$ の展開式の項数と一致しており，x, y の n 次式の各項は

$x^p y^q 1^r$ $(p+q+r=n,\ p\geqq 0,\ q\geqq 0,\ r\geqq 0)$

で表すことができるから，0以上の整数の組 $(p,\ q,\ r)$ の個数は，$x, y, 1$ の３個から n 個をとる重複組合せの個数 ${}_{n+2}C_2$ となっている。

同様に，x, y, z の n 次式の各項は，

$x^p y^q z^r 1^s$ $(p+q+r+s=n,$

$p\geqq 0, q\geqq 0, r\geqq 0, s\geqq 0,\ p, q, r, s$ は整数)

で表すことができるから，項数は ${}_{n+3}C_3$ となる。さらに，一般的に，m 変数の n 次式の項数は，${}_{n+m}C_m$ となる。これらをまとめると表のようになる。

	1変数の式	2変数の式	3変数の式	…	m変数の式
1次	2	3	4		$m+1$
2次	3	6	10		
3次	4	10	20		
4次	5	15	35		
：	：	：	：		
n-1次	${}_nC_1$	${}_{n+1}C_2$	${}_{n+2}C_3$	…	${}_{n-1+m}C_m$
n次	${}_{n+1}C_1$	${}_{n+2}C_2$	${}_{n+3}C_3$	…	${}_{n+m}C_m$

ここで，

${}_nC_r = {}_{n-1}C_{r-1} + {}_{n-1}C_r$

が成り立つから，表の中の，m 変数の n 次式 $(m\geqq 2,\ n\geqq 2)$ の項数は，その左と上の項数の和になっている。

前項の授業で扱った，x, y 2変数の n 次式を例にとると，x, y の n 次同次式の各項は $x^p y^q$ $(p+q= n, p\geqq 0, q\geqq 0,$ p, q は整数) で表すことができる。よってその項数は，

${}_{n+1}C_1 = n+1$

で，x の n 次式の項数と一致するから，

（x, y の n 次式の項数）

＝（x, y の n-1 次式の項数）

＋（x, y の n 次の同次式の項数）

の確認をすることができる。

さらに，重複組合せを考えることにより，高等学校の導入で扱った授業を発展させて m 変数 n 次の整式の項数に拡張することができる。

〔引用文献〕

清水浩士(2007),『学年のまとめとなる教材の作成』，「広島大学附属福山中・高等学校　中等教育研究紀要第47巻」, pp.135-140.

中央教育審議会答申(2003),「初等中等教育における当面の教育課程及び指導の充実・改善方策について（答申）」

山本芳彦ほか(2005文部科学省検定), 高等学校数学Ⅰ，啓林館