

数値データから関数関係を見つける

村上 和男

当校のサイエンス（数理基礎）の授業では「自然を理解する道具としての数学」を学習してきた。その単元の1つとして「数値データの間で成立する関数関係を見つける」学習を行った。具体的には太陽系とその惑星の間で成立する「ボーデの法則」を生徒に発見させた後に、土星とその衛星に同様な法則が成立しているのか、データを元にして考えさせた。この学習を通して生徒は自然科学の具体的方法「実験や観察を行い、その結果を数値で表現し、その数値の間に法則を見だし、それを数式で表現する」を体験することができた。

はじめに

関数を理解させることは中・高校数学の大きな目的の1つである。中学2年生で1次関数を、中学3年・高校1年で2次関数を、高校2年で三角・指数・対数関数を学ぶ。関数を理解させるためにそのグラフを描かせることをしばしば行うが、グラフをかくことができたから関数を理解できたとは言えない。具体的な対応表やグラフをつくれても、関数が分らない、と答える生徒は多い。

関数の概念は17世紀のヨーロッパで生まれた。ライプニッツは原因と結果を関数によって結びつけた事は良く知られている。また17世紀のヨーロッパのみが関数の概念を生み出し、他の地域や時代で関数の概念が生まれなかった理由は、この時代のヨーロッパのみが自然科学を創り出したことにあることも良く知られている。自然科学が自然法則という概念に支えられていることは言うまでもない。自然界には人間の意志から独立した法則があり、人間は理性によってそれを認識できる、という信念こそが自然科学を創り出した。この信念は、様々な事実や法則についての単なる知識ではなく、法則というものが必ずあるという信念、あるいは自然に対する「見方」の問題である。自然科学は「自然を無心に眺め、その中に身を置く」という態度からは決して生まれえない。逆に「自然を強い色眼鏡で見つめる」態度から生まれると言っても良い。

関数が自然科学の法則の数学的表現である以上、関数は因果律の表現である。すなわち原因 x によって必ず結果 y が決まるという考え方である。生徒にこの意識を持たせることこそ、関数指導のキーポイントであり、そのためには生徒自ら関数を見つけることが望ましい。関数を見つけるためには2つの量 x 、 y の表すデータを「必ず関係があるはずだ」という強い色眼鏡で見つめる必用

がある。

筆者はこれまでに関数を見つけさせる実践を何件か行ってきた。例えばガリレオによる斜面上の落下実験をヒントに、車輪をレール（角材）の上で転がす落下実験を行い、車輪の直径と落下速度について調べさせた。このときのデータは生徒自らが自分で実験して集めたものである。データを元にして関数関係や相関関係を求めるためには正確なデータが不可欠であるが、生徒が実験を行うと誤差の問題もあるし授業時間も不足する。また数学としての内容は、データを集めることよりもそれから法則を見つけることにある。そこで今回の実践では、理科年表などの既存データの利用を考えた。

様々な数値データから関数関係を見つけさせることが目的であるが、そのデータとして何を与えるかは極めて重要である。法則を発見しやすいデータでなくてはならないし、生徒が知らない法則であることが望ましい。この2つを満足するデータ（法則）として、太陽系の惑星の間に成立するボーデの法則を取り上げることにした。この法則は、太陽からその惑星までの順序番号と太陽からの距離の間に成立する法則である。まずそれを発見させた後に、この法則が、土星とその衛星についても成立するかどうか確かめることが1つの大きなテーマである。

以下述べる内容は当校で行ったサイエンスの授業実践報告でもある。

1 太陽系惑星について

生徒に興味を持たせるために惑星探査機が撮影した、いろいろな惑星や衛星の写真を画面やプリントで提示する。その後、表1の惑星データと次の質問を書いたプリントを配布し、授業を進めていった。

表1 惑星データ

	順序	軌道半径	公転周期	自転周期	半径	質量(kg)	密度	衛星数
水星	1	0.38710	0.2408	58.646日	2439	3.302×10^{23}	5.43	0
金星	2	0.72333	0.5152	243.018日	6051	4.868×10^{24}	5.20	0
地球	3	1.00000	1.0000	23.934時	6378	5.974×10^{24}	5.52	1
火星	4	1.52366	1.8807	24.523時	3386	6.418×10^{23}	3.93	2
木星	5	5.20336	11.856	9.925時	71492	1.899×10^{27}	1.33	29
土星	6	9.53707	29.424	10.656時	60288	5.685×10^{26}	0.89	30
天王星	7	19.1913	83.747	17.24 時	25559	8.683×10^{25}	1.32	20
海王星	8	30.0690	163.727	16.11 時	24764	1.024×10^{26}	1.64	8
冥王星	9	39.4817	248.02	6.387日	1170	1.32×10^{23}	2.0	1

表1で軌道半径、すなわち太陽からの平均距離の単位は地球を1とした天文単位である。

1天文単位=15000万km= 1.5×10^{11} m

また公転周期の単位は年、半径の単位はkm、密度の単位はg/cm³である。

生徒に配布したプリントの質問内容

問1 次の写真の惑星名を答えよ。

問2 表1をみて、関係を調べてみたい2つの量を上げよ。

問3 2つの量の間の関係を見つけるためには、どの様にすればよいか考えよ。

1 変数の決定

表には8種類のデータが与えてある。ここから2つの量の選び方は28通りもあり、数値の山から何に注目するかが最も大切な事である。ただ漠然と表を眺めるだけでは何も見つけることはできない。2つの量として増えれば増える、増えれば減る、という量に注目すればよいことに気づかせつつ生徒からの意見を待った。生徒から出た調べたい2つの量は

*順序と軌道半径(太陽からの距離)

*順序と公転周期

*軌道半径と公転周期

などである。順序は明確に増える量であるため考えやすい。軌道半径と公転周期の関係はケプラーの法則である。ケプラーの法則は有名であるが関係式の表示が複雑になるため、順序と太陽からの距離の関係について調べることにした。

2 関係を見つけるために

プリントの問3に対応する。問2の変数の決定とは無関係に生徒への課題として1週間後に発表させた。生徒

が答えた方法は

*データをながめる。見つめる。

*いろいろな量を測る。

*それぞれの部門で順に並べ表を作る。

*グラフや対応表を作る。

*大きな数は対数をとってみる。

*法則があると仮定して関係式を作る。

データを眺めるだけでは法則は発見できないことや順番に並べたりグラフを描くことは法則を見つける強力な手段であることを確認して次の段階に進んだ。

3 法則の発見

生徒が提案した方法に従って、順序と太陽からの距離をグラフで表すことにした。太陽からの距離(軌道半径)は非常に大きい数であるから対数をとる。下にその結果を示す。

表2

惑星(順序)	軌道半径 r (m)	log ₁₀ r
水星(1)	$3.87 \times 1.5 \times 10^{10}$	10.76
金星(2)	$7.23 \times 1.5 \times 10^{10}$	11.04
地球(3)	1.5×10^{11}	11.18
火星(4)	$1.52 \times 1.5 \times 10^{11}$	11.36
木星(5)	$5.20 \times 1.5 \times 10^{11}$	11.89
土星(6)	$9.54 \times 1.5 \times 10^{11}$	12.16
天王星(7)	$1.92 \times 1.5 \times 10^{12}$	12.46
海王星(8)	$3.01 \times 1.5 \times 10^{12}$	12.65
冥王星(9)	$3.95 \times 1.5 \times 10^{12}$	12.77

次の図1に、横軸に惑星順序、縦軸に log₁₀ r をプロットしたグラフを示す。このグラフを見ると、水星・金星・地球・火星と、木星・土星・天王星・海王星のグループがそれぞれほぼ1直線上に並んでいることが分る。それぞれの直線の式を求め順序を x, 半径を y として y を x

の式で表すこともできるが、ここでは関数関係がありそうだと、ということに止めておいて次の段階に進むことにした。

ここで見つけた関数関係は厳密に言えばボーデの法則とは異なるものである。ボーデの法則とは太陽から各惑星までの距離を y とすると、 $y = 0.4 + 0.3 \times 2^n$ で表される。ここで距離は太陽から地球までを1とした天文単位で、 n は金星が0、あとは順に1, 2...と整数が続く。

表3 ボーデの法則

	水星	金星	地球	火星	木星	土星
n		0	1	2	4	5
0.3×2^n		0.3	0.6	1.2	5.2	10.0
y	0.4	0.7	1.0	1.6	5.2	10.0
実測値	0.4	0.7	1.0	1.5	5.2	9.5

このように実測値とほとんど一致する。 $n=3$ の惑星として小惑星が発見されたことは良く知られている。しかし6以後の惑星については誤差が大きくなる。n=7の海王星については y が38.8、実測値は30.0である。

生徒と共に見つけた法則も誤差はあるが地球を基準にする必用はなく、また内惑星と外惑星に分類した記述ができるのでボーデの法則より優れているとも言える。

II 衛星について

次のテーマは惑星について成立した法則が衛星についても成立するかどうか確かめることである。ある条件で成立する法則が異なる条件の下でも、成立するのではないか、と仮定して追求する態度は極めて大切である。

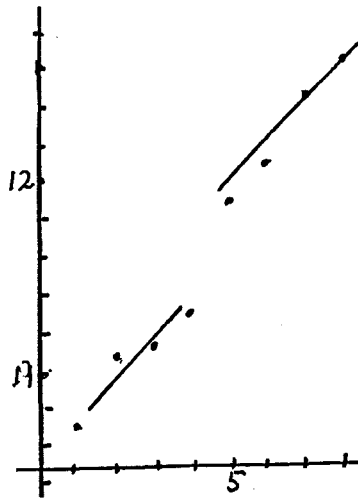
太陽系の全衛星データ（本稿では省略）と次の質問を書いたプリントを生徒に配り、それに従って授業を進めた。

問1 それぞれの惑星の衛星数を答えよ。

水星 0個 金星 0個 地球 1個
 火星 2個 木星 39個 土星 30個
 天王星 20個 海王星 8個 冥王星 1個

問2 全ての衛星から大きい順に10個あげよ。月は

図1



何番目か。またそれぞれの母惑星を言え。これらのことから月の特徴を答えよ。

問3 パラエティーに富む衛星を持つのはどの惑星か。

問4 順番と距離の間に成り立つ関係を求めよう。

1 どの惑星の衛星を調べるか

プリントの問3に対応する。最も多くの衛星を持つ惑星は木星であるが問3の答えを土星とした生徒が圧倒的に多かった。それぞれの惑星がどんな大きさの衛星を何個持つか調べると次のようになる。

表4 衛星の大きさ分布

	地球	木星	土星	天王星	海王星	冥王
1000km超	1	4	1	0	1	0
500~1000	0	0	3	4	0	1
100~500	0	0	5	1	2	0
10~100	0	2	3	3	3	0
10km以下	0	32	18	12	2	0

この表を見ると木星は衛星の数こそ多いが、その4大衛星を除くと半径が10kmに満たない隕石のような衛星がほとんどである。また地球の衛星である月は母惑星の大きさと比較すると極めて珍しい衛星であるといえる。土星最大の衛星はタイタンで半径は2575kmあり太陽系で3番目に大きい。土星は衛星の数も多く、その大きさもパラエティーに富んでミニ太陽系を形成していると言って良い。そこで土星とその衛星について調べることにした。

2 関数の発見

太陽系の惑星に対して行った方法と全く同じ方法を適用する。表5に30個の土星衛星データを示すが、ここで軌道半径の単位は 10^3 kmである。惑星の場合と同様に次の手順で関数関係を求める。

①順序と $\log_{10} r$ の表をつくる。

②グラフをかく。

③グラフを見て規則性があればその関係を数式で表す。

表5を見ると順序1のバーンと順序2のアトラスは軌道半径（土星からの距離）はほとんど同じである。これらの衛星は、ほぼ同じ軌道をお互いにもつれ合うようにして土星の周りを回転していると言われている。したがってこの2つの衛星は確かに別の衛星であるが、中心からの距離を問題にする場合は1つの同じ衛星と見なさなくてはならない。すなわち2つで順序1の衛星とする。この様な衛星は何個かある。ここで同じ1つの衛星と見る

表5 土星衛星データ

	順序	軌道半径	公転周期	半径
パン	1	133.6	0.575日	10
アトラス	2	133.7	0.602日	16
プロメテウス	3	139.4	0.179日	50
パンドラ	4	141.7	0.629日	42
エピメテウス	5	151.4	0.694日	60
ヤヌス	6	151.5	0.695日	89
ミヌス	7	185.6	0.942日	199
エンケラドス	8	238.1	1.37 日	249
テチス	9	294.7	1.89 日	530
テレト	10	294.7	1.89 日	12
カプリ	11	294.7	1.89 日	9.5
ディオネ	12	377.4	2.74 日	559
ヘルネ	13	377.4	2.74 日	16
イア	14	527.1	4.52 日	15.4
タイタン	15	1222	16.0 日	2375
ハイペリオン	16	1464	21.3 日	142
イアベトス	17	3661	79.3 日	718
S2000S5	18	11365	449 日	7
S2000S6	19	11440	451 日	5
フェーベ	20	12944	548 日	110
S2000S2	21	15189	687 日	9.5
S2000S8	22	15645	729 日	3.2
S2000S11	23	16392	783 日	13
S2000S10	24	17611	871 日	4.3
S2000S3	25	18160	893 日	16
S2000S4	26	18239	926 日	6.5
S2000S9	27	18709	951 日	2.6
S2000S12	28	19470	1017 日	2.8
S2000S7	29	20470	1089 日	2.8
S2000S1	30	23096	1312 日	8

必用があるものをまとめておく。

(5 エピメテウス 6 ヤヌス) (9 テチス 10 テレスト 11 カプリ)
 (12 ディオネ 13 ヘルネ) (18 S2000S5 19 S2000S6)
 (25 S2000S3 26 S2000S4)

これらをそれぞれ1つの衛星と見て新しく順序づけをし、対応する軌道半径(土星からの距離) r と $\log_{10} r$ を書いた表を表6に示す。それをグラフにしたものが次のページの図2である。

図2のグラフを見ると規則性が見える。生徒の活動としてはこのグラフから規則や法則を見つけることができるかどうか、この段階の活動が最も重要である。はじめは何の先入観も与えずに「どんな規則があるのか」と質問する。規則を見つけることができた生徒には後で説明させるとよいが、規則を見つけることができない生徒に

表6

衛星(順序)	軌道半径(r m)	$\log_{10} r$
アトラス(1)	1.337×10^8	8.127
プロメテウス(2)	1.394×10^8	8.143
パンドラ(3)	1.417×10^8	8.149
ヤヌス(4)	1.515×10^8	8.179
ミナス(5)	1.856×10^8	8.270
エンケラドス(6)	2.381×10^8	8.377
テチス(7)	2.947×10^8	8.470
ディオネ(8)	3.774×10^8	8.576
レア(9)	5.271×10^8	8.722
タイタン(10)	1.222×10^9	9.086
ハイペリオン(11)	1.464×10^9	9.164
イアベトス(12)	3.661×10^9	9.564
S2000S5(13)	1.137×10^{10}	10.057
フェーベ(14)	1.294×10^{10}	10.111
S2000S2(15)	1.519×10^{10}	10.182
S2000S8(16)	1.565×10^{10}	10.193
S2000S11(17)	1.639×10^{10}	10.215
S2000S10(18)	1.761×10^{10}	10.246
S2000S4(19)	1.824×10^{10}	10.260
S2000S9(20)	1.871×10^{10}	10.272
S2000S12(21)	1.947×10^{10}	10.290
S2000S7(22)	2.047×10^{10}	10.312
S2000S1(23)	2.400×10^{10}	10.364

どの様に対応すればよいかを指導のポイントである。そのために次の発問を準備する。

①規則がないと思う人はその理由を教えてください。
 (多かった意見)

プロットした点が全体的にばらばらである。点が一直線上に乗っていない。

②規則がないと思う人は、無理にでも規則を見つけ下さい。

はじめに述べたように規則や法則を見つけるためには漫然と表やグラフを眺めるだけではいけない。「絶対に法則があるはずだ」という色眼鏡で見つめる必用がある。したがって②の発問は重要になる。完全な1次関数や2次関数を規則ととらえている生徒は多いがその概念を変えるためにもこの様な作業は有用である。

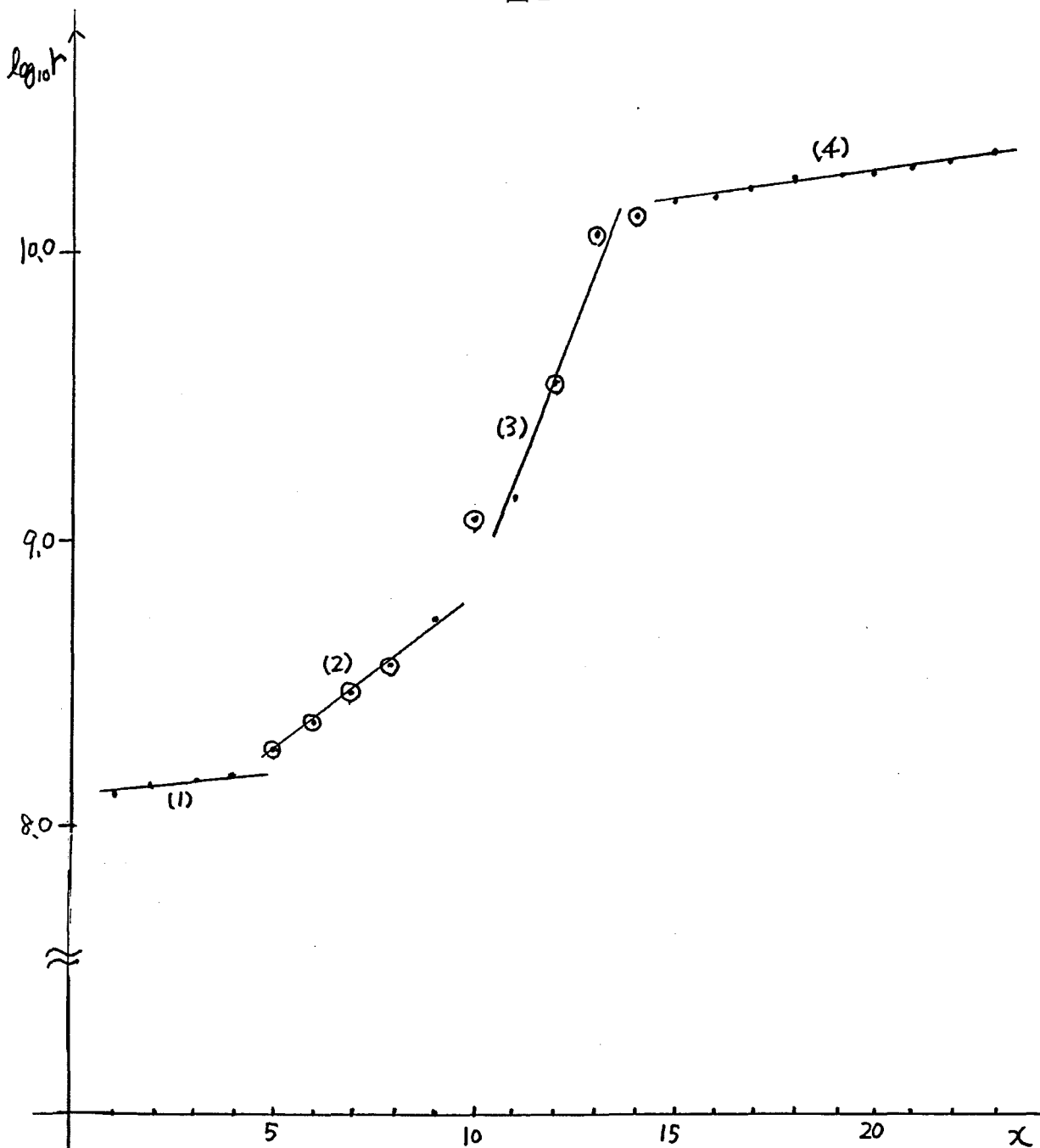
グラフを見ると土星の衛星は(1)～(4)の4種類に分けることができる。なお半径が100km以上の大きな衛星は別の印がつけてある。4種類の分類とは

(1) 内側を回る半径の小さな衛星。

(4) 最も外側を回る小さな衛星。

(2) (3) 大きな衛星で (3) は土星最大の衛星タ

図 2



イタンを含む。

多くの生徒は (1) と (4) の直線は引くことができたが、(2) と (3) については迷いがあったようだ。(2) と (3) の部分を一直線で結ぶのは抵抗があるが、2つに分けると細かく分けすぎるといふ思いがあるのかもしれない。この部分は巨大衛星についての規則を見つけることになるので重要である。この部分に規則はない、とするよりも (2) と (3) に分類するのが良いと思う。このようにすれば太陽系の惑星について図 1 で示したように、内惑星と外惑星の 2 種類に分類できたことと対応

して興味深い。

直線で近似できればその関係を式で表すことができる。ただ時間の関係上授業で扱うことはできなかった。例えば (2) の場合

$$z = \log_{10} r \text{ とおく。傾きは } 0.102 \text{ で通る点の座標も分るからほぼ } z = 0.102x + 7.76 \text{ となる。直接、} r \text{ を } x \text{ で表すと}$$

$$r = 10^{7.76} \times 10^{0.102x} \text{ となる。}$$

他の場合についても式で表すことができるが省略する。

おわりに

授業では太陽系の惑星及びその衛星について扱った。変数が順序の変数であるため規則を発見しやすい、という利点はあるが、生徒の生活実態とはかけ離れすぎた感はある。今回の実践については、惑星と衛星と両方行うのではなくどちらか一方にしぼった方が生徒はより集中したかもしれない。

データをはじめに与える場合そのデータが生徒にとって興味深いものでなければ授業は成立しない、今後は気象データの利用も考えたい。

参考文献

- 1) 銀林浩：「子供はどこでつまづくか」，国土社
- 2) 佐山栄俊：「美しく調和した衛星たち」
数学セミナー 2003年2月号，日本評論社
- 3) ニュートン別冊：「太陽系全カタログ」
ニュートン2004年9月号
- 4) 村上和男：「数学を楽しみながら生きて働く数学的な力をつける」，広島大学附属福山中・高等学校教育研究紀要 40巻
- 5) 松井孝典：「パノラマ太陽系」，講談社ブルーバック
ス
- 6) 山本義隆：「重力と力学的世界」，現代数学社