# 学年のまとめとなる教材の作成

清水　浩士

数学の学習内容は互いに関連づいているにもかかわらず，ともすれば単元ごとの学習に陥りがちである。そのことが生徒の数学的理解を阻み，数学学習の意欲を失なわせてしまうことにもなりかねない。本稿においては，単元内容間の関連付けをすることを通して，[確かな学力］の育成に当たっての重要な視点とされる，知識や技能と思考力・判断力・表現力の相互の関連付け，深化・総合化を図る（中教審答申, 2003）ことに数学教育の立場から寄与することを目的とする。とりわけ，ひとつの題材を学習することにより学年での数学の学習内容を概観し，まとめとなるような中学校３年と高等学校３年の教材をそれぞれ取りあげる。この学習を通して，生徒には数学の問題解決場面において，多面的な見方ができるようになることを期待するとともに，学年で学習した内容が互いに関連付いていることを感じ取らせたい。

## 1 中学校三年生における三平方の定理の導入

２つの正方形が図のように並べられている。
底辺 BE 上に
∠APF=90°と
なるように，
点 P をとれ。

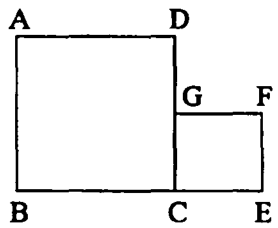



図１：最初に提示する問題

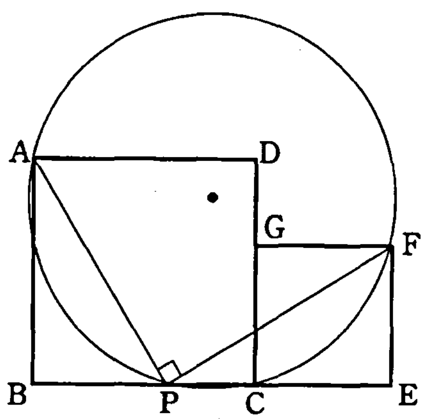



図２：点 P の作図

三平方の定理の証明法は数多くあるが，ここでは問題解決学習として順次問題を設定する。生徒には最後まで三平方の定理の証明であることは提示しない。生徒は，単元が変わることによるギャップを感じることなく，今までの学習内容の復習から自然と三平方の定理に入ることができる。

1) 点 P の作図 ………………… **《作図》,《円周角》**

∠APF が 90°となるような点 P を線分 BE 上にとることから始める。点 P の作図は，半円の弧に対する円周角が 90°であることを利用し，AF を直径とする円と線分 BE の交点として求める。一つは点 C で，それ以外の点は辺 BC 上にあり，これを P とする。円周上にない点は 90°とならないことにもふれる。

2) △ABP ∽△PEF の証明
……… **《三角形の相似条件》,《三角形の内角の和》**

△ABP と△PEF において，∠B＝∠E＝90°であるから，∠BAP＝∠EPF を示せば，２角がそれぞれ等しくなり，△ABP ∽△PEF がいえる。
∠BAP＝∠EPF であることは，次のように示すことができる。
△ABP において，∠B＝90°より，
∠BAP＋∠BPA＝90° ………………… ①
また，∠BPE＝180°，∠APF＝90°より，
∠EPF＋∠BPA＝90° ………………… ②
①，②から，∠BAP＝∠EPF

3) △ ABP ≡△ PEF の証明

.........《三角形の合同条件》,《2次方程式》

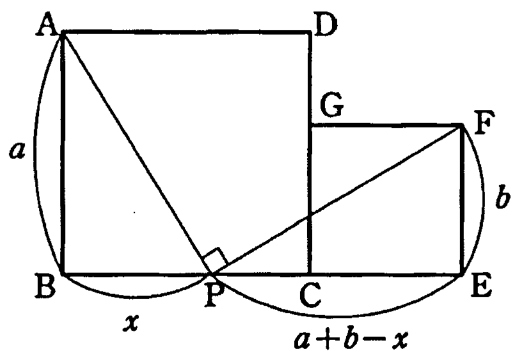



図3：合同の証明

AB=$a$, EF=$b$, BP=$x$ とおく。△ ABP と△ PEF において，△ ABP ∽△ PEF より，対応する辺の比は，それぞれ等しいから，

AB:PE = BP:EF…①，または，

AB:EF = BP:PE…②

①のとき　$a : x = (a+b) - x : b$

このとき，$(x-a)(x-b) = 0$

したがって，$x = a, b$

ここで，$x = a$ のときは，点 C となるから，仮定より $x = b$

②のとき，$a : x = (a+b) - x : b$

このとき，$x = a$ より，点 C と一致する。

①，②より，$x = b$ となる。

また，PE=$a$ であるから，

AB=PE，BP=EF，

∠ ABP =∠ PEF = 90°

2辺とその間の角がそれぞれ等しいので，

△ ABP ≡△ PEF

4) 三平方の定理の証明

..........................《三平方の定理》

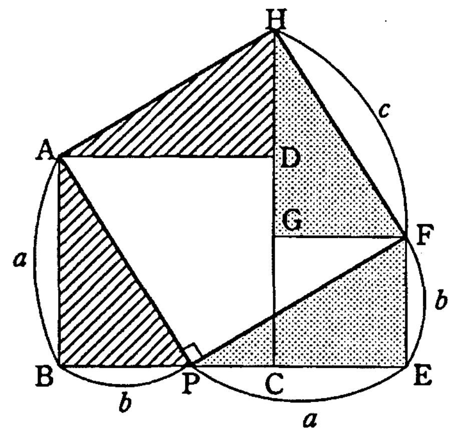



図4：三平方の定理の証明

図のように△ ABP の辺 AB を AD に重ね，△ PEF の辺 EF を GF に重ねるように移動すると，移動してできた図形は

CD+DH=CG+GH=$a+b$

であるから四角形となる。

さらに四角形 APFH は，4辺の長さが等しく，∠ APF = 90° であるから，正方形である。ここで，正方形 APFH の1辺の長さを $c$ とすると，正方形 APFH の面積は $c^2$ である。また，正方形 APFH の面積は，正方形 ABCD と正方形 GCEF の面積の和に等しいから，

$a^2 + b^2 = c^2$

が成り立つ。

すなわち，△ ABC は，直角をはさむ2辺の長さが $a,b$ で，斜辺が $c$ の直角三角形であるから，三平方の定理が示された。

## 2 高等学校三年生における円の求積

### 2.1 円の面積の証明に関わる循環論法

ここでとりあげるのは前教育課程の教科書の記述であるが，現教育課程においても高等学校数学Ⅲの教科書において，$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}$ の証明はおおよそどの教科書にも次のように記述されている。

弧度法で表された三角関数の極限について，次の性質が成り立つ。

$\frac{\sin x}{x}$ の極限

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$$

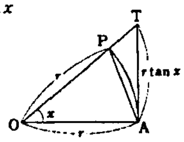
**証明** $0<x<\frac{\pi}{2}$ のとき，半径 $r$，中心角 $x$ の扇形OAP をつくり，

点Aにおける円の接線が直線OP と交わる点をTとする。

このとき，面積について，

$$\triangle\mathrm{OAP}<(\text{扇形 OAP})<\triangle\mathrm{OAT}$$

$$\frac{1}{2}r^2\sin x<\frac{1}{2}r^2x<\frac{1}{2}r^2\tan x$$




よって，　$\sin x<x<\tan x$

$\sin x>0$ だから，　$1<\frac{x}{\sin x}<\frac{1}{\cos x}$

したがって，　$1>\frac{\sin x}{x}>\cos x$

ここで，$\lim_{x\to +0}\cos x=1$ だから，

$$\lim_{x\to +0}\frac{\sin x}{x}=1 \qquad \cdots\cdots\cdots ①$$

次に，$x\to -0$ のときは，$x=-t$ とおくと，$t\to +0$ だから，

$$\lim_{x\to -0}\frac{\sin x}{x}=\lim_{t\to +0}\frac{\sin(-t)}{-t}=\lim_{t\to +0}\frac{\sin t}{t}=1 \qquad \cdots\cdots\cdots ②$$

①，②から，　$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$　が成り立つ。 ■

上で証明した性質は，$x$ が0にきわめて近いとき，

$$\sin x \fallingdotseq x$$

であることを示している。

図5：$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}$ の記述　(戸田宏 ほか, 1999 検定, p.57)

高等学校学習指導要領解説 (1999, p.70) において，三角関数の極限は $\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}$ を扱うことが示されているが，導関数の計算に必要な程度にとどめるとなっている。高等学校におけるにおける記述，とりわけ無限にかかわる記述が，学問としての数学の立場から見て厳密性を欠いていることは，生徒の発達段階を考えてやむをえないが，この証明部分は気になる。それは，$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}$ の証明をおこなうにあたり，円の面積公式を用いることを前提にしているが，円の面積公式はどのように導き出されてきたのかという問題である。生徒は高等学校3年の数学Ⅲを学習するまで，面積公式を導くことをしてきていない。小学校5年において，操作活動をもとにして学習した円の公式をそのまま疑うことなく用いてきている。高等学校3年のこの時期において円の面積を導こうとするならば，半径 $r$ の円の面積を $S$ とすると，この円に内接する正 $n$ 角形と外接する正 $n$ 角形の面積と比較して，

$$r\sin\frac{\pi}{n}\times r\cos\frac{\pi}{n}\times n<S<$$
$$r\times r\tan\frac{\pi}{n}\times n$$

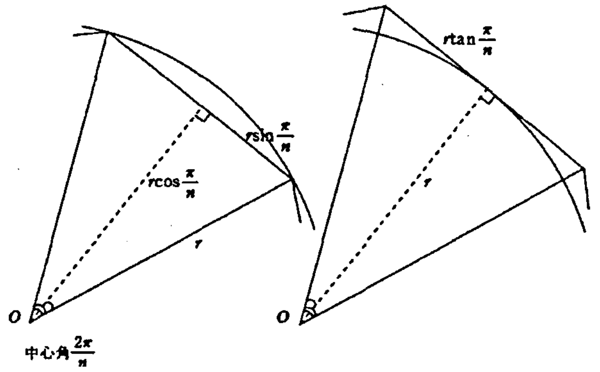



図6：円と正多角形

この極限をとって，

$$\lim_{n\to\infty}\left(r\sin\frac{\pi}{n}\times r\cos\frac{\pi}{n}\times n\right)\leqq S$$
$$\leqq\lim_{n\to\infty}\left(r\times r\tan\frac{\pi}{n}\times n\right)$$
$$\pi r^2\lim_{n\to\infty}\left(\frac{\sin\frac{\pi}{n}}{\frac{\pi}{n}}\times\cos\frac{\pi}{n}\right)\leqq S$$
$$\leqq\pi r^2\lim_{n\to\infty}\left(\frac{\sin\frac{\pi}{n}}{\frac{\pi}{n}}\times\frac{1}{\cos\frac{\pi}{n}}\right)$$

ここで，$\frac{\pi}{n}=x$ とおいて $\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}$ を前提として，$S=\pi r^2$ を導く。

…………………………………… **《数列の極限》**

すなわち，円の面積の証明と $\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}$ の証明の関係は，循環論法になっている。

一方，円の面積について，教科書にはたとえば次のような記述がある。

**例題 13**　$a>0$ のとき，$\int_{-a}^{a}\sqrt{a^2-x^2}\,dx$ を求めよ。

**解**　$x=a\sin\theta$ とおくと，$\dfrac{dx}{d\theta}=a\cos\theta$

| $x$ | $-a \longrightarrow a$ |
|---|---|
| $\theta$ | $-\frac{\pi}{2} \longrightarrow \frac{\pi}{2}$ |

$-\frac{\pi}{2}\leqq\theta\leqq\frac{\pi}{2}$ では，$\cos\theta\geqq 0$ だから，

$$\sqrt{a^2-x^2}=\sqrt{a^2(1-\sin^2\theta)}=\sqrt{a^2\cos^2\theta}=a\cos\theta$$

$$\int_{-a}^{a}\sqrt{a^2-x^2}\,dx=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}a\cos\theta\cdot a\cos\theta\,d\theta=a^2\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\cos^2\theta\,d\theta$$

$$=a^2\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{1+\cos 2\theta}{2}\,d\theta=a^2\left[\frac{\theta}{2}+\frac{\sin 2\theta}{4}\right]_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}=\frac{\pi a^2}{2}$$

例題 13 の結果 $\int_{-a}^{a}\sqrt{a^2-x^2}\,dx=\frac{\pi a^2}{2}$ は，右のような半径 $a$ の半円の面積が $\frac{\pi a^2}{2}$ であることを示している。

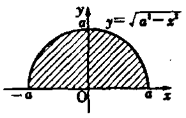



図７：積分と円の面積の関係に関わる記述
(戸田宏 ほか, 1999 検定, p.143)

一見，これにより円の面積が求められ，循環論法が解消したように見えるが実はそうではない。それは，この積分には置換積分が用いられており，$\cos x$ の積分が関係する。$\cos x$ の積分は，微分の逆計算として求めるから，これは $\sin x$ の微分が前提とされており，$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}$ の結果を用いていることになり，解決になっていない。
……………………《三角関数の微分の定義》
定義した弧度法を用いていることも，well-defined と言えるので後味が悪い。いずれにせよ，三角関数からはなれたところで解決する必要があることは予見できる。

## 2.2 円の求積

ここでは解析概論 (高木, 1963, pp.190-193) をもとに，数学Ⅲまでの学習内容で理解できるように円の面積を求めることを試みる。なお，この一連の学習は，一時期に集中するのではなく，年間を通してそれぞれ，該当する単元の中で扱う。

まず，座標平面上で，原点中心半径１の円弧の長さを考える。……………………《曲線の長さ》

$x^2+y^2=1$ より，円の上半分は，$y=\sqrt{1-x^2}$ であり，また，

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$$

であるから，$0<x$ における円の上半部の円弧 AP の長さ $\theta$ は，

$$\theta=\int_0^x\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\,dx=\int_0^x\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$$

となる。ここで，

$$\theta=\int_0^x\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\,dx$$

は，

$$\varpi=\int_0^1\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\,dx$$

とおくとき，$\theta$ は $0\leqq x\leqq 1$ において単調に増加するから，区間 $0\leqq\theta\leqq\varpi$ において逆関数が存在する。
……………………《逆関数》
その関数を，

$$x=\varphi(\theta)\qquad(-\varpi\leqq\theta\leqq\varpi)$$

とおくと，

$$\frac{d\theta}{dx}=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

であるから，……………………《逆関数の微分》

$$\varphi'(\theta)=\frac{dx}{d\theta}=\sqrt{1-x^2}$$

ここで，

$$\psi(\theta)=\varphi'(\theta)=\sqrt{1-x^2}$$

とおくと，

$$\psi'(\theta)=\frac{d}{d\theta}\sqrt{1-x^2}=\frac{d}{dx}\sqrt{1-x^2}\cdot\frac{dx}{d\theta}$$

$$=\frac{-x}{\sqrt{1-x^2}}\sqrt{1-x^2}=-x=-\varphi(\theta)$$

であるから，…………………《合成関数の微分》

$$\varphi''(\theta) = \psi'(\theta) = -\varphi(\theta),$$
$$\psi''(\theta) = -\varphi'(\theta) = -\psi(\theta)$$

よって，

$$\varphi^{(2n)}(\theta) = (-1)^n\varphi(\theta), \psi^{(2n)}(\theta) = (-1)^n\psi(\theta)$$
$$\varphi^{(2n+1)}(\theta) = (-1)^n\psi(\theta), \psi^{(2n+1)}(\theta) = (-1)^{n+1}\varphi(\theta)$$

ここで，$x=0$ のとき，$\theta=0$ であるから，

$$\varphi(0) = 0, \quad \psi(0) = 1$$

よって，$\varphi(\theta)$ と $\psi(\theta)$ を Maclaurin 展開すると，
…………………《近似》,《**Maclaurin 展開**》

$$\varphi(\theta) = \theta - \frac{\theta^3}{3!} + \frac{\theta^5}{5!} - \cdots,$$
$$\psi(\theta) = 1 - \frac{\theta^2}{2!} + \frac{\theta^4}{4!} - \cdots$$

Maclaurin 展開は次のように導く。

$$\int_a^x f'(t)dt = [f(t)]_a^x = f(x) - f(a)$$

から，

$$f(x) = f(a) + \int_a^x f'(t)dt$$

と変形して部分積分法を用いると，…《部分積分法》

$$f(x) = f(a) + [(t-x)f'(t)]_a^x - \int_a^x (t-x)f''(t)dt$$
$$= f(a) + f'(a)(x-a) + \int_a^x (x-t)f''(t)dt$$

これを順次繰り返して，$x=a$ における $n$ 次のテイラー近似式

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2}(x-a)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + \frac{1}{n!}\int_a^x (x-t)^n f^{(n+1)}(t)dt$$

から Maclaurin 展開

$$f(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2}x^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + \cdots$$

を得る。

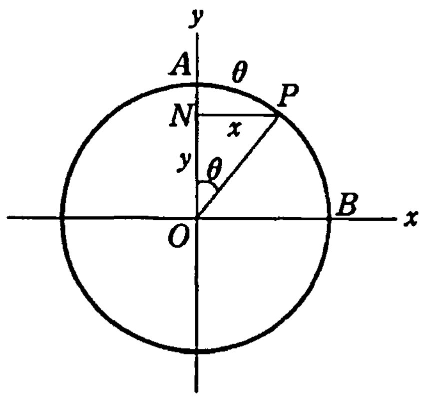



図8：単位円

$x=\varphi(\theta)$ の図形的な意味を考えると，$\theta$ は半径1の円の弧長を表すから，弧度法で $\theta = \angle AOP$ となり，
……………………………………《弧度法》

$$\varphi(\theta) = x = NP = \sin\theta$$

を表す。したがって，

$$\sin\theta = \theta - \frac{\theta^3}{3!} + \frac{\theta^5}{5!} - \cdots$$

この式より，

$$\frac{\sin\theta}{\theta} = 1 - \frac{\theta^2}{3!} + \frac{\theta^4}{5!} - \cdots$$

を得て，

$$\lim_{\theta\to 0}\frac{\sin\theta}{\theta} = 1$$

となり，これから半径 $r$ の円の面積 $\pi r^2$ が求められる。

また，

$$\psi(\theta) = \varphi'(\theta) = \sqrt{1-x^2} = y = ON = \cos\theta$$

であるから，

$$\cos\theta = 1 - \frac{\theta^2}{2!} + \frac{\theta^4}{4!} - \cdots$$

と表すことができる。

$x=1$ のとき，$\theta = \varpi$ は弧長ABであるから，$\varpi = \frac{\pi}{2}$ と定義すると，円周の長さは $2\pi$ となる。

### 2.3 本題材を高等学校で扱う意義

この教材を高等学校の数学で扱う意義は次のことにあると考える。

1. 円周率や円の求積は小学校以来身近にありながら，その求め方は単純ではない。特に，循環論法に陥ることで生徒を考えざるを得ない立場に置くことにより，生徒が関心をもって臨むことができる。
2. 数学Ⅲにおける学習の多くの知識を必要とする。数列の極限 (はさみうち)，三角関数の微分の定義，弧度法，平均値の定理の応用 (近似, Maclaurin 展開)，微分法，積分法，逆関数など数Ⅲのまとめの教材として適当である。特に，弧度法の定義の必然性を学習することができる。
3. 発展的な学習として高大接続への，高等学校からのアプローチとして位置づけることができる。

引用文献

高木貞治 (1961),『解析概論改訂第三版』, 岩波書店, pp.190-193.
文部省 (1999),『高等学校学習指導要領解説　数学編 理数編』, 実教出版
中央教育審議会 (2003),「初等中等教育における当面の教育課程及び指導の充実・改善方策について（答申)」
戸田宏 ほか (1999 検定), 文部省検定済教科書 高等学校数学科用, 戸田宏 編『高等学校最新数学Ⅲ』, 啓林館