考える力を高める問題作り

村上　和男

創造的な力や問題解決力、また考える力を高めるために「問題作り」を行った。本研究は様々な方法による「問題作り」の実践研究である。また問題作りテストを行い、通常のテストによる成績との比較を行った。その結果、通常のテストで問題を解く能力と、問題作成能力とは、必ずしも一致しないことが分った。

はじめに

授業をしていてよく思うことであるが、数学の学習は生徒にとって受け身になりがちである。教師は数学の内容を説明し、大切なことを板書し、問題演習に多くの時間を費やす。もちろんこの様な学習は「数学を理解させる」「数学文化を伝えていく」などの意味においても重要であるが、それだけでは創造的な力や問題解決力、考えを深める力などは育ちにくい、この様な力を育てるために「問題作り」は適していると考える。なぜなら問題を作るとき、元の問題の条件や要素をを整理したり、場合分けをする。また問題を一般化することもあるであろう。このようなことを行う力こそが求めるものである。

ここで言う問題作りとは

①元になる問題の類題を作るなかで様々なことを考え、発見する。

②元になる問題を一般化した問題を作るなかで様々なことを考え、発見する。

③what-if-not の方法による問題作り

などである。以下これらの問題作りについて示す。

Ⅰ．元になる問題の類題作り

1．式の展開　　　高校1年生対象

元になる問題

$(x+1)(x+2)(x+3)(x+4)$を展開せよ

$(x-1)(x+2)(x+3)(x+6)$を展開せよ

これらの問題の類題を作れ。

(1) $(x+1)(x+2)(x+3)(x+4)$について

いきなり「類題」と言っても生徒には分らない。次のように説明した。

$$\begin{aligned}&(x+1)(x+2)(x+3)(x+4)\\&=(x+1)(x+4)(x+2)(x+4)\\&=\{(x^2+5x)+4\}\{(x^2+5x)+6\}\\&=(x^2+5x)^2+10(x^2+5x)+24\\&=\cdots\cdots\end{aligned}$$

この問題は展開すると$(A+c)(A+d)$となる。

生徒が作った類題

＊　$(x+2)(x+3)(x+5)(x+6)$を展開せよ

$$\begin{aligned}&(x+2)(x+3)(x+5)(x+6)\\&=\{(x^2+8x)+12\}\{(x^2+8x)+15\}\\&=\cdots\cdots\end{aligned}$$

＊　$(x-2)(x-4)(x+5)(x+7)$を展開せよ

$$\begin{aligned}&(x-2)(x-4)(x+5)(x+7)\\&=\{(x^2+3x)-10\}\{(x^2+3x)-28\}\\&=\cdots\cdots\end{aligned}$$

発見したこと

＊定数を連続する4整数にすれば必ず類題を作れる。

＊定数部分を等しくした類題を作ることができる。

$$\begin{aligned}&(x+1)(x+6)(x+2)(x+3)\\&=(x^2+7x+6)(x^2+5x+6)\\&=\{6+(x^2+7x)\}\{6+(x^2+5x)\}\\&=36+6(x^2+7x+x^2+5x)\\&\quad+(x^2+7x)(x^2+5x)\\&=\cdots\cdots\end{aligned}$$

深めることができる内容

＊組織的に類題を作る事ができる方法を考える。

$$\begin{aligned}&(x+a)(x+b)(x+c)(x+d)\\&=\{x^2+(a+b)x+ab\}\times\{x^2+(c+d)x+cd\}\end{aligned}$$

であるから　$a+b=c+d$　となる整数を選べばよい。

(2) $(x-1)(x+2)(x+3)(x+6)$について

$$\begin{aligned}&(x-1)(x+2)(x+3)(x+6)\\&=(x-1)(x+6)(x+2)(x+3)\\&=\{(x^2+5x)-6\}\{(x^2+5x)+6\}\\&=(x^2+5x)^2-36\\&=\cdots\cdots\end{aligned}$$

と展開する。xの係数が等しく、定数の絶対値が等しく符号が異なるようにするため(1)の類題作りより難し

かった。できている生徒も定数部分を何倍かした物がほとんどであった。

*$(x-2)(x+4)(x+6)(x+12)$を展開せよ

*$(x-3)(x+6)(x+9)(x+18)$を展開せよ

深めることができる内容

*組織的に類題を作る事ができる方法を考える。

$$(x+a)(x+b)(x+c)(x+d)$$
$$=\{x^2+(a+b)x+ab\}\times\{x^2+(c+d)x+cd\}$$

であるから　$a+b=c+d$….①

$ab=-cd$….②

を同時に満たす整数a,b,c,dを求めればよいが難しい。生徒には次のように説明した。

②より$a/c=-d/b=k$　とおくと$a=ck$,

$d=-bk$　これを①に代入して$ck+b=c-dk$

つまり$(b+c)k=c-b$….③が条件である。

③の k に適当な値を代入することによって次々と a,b,c,d を求めることができる。例えば $k=2$ のとき③は $2b+2c=c-b$　すなわち $3b=-c$ である。ここで $b=1$　とすれば $c=-3$, $a=-6$, $d=-2$となり

$(x-6)(x+1)(x-3)(x-2)$を得る。

上で述べた内容は比例式の単元と関わりが深い。比例式を学習するとき振り返ると良い。

2．展開公式　　　　高校1年生対象

元になる問題
$$(a+b+c)^2=a^2+b^2+c^2+2ab+2bc+2ca$$

類題を作れ。

(1)文字数を増やした類題

*$(a+b+c+d)^2=a^2+b^2+c^2+d^2+2ab+2ac+2ad+2bc+2bd+2cd$

*文字の数をn個にする。

(2)次数を変えた類題

*$(a+b)^4$を展開せよ。

*$(a+b)^n$を展開せよ。

*$(a+b+c)^n$を展開せよ。

これらについては二項定理の学習で振り返りたい。

生徒が発見したこと

ある生徒は次のことを見つけた。

$(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$ であるが、その係数の和は

$1+2+1=4$　　文字数は2で　$2^2=4$　である。

$(a+b)^5=a^5+5a^4b+10a^3b^2+10a^2b^3+5ab^4+b^5$ で

係数の和は　$1+5+10+10+5+1=32$

文字数は2で　$2^5=32$　である。

$(a+b+c)^3=a^3+b^3+c^3+3a^2b+3ab^2+3b^2c+3bc^2+3ca^2+3ac^2+6abc$ で

係数の和は

$1+1+1+3+3+3+3+3+3+6=27$

文字数は3で　$3^3=27$である。

これらのことから次の定理が予想される。

定理

$(a_1+a_2+a_3+\cdots\cdots+a_k)^n$ を展開したとき、その係数の和は k^n である。

この様な発見は問題作りを通してこそできたと思われる。

II．what-if-not の方法による問題作り

この方法は、元になる問題を成立させている要素を全て抜きだし、その要素を変えることによって新しい問題を作る方法である。

1．元になる問題

$x+1/x=t$のとき x^2+1/x^2 を t で表せ。

(1)生徒が見つけた要素

*左辺の文字は1種類である。

*文字の係数は1である。

*左辺の項は2個ある。

*+が使われている。

*等号が使われている。

*分母に文字がある。

*左辺は対称式である。

(2)生徒が作った問題

* $x+1/x=t$ のとき$x^{100}+1/x^{100}$ を t で表せ。

* $x+1/x=t$ のときx^n+1/x^n を t で表せ・

これは元の問題を一般化したものである。

* $x-1/x=t$ のとき x^2-1/x^2, x^3-1/x^3, x^4-1/x^4 などを t で表せ。

* $x+1/x<5$ のとき x^2+1/x^2 が取りうる値の範囲はどうなるか。

この問題は元の問題とは質的に異なっている。「元の問題を発展させよ」という指示だけではなかなか作れない。what-if-not の方法だからこそ作ることができる。

*$2x+2/x=t$のとき$2x^2+2/x^2$をtで表せ。

*$x^2+x=t$のとき x^2-x, x^3-x^2 などを t で表せ。

*$x^2+x=t$のとき x^2+1/x^2 などを t で表せ。

what-if-not の方法で問題を作らせるとき、「解くことができなくても良い」と指示することが極めて重要である。生徒は「問題は必ず解くことができるものである」と思いこんでいる。数学の学習の多くの部分は問題演習

であったのだから無理もない。しかし解くことができる問題よりも、むしろ解くことができない問題の方が新しい内容を含むことが多い。

2．元になる問題　　　中学１年生対象

9＋99＋999＋9999＋99999＋999999 ＋9999999　を求めよ

(1)生徒が見つけた要素

＊９だけ使われている。
＊桁数がどんどん増えている。
＊＋が使われている。
＊項が7個ある。
＊数を求める問題である。

(2)生徒が作った問題

①９を別の数に変えた問題
　2＋22＋222＋⋯⋯＋2222222を求めよ。
　これ以外もいろいろできる。ある生徒は
　1＋11＋111＋⋯⋯＋1111111を求めて何倍かすればよいことに気づいた。

②最後の数を９桁にする。10桁，n桁にする。
　3＋33＋333＋⋯⋯＋3333333333を求めよ。

③元の問題と同じ計算方法でできる問題
　＊1＋11＋101＋1001＋10001＋100001＋10000001を求めよ
　＊8＋98＋998＋9998＋⋯⋯＋9999998を求めよ。

③＋を－にした問題
　＊9－99－999－⋯⋯－9999999を求めよ。
　多くの生徒がこの問題を作っていたが
　＊－9－99－999－⋯⋯－9999999を求めよ。
　は、誰もいなかった。

④整数を小数や分数に変えた問題

⑤何種類かの数字を使う問題
　＊1＋2＋3⋯⋯＋7を求めよ。
　＊$9+9^2+9^3+9^4+\cdots+9^7$を求めよ。

⑥左右対称な数の和を求める問題
　1＋21＋212＋22122＋2221222＋⋯を求めよ。

⑦数値を求めない問題
　9+99+999＋$\boxed{\qquad\qquad}$＝1111111111108
　となる$\boxed{\qquad\quad}$をうめよ。

(3)生徒が作った問題の取り扱いについて

生徒が作った問題をどの様に扱うのかは難しい。生徒が自由に考えるのはよいがそれを収束させることが難しいのである。作られた問題全てを検討することはできない。１つの方法は、上のように問題を整理して生徒に紹介し、さらに解くことが可能な問題についてはレポートなどの形式で提出させることである。また他の方法として生徒が作った問題を採点する事もあって良い。いずれにせよ生徒に返す必用がある。

3．元の問題　　　　　　中学１年生対象

2	8	14	20	⋯
4	10	16	22	⋯
6	12	18	24	⋯

上の表は偶数をある規則に従って並べたものである。上から3番目で左からa番目の数をaを用いて表せ

問題を作る力を評価するために、この問題で試験を行った。元の問題の[見方を変えた問題]を作ったら１問につき10点「内容を変えた問題」を作ったら１問につき5点、「数値を変えた問題」を作ったら１問につき3点と採点した。

(1)生徒が見つけた要素

＊偶数を使っている。
＊2ずつ増えている。
＊3行である。
＊整数を使っている。
＊正の数を使っている。
＊文字を使っていない。
＊最初の数は2である。
＊0がない。
＊横に6ずつ増えている。
＊縦に2ずつ増えている。
＊斜めに見ると6ずつ増えている。
＊左から右へと増えている。
＊増えていく数は同じである。
＊この表は限りがない。
＊それぞれの項は１つである。
＊数値を求め問題である。

(2)見方を変えた問題例

①次のように三角形状に並べていく。左からa番目の数をaを用いて表せ。

　　　　　　14
　　　　8
　　4　　　16
2　　　10
　　6　　　18
　　　　12
　　　　　　20

②並べ方を変える。次のように並んだ数がある。左からａ番目の数をａを用いて表せ。

2	12	14…
4	10	16…
6	8	18…

2	4	14	16…
6	8	16	20…
10	12	22	24…

③同じ数が何個か並ぶ問題

2	4	8	10‥
2	6	8	12‥
4	6	10	12‥

2	6	8	8	10‥
4	6	8	10	10‥
4	6	8	10	10‥

④増える数を文字にした問題

2	2+3n	2+6n	‥
2+n	2+4n	2+7n	‥
2+2n	2+5n	2+8n	‥

⑤元の問題で合計を求める問題にする

左からa番目までの数をすべて合計するといくらになるか。

⑥元の表で58はどの位置にあるか。

⑦2乗や3乗の数を入れる。

2	8^2	…
4^2	10^2	…
6^2	12^2	…

⑧かけ算してできる数にする。

2	16	128	…
4	32	256	…
8	64	512	…

⑨4行にする

2	10	18	…
4	12	20	…
6	14	22	…
8	16	24	…

⑩初めの数を文字にする。

n	n+6	…
n+2	n+8	…
n+4	n+10	…

(3)内容を変えた問題例

①奇数を並べる

1	7	13	…
3	9	15	…
5	11	17	…

②小数や分数を使う

1.5	7.5	13.5	…
3.5	9.5	15.5	…
5.5	11.5	17.5	…

③負の数を使う。

Ⅲ. 定期試験の成績と問題作成試験の成績について

中学1年生 41 名に対して前述の問題作成試験を行った。4回の定期試験の偏差値の平均、4回の偏差値の標準偏差、問題作成試験の偏差値などを示す。

生徒	偏差値平均	標準偏差	問題作成偏差	z
1	54.0	3.14	50.5	-1.10
2	46.0	4.53	49.0	0.67
3	38.8	4.31	44.7	1.38
4	60.8	4.00	47.6	-3.80
5	48.3	4.41	50.5	0.51
6	63.6	5.32	38.3	-4.75
7	50.0	3.25	42.2	-2.40
8	39.4	6.73	45.6	0.92
9	45.4	8.39	48.1	0.33
10	49.3	3.91	45.6	-0.95
11	55.2	3.97	57.8	0.66
12	59.3	7.26	41.3	-2.48
13	50.8	4.50	48.1	-0.59
14	56.6	7.11	35.9	-2.91
15	48.7	8.01	39.8	-1.11
16	44.0	2.33	73.8	12.82
17	35.5	7.76	52.9	2.24
18	46.8	7.67	54.4	1.00
19	71.7	7.30	43.2	-3.91
20	46.5	4.42	50.5	0.91
21	53.5	8.66	40.8	-1.47
22	44.8	6.02	50.5	0.95
23	50.6	9.44	77.2	2.82
24	65.6	5.50	43.2	-4.08
25	45.2	12.1	55.3	0.84
26	54.8	4.31	60.7	1.38
27	45.1	3.56	72.3	7.64
28	29.5	5.59	35.9	1.14
29	54.7	3.82	48.1	-1.71
30	65.0	0.71	60.7	-6.02
31	34.0	4.32	48.1	3.28
32	56.3	5.38	43.2	-2.43
33	51.8	4.60	40.8	-2.39
34	46.8	15.8	48.1	0.08
35	52.7	7.77	52.9	0.05
36	45.4	3.80	54.4	2.36
37	56.5	10.9	59.7	0.29
38	57.7	8.50	70.4	1.50
39	42.8	9.86	42.2	-0.06
40	43.0	7.27	38.3	-0.64
41	42.4	7.99	48.1	0.72

表の１列目は生徒番号である。プライバシー保護のため出席番号ではない。２列目は偏差値である。４回の定期試験を行っているが、それぞれの試験ごとにその生徒の偏差値を求める。ここで言う偏差値とは
(生徒の得点－クラス平均点)／クラス標準偏差×１０＋５０のことである。４回の試験それぞれについて偏差値を求め、その平均値を表に載せた。３列目は４回の偏差値についての標準偏差である。４列目は問題作成試験結果の偏差値である。それぞれの生徒について定期試験の成績と問題作成試験の成績を比較したい。問題作成試験を何度も行っていればそれぞれの成績分布について、かなり厳密な議論もできるが現在１回しか行っていない。そのため問題作成試験の標準偏差を、定期試験のそれで置き換えた。表の５列目のzの値は

(問題づくり偏差値－定期試験偏差値)／標準偏差でこの値を使って比較することになる。

例えば１の生徒については、成績分布は54.0を中心とした標準偏差3.14の正規分布を仮定したとき、問題作成結果の位置は－1.1×標準偏差、のところである。したがって問題づくりはかなり苦手な生徒だといえる。しかし定期試験の偏差値平均が54.0だから通常の成績はそこそこある。

良く知られているようにz＝1.96は仮説検定5％の棄却域、z=2.55は１％の棄却域である。したがってzの絶対値が2以上であれば、定期試験の成績と問題作成試験の成績とは大きな差があると言って良い。zの値が2以上なら問題づくりが得意な生徒、ｚの値が－2以下なら問題づくりが苦手な生徒といえる。

表をみるとzの絶対値が2より大きい生徒は16名、1未満の生徒が16名である。この値が極端に大きい生徒もいるが、それは問題作成に慣れていないからだと思われる。経験をつめば落ち着いた値になるであろう。

生徒番号が4, 6, 12, 19, 24 などの生徒の偏差値は60以上で成績の最上位層である。しかし問題作成の成績は悪い。これらの生徒の解答を見ると、元の問題の要素として数値のみに注目していることが多い。例えば

＊右にすすむと6増える。
＊下にすすむと2増える。
＊斜めに見ると8増える。
＊3列めの数は6の倍数である。

したがって作った問題も元の問題の数値のみを変えた

1	7	13	…
3	9	15	…
5	11	17	…

のような表を使った問題で新鮮味はない。元の問題と同様にして解くことができる。これらの生徒は通常の問題を解く力があるため、問題を作るときも解くことができる問題を作ろうとする傾向がある。

定期試験の偏差値が45以下の生徒は生徒番号3, 8, 16, 17, 22, 28, 31, 39, 40, 41 の10名であるが、そのうちの8名は問題作成試験の成績の方がよい。zの値が1を越えるのは3, 16, 17, 31番の4名で、16, 17, 22番の生徒は問題作成試験の偏差値が50を越えている。例えば16番の生徒の解答を見ると

元の問題の要素

＊行が3行である。
＊文字はaの1つだけである。
＊たしざんを使って新しい数を作っている。
＊素数を使っていない

などを上げている。それらに対応して作った問題は

1	7	17	…
3	11	19	…
5	15	23	…

の素数からなる表を使った問題、また元の問題で左からa番目、上からb番目の数をaとbを使って表す問題も作っていた。

生徒番号31番の生徒は定期試験の偏差値が34.0で成績は最下層の生徒であるが、

6	9	12	15	…
8	11	14	17	…
10	13	16	19	…
12	15	18	21	…

の4行にした表を使った問題を作っていた。

これらのことから、定期試験の成績が悪い生徒も問題作りは大いに健闘していると言える。

おわりに

数学教育の目標を達成する１つの方法として問題作りは有効であろう。そのためには生徒に意識を持って問題作りに当たらせたい。すなわち何らかの形で問題作りを生徒の評価に入れる必用があると思う。また今後の課題として何度かの問題作成試験を行い、通常の試験の成績との比較をもっと厳密に行いたい。

参考文献

1)S.Iﾌﾞﾗｳﾝ, M.I ﾜﾙﾀｰ「いかにして問題をつくるか」
平林一榮　監訳、東洋館 1990
2)村上和男「数Ｉの内容を中心とした問題設定の技術」
広島大学付属福山中･高等学校研究紀要31巻,1991