具体から抽象への流れを重視した導入例

後藤　俊秀

１時間の授業は，多くの場合，導入→展開→まとめ，といった流れで進められる。まず生徒を授業に引き込むためには，「導入」の部分をより効果的なものにしなくてはならない。そして，その「導入」が「展開」に対して有効に働かなくてはならない。ここでは，効果的な「導入」とはどのようなものかを，高校２年の数学Ⅱを題材として考察していきたい。

１　はじめに

数学における新しい対象や用語や概念の中には，非常に具体的な問題を解決するために考え出されたものが，少なからずある。例えば，確率論は，賭け事の分配金に関する問題をめぐって，パスカルとフェルマーの間で交わされた手紙が始まりだと云われている。すなわち，数学的概念や対象はそれが生まれるにあたっての具体的な背景を必ず持っている。

しかし，授業中の生徒の目の前には，完成された数学が整然と示されるわけで，そのことがかえって，生徒にとって数学をわかりづらいものにしていると考えられる。とは云え，新しい用語や概念が登場するたびに，その由来や歴史的背景を説明することは得策ではない。新しい対象や用語や概念を登場させる必然性のようなものは，その教室のその授業の中で，生徒の実態に応じて教師が作り出していけばよいのであり，それが導入である。

２　効果的な導入の条件

①教室内のすべての生徒に興味を持たせる意味でも，導入で提示する題材はできるだけわかりやすいものでありたい。前時の復習を導入とすることが多いが，理想的には，高校生であれば，小中学生で学習した内容からスタートさせたい。また，一見数学と関係のない身近な題材から始めるのもよい。言い換えれば，特別な予備知識や技能が必要でないもの，数学の得意な生徒も不得意な生徒も対等な立場で考えることのできる題材が導入としてふさわしい。

②導入であるから，その授業で扱いたい本題にスムースに移行できるものでなくてはならない。言うまでもなく，まず本題があって，そのための導入があるわけで，本題を考える下地を作ってくれるようなもの，言い換えれば，導入の中に，本題を理解するヒントやカギが含まれているものでなくてはならない。

③数学における導入の大半は，課題や問題の形で提示されるが，その結論が明白でないものがよい。これは１番目と矛盾するようだが，１番目で述べた「わかりやすさ」とは，設定のわかりやすさ，または，意味のわかりやすさである。設定や意味がわかりやすいにもかかわらず，結末は明白でないものとは，なかなか厄介だが，例えば，オープンエンドなものや設定のみ示して問題は生徒が設定できるようなものなどが考えられる。

④導入が導入だけで終わってしまうのでなく，その授業のまとめの段階で，生徒が再び何らかの形で導入の内容に戻れるような題材がよい。

これは，生徒がその時間に新たに獲得した知識・技能を踏まえた上で，最初の導入部分を振り返ったときに，教師から提示された導入の内容が，実はどんな意味があったのか，あるいは，学習する前の何も分からなかった自分が，その授業を受けてどれだけ進歩したのか等の差を実感させるためである。これらのことは，教育において，非常に重要な活動である。

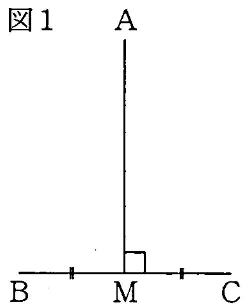
３　実践例

［その１］　中線定理の導入

まず，黒板に図１を描き，ＢＭ＝ＣＭ，ＡＭ⊥ＢＣとする。

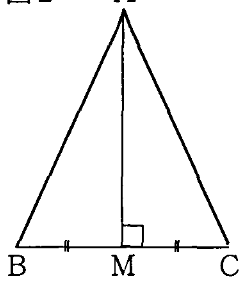
次に，図１に，線分ＡＢ，ＡＣを描き込み（色を替えるなどして２つの線分を強調し）図２において，次のような課題を提示する。

図１



右図において，線分ＡＢ，ＡＣ，ＢＭ，ＣＭの長さの間にどんな関係があるか。

図２



この課題に対して，生徒は容易に下の２つの等式を答える。(「三平方の定理を使うとどうなる？」といったヒントを出してもよい。)

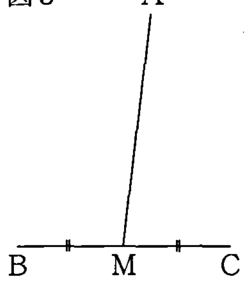
$$AB^2=AM^2+BM^2,\ AC^2=AM^2+CM^2$$

次に，この２つの等式を上下に並べて，右辺どうし，左辺どうし足させると，ＢＭ＝ＣＭ であるから，これも生徒は容易に等式(☆)，すなわち，中線定理の結論となる等式を導き出すことができる。

$$AB^2+AC^2=2AM^2+2BM^2 \quad \cdots\cdots(☆)$$

次に，図３を提示し，「実は，ＡＭ⊥ＢＣ でなくても(☆)は成り立つのです。」と言いながら，線分ＡＢ，ＡＣを図に描き込むと，生徒は一様に不思議そうな顔をする。

図３



この後，生徒に(☆)の証明を促すのだが，以上のような導入によって，定理の内容がしっかり理解でき，なおかつ，なぜ成り立つのだろう？といった，定理への興味が生じているので，これを証明しようという気持ちが，単に定理の内容を提示して証明させたときよりも高められている。

また，この導入において，$AB^2=\cdots$，$AC^2=\cdots$ と分けて考えているので，証明の大まかな方針も立てやすくなっている。

［その２］　累乗根の導入

生徒に電卓を配布し，累乗のキー操作を簡単に説明する。(まず，累乗したい数(底)を表示し，「×」のキーを２回続けて押して，「＝」のキーを１回押せば２乗が，２回押せば３乗が求められる，と説明する。)

そして，次のような課題を提示する。

３乗して２になるような数を電卓を用いて求めてみよう。

生徒は，　$1.3^3=2.197$

$1.25^3=1.953125$

$1.26^3=2.000376$

・・・・・・・・・・・

$1.2599^3=1.999899757$

と，数値の末尾を少しずつ増やしたり減らしたりしながら，３乗したものができるだけ２に近くなるように数値を探っていく。

電卓の精度の限界があるので，やがて作業は行き詰まるが，この作業を通して，生徒は次のようなことを感じ取る。

・３乗して２になる数は確かに存在するようだ。
・その数は，およそ１．２６くらいの数である。

そこで，「３乗して２になる数のことを，２の３乗根という。」と定義し，その表し方も説明してしまう。ここは，あくまでも導入であるから，きちんとした定義には深入りしない。

次に，例えば，「５の４乗根はいくらぐらいになるのだろう？」という課題を出すと，生徒は前の課題と同様に，同じような作業を繰り返して，

$1.4954^4=5.000685075\cdots$

といった数を見つけていく。

そこで，「５の４乗根は他にはないかな？」と発問し５の４乗根の中には負の数もあることを注意しながら，累乗根が正の場合と負の場合の記号の使い分けについて触れる。

また，毎年のことであるが，「５を表示して，「$\sqrt{\ }$」のキーを２回押せばよい。」と言い出す生徒が必ず出てくるので，この意見は必ず採り上げて，作業で求めた数値と，「$\sqrt{\ }$」キーを２回押して表示された数値とがほぼ一致していることをみんなで確認するとともに，５に$\sqrt{\ }$を２個重ねた数は，確かに４乗すると５になるので，５の４乗根（のうちの１つ）が正確な値として存在していることをここで生徒に示すことができる。

もちろん，これは生徒の意識の問題であって，$\sqrt{\ }$を用いて表される数は，生徒の意識の中では既に存在している数なので，そこをうまく利用するのである。

累乗根の導入は，本来であれば，方程式 $x^n=a$ の解として累乗根を定義し，ａの正負，自然数ｎの奇偶によって分類しながら，$\sqrt[n]{\ }$ の意味について説明していくの

だが，それでは多くの生徒にとって，とても難解なものとなる。

電卓を用いて，２の３乗根などを実際に求めさせることによって，数の存在のイメージ，だいたいの値のイメージを持たせ，その後の一般的な定義を受け入れやすくしている。

またさらに，この作業を通して，どこまで続けてもきちんと２になることはなさそうだ，すなわち，無限小数（循環していない）になることなども生徒に肌で感じさせることができる。

［その３］　指数関数の導入

これは，１時間すべてを次時の導入とする例である。

１mほどの紙テープを生徒に示し，次々に半分に折っていくと，６回程度折ることができる。

次に，新しいトイレットペーパー１巻を取り出して，課題①を提示する。

課題①

> このトイレットペーパーをすべて延ばして，次々に半分に折っていくと，何回折ることができるか？

実際に実験をする前に，生徒に問いかけると，紙テープが６回ほど折れたところから判断して，20回とか，30回とかの答えが返ってくる。

「トイレットペーパーの全長は何mですか？」といった質問も出るが，この質問を採り上げてしまうと，この課題は単なる計算問題になってしまうので採り上げない。

生徒の答えに対して，「もしも20回以上折ることができたら，全員にジュースをおごってあげよう！」などと言いながら，次の作業に入る。

生徒を教室から連れ出して，実際にペーパーを折る。校内の長い渡り廊下を利用して，トイレットペーパーを引き出しながら，生徒に次々に半分に折らせていく。

まず物理的に注意する点は，

・破れやすいので強い力を加えない。

・水に濡れると溶けてしまうので濡らさない。

・風が吹くと捩れてしまうので，生徒を等間隔に配置して捩れないように持たせる。

・紙の端を持っている生徒と折り返し部分（移動する）を持っている生徒は，細心の注意が要求されるので，教師は頻繁にアドバイスをする。

などである。

そして，作業として大切な点は，今何回目を折っているのかということなので，それは教師がつねに全体に伝えながら作業を進めていかねばならない。特に，最後の部分は，トイレットペーパーの長さが一挙に短くなり，そこがこの作業の圧巻部分なので，そこで，何回目かわからなくなってしまうとこの実験の意味がなくなる。

また，教師は全体のイニシアチブは執るが，作業そのものは生徒たちにまかせたい。ただ次々に半分にしていくだけでも，生徒が実際に紙に触れて，半分に折る度に紙がどんどん短くなっていく様を是非とも体感させたいのである。

それで，10回も折れば，トイレットペーパーは団子状になってそれ以上は折れなくなり，生徒の予想を大きく裏切ることになる。（作業の所要時間は，約30分である。）

風を避けるために体育館のフロアーでやったこともあるが，遠くにいた人間がどんどん近づいてくるという面白さを味わうためには，長い廊下などでやった方がよいと思われる。

課題①の作業が終了したら，生徒を教室に戻して，電卓を配布し，課題②を提示する。

課題②

> 地球の赤道と同じ長さ（４万km）のトイレットペーパーがあったとして，それを次々に半分に折っていくと，何回折ることができるか？

この課題の段階では，すでに生徒は折れる回数が意外に少ないことがわかっているので，ここからは，むしろ計算の作業となる。

この計算は，単純に長さを半分にしていけばよいので生徒は下のように求める。（長さの単位に注意する。）

$$40000\,\mathrm{km} \xrightarrow{1回} 20000\,\mathrm{km} \xrightarrow{2回}$$

$$10000\,\mathrm{km} \xrightarrow{3回} 5000\,\mathrm{km} \xrightarrow{4回} \cdots\cdots$$

この作業の途中で，生徒は，必然的に新たな問題にぶつかることになる。

・「折れなくなる」とは，どうなることなのか？

↓

・トイレットペーパーの厚みはどれくらいか？

実際に紙を折る作業の中では特に意識しなかった問題が登場して，「折れない」という状態の「数学化」の作業は必要になってくる。そして，紙の長さから紙の厚みに問題の対象が自然に移行していくのである。

こうして，折った紙の長さが半分になるごとに，紙の厚みは倍々になることに生徒は気づいていく。

実際には，都合の良いことに，トイレットペーパーは最初の作業において，10回折れて，縦横10cmほどの正方形の塊となるので，紙が $2^{10}=1024$ 枚重なって約10cmになっているから，そのことを生徒に伝えて１枚の厚さを0.1mmとして計算させる。

生徒は，紙の長さと同時に，折り重なった紙の厚みも計算し，それらを対照に書き並べていって，紙の長さと紙の厚みがほぼ等しくなった状態で「折れなくなる」と結論を下し，解答を得る。(ちなみに，19回折ると，縦52m，横76mの長方形の塊となり，それ以上は折れないといえる。)

最後に，この授業の締めくくりとして，次の課題③を提示して，家庭で考えてくるように指示して終わる。

課題③

> 無限に長いトイレットペーパーを半分に100回折ったとすると，紙の厚みはどれくらいになるか？

この課題③は，指数関数の増加の度合いがどれだけ凄まじいものかを伝える為の問題で，次時（指数関数とそのグラフ）への橋渡しとなる。

この答えを計算するためには，後の「常用対数」の部分の学習が必要なので，この段階では詳しい説明はできない。しかし，結果の数字を知らせると，ほとんどの生徒は呆気にとられてしまう。

その答えは，約 1.3×10^{23} kmで，銀河系（太陽系ではない！)の直径を約10万光年としても，その14万倍となり，途方もない厚みであることがわかる。

教科書（啓林館）では，指導の導入のところで，バクテリアの培養の話題を用いている。これは，指数部分が連続量（時間）になるので，指数関数のモデルとしても適当な題材である。しかし，この題材も，バクテリアの細胞分裂の実際を抜きにしての思考実験の域を出ないので，実態は生徒に伝わりにくい。

このトイレットペーパーの導入は，指数部分が自然数であるところが指数関数のモデルとしては少し不満足ではあるが，底が２の場合と１／２の場合の２通りを同時に考えさせられる例として面白い。

［その４］ 対数の性質の導入

$M, N>0$ のとき，$\log_a MN=\log_a M+\log_a N$

が成り立つことについて，指数関数の表からの導入が考えられる。

・生徒に，右図のような x と 2^x の対応表を縦に書かせる。

x	2^x
0	1
1	2
2	4
3	8
4	16
5	32
6	64
7	128
8	256

そこで，右に並んだ数の中から２個の数を選んで，その積を計算させ，その値が表のどこにあるかをチェックさせる。

例えば，$4\times32=128$ なので，積が下のほうにあることがわかる。

次に，上で選んだ２個の数とその積の数の左にある数に着目させる。

すると，４の左には２，32の左には５，128の左には７がきているので，それらの３個の数の間にどんな関係があるかを生徒に問いかける。

生徒は，表の右側で $4\times32=128$ という積の関係が左側では，$2+5=7$ という和の関係になっていることにすぐに気づく。

この一連の作業を，今度は，生徒個々に自由にさせて左右の３個の数の間に成り立つ関係を考えさせる。いうまでもなく，この作業は，指数法則を確認しているだけのことである。

次に，さきほどの表に，右図のように，対数による表現を書き加えていく。

x	2^x
$\log_2 1=0$	1
$\log_2 2=1$	2
$\log_2 4=2$	4
$\log_2 8=3$	8
$\log_2 16=4$	16
$\log_2 32=5$	32
$\log_2 64=6$	64
$\log_2 128=7$	128
$\log_2 256=8$	256

実は，対数を定義するときもこれと同じ作業を生徒に経験させている。すなわち，指数関数の対応表を本にして，対数を定義しているのである。

この状態で，さきほど生徒が気づいた　$2+5=7$　の関係を対数を用いた表現で表すと，

等式 $\log_2 4+\log_2 32=\log_2 128$

は生徒からすぐに出てくる。

さらに，この関係を右図のような一般の形にしてやれば，この定理の意味も理解でき，証明も方針も立てやすくなる。

x	a^x
$\log_a M$	M
$+$	$\times$
$\log_a N$	N
$\parallel$	$\parallel$
$\log_a MN$	MN

この導入のポイントは，指数関数の表からスタートす

ることで，対数の性質が指数法則から出てきていることや，対数は，結局のところ，指数を外に取り出したものに過ぎない（すなわち，指数そのものだ）ということなどを実感できる点と，この性質を証明するのに，指数法則に戻って証明しようというアイデアが自然に出てくる点である。

4　まとめと課題

数学の教科書において，定理や性質が論じられる前に導入らしきものが書かれている場合もあるが，多くの場合，いきなり例題や定理が提示され，その後にすぐ，その証明が書かれていたりする。数学の得意な生徒であれば,そういったやり方でも,ある程度はついてこれるが,数学が苦手な生徒の場合は，定理の内容や性質の意味がすぐには理解できない。理解できないから証明しようという意欲も起こらないし，当然どうやって証明してよいかわからない。他人がおこなった証明を見ても，なぜそうなるのかがよくわからないし，もちろん感激などは，ほとんどない，ということになる。

そうならないためにも，我々は，本論に入る前に，できるだけ本論にスムーズに入れて，なおかつ，本論を理解するための手助けとなるような導入を工夫していくべきなのである。

本稿で紹介した４例の導入のタイプを一般化すると，次のように分類できる。

［その１］
定理の仮定の部分を制限した形で，その定理を考えさせる導入
［その２］
一般的な定義をする前に，具体的な数値の計算などをさせる導入
［その３］
身近な題材を用いた実験や作業をさせる導入
［その４］
既習事項の復習や確認をさせる導入

これら４タイプの導入で共通して言えることは，授業はできるだけやさしい段階から始めるべきだ，ということである。

これ以外にも，様々なタイプの導入は考えられるであろうが，基本的には，その時間に指導したい内容をどのようにして段階を下げて導入とするかということになる。

ただし，今回の主張は，経験に基づいた単なる主観的な見解であり，客観的な比較や数値データの分析などは一切なされていないので，その点は今後の大きな課題である。

また，教科書の導入の中には，実際にやってみると理論通りにいかないものを，思考実験的に採り上げているだけのものがある。さきに挙げたバクテリアの培養を題材とした導入もその一例であろう。バクテリアのｎ時間後の個数がすでに指数を用いた形で与えられており，バクテリアの個数の増え方がそういう式で表されるかどうかという点は完全に無視されている。

このような導入の例は，中学校の教科書にもあって，中学校１年生の「比例」の導入部分に，つるまきばねとおもりの重さの関係の表が出ており，そこにはすでに比例している数値が整然と並んでいる。

生徒に，上から与えた「比例」を見せておいて，どんなことが成り立っているか？と問うわけで，一方の変数が他方の変数の定数倍になっていることや，一方が２倍３倍となれば，他方も２倍３倍になるといった重要な事項を，その根本の部分ではなく，結果だけを見せて言わせているに過ぎない。こうして，生徒の中には，実感としての「比例」ではなく，観念的な「比例」だけが残ってしまうことになる。

これなどは，実際にばねを用いて，おもりの重さを変えながら，そのときののびを測定したとすると，測定値はきちんとした比例にはならないだろうから，この教科書の例のように，「やってみたらこうなったが,これでどんなことがわかるか？」という形にならざるを得ないのである。

現在の教科書に見られるこのような思考実験的な導入を，できれば，生徒が実際に実験し，なおかつ，結果が理論通りにきちんと出るような導入に変えていけないものか，今後の研究課題としたい。