広島大学　学部・附属学校共同研究機構研究紀要
〈第40号　2012. 3〉

論理的な図形認識を促す 算数・数学科カリキュラムの開発（３）

― 中学校第１学年における図形の性質間の関係に焦点をあてて ―

川﨑　正盛　妹尾　進一　村上　良太　植田　敦三
松浦　武人
（研究協力者）木村　恵子　高淵千香子　山中　法子
内田　武瑠

１．はじめに

わが国では，小学校算数科における図形の学習は図形の中に空間的に同時存在している性質を直観的・操作的な活動をとおして発見することが主題となるのに対して，中学校数学科における図形の学習は順序関係が埋め込まれた性質間の関係としての命題の真偽性を論証をとおして正当化することが主題となる。これらの両者の学習指導上の文脈の違いが，中学校数学科における論証理解の困難性に顕現している（岡崎・岩崎, 2003）。

論証理解の要件として，少なくとも，図形の性質および性質間の順序関係の意識化・対象化をあげることができるが，これらは単に中学校数学科における課題であるというだけではなく，小学校算数科における学習指導上の課題でもある。

小学校算数科の図形認識から中学校数学科における図形認識への移行過程に関する理論的，実践的研究を行った岡崎・岩崎（2003）は，移行期を数学への移行を積極的に促す「移行後期」と算数からの押し上げを促す「移行前期」の２期に分け，移行後期に焦点を当てている。高本・岡崎（2008）も同様である。

一方，「移行前期」に関する学習指導改善への指摘もすでになされている（国立教育政策研究所教育課程研究センター，2009，p.33；松浦，2001，2009）。小学校における算数としての図形認識から中学校における数学の図形認識へと移行を促す，押し上げ教材の開発と小学校算数科における図形指導の再構成が今日求められている。しかし，この分野における実質的な研究は緒に就いたばかりである。

本研究の最終的な目的は，岡崎・岩崎（2003）が提起する「算数から数学への移行」を促す学習指導の枠組みに基づき，義務教育９か年の図形領域のカリキュラムを開発することである。これまでに，「移行前期」における性質間の関係への意識化を促す教材として「作図」が機能するかどうかを小学校５年生の実践をとおして検証し，「移行前期」教材としての「作図」の有効性を例証する研究を行った。また，小学校４年生において，移行前期に接続するために図形の性質への意識化として「いろいろな四角形」において，図形の性質の意識化を促す実験授業を行い，その有効性を例証する研究も行った。

本稿では，中学校第１学年において，「移行後期」教材の開発を行い，実験授業をとおしてその有効性を検証することが目的である。

２．小学校及び中学校における図形指導のカリキュラム（案）

移行後期における教材としての作図の可能性を実証的に検討した岡崎・岩崎（2003）は，図形の性質の意識化，道具としての性質の活用，さらに関係として対象化することに対する中学校７年生の生徒の認識を促すためには教師の配慮及び時間が必要であることを例証している。この課題は移行後期段階における学習の主題である性質間の関係性への認識へのスムーズな接続を促す移行前期の図形指導のあり方に対する反省の要求でもある。現在の小学校における図形指導においては，この部分への配慮がほとんどなされていないの

Masamori Kawasaki, Shinichi Senoo, Ryouta Murakami, Atsumi Ueda, Taketo Matsuura, Keiko Kimura, Chikako Takabuchi, Noriko Yamanaka, Takeru Uchida; Improvement of cooperative creativity through learning in elective subject (Arithmetic/Mathematics) (3)―Focus on the relationship between the characteristics of the figure in the 1st grade of a junior high school ―

表１　小中９か年の図形指導のカリキュラム構想

	移行前期への接続			移行前期	移行後期	論証
学年	幼稚園＋小学校１年	小学校２年	小学校３，４年	小学校５，６年	中学校１年	中学校２，３年
必要な視点	形遊び，造形 （就学前と1年との接続） ・図形に関する経験を豊かにする（描画経験） ・操作活動による経験的，直観的な認識	性質 （構成要素および要素の関係） ・図形の基礎的な構成要素および性質の理解 ・操作活動による経験的，直観的な認識	図形を性質として見る （性質の集合） ・操作活動による経験的，直観的な認識 ・図形の性質の理解 ・図形の性質を使っての作図の弁別 ・四角形相互の関係	性質間の関係の意識化 ・四角形相互の関係 ・図形の性質を使っての作図の弁別	論理的に考察し表現する能力を培う ・図形の性質の顕在化 ・図形の性質間の関係の理解 ・数学的な推論の理解と論理的に表現すること	論理的に考察し表現する能力を育て，伸ばす ・図形の性質間の理解と論理的に表現すること ・図形の性質間の関係の命題化 ・数学的な推論の理解と論理的に表現すること
方法	・操作活動を充実させ，色板や三角，四角，丸などで，形遊び，造形遊びを行う	・なぜそれがその形になるのかを基礎的な構成要素に着目して説明していく活動 ・共通点と相違点を見つけていく活動	・図形の性質からその図形を分析したり，考察したりする活動 ・図形の性質を明確にする活動 ・性質の共通点と相違点を見つける活動 ・図形を動的に見せる活動	・図形の性質からその図形を分析したり，考察したりする活動 ・性質の共通点と相違点を見つける活動 ・図形の性質間の関連づけをする活動 ・論理的に説明する活動 ・経験的，直観的な認識だけではなく，一般化をする経験 ・図形を動的に見せる活動	・図形の対称性や図形を決定する要素に着目して自分で作図の手順を考え，その手順を順序よく説明する活動 ・作図した図形が条件に適するものか否かを振り返る活動 ・図形の性質間の関係の理解 ・図形の性質の証明を読んで新たな性質を見いだす活動 ・数学的な表現を用いて他者に説明し伝え合う活動	・図形の性質間の命題化 ・図形の性質の証明を読んで新たな性質を見いだす活動 ・数学的な表現を用いて他者に説明し伝え合う活動

が現状である。また，移行前期に関する先行研究（村上，2010）において，児童が図形の性質を説明の道具として用いるためには教師の積極的な支援が必要であることが確認されている。移行前期における図形学習への接続の段階，とりわけ最終段階に位置付く第４学年の図形指導のあり方が，移行前期の学習の成立に大きく影響しているということである。接続という視点から９か年の図形指導のカリキュラムを考えるとき，そこには移行期としての移行前期と移行後期との関係，および小学校段階における移行前期とそれ以前との関係等を検討しなければならない。

本研究グループでは，暫定的ではあるが，接続という視点から小学校及び中学校における図形指導のカリキュラム（案）を表１のように設定した。もちろん，本案は今後の研究をとおして精査し修正を加えていかなければならないことは言うまでもない。

小学校段階における図形指導のカリキュラム（案）では，先行研究の成果に基づき，中学校における論証指導の改善に向けた小学校高学年，中学年，低学年における図形指導のカリキュラムの要点を以下のように捉えている。高学年では，作図をとおした経験から図形の性質間の関係を意識化させる視点が必要である。なぜなら，中学校数学科における論証への滑らかな移行を促す前提として性質間の関係としての命題を意識すること，その考え方に触れることが必要であるからである。中学年では，図形の性質の意識化と図形の動的な見方が必要だと考える。なぜなら，移行前期へ向けて，図形の性質を意識する必要があると考えるからである。また，性質の意識化に関する動的な見方の重要性は，「概念や関係は動的なダイナミックな変化の中の不変性として認識される。」というGattegno（1963，p.103）の主張からも十分説明できる。また，低学年では，形遊びや造形遊びを根底に，図形を色，光沢，模様などの属性，へりや面の凹凸，形の多少の歪みなどを捨象して，三角，四角，丸などを形として認識する視点，面としてだけでなく線としての図形を捉える視点を開発する必要がある。

本研究グループは，小学校における移行前期と中学校における移行後期との間のスムーズな接続を図るため，小学校段階を「移行前期への接続期」,「移行前期」と大きく２つに区分し，表１のように小中９か年の図形指導のカリキュラムを構想してみた。その際，同じ教材を使っても移行前期と移行後期で扱い方を変え，移行後期では，他の図形に応用できるような活動を取り入れながら図形の定義化に焦点を当てる。移行前期ではその接続として，図形の性質や性質間の関係への意識化を促す学習指導を積極的に位置づけることにより，児童生徒の図形の見方を高めることを重視する。

これらの視点を加味して授業を設計すると，以下の点において有効ではないかと考える。

(ア) 四角形を作図する活動を通して，図形の性質の顕在化を図ることができるであろう。

(イ) 作図してそれが正しいことを証明する活動を仕組むことで，性質間の関係への理解が深まり，論証へのスムーズな移行がなされるであろう。

３．実験授業（中学校第１学年での実践）

① 対象生徒

授業対象生徒は広島大学附属三原中学校１年生１クラス41名である。

② 学習前の事前調査の実態

生徒達は，５年生で長方形，６年生で直角三角形の作図教材を用いて，作図してそれが正しいことを考える活動を通して，筋道立てて考察する数学的な推論の考え方の素地となる活動を行ってきている。生徒の図形認識の実態を把握するため「図形の命題に関する調査」(平成22年９月実施１年生78名) によると, 例えば, ひし形の定義から形を想起し性質をとらえる問いの正解率は24%で，性質間のつながりはほとんど認識できていない。また，図形の相互関係を３種類の形態（図の弁別・図形の性質として・直接問う）で質問した結果，正答率は平均して31%で，形の相互関係もあまり認識されていないことがわかった。

③ 単元授業設定の視点

中学校１年生の基本の作図の学習では，一般的に三角形の合同条件の学習がなされていないため，作図の手続きの習得に終わりがちであり，作図方法が正しいかどうかの検討は行われない。しかし，１年の学習の際に，生徒が角の二等分線の作図方法で確かに角が二等分されているかどうかを疑問に感じることがあっても不思議ではない。また，生徒が導き出す作図方法は多種多様であり，それら１つ１つの妥当性を検討することは大切なことである。長崎ほか（2009）は，「作図して，それが正しいことの証明という流れを持って学習を進めることで，生徒に証明の意義や必要性を感じさせることができる。」と述べており，そのためには論証における図形の基本性質となる合同な図形の性質や三角形の合同条件は欠かすことができないものととらえ本単元を次のように構成した。

第１次　合同な図形の性質（１時間）
第２次　三角形の合同条件（２時間）
第３次　いろいろな四角形の作図（３時間）
第４次　たこ形の性質（１時間）実験授業
第５次　基本の作図（２時間）
第６次　作図の利用（１時間）

④ 評価材

実験授業前，実験授業後のパフォーマンス課題及びルーブリックを次のように設定した。

○パフォーマンス課題

２組の隣合う２辺をそれぞれ等しくなるように作図したたこ形の対角線が垂直に交わる理由を説明しなさい。

○評価規準

図形の性質の一部を定めることによってできたたこ形の対角線が垂直に交わる理由を，三角形の合同条件や既習事項を活用し，ことばや記号などを用いて筋道立てて説明することができる。

○ルーブリック

表２は，パフォーマンス課題に対するルーブリック

表２　ルーブリックとパフォーマンス事例

評価基準		パフォーマンス事例
Ⅴ	根拠をもとに，ことばや記号を使って筋道を立てて説明することができる。	△ＡＢＣと△ＡＤＣは，ＡＢ＝ＡＤ，ＣＢ＝ＣＤ，ＡＣ＝ＡＣより３組の辺がそれぞれ等しいので △ＡＢＣ≡△ADCとなり，<u>∠ＢＡＣ＝∠ＤＡＣ</u> △ＡＢＭと△ＡＤＭは，ＡＢ＝ＡＤ，ＡＭ＝ＡＭ，<u>∠ＢＡＣ＝∠ＤＡＣ</u>より２組の辺とそのはさむ角がそれぞれ等しいので△ＡＢＭ≡△ＡＤＭとなり，∠ＡＭＢ＝∠ＡＭＤ，だから，180°÷２＝90°でＡＣ⊥ＢＤになります。
Ⅳ	根拠をもとに，ことばや記号を使って説明しようとしている。	△ＡＢＣと△ＡＤＣは，ＡＢ＝ＡＤ，ＣＢ＝ＣＤ，ＡＣ＝ＡＣより３組の辺がそれぞれ等しいので，△ＡＢＣ≡△ADC，また，△ＡＢＤは二等辺三角形だから∠ＡＢＭ＝∠ＡＤＭ，三角形の３つの角の和は180°で２つの角が同じ大きさだったら　残りの角も等しくなります。よって，180°÷２＝90°でＡＣ⊥ＢＤになります。
Ⅲ	ことばや記号を使って説明しようとしているが，根拠が不明確である。	△ＡＢＣと△ＡＤＣは合同です。△ＡＢＭと△ＡＤＭも合同です。 △ＡＢＤは二等辺三角形です。 180°÷２＝90°でＡＣ⊥ＢＤになります。
Ⅱ	説明になっていない。	語句を羅列しているが，それらの関係性がみられない。
Ⅰ	説明しようとしない。	無答

である。評価基準Ⅳの段階で評価規準を達成したものとみなす。基準Ⅳはその記述語及びパフォーマンス課題が示すとおり，作図に用いたたこ形の性質をもとに，三角形の合同条件，合同な図形の性質，二等辺三角形の角の性質などの既習事項を活用して図形の性質を考えることができている段階であり，「図形の性質の顕在化」及び「性質間の関係の意識化・対象化」がなされた状態を示すものとした。一方，評価規準に達していない基準Ⅲは，根拠が明確でないもの，基準Ⅱは感覚的なものであり，「図形の性質の顕在化」及び「性質間の関係の意識化・対象化」に至っていない状態を示すものとした。

⑤ 授業の実際

前時に行ったたこ形の作図をもとに，その図形の性質を考えさせていった。

Ｔ：では，たこ形はどんな四角形か記号で表してみましょう。
Ｓ：ＡＢ＝ＡＤ，ＣＢ＝ＣＤです。
Ｔ：文章だと？

Ｓ：となり合う２組の辺がそれぞれ等しい四角形です。
Ｔ：そうですね。作図で実際に描いたことそのままですね。では，たこ形の性質を発表してもらいましょう。
S1：線対称になっています。
S2：△ＡＢＤと△ＣＤＢ二等辺三角形です。
S3：△ＡＢＣ≡△ＡＤＣが言えます。
S4：対角線が垂直に交わっています。
S5：対角線の交点をＭとすると，ＢＭ＝ＤＭです。
S6：∠Ｂ＝∠Ｄです。

この時点では，多くの生徒は直観的に等しい辺や角を挙げていた。この中で，S4の意見について，その根拠を追究していくことにした。

Ｔ：説明をするときに大事なことは何だった？
Ｓ：スタートとゴールです。
Ｔ：そうですね。そこははっきりさせておかないといけませんね。この説明のゴールは？
Ｓ：対角線が垂直に交わることです。
Ｓ：∠ＡＭＢ＝90°です。
Ｔ：じゃあ，スタートは？
Ｓ：ＡＢ＝ＡＤ，ＣＢ＝ＣＤ。
Ｔ：スタートとゴールがはっきりしたので，説明を考えてみましょう。
＜しばらく時間をとる＞
Ｔ：これまでも説明をするときに必ず使われていたものがありましたね。
Ｓ：三角形の合同条件です。
Ｔ：ここにも２つの三角形が合同なのではないかというのが書かれていますね。まずは，この２つの三角形が合同であることを説明してみましょう。

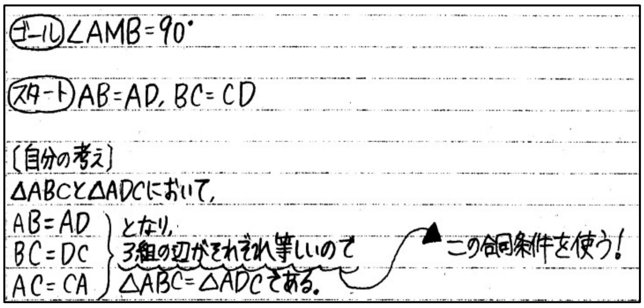

図１　生徒の証明

△ＡＢＣ≡△ＡＤＣまで証明できている生徒は半数近くいた。問題はここからである。二等辺三角形の２つの底角か，もう１組の合同な三角形に着目しなければならない。多くの生徒が悩んでいる中，S8が「自信はないけど・・・」といいながらも挑戦した。

S8：S7が合同をいって，△ＡＢＤは二等辺三角形なので端の角がc，cになって，△ＣＢＤも二等辺三角形なのでd，dになって，それを使うと１組の辺とその両端の角がそれぞれ等しくなるので・・・。

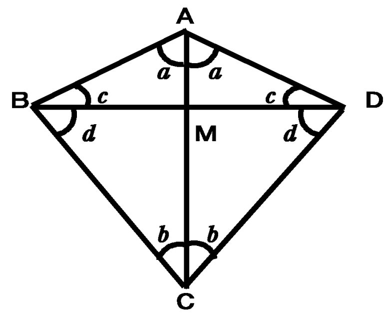

図２　たこ形

Ｔ：１組の辺というのはどこですか？
S8：上だったら，ＡＢとＡＤが等しくて・・・。
Ｔ：これはいいですね。
S8：それでcとcが等しい。下の三角形もＣＢ＝ＣＤで，そこのはさむ角が，左側の小文字のdと右側の小文字のdが等しくて，bとbが等しいので，１組の辺とその両端の角が等しいから，△ＡＢＭと△ＡＤＭは合同です。

Ｔ：ちょっとまってください。本当ですか？
　　△ＡＢＭと△ＡＤＭで１組の辺はいいよね。両端と言ったらここ（∠ＢＡM）とここ（∠ＡＢM）でしょ。ここ（∠ＤＡM）とここ（∠ＡＤM)。ここ（∠ＢＡMと（∠ＤＡM））はなんて言った？
S8：c
Ｔ：理由は？
S8：二等辺三角形
Ｔ：ここ（∠ＢＡMと∠ＤＡM）は？
S8：ちょっと微妙なんですけど・・・。
Ｔ：微妙なんですか？じゃあ，ヘルプ。
S9：△ＡＢＣ≡△ＡＤＣで，対応する角は等しいので，∠ＢＡＣと∠ＤＡＣは対応しているので等しいことが言えます。
Ｔ：これで△ＡＢＭと△ＡＤＭで，１辺とその両端の角がそれぞれ等しいが言えましたね。もう少しです。時間がきたのでこの続きは次回にしましょう。

S8は，対象となる２つの合同な三角形がはっきり示されなかったことにより，多少の混乱は見られたが，最終的には△ＡＢＭ≡△ＡＤＭを証明することができた。次時の始めに，三角形の内角の和は180°であることを用いて，たこ形の対角線が垂直に交わることを全員で確認した。

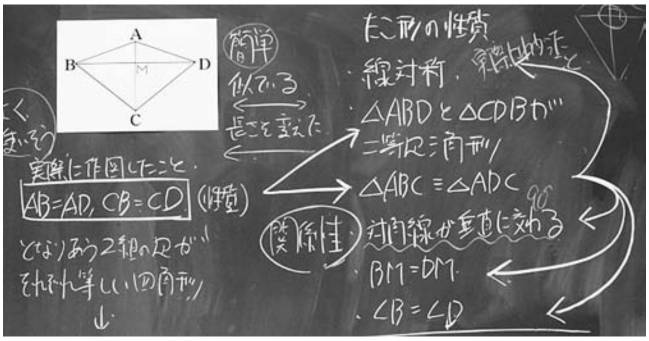

図３　図形の性質間の関係性

そして再度，最初に出された性質に目を向けさせた。すると，図３にあるように，たこ形の性質間の関係性が明らかになり，図形の性質間の関係の意識化・対象化を図ることができた。

たこ形の対角線が垂直に交わる性質を利用すれば，定規，コンパスだけで簡単に直角を作ることができ，次時以降の基本の作図や長方形の作図に活用する姿が見られた。授業後の生徒の反応を以下に記す。（下線は筆者）

・定規，コンパスだけで直角が作れるようになった。半分に分けたとき（対称軸で折ったとき）２つの三角形が合同になることを意識して描けばいい。

・たこ形を作図すれば垂線がかけてびっくりしたこれを使うと，長方形まで作図できてすごいと思った。

⑥ ルーブリックに基づく評価

表３は，実験授業の自力解決時を事前，授業後を事後としてパフォーマンスの変容を示したものである。

表３　事前事後のパフォーマンスの変容

評価基準		事後 Ⅴ	Ⅳ	Ⅲ	Ⅱ	Ⅰ	計
事前	Ⅴ	0	0	0	0	0	0
	Ⅳ	1	3	2	0	0	6
	Ⅲ	0	15	3	1	0	19
	Ⅱ	0	1	5	5	0	11
	Ⅰ	0	0	0	1	1	2
	計	1	19	10	7	1	38

評価基準Ⅴ及びⅣを達成した生徒は20名であった。これらの生徒達は，仮定や既知のことがらを根拠としながら，証明を最後まで完成させることができていた。基準Ⅲの10名は，証明をしようとしているが，根拠が不明確なところがあったり，証明内でのつながりがみられなかったりした生徒である。基準Ⅱの７名は証明しようとしているが，思ったことをそのまま記述しているだけであり，根拠やつながりはみられなかった生徒である。

４．考察およびまとめ

図形の性質の顕在化及び性質間の関係の意識化を図る場を繰り返し設定していき，生徒の図形認識の変容に着目していった。

事前と事後における評価規準を達成した生徒の割合に大きな差が認められたことから，本実践が図形の性質の顕在化及び性質間の関係の意識化に対して一定の効果があったことが示唆された。そこで，最後に研究をとおして確認できた成果と課題について整理しておきたい。

成果として第一に，作図教材の有効性を再認識することができたことである。通常の作図の授業では，作図手続きを覚え，それをいろいろな場面に応用する学習が行われるが，単に手続きの習得と応用の学習に終わらせず，図形認識を高める手段として活用が求められる。つまり，作図の過程において，図形の性質が顕在化されるということや，作図の手続きが図形の性質間の関係に変容していくことを確認することができた。

第二に，単元全体を通して，作図してそれが正しいことを証明するという流れをつくったことで，証明の

意義や必要性を感じさせることができたことである。本単元の中で，いろいろな四角形を作図する場面を設定した。最初は道具を制限せず自由に四角形をかかせた。その手順を振り返ることで四角形の定義を確認したり，成り立つ性質を考え証明することができた。次に定規，コンパスのみに道具を制限すると，長方形や正方形における直角が簡単にはとれなくなり，生徒に葛藤が生じる。そこで，定規，コンパスのみで簡単にかけるひし形やたこ形の対角線の性質に着目すれば，簡単に垂直をつくることができることに気づき，その性質が成り立つことを証明するという流れを意識して授業を構成することで，多くの生徒が考える必然性を感じることができていた。このことは，意欲的に証明に取り組もうとした姿からも伺える。結果として，角の二等分線等の作図の手順に自然とつなげていくことができた。

第三に，中学校１年生における論証指導の可能性についてである。たこ形におけるパフォーマンス課題は，評価規準の達成状況にもあるように，一度三角形の合同条件を用いれば証明できるものではなく，再度三角形の合同条件か，二等辺三角形の性質を用いなければならないという２段がまえの証明であり，中学校７年生にとっては難しいものであった。しかしながら，ある性質によって図形が決まる，ある性質が他の性質を導く役割を持っているという認識を生徒達は感じることができた。このように，本格的な論証を学習する前に演繹的な考え方のよさにふれ，数学的な推論の方法に徐々に触れさせていくことは，第２学年以降での論証理解をより深めていくことにつながるであろう。

最後に今後の課題としては，第一に，算数から数学への移行は，中学校の作図の単元だけで実現されるものではない。冒頭でも記したが，小学校算数科との連携は欠かせない。小学校算数科と連携して，義務教育９カ年の図形領域のカリキュラム開発を行い，今後一層充実させていくことが大切である。

第二に，作図の根拠になるものを明確にする必要がある。今回は，合同な図形の性質，三角形の合同条件を主たる根拠に用いながら証明を進めていった。本来ならば，中学校２年生で論理的に確かめることになっている三角形の内角の和が180°であること，二等辺三角形の２つ底角は等しいこと，対頂角は等しいことなどは小学校での既知のものとして扱っている。中学校１年生の段階において，何をどの程度証明の根拠として用いることが可能かを整理しながら，論証への橋渡しをしていく可能性を追究していきたい。

第三に，本実践で学んだ生徒が２年生になったときにどの程度論証理解ができているか，そして論証理解をどれだけ深めることができるか追跡研究をしていきたい。

【引用（参考）文献】

川﨑正盛・村上良太・妹尾進一・木村惠子・松浦武人・植田敦三・高淵千香子・山中法子・内田武瑠（2011），「論理的な図形認識を促す算数・数学科カリキュラムの開発（2）―図形の性質化に焦点を当てて―」，全国数学教育学会誌『数学教育学研究』，第17巻，第１号，pp.61－71.

国立教育政策研究所教育課程研究センター(2009),『平成21年度 全国学力・学習状況調査解説資料 小学校算数』.

松浦武人（2001），「私の育てたい学力　―「図形」の領域―」，『算数授業研究』，第19号，pp.12－13.

松浦武人（2009），「学習指導要領の図形領域（平面図形）における重点課題とその解決の方策」，『新しい算数研究』，No.461，pp.6－9。

村上良太・川﨑正盛・妹尾進一・木村惠子・松浦武人・植田敦三（2010），「論理的な図形認識を促す算数・数学科カリキュラムの開発（1）―小学校5学年における移行を促す算数での実践的研究―」，全国数学教育学会誌『数学教育学研究』，第16巻，第１号，pp.73－85.

長崎栄三，国宗進，太田伸也，相馬一彦（2009），『豊かな数学の授業を創る』，明治図書，pp.103－122.

岡崎正和・岩崎秀樹（2003），「算数から数学への移行教材としての作図―経験的認識から論理的認識への転化を促す理論と実践―」，日本数学教育学会誌『数学教育学論究』，vol.80，pp.3－27

妹尾進一（2010），「論理的な図形認識を促す数学科授業の実践的研究―中学校第７学年における論証への移行を促す実践的研究―」，広島大学附属三原学校園研究紀要，pp.103－122.

高本誠二郎・岡崎正和（2008），「図形の論理的位置づけの初期の様相について　―論証への移行を目指した中学１年『平面図形』のデザイン実験（1)―」，全国数学教育学会誌『数学教育学研究』，第14巻，pp.41－50.