①

広 島 大 学 学 位 論 文

特異摂動システムにおける 一般化リカッチ代数方程式 の再帰的アルゴリズムに関する研究

1997年10月

向谷 博明

特異摂動システムにおける
一般化リカッチ代数方程式
の再帰的アルゴリズムに関する研究

The Recursive Algorithm for Generalized
Algebraic Riccati Equation of Singularly
Perturbed Systems

1997 年 10 月

広島大学大学院 工学研究科
情報工学専攻

向谷 博明
Hiroaki Mukaidani

概要

リカッチ代数方程式は, 最適レギュレータ問題, カルマンフィルタを含む推定制御問題, 及び近年盛んに研究されている H_∞制御問題など, あらゆる制御問題におけるコントローラの設計に欠かすことのできない基本的な方程式である. 特に, 微小な摂動項εをともなう特異摂動システムを扱う場合, 計算機の物理的容量から, リカッチ代数方程式を解くことは困難である. 1980 年代前半, Gajic は, この摂動項を含むリカッチ代数方程式を解くための再帰的アルゴリズムを提案した.

近年の計算機技術の急速な発展に対して, 制御問題に関する摂動項を含むリカッチ代数方程式を解くことは, いまだに困難な問題である. Gajic が扱った特異摂動システムは, システムの係数行列 A_{22}が非特異である仮定が存在するために再帰的アルゴリズムの適用範囲が狭かった. 後に, 1980 年代後半には Khalil は, この仮定を必要としないコントローラの設計を提案した. 通常, 係数行列 A_{22}が非特異である仮定を必要とする特異摂動システムを標準特異摂動システム, 仮定を必要としない特異摂動システムを非標準特異摂動システムと呼んでいるが, 非標準特異摂動システムにおける再帰的アルゴリズムは, Khalil が非標準特異摂動システムの制御問題に対するコントローラを構築したにも関わらず現在でも扱われていない.

そこで, 本論文では Gajic が提案した特異摂動システムにおけるリカッチ代数方程式ための再帰的アルゴリズムを拡張する. すなわち, Gajic は係数行列 A_{22}が非特異である標準特異摂動システムにおける最適レギュレータ問題 (LQR 問題) と LQG 問題のみを扱っているのに対し, 本論文では, A_{22}が非特異である仮定が存在しない非標準特異摂動システムにおける最適レギュレータ問題 (LQR 問題) と LQG 問題を扱う. 拡張された再帰的アルゴリズムを利用することによって, 扱うシステムの次数を低減し, 摂動項の大きさを考慮しないリカッチ代数方程式の解を求めることが本論文の目的である. さらに, 本論文では 1980 年代後半に Doyle らによって構築された状態空間法に基づく H_∞制御を, 非標準特異摂動システムに適用して, 再帰的アルゴリズムによるコントローラの設計を提案する.

目次

第1章

はじめに

1.1 緒言

数学を要とする体型化された制御理論の始まりとして, 1950 年代に現れた古典制御理論が挙げられる. これは, ラウス・フルビッツやナイキストの安定判別に代表される伝達関数や周波数応答に基づくフィードバック制御系の安定解析に端を発する. 後に, それらの結果が, ボード線図やニコルス線図による制御器の設計に応用され, その成果として PID 制御が生まれたのは周知の事実である. 1960 年代には, 宇宙船の制御に影響されて最大原理による最短時間制御, あるいは, カルマンの提案した状態空間法に基づく時間領域の 2 次形式評価関数を最小にする最適レギュレータ問題 (LQR 問題) や LQG 問題 (最適推定問題) が盛んに研究された. この時代以降の制御理論は現代制御理論と呼ばれ, 周波数応答の代わりに状態方程式が導入され, 制御対象も多入出力系として扱われるようになった. 続く 1970 年代は, 状態フィードバック制御を中心とした極指定, 最適レギュレータとオブザーバの併用, Geometric Approach に代表される線形制御の構造等が中心に議論された時代であった. さらに, 1970 年代後半には, 既約分数表現に基づく制御理論, 言い換えれば, 多入出力系を統一的に扱う状態空間表現を基本とする現代制御理論と周波数領域を基本とする古典制御理論の両者の良さを融合する制御理論が研究されるようになった. 特に, 安定でプロパ (proper) な有理関数行列で既約分解するという手法により, 与えられた制御対象に対し, フィードバック系を安定化するすべての制御器が表現されたことが大きな展開につながった. これはその後の H_∞ 制御などの新しい制御理論の基礎となった.

一方, 1980 年代に入ると, マイコンの登場によって, 以前より簡単かつ安価に実際の制御問題に少しずつ応用され始めた. これに対し, 最適制御の現実的問題が理論的に指摘されるようになった. その 1 つはロバスト安定性である. これは, 最適制御は制御対象の状

態空間モデルが正確に分かっているときには有効な手法であるが, 制御対象に何らかの変動があったときにも有効かという問題である. これは, 最適制御系に限定したことではなく, それまでの制御理論では定量的にはほとんど議論されていない問題である. 1980 年代半ば, 制御対象を基準モデルと変動分という独立した形式の集合として扱い, その集合に属する全ての制御対象に対して有効な制御器を求める, いわゆるロバスト制御が中心課題となってきた. 最初は, 構成されたフィードバック系がロバスト安定となっているかどうかを判別する解析的結果が中心であったが, 木村 (1984) によって導かれたロバスト安定化補償器が存在するための条件 (ロバスト安定化可能) を 1 つの契機として, どのようにロバスト安定化補償器を設計するかどうかという設計問題 (ロバスト安定化問題) が大きく注目されるようになってきた. もう 1 つは, Zames(1981) によって指摘された評価指標に対する問題である. 制御系の平均的な性能を良くしようとする最適制御のような評価関数よりも最悪ケースを抑える H_∞ ノルムをその規範に選ぶべきだという主張である. これが H_∞ 制御の始まりであり, 当初伝達関数をベースとした難解な理論展開がなされてきた. なお, H_∞ 制御とロバスト制御は非常に密接な関係にあり, ある種のロバスト安定化問題は H_∞ 制御問題の 1 つになっている. これは, 最も都合の悪い変動に対して安定化をはかろうとするロバスト安定化は, 一種の最悪ケースの設計となっていることからも理解される.

H_∞ 制御が研究され始めたころは, H_∞ 制御は周波数領域の評価に基づくもので時間領域の評価関数を最小にする最適制御とは異なるものと考えられていた. しかし, 1989 年, 有名な DGKF の論文 (Doyle *et al.* 1989) により, 2 つの制御方式は密接に関係しており, H_∞ 制御においてその条件を緩めていくと H_2 制御すなわち最適制御に近づくことが示された. 又, 当初その解法が難解とされてきた設計手順も本質的には 2 つのリカッチ方程式を解けば良いことが示され, 計算手順のパッケージ化とともに多くの応用の関心を集めている. 要約すると, H_∞ 制御はその特殊な場合として H_2 制御/最適制御を一般的に含むものといえる. Doyle はこれを新現代制御 (Post Modern Control) と呼んでいる.

以上, 現代までの制御の歴史を振り返って, 1980 以降発展してきた現代制御理論及び, 新現代制御に欠かせない方程式が存在する. リカッチ代数方程式である. 最適レギュレータ問題, LQG 問題, 及び H_∞ 制御問題のいずれをとっても, 制御器を設計するためにはリカッチ代数方程式を解かなければならない. このリカッチ代数方程式は, もともと, 18 世紀の数学者 J.F.Riccati (1676~1754) の名前をとって名付けられた 1 階非線形微分方程式に由来している. 通常, 制御工学者が直面するリカッチ代数方程式は, 以下の 3 つに分類される. (付録 1 参照)

$$PA + A^TP - PBR^{-1}B^TP + Q = 0 \tag{1.1a}$$

$$AP + PA^T - PC^TV_2^{-1}CP + GV_1G^T = 0 \tag{1.1b}$$

$$PA + A^T P - P(B_2 B_2^T - \gamma^{-2} B_1 B_1^T)P + Q = 0 \tag{1.1c}$$

ここで, 物理的要求から $R > 0$, $V_1 \geq 0$, $V_2 > 0$ であり, Q は準正定対称行列である. また, Pは準正定対称解である. また, 行列の右上付きの T は, 行列の転置記号を意味する. (1.1a) から順に, 最適レギュレータ問題, LQG 問題, H_∞制御問題の解法に現れるリカッチ代数方程式であるが, そのリカッチ代数方程式の解を得るための方法はさまざまで, リカッチ微分方程式の定常解として求める方法, Kleinman による Newton–Raphson 法を応用した逐次解法, 有本, MacFarlane, Potter による固有ベクトル法, ハミルトン行列を利用した Schur 解法に至るまで多種にわたる. ここで注意しなければならないことは, これらの解法のいずれも, 計算機の数値計算は不可欠であり, 現代において, 計算機を用いないリカッチ方程式の求解など考えられない状態にあることである.

近年の計算機技術の進歩には目ざましいものがあり, 制御系の次数が 10 次程度までなら, 先に示したリカッチ方程式を解くためのアルゴリズムを利用した結果でも, 実用に耐えられる結果が得られる. しかし, システムの次数があがるにつれて, 数値解析的な考慮を払ったアルゴリズムを用いなければ有用な結果が得られない場合が生じる. 経験上, 特異摂動システムにおける最適レギュレータ問題, LQG 問題, 及び, H_∞制御問題を扱う場合には, システムの次数が高次元かつ, 摂動項と呼ばれる寄生要素のためにリカッチ方程式を解くための数値計算はいっそうの困難をきたす. 1980 年代前半, Gajic は, この摂動項を含む代数リカッチ方程式を解くための再帰的アルゴリズムを提案した. しかし, Gajic が扱った特異摂動システムは, システムの係数行列 A_{22}が非特異である仮定が存在するため再帰的アルゴリズムの適用範囲が狭かった.

そこで, 本論文では Gajic(1986) が提案した特異摂動システムにおけるリカッチ代数方程式ための再帰的アルゴリズムを拡張する. すなわち, Gajic(1986) は係数行列 A_{22}が非特異である標準特異摂動システムにおける最適レギュレータ問題と LQG 問題のみを扱っているのに対し, 本論文では, A_{22}が非特異である仮定が存在しない非標準特異摂動システムにおける最適レギュレータ問題と LQG 問題, さらに, H_∞制御問題を扱う. 本論文で再帰的アルゴリズムを利用して解くリカッチ方程式のタイプは (1.1a)~(1.1c) の全てである. 拡張された再帰的アルゴリズムを利用することによって, 扱うシステムの次数を低減し, 摂動項の大きさを考慮しないリカッチ代数方程式の解を求めることが本論文の目的である. 又, 再帰的アルゴリズムによって求められた制御器を実システムに適用したときの特性を研究する.

以下では, まず, 本論文でのキーワードとなる標準, 非標準特異摂動システム, 特異摂動法, 再帰的アルゴリズム, ロバスト制御, H_∞制御, ロバスト安定性について簡単な解説を与える. 次に研究概要, そして本文に移行する.

1.2 標準, 非標準特異摂動システム

実際の電気回路におけるシステム内には, 無視しうるような, 小さな浮遊容量 (コンデンサ) や導線の内部におけるインダクタンス, あるいは, さまざまな内部抵抗など多種の外乱, すなわち寄生要素を含んでいる. 通常, これらの寄生要素は, ほとんどの場合無視される傾向にある. これにより, 理想的なシステムを考えることによって問題を簡略化しさまざまな物理現象を解析している. しかし, 実際のシステムのモデリングの際にこれらを忠実に表現しようとすれば, システムの次元が極めて高いものとなってしまう. ここで, システム内に存在する無視しうる寄生要素をこのシステムにおける摂動項とよぶ. 又, このような摂動項を含むシステムを一般に摂動システムと呼ぶ. とくに, システムを特徴づける状態変量に対し, 微小時間内に影響を及ぼす項 (微分項) に摂動項がかかっているシステムを, 特異摂動システムとよぶ. このように, ほとんどの場合, どのようなシステムにおいても摂動項を含んでおり, 摂動システムと呼ぶことができる. 又, 一般に電気回路のような物理的システムにおいては, その多くが微分方程式に従うものであり, 広い意味で特異摂動システムと密接な関係にある.

1.2.1 特異摂動システムの例

図 1.1で与えられる RLC回路を考える (Shao *et al.* 1993).

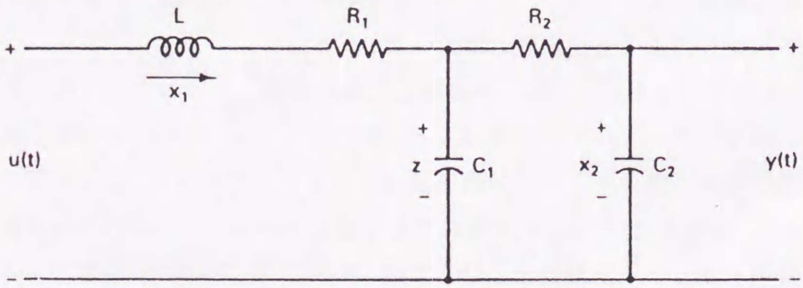

図 1.1: R–L–C networks.

ここで, $u(t)$ は入力電圧, C_1, C_2はコンデンサ, R_1, R_2 は抵抗, L はインダクタンスである. いま, $L=0.1\mathrm{H}$, $C_2=0.1\mathrm{F}$, $R_1=0.05\Omega$, $R_2=1\Omega$であり, C_1が導線間に生じる浮遊容量とすれば, $C_1=\varepsilon(>0)$ として, 方程式 (1.2) で表現できる.

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \\ \varepsilon\dot{z}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -R_1/L & 0 & -1/L \\ 0 & -1/R_2C_2 & 1/R_2C_2 \\ 1 & 1/R_2 & -1/R_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ z(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} u(t) \tag{1.2}$$

ここで, $x_1(t)$ は L を流れる電流であり, $x_2(t)$ は C_2の両端にかかる電圧, $z(t)$ は C_1の両端にかかる電圧である. C_1が他の物理定数より十分小さいので, 特異摂動システムと呼ぶことができる.

このような寄生要素を含む特異摂動システムの一般的な表現は (1.3) で与えられる.

$$\dot{x}_1(t) = A_{11}x_1(t) + A_{12}x_2(t) + B_1u(t), \quad x_1(t_0) = x_1^0 \tag{1.3a}$$

$$\varepsilon\dot{x}_2(t) = A_{21}x_1(t) + A_{22}x_2(t) + B_2u(t), \quad x_2(t_0) = x_2^0 \tag{1.3b}$$

ここで, $u(t) \in \mathbf{R}^m$は制御入力, $x_i(t) \in \mathbf{R}^{n_i} (i = 1, 2)$ は状態ベクトルをあらわす. εは十分小さな正のパラメータである. 又, 各係数行列は適当な次元をもつ. ここで, (1.3b) において, A_{22}が特異である. つまり, A_{22}^{-1}が存在しないシステムを一般に非標準特異摂動システムと呼ぶ.

1.3 特異摂動法

特異摂動システム (1.3) の安定性などの解析法の 1 つに特異摂動法があげられる. 通常, 摂動項の影響を無視することは, $\varepsilon = 0$ の近傍でシステムを考察することになるが, $\varepsilon \neq 0$ であるとき, 特異摂動システム (1.3) は, 次数が $n_1 + n_2$次元であり, $\varepsilon = 0$ のときは, n_1次元システムとなる. ここで考えている摂動は, システムの次数を変化させるという意味での通常の摂動とは異なっている. 摂動項の影響を無視したシステム, すなわち非摂動系は (1.3) 式において$\varepsilon = 0$ とおくことにより得ることができる.

$$\dot{\bar{x}}_1 = A_{11}\bar{x}_1 + A_{12}\bar{x}_2 + B_1\bar{u} \tag{1.4a}$$

$$0 = A_{21}\bar{x}_1 + A_{22}\bar{x}_2 + B_2\bar{u} \tag{1.4b}$$

ここで, A_{22}が非特異行列の場合 (A_{22}が安定行列の場合この仮定は成立する.) 上式において, $\bar{x}_2$を消去し,

$$\dot{\bar{x}}_1 = (A_{11} - A_{12}A_{22}^{-1}A_{21})\bar{x}_1 + (B_1 - A_{12}A_{22}^{-1}B_2)u \tag{1.5}$$

を得る. これは, slow system と呼ばれる. このシステムは, 摂動項εを含まないので通常のシステムと考えることができる.

次に, (1.3b) 式において, 時間スケール t を $t = \varepsilon\tau$ と変換したのちに, εを限りなく 0 に近づける. つまり, $\varepsilon \to 0$ の極限を考えることにより,

$$\varepsilon\dot{x}_2 = A_{21}x_1(0) + A_{22}x_2 + B_2u \tag{1.6}$$

を得る．ここで，$x_1(0)$ は，x_1の初期値であり，このように変換されたシステムを fast system と呼ぶ．さらに，

$$x_2 = \hat{x}_2 - A_{22}^{-1}A_{21}x_1(0) \tag{1.7}$$

という変換によって上式は，

$$\varepsilon\dot{\hat{x}}_2 = A_{22}\hat{x}_2 + B_2\hat{u}, \quad \hat{x}_2(0) = x_2(0) - \bar{x}_2(0) \tag{1.8}$$

となる．直観的には，特異摂動システム (1.3) を時間的に分割し，最初の短い時間区間でのふるまいを (1.8) によって記述する．それ以後の時間のふるまいを (1.5) で記述する．したがって特異摂動法は，システム (1.3) を直接考えるかわりに，それより次元の低い 2 つのサブシステム (1.5), (1.8) を調べることにより，特異摂動システムの挙動を解析する手法である．しかし，特異摂動法では，システムの時間分割だけでなくそれに付随する評価関数なども時間分割しなければならない．よってそれだけ問題解法のステップが多くなるのは明かである．

ここで，特異摂動法を利用した 1 つの安定性に関する補題を紹介する．

補題 1.1 (Kokotović *et al.* 1976) 特異摂動システム (1.3) において $u \equiv 0$ である自律系を考える．2 つの行列 $A_{11} - A_{12}A_{22}^{-1}A_{21}$, A_{22}が共に安定行列であるとき，$\varepsilon^* > 0$ が存在して，$\varepsilon \in [0, \varepsilon^*)$ なる任意のεに対して (1.3) は漸近安定となる．

注意 1.1 slow system だけで安定化などの設計を行うと，過渡的な影響から，システム全体として安定化できない場合がある．例えば，補題 1.1 で，slow system の安定条件のみでは，$A_{11} - A_{12}A_{22}^{-1}A_{21}$だけが安定行列ということになり，システム (1.3) が安定にならないことが容易にわかる．

1.4 再帰的アルゴリズム

最適レギュレータ問題，カルマンフィルタを含む推定制御問題，及び近年盛んに研究されている H_∞制御問題におけるコントローラの設計などに欠かすことができない基本的な方程式にリカッチ代数方程式があげられる．特に，微小な摂動項εを含んだリカッチ代数方程式を解くためのアルゴリズムとして，再帰的アルゴリズムが Gajic らに (1990) よって提案された．この再帰的アルゴリズムを説明するために，以下のリアプノフ方程式 (1.9) を考える (Gajic *et al.* 1990).

$$P(\varepsilon)A^T(\varepsilon) + A(\varepsilon)P(\varepsilon) + Q(\varepsilon) = 0 \tag{1.9}$$

通常，この方程式の解を直接数値計算によって求めようとすれば，摂動項εのために難しいものとなる．この理由は，オーダが異なる数値解析には，積み残し，あるいは情報落ちなどの影響により正しい計算結果が得られないからである．そこで，まず，

$$A(\varepsilon) = \begin{bmatrix} A_1 & A_2 \\ \varepsilon^{-1}A_3 & \varepsilon^{-1}A_4 \end{bmatrix}$$

$$Q(\varepsilon) = \begin{bmatrix} Q_1Q_1^T & \varepsilon^{-1}Q_1Q_2^T \\ \varepsilon^{-1}Q_2Q_1^T & \varepsilon^{-2}Q_2Q_2 \end{bmatrix}$$

$$P(\varepsilon) = \begin{bmatrix} P_1 & \varepsilon P_2 \\ \varepsilon P_2^T & \varepsilon P_3 \end{bmatrix}$$

と分解された行列について，成分計算を実行する．

$$A_1P_1 + A_2P_2^T + P_1A_1^T + P_2A_2^T + Q_1Q_1^T = 0 \tag{1.10a}$$

$$A_2P_3 + P_1A_3^T + P_2A_4^T + \varepsilon A_1P_2 + Q_1Q_2^T = 0 \tag{1.10b}$$

$$A_4P_3 + P_3A_4^T + \varepsilon A_3P_2 + \varepsilon P_2^TA_3^T + Q_2Q_2^T = 0 \tag{1.10c}$$

となる．ここで，$\varepsilon = 0$ とおく．

$$A_1\bar{P}_1 + \bar{P}_1A_1^T + A_2\bar{P}_2{}^T + \bar{P}_2A_2^T + Q_1Q_1^T = 0 \tag{1.11a}$$

$$\bar{P}_2A_4^T + \bar{P}_1A_3^T + A_2\bar{P}_3 + Q_1Q_2^T = 0 \tag{1.11b}$$

$$\bar{P}_3A_4^T + A_4\bar{P}_3 + Q_2Q_2^T = 0 \tag{1.11c}$$

この方程式を 0–オーダ方程式と定義する．次に，以下の仮定を導入する．

仮定 1.1 行列 A_4は安定である．

注意 1.2 ここで，任意の実数行列 A に対して，A が安定行列とは，A のすべての個有値の実部が負であることを意味する．すなわち，

$$\mathrm{Re}\lambda_i(A) < 0, \quad i = 1, 2, \cdots \tag{1.12}$$

を意味する．

仮定から，A_4^{-T}が存在するので，(1.11b) より

$$\bar{P}_2 = -[A_2\bar{P}_3 + \bar{P}_1A_3^T + Q_1Q_2^T]A_4^{-T} \tag{1.13}$$

となる．この式を (1.11a) に代入すれば，以下の 2 つのリアプノフ方程式を得ることができる．

$$\bar{P}_1 A_0^T + A_0 \bar{P}_1 + Q_0 Q_0^T = 0 \tag{1.14a}$$

$$\bar{P}_3 A_4^T + A_4 \bar{P}_3 + Q_2 Q_2^T = 0 \tag{1.14b}$$

ただし,

$$A_0 = A_1 - A_2 A_4^{-1} A_3, \quad Q_0 = Q_1 - A_2 A_4^{-1} Q_2$$

したがって, 2 つのリアプノフ方程式 (1.14) と 1 つの代数方程式 (1.13) を得ることが出来る. これらの方程式を解いた解を 0–オーダ解と呼ぶ. さらに以下の仮定を導入する.

仮定 1.2 行列 A_0は安定である. 又, 行列対 (A_0, Q_0), (A_4, Q_2) は互いに検出可能対である. (付録 2 参照)

方程式 (1.9) を満足する解 $P(\varepsilon)$ は, 偏差 E_i, $(i = 1, 2, 3)$ を用いて近似的に以下のように表現されると仮定する.

$$P_1 = \bar{P}_1 + \varepsilon E_1 \tag{1.15a}$$

$$P_2 = \bar{P}_2 + \varepsilon E_2 \tag{1.15b}$$

$$P_3 = \bar{P}_3 + \varepsilon E_3 \tag{1.15c}$$

(1.15) を (1.10) に代入して, (1.11) を用いて整理する.

$$A_0 E_1 + E_1 A_0^T = A_0 [\bar{P}_2 + \varepsilon E_2] A_4^{-T} A_2^T + A_2 A_4^{-1} [\bar{P}_2 + \varepsilon E_2]^T A_0^T \tag{1.16a}$$

$$A_4 E_3 + E_3 A_4^T = -A_3 [\bar{P}_2 + \varepsilon E_2]^T - [\bar{P}_2 + \varepsilon E_2]^T A_3^T \tag{1.16b}$$

$$A_2 E_3 + E_1 A_3^T + E_2 A_4^T + A_1 [\bar{P}_2 + \varepsilon E_2] = 0 \tag{1.16c}$$

したがって, 以下のアルゴリズム (1.17) が得られる.

$$\begin{aligned} A_0 E_1^{(j+1)} + E_1^{(j+1)} A_0^T &= A_0 [\bar{P}_2 + \varepsilon E_2^{(j)}] A_4^{-T} A_2^T \\ &\quad + A_2 A_4^{-1} [\bar{P}_2 + \varepsilon E_2^{(j)}]^T A_0^T \end{aligned} \tag{1.17a}$$

$$A_4 E_3^{(j+1)} + E_3^{(j+1)} A_4^T = -A_3 [\bar{P}_2 + \varepsilon E_2^{(j)}] - [\bar{P}_2 + \varepsilon E_2^{(j)}]^T A_3^T \tag{1.17b}$$

$$E_2^{(j+1)} = -A_2 E_3^{(j+1)} + E_1^{(j+1)} A_3^T + A_1 [\bar{P}_2 + \varepsilon E_2] A_4^{-T} \tag{1.17c}$$

ただし, 初期値として

$$E_2^{(0)} = 0$$

である. ここで, $^{(j)}$は j番目の値, $^{(j+1)}$は $j+1$ 番目の値を意味する. したがって, j番目の値が求まれば, 逐次的に $j+1$ 番目の値が定まり, これを再帰的に求めればよい.

続いて, 仮定 1.1 及び仮定 1.2 を使えば以下の補題が得られる.

補題 1.2 (Gajic *et al.* 1990) 仮定 1.1 及び仮定 1.2 における条件のもとで, アルゴリズム (1.17) は, k回の繰り返しによって, 偏差 $E_i, i=1,2,3$ の正確な値に $O(\varepsilon^k)$ の高精度で収束する. すなわち,

$$||E_i - E_i^{(k+1)}|| = O(\varepsilon)||E_i - E_i^{(k)}||, \quad k = 0,1,2,\ldots \tag{1.18}$$

又は,

$$||E_i - E_i^{(k)}|| = O(\varepsilon^k), \quad k = 0,1,2,\ldots \tag{1.19}$$

この再帰的アルゴリズム (1.17) を使用することでリアプノフ方程式 (1.9) を満足する解を求める. すなわち, 再帰的アルゴリズム (1.17) を利用することによって, 近似解 $P(\varepsilon)$ を求める. この再帰的アルゴリズムは, 再帰的に k回の繰り返しによって $O(\varepsilon^k)$ の任意の高精度の解を得ることができる. 又, 収束性についても陰関数定理を利用することによって簡単に証明できる. したがって, 摂動項を含むリカッチ代数方程式の求解に対して非常に有効である.

1.5 ロバスト制御

ロバスト (robust) 性というのはなんらかの計算や設計を行ったとき, そこで使われたデータやパラメータが正しい値でなく, 少しぐらい狂っていても, 計算結果が十分役にたつような強さをもっていることを意味している. 制御工学では, 制御対象のデータに基づいて制御系が設計される. したがって制御対象に関するデータに多少の狂いがあっても, 時間がたつにつれて制御対象の特性が変わったとしても, なお制御系としては十分その制御性能を発揮できるような性質がロバスト性である. 制御対象は物理的システムであり, その伝達特性を我々は完全に正確にはとらえきれないし, 実体としても時間的に変動したり, また動作状態によっても変化するのが普通であるからこのロバスト性は制御工学として極めて重要な性質である. しかしながら, その理論的扱いはまだ捜索の域を出ていない. それは物理的システムである制御対象のどのような特性部分が制御性能に強く関係するのか, あるいはほとんど関係しないのかがよく分かっていないからである. それに加えて, より制御工学的に密着していることであるが, 制御系のどのような制御特性があまり影響を受けて欲しくないのか, どのような特性ならば少々変化しても差し支えないのか, ということがはっきりしていないのである. これは, 制御設計に深く係わることであり, 設計法に依存する話になってくる.

1.6 H_∞制御

1.6.1 一般化 H_∞制御問題

現在, 種々の設計仕様が重み関数を含めた閉ループ伝達関数の H_∞ ノルムで表現されている. 個々の問題 (ロバスト安定化問題, 混合感度問題など) は, LQG 制御などと比較すれば評価関数が極めて多様なので, これらを統一的に議論できる枠組みを作り, それぞれの設計仕様を満たす補償器を系統的に見つける手法を確立することが望ましい. そこで, 以下に述べる標準問題を考える.

定義 1.1 まず, 次式で表現される線形時不変システムが与えられたとする.

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + B_1 w(t) + B_2 u(t) \tag{1.20a}$$

$$z(t) = C_1 x(t) + D_{11} w(t) + D_{12} u(t) \tag{1.20b}$$

$$y(t) = C_2 x(t) + D_{21} w(t) + D_{22} u(t) \tag{1.20c}$$

ここで, $w(t) \in \mathbf{R}^{m_1}$は外部入力 (外乱, 基準入力など), $u(t) \in \mathbf{R}^{m_2}$は制御入力, $z(t) \in \mathbf{R}^{p_1}$は制御量, $y(t) \in \mathbf{R}^{p_2}$は観測出力, $x(t) \in \mathbf{R}^{n}$は状態ベクトルをあらわす. 又, 各係数行列は適当な次元を持つものとする.

続いて, 次式で表現される一般化制御対象が与えられたとする.

$$\begin{bmatrix} Z_s \\ Y_s \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} G_{11} & G_{12} \\ G_{21} & G_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} W_s \\ U_s \end{bmatrix} \tag{1.21}$$

$$G_{ij} \in \mathbf{R}^{p_i \times m_i} (i, j = 1, 2)$$

$$W_s = \mathcal{L}(w) \in \mathbf{R}^{m_1},\ Z_s = \mathcal{L}(z) \in \mathbf{R}^{p_1},$$

$$U_s = \mathcal{L}(u) \in \mathbf{R}^{m_2},\ Y_s = \mathcal{L}(y) \in \mathbf{R}^{p_2}$$

ただし, 記号$\mathcal{L}$はラプラス変換を意味する. 又, $G_{ij}(s)$ は伝達関数行列である. ここで,

$$\begin{aligned} G(s) &= \begin{bmatrix} G_{11} & G_{12} \\ G_{21} & G_{22} \end{bmatrix} && (1.22) \\ &= \begin{bmatrix} D_{11} & D_{12} \\ D_{21} & D_{22} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} C_1 \\ C_2 \end{bmatrix} (sI - A)^{-1} \begin{bmatrix} B_1 & B_2 \end{bmatrix} \\ &\overset{\mathrm{s}}{=} \left[\begin{array}{c|cc} A & B_1 & B_2 \\ \hline C_1 & D_{11} & D_{12} \\ C_1 & D_{21} & D_{22} \end{array}\right] = \left[\begin{array}{c|c} A & B \\ \hline C & D \end{array}\right] && (1.23) \end{aligned}$$

いま, 制御則を

$$U_s = K(s) Y_s, \qquad K(s) \in \mathbf{R}^{m_2 \times p_2} \tag{1.24}$$

と定め，図 1.2のフィードバック系を構成する．

この制御系において，W_sから Z_sまでの伝達関数を$\Phi(s) \in \mathbf{RH}_\infty^{p_1 \times m_1}$とおく．すなわち，

$$Z_s = \Phi W_s, \qquad \Phi = G_{11} + G_{12}K(I - G_{22}K)^{-1}G_{21} \tag{1.25}$$

とする．このとき，H_∞標準問題は，以下のように与えられる．(Zames 1981)

図 1.2の系において，正数$\gamma > 0$ が与えられたとき，

$$||\Phi||_\infty < \gamma \tag{1.26}$$

を満たす安定化補償器 $K(s)$ を求めよ．

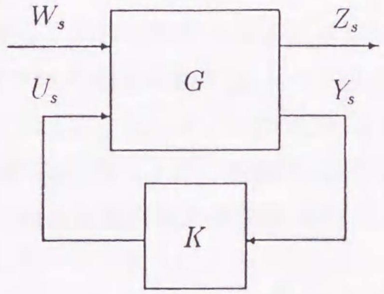

図 1.2: H_∞標準問題

注意 1.3 有理関数 $f(s)$ が，$f(\infty) = (定数)$ となるとき，プロパといわれ，さらに，$f(\infty) = (0)$ となる場合には，厳密にプロパといわれる．又，$f(s)$ が安定とは，分母多項式の根の実部が負 (< 0) であることである．プロパかつ安定な有理関数 $f(s)$ 全体の集合を$\mathbf{RH}_\infty$と定義する．

1.6.2 H_∞制御問題の一般解

準備として，まず，リカッチ方程式に関する記号を定義する．いま，一般に A, Q, Rを$\mathbf{R}^{n\times n}$実定数行列とし，Q, Rを対称行列とする．このとき，$\mathbf{R}^{n\times n}$のハミルトン行列 Hを

$$H \equiv \begin{bmatrix} A & R \\ Q & -A^T \end{bmatrix} \tag{1.27}$$

と定義し，これに対応するリカッチ方程式

$$A^T X + XA + XRX - Q = 0 \tag{1.28}$$

の $\mathbf{R}^{n\times n}$の実対称解 Xのうち，$A + RX$を安定とするものが存在するとき，これを (1.27) の安定化解とよび，

$$X = \mathbf{Ric}\{H\} \tag{1.29}$$

とあらわすことにする．

標準問題の解 $K(s)$ が，存在するための必要十分条件を求めるために以下の仮定を導入する．

A1. (A, B_2) :可安定

A2. (C_2, A) :可検出

A3. $\mathrm{rank} D_{12} = m_2$(列フルランク)

A4. $\mathrm{rank} D_{21} = p_2$(行フルランク)

A5. $\mathrm{rank}\begin{bmatrix} A - j\omega I & B_2 \\ C_1 & D_{12} \end{bmatrix} = n + m_2; \forall\omega \in \mathbf{R}$ (列フルランク)

A6. $\mathrm{rank}\begin{bmatrix} A - j\omega I & B_1 \\ C_2 & D_{21} \end{bmatrix} = n + p_2; \forall\omega \in \mathbf{R}$ (行フルランク)

これらの仮定の中で **A1**，**A2** は制御系の内部安定化に必要なものである．他は理論上の便宜のための仮定であるが，粗くいえば，実際の制御対象や重み関数行列の極，零点が虚軸上に存在しなければ成立する．既存のソフトのほとんどは上記の仮定が満たされていなければ使えないので，これらの仮定が満たされるか否かは，実際の制御設計系の際に十分に注意すべきものである．ここでは，表記を簡単にするために直達項に関して次の仮定を加える．

A7. $D_{11} = 0, D_{22} = 0, D_{12} = \begin{bmatrix} 0 \\ I_{m_2} \end{bmatrix}, D_{21} = \begin{bmatrix} 0 & I_{p_2} \end{bmatrix}$

以上の準備のもとで，H_∞制御問題が可解であるための必要十分条件と，仕様を満たすすべての補償器の集合は，次の補題で与えられる．

補題 1.3 (Doyle *et al.* 1989) 仮定 **A1**.~**A7**.の下で，与えられた$\gamma > 0$ と一般化制御対象に対して H_∞制御問題の解 $K(s)$ が存在するための必要十分条件は，

$$X = \mathbf{Ric}\{H_X\}, \qquad Y = \mathbf{Ric}\{H_Y\} \tag{1.30}$$

が存在し，

$$X \geq 0, \qquad Y \geq 0, \qquad \lambda_{\max}(XY) < \gamma^2 \tag{1.31}$$

を満たすことである．ここで，$\lambda_{\max}(\cdot)$ は行列の最大固有値を表し，

$$H_X = \begin{bmatrix} A - B_2 D_{12}^T C_1 & \gamma^{-2} B_1 B_1^T - B_2 B_2^T \\ -C_1^T C_1 + C_1^T D_{12} D_{12}^T C_1 & -(A - B_2 D_{12}^T C_1)^T \end{bmatrix} \tag{1.32}$$

$$H_Y = \begin{bmatrix} (A - B_1 D_{21}^T C_2)^T & \gamma^{-2} C_1^T C_1 - C_2^T C_2 \\ -B_1 B_1^T + B_1 D_{21}^T D_{21} B_1^T & -(A - B_1 D_{21}^T C_2) \end{bmatrix} \tag{1.33}$$

である．又，上記条件が成立するとき，仕様を満たすすべての補償器は，

$$K(s) = \hat{K}_{11} + \hat{K}_{12} U (I - \hat{K}_{22} U)^{-1} \hat{K}_{21}, \ U(s) \in \mathbf{RH}_\infty^{m_2 \times p_2}, \ ||U||_\infty < \gamma \tag{1.34}$$

と自由パラメータ Uを用いて表現できる．ただし，$\hat{K}_{ij}$は次式により定まる．

$$\hat{K} = \left[\begin{array}{cc} \hat{K}_{11} & \hat{K}_{12} \\ \hat{K}_{21} & \hat{K}_{22} \end{array}\right] \stackrel{s}{=} \left[\begin{array}{c|cc} \hat{A} & \hat{B}_1 & \hat{B}_2 \\ \hline \hat{C}_1 & 0 & I_{m_2} \\ \hat{C}_2 & I_{p_2} & 0 \end{array}\right] \tag{1.35}$$

すなわち，$\hat{K}_{ij} = \hat{C}_i(sI - \hat{A})\hat{B}_j + \hat{D}_{ij}, \quad (i,j = 1,2)$ であり，$\hat{A}, \hat{B}_1, \hat{C}_1$等は以下で定義される．

$$\begin{aligned}
\hat{B}_1 &\equiv B_1 D_{21}^T + Y C_2^T \\
\hat{B}_2 &\equiv B_2 + \gamma^{-2} Y C_1^T D_{12} \\
\hat{C}_1 &\equiv -(D_{12}^T C_1 + B_2^T X)(I - \gamma^{-2} Y X)^{-1} \\
\hat{C}_2 &\equiv -(C_2 + \gamma^{-2} D_{21} B_1^T X)(I - \gamma^{-2} Y X)^{-1} \\
\hat{A} &\equiv (A - B_1 D_{21}^T C_2) + Y(\gamma^{-2} C_1^T C_1 - C_2^T C_2) + \hat{B}_2 \hat{C}_1 (I - \gamma^{-2} Y X)^{-1}
\end{aligned}$$

この補題は，$G(s)$ の状態空間データ (A, B_1, B_2) から定まる 2 つのリカッチ方程式の安定化解 (1.30) を求め，それらが準正定などの 3 つの条件 (1.31) を満たせば，与えられた H_∞制御問題に対する仕様を満たす安定化補償器が存在すること，及び，そのような補償器が (1.34) の形式で自由パラメータ $U(s)$ を用いて記述されることを示している．特に，$U(s) = 0$ と選ぶとき，$K(s) = \hat{K}_{11}(s)$ となるが，これは中心解と呼ばれている．この中心解の次数は$\hat{A}$と A のサイズが同じであることが示すように一般化制御対象の次数 n に等しい．

1.7 ロバスト安定性

制御設計が不確かなモデルを基礎にするとき，制御系はモデルの不確かさを許容するように設計することが，実用上きわめて重要である．この点を強く意識して登場したロバスト制御は，制御系の解析において，所望の特性がモデルの不確かさのもとで確保されるかどうかに最大の関心がはらわれる．中でも安定性の確保は最も重要であり，許容されたモデルの不確かさに対して確保される安定性は特に「ロバスト安定性」と呼ばれ，ロバスト制御の中心的な課題となっている．

ロバスト安定性の問題は，モデルの不確かさと制御系の安定性との関係を議論する「ロバスト安定性の解析」と，ロバスト安定な制御系の構成を議論する「ロバスト安定化問題」とに分かれる．いずれの問題に対するアプローチも，モデルの不確かさをどのように表現するかに大きく依存する．その表現法には，伝達関数モデルの不確かさを周波数応答特性に注目して表す「周波数領域における表現」と，状態モデルの不確かさを係数行列のパラメータ変動として表す「時間領域における表現」との 2 つがあげられる．前者 (後者) の

不確かさは，システムの構造的な特殊性を無視 (考慮) していることから，非構造的 (構造的) な不確かさと呼ばれる．前者の表現法に基づくアプローチとしては，ナイキストの定理を利用したロバスト安定性の解析手法，ロバスト安定化問題を補間問題や H_∞ 制御問題に帰着させる手法などがよく知られている．一方，後者の表現に基づくアプローチの代表例は，リアプノフの定理を利用するものである．その中でロバスト安定化問題への有力な手法として最近注目を集めているものに，「2 次安定化」と呼ばれる手法がある．これは，ある特別な 2 次形式リアプノフ関数によって保証される安定性 (2 次安定性という) を基礎にした手法であり，特に時変的なパラメータ変動を伴うシステムのロバスト安定化問題に有力である．

1.8 研究概要

本論文は，標準，非標準特異摂動システムにおけるリカッチ代数方程式の再帰的アルゴリズムの導出，および，再帰的アルゴリズムによって設計されたコントローラの特性を解析する．

第 2 章では，一般化リカッチ代数方程式に基づくディスクリプタ理論 (付録 3 参照) を利用して，非標準特異摂動システムにおける合成最適制御則を利用した最適レギュレータ問題を研究する．提案された新たな合成制御則は標準，非標準特異摂動システムの両方に適用できる．ここで，slow system はディスクリプタシステムの特別な場合であるので，非標準特異摂動システムにおける最適レギュレータ問題の場合，ディスクリプタシステム (付録 3 参照) の線形レギュレータ問題と同様な設計手法を利用して，合成制御則を求めることが可能である．又，標準，非標準特異摂動システムのいずれの場合でも，合成制御則を利用した評価関数の値が，最適制御則を利用した評価関数の値と比較して，$O(\varepsilon^2)$ 程度の良好な近似を達成できることを示す．さらに，新たに提案された合成制御則が，従来から存在する標準特異摂動システムにおける合成制御則と等価であることを証明する．

第 3 章では，非標準特異摂動システムに対して，第 2 章で提案された合成制御則と異なり，再帰的アルゴリズムによるコントローラの設計を提案する．コントローラの設計の際，本章で扱われるリカッチ方程式は一般化リカッチ方程式と呼ばれ，この一般化リカッチ方程式において再帰的アルゴリズムを導出し，収束解の存在を証明する．再帰的アルゴリズムを利用することにより，第 2 章で提案された合成制御則と比較して，より最適な評価関数の値を達成することができる．

第 4 章では，さらに，問題の対象を最適レギュレータ問題 (LQR 問題) から，LQG 問題に拡張し，扱われていなかった非標準特異摂動システムにおける LQG 問題のための再帰的アルゴリズムを導出する．大きな特徴は，第 3 章と同様に A_{22} が非特異である必要がない．次に，2 つの最適ゲインを求める際に，解く必要のある 2 つのリカッチ方程式を一般

化リカッチ方程式に変換し，この一般化リカッチ方程式を解くことである．この一般化リカッチ方程式を導入することにより，Gajic(1986) が提案している 2 つのリカッチ方程式の解 P, Q の形を変形することができる．また，新たな公式を導入することにより 0-オーダ方程式を変形することができる．

第 5 章では，第 3 章，第 4 章で扱った最適レギュレータ (LQR) 及び LQG タイプのリカッチ代数方程式のための再帰的アルゴリズムの拡張として，H_∞タイプリカッチ代数方程式のための再帰的アルゴリズムを導出する．すなわち，第 4 章と同様に，H_∞タイプリカッチ方程式を一般化リカッチ方程式に変換して，この一般化リカッチ方程式を解くための新たな再帰的アルゴリズを提案する．同時に H_∞タイプリカッチ方程式が，準正定かつ安定化解が存在するための十分条件を低次元化された 2 つのリカッチ方程式から導出する．提案されたアルゴリズムは，導出された 2 つのノルム条件を満足すれば，必ず収束解をもつ．得られた収束解は，最適レギュレータ問題や LQG 問題で扱ったリカッチ方程式と同様に，得られた解は準正定かつ，H_∞タイプリカッチ方程式の安定化解になる．

第 6 章では，第 5 章の拡張として，非標準特異摂動システムにおける H_∞制御問題に対し，再帰的アルゴリズムの手法を利用した制御器の構築を提案する．ここでは，再帰的アルゴリズムを利用することにより，特異摂動法を用いずに，直接 full-order system におけるリカッチ方程式の解を $O(\varepsilon^k)$ の高精度で解くことを示す．このとき，構築された制御器は $O(\varepsilon^k)$ の高精度であるので，特異摂動法による近似解を利用した制御器に比べて，より最適である．これにより，再帰的アルゴリズムによってえられた制御器は，設計仕様のγに対して$\gamma + O(\varepsilon^{k+1})$ を保証する．

第 7 章では，第 5 章及び，第 6 章で扱われた H_∞制御問題に関係するリカッチ代数方程式の解が，安定化解である証明の部分で用いた補題 5.4 を詳しく研究する．すなわち，第 5 章及び，第 6 章で扱われたリカッチ代数方程式が安定化解である証明に必要な，不確定要素を含む特異摂動システムにおけるロバスト安定性のための十分条件を，$A_{22} + \Delta A_{22}(t)$ が安定行列である仮定を行わないで導出する．導出された十分条件は，保守的ではあるが，$A_{22} + \Delta A_{22}(t)$ が安定行列である仮定を必要としない．すなわち，従来の仮定である係数行列 $A_{22} + \Delta A_{22}(t)$ が安定行列であると異なり，係数行列 A_{22}は安定行列であり，かつ不確定要素$\Delta A_{22}(t)$ は有界であることを仮定して特異摂動システムが，指数漸近安定であるための十分条件を導出する．

第 8 章では，第 2 章から第 7 章までに得られた研究結果に対する概要，及び，考察を行う．

第2章

非標準特異摂動システムにおける合成制御則のための新手法

この章では，一般化リカッチ代数方程式に基づくディスクリプタ理論を利用して，非標準特異摂動システムにおける合成最適制御則を利用した最適レギュレータ問題を研究する．提案された新たな合成制御則は標準，非標準特異摂動システムの両方に適用できる．又，標準，非標準特異摂動システムのいずれの場合でも，合成制御則を利用した評価関数の値が，最適制御則を利用した評価関数の値と比較して，$O(\varepsilon^2)$ 程度の良好な近似を達成できることを示す．

2.1 はじめに

係数行列 A_{22} が非特異である標準特異摂動システムにおける最適制御理論は，近年，多数の研究者によって大変多くの研究報告がなされた (Kokotović *et al.*1986, Chow and Kokotović 1976)．中でも，よく知られた結果の 1 つとして合成制御則を利用した評価関数の値は，最適制御則を利用した評価関数の値と比較して，$O(\varepsilon^2)$ 程度の良好な近似である．近年，係数行列 A_{22} が特異である非標準特異摂動システムにおける最適レギュレータ問題の研究が盛んに行われている (Wang *et al.*1988, 1994, Wang and Frank 1992, Khalil 1989)．Wang ら (1988)，及び，Wang と Frank(1992) は，非標準特異摂動システムにおける最適レギュレータ (Linear–Quadratic–Regulator) 問題を研究している．その結果，εを恒等的に 0 として，システムの次数を低次元化した slow system に対して，構築された制御器のみを full–order system に利用した場合，$O(\varepsilon)$ の準最適制御であることが示された．さらにこの結果は，非標準 multiparameter/multitime 特異摂動システム (Wang *et al.*1994) の準最適制御問題に

拡張された. 一方, 非標準特異摂動システムにおける静的及び動的フィードバック安定化制御問題が Khalil(1989) によって研究された.

上記のいずれの研究報告を考慮しても, 1 つの自然な疑問が存在する. それは, 非標準特異摂動システムの場合, 標準特異摂動システムと同様に合成制御則が構築できるかどうかである. そこで, この章では, 一般化リカッチ方程式に基づく, ディスクリプタ理論 (付録 3 参照)(Wang *et al.* 1993, Xu and Mizukami 1994) を利用して, 非標準特異摂動システムにおける合成準最適制御問題を研究する. 提案された新たな合成制御則は標準, 非標準特異摂動システムの両方に適用できる. さらに, 合成制御則が slow レギュレータ問題の解を利用することによって得られることを示す. ここで, slow system はディスクリプタシステムの特別な場合であるので, 非標準特異摂動システムにおける最適レギュレータ問題の場合, ディスクリプタシステム (付録 3 参照) の線形レギュレータ問題と同様な設計手法を利用して, 合成制御則を求めることが可能である. 本章では, 標準, 非標準特異摂動システムのいずれの場合でも, 合成制御則を利用した評価関数の値が, 最適制御則を利用した評価関数の値と比較して, $O(\varepsilon^2)$ 程度の良好な近似を達成できることを示す. また, 新たに提案された合成制御則が, 従来から存在する標準特異摂動システムにおける合成制御則と等価であることを証明する. したがって, 新たに提案された合成制御則は, Kokotović ら (1986) が提案した合成制御則を完全に含んでいる.

2.2 非標準特異摂動システムにおける full–order レギュレータ問題

以下の線形時不変特異摂動システムを考える.

$$\dot{x}_1(t) = A_{11}x_1(t) + A_{12}x_2(t) + B_1u(t),\ x_1(0) = x_1^0 \tag{2.1a}$$

$$\varepsilon\dot{x}_2(t) = A_{21}x_1(t) + A_{22}x_2(t) + B_2u(t),\ x_2(0) = x_2^0 \tag{2.1b}$$

評価関数は (2.2) である.

$$J = \frac{1}{2}\int_0^\infty \{\begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix}^T Q \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} + u^T(t)Ru(t)\}dt \tag{2.2}$$

ここで,

$$Q = \begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{12} \\ Q_{12}^T & Q_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_1^TC_1 & C_1^TC_2 \\ C_2^TC_1 & C_2^TC_2 \end{bmatrix},\ R > 0 \tag{2.3}$$

である．また，$u(t) \in \mathbf{R}^m$は制御入力，$x_i(t) \in \mathbf{R}^{n_i}(i=1,2)$は状態ベクトルをあらわす．$\varepsilon$は十分小さな正のパラメータである．又，各係数行列は適当な次元をもつ．ここで，システム (2.1) において，A_{22}が特異である．つまり，A_{22}^{-1}が存在しないシステムを一般に非標準特異摂動システムと呼ぶ．

従来から存在する Kokotović ら (1986) の設計方法と異なり，係数行列 A_{22}が非特異行列であると限らないので，ここでは，一般化 Hamilton–Jacobi 方程式 (Xu and Mizukami 1993) を利用した full–order system における最適フィードバック制御則を導出する．制御則を導出する前に，この節では，一時的な仮定を設ける．つまり，評価関数 (2.2) における終端時間を無限から，有限かつ固定されていると仮定する．

全次元の最適レギュレータ問題に対して，一般化 Hamilton–Jacobi 方程式 (Xu and Mizukami 1993) を利用するために，以下の評価関数を新たに定義する．

$$\mathcal{V}^*(E_\varepsilon y(t), t) = \frac{1}{2} y^T(t) E_\varepsilon P(t) y(t)$$

ここで $y(t) = [x_1^T(t) \;\; x_2^T(t)]^T$である．また，

$$E_\varepsilon = \begin{bmatrix} I_{n_1} & 0 \\ 0 & \varepsilon I_{n_2} \end{bmatrix}$$

は対称行列である．ただし，$I_{n_1} \in \mathbf{R}^{n_1}$, $I_{n_2} \in \mathbf{R}^{n_2}$は単位行列である．最後に，$P(t) \in \mathbf{R}^{n_1 \times n_2}$は

$$E_\varepsilon P(t) = P^T(t) E_\varepsilon$$

を満たす時変行列である．このとき，一般化 Hamilton–Jacobi 方程式は

$$\frac{\partial \mathcal{V}^*}{\partial t} = -\min_{u(t)} \{L(y(t), u(t), t) + \mathcal{W}^*(y(t)) f(y(t), u(t), t)\} \tag{2.4a}$$

$$\{\frac{\partial \mathcal{V}^*}{\partial y}\}^T = \mathcal{W}^*(y(t)) E_\varepsilon \tag{2.4b}$$

である．ここで，

$$L(y(t), u(t), t) = \frac{1}{2}\{y^T(t) Q y(t) + u^T(t) R u(t)\} \tag{2.5a}$$

$$f(y(t), u(t), t) = Ay(t) + Bu(t) \tag{2.5b}$$

$$\mathcal{W}^*(y(t), t) = y^T(t) P^T(t) \tag{2.5c}$$

ただし，

$$A = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix},\ B = \begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \end{bmatrix} \tag{2.6}$$

である．以上から，一般化 Hamilton–Jacobi 方程式を利用して (2.7) が得られる．

$$
\begin{aligned}
y^T(t)E_\varepsilon \dot{P} y(t) \;\; = \;\; & -\min_{u(t)}[y^T(t)Qy(t) + u^T(t)Ru(t) \\
& +2y^T(t)P^T\{Ay(t) + Bu(t)\}]
\end{aligned} \tag{2.7}
$$

(2.7) の右辺を $u(t)$ について最小化を行えば，(2.8) が得られる．

$$
u^*(t) = -R^{-1}B^TP(t)y(t) \tag{2.8}
$$

(2.8) を (2.7) に代入して，関係式 (2.9) を利用すれば

$$
2y^T(t)P^TAy(t) = y^T(t)(P^TA + A^TP)y(t) \tag{2.9}
$$

(2.10) が得られる．

$$
y^T(t)E_\varepsilon \dot{P} y(t) = -y^T(t)[Q + A^TP + P^TA - P^TBR^{-1}B^TP]y(t) \tag{2.10}
$$

(2.10) はすべての $y(t)$ に対して成立する．したがって，以下の (2.11) で与えられる一般化リカッチ微分方程式が得られる．

$$
E_\varepsilon \dot{P} = -Q - A^TP - P^TA + P^TBR^{-1}B^TP \tag{2.11a}
$$

$$
E_\varepsilon P = P^TE_\varepsilon \tag{2.11b}
$$

いま，評価関数 (2.2) の終端時間は本来無限であることに注意すれば，一般化リカッチ微分方程式 (2.11) の境界条件は省略される．以上から，一般化リカッチ微分方程式 (2.11) の時間に対しての極限をとれば，以下の一般化リカッチ代数方程式 (2.12) が得られる．

$$
A^TP + P^TA - P^TBR^{-1}B^TP + Q = 0 \tag{2.12a}
$$

$$
E_\varepsilon P = P^TE_\varepsilon \tag{2.12b}
$$

さらに，(2.12b) から Pは (2.13) の形をもつことがわかる．

$$
P = \begin{bmatrix} P_{11} & \varepsilon P_{21}^T \\ P_{21} & P_{22} \end{bmatrix},\ P_{11} = P_{11}^T,\ P_{22} = P_{22}^T \tag{2.13}
$$

ここで，Pは対称行列でないことに注意を要する．しかし，$E_\varepsilon P$ は対称行列である．先の議論から，以下の補題を得ることができる．

補題 2.1 以下の性質をもつ十分小さなε^*があると仮定する．すなわち，$\varepsilon \in (0, \varepsilon^*)$ を満たすすべてのεで一般化リカッチ方程式 (2.12) が $E_\varepsilon P \geq 0$ となるような唯一の解 Pが存在するとき，

$$u^*(t) = -R^{-1}B^T P y(t) \tag{2.14}$$

は, full-order レギュレータ問題において, 最適制御則を構成する. さらに, 最適な評価関数の値は

$$J^* = \frac{1}{2} y^T(0) E_\varepsilon P y(0) \tag{2.15}$$

である.

注意 2.1 $\varepsilon \in (0, \varepsilon^*)$ における唯一解 Pの存在条件は 2.4 節で議論する.

2.3 full–order レギュレータ問題の分解

標準特異摂動システムの場合と同様に, full–order レギュレータ問題を 2 つの低次元化された subsystem のレギュレータ問題に分解する.

2.3.1 slow レギュレータ問題

以下の低次元化された slow system

$$E\dot{y}_s = Ay_s + Bu_s,\ Ey_s(0) = Ey_0 \tag{2.16}$$

について, 評価関数

$$J_s = \frac{1}{2}\int_0^\infty (\begin{bmatrix} x_{1s} \\ x_{2s} \end{bmatrix}^T Q \begin{bmatrix} x_{1s} \\ x_{2s} \end{bmatrix} + u_s^T R u_s)dt \tag{2.17}$$

を最小化する最適制御則 u_sを求める. ここで, $y_s(t) = [x_{1s}^T(t) \ \ x_{2s}^T(t)]^T$, $E = E_\varepsilon|_{\varepsilon=0}$ である. また, A, B および Q は, それぞれ (2.6), (2.3) で定義された行列である.

注意 2.2 (2.16) で与えられる slow system は, full–order system において$\varepsilon = 0$ としたシステムと等価である. すなわち, fast mode を無視することによって構成されている.

full–order system を (2.6) の係数行列 A_{22}の逆行列を利用して, 2 つの低次元化された subsystem に分解する従来の解析法 (特異摂動法)(Kokotović *et al.* 1986) と異なり, この章で扱われている非標準特異摂動システムの場合, A_{22}の逆行列は存在しないので, A_{22}の逆行列を利用して (2.16), (2.17) の x_{2s}を消去することはできない. しかし, (2.16) で与えられる slow system は, もし, A_{22}が特異行列ならば, インパルス現象を表すディスクリプタシステムと考えることができる. したがって, ディスクリプタシステムに利用されている手法は, 標準, 非標準特異摂動システムの両方の研究に利用できる.

2.3.2 fast レギュレータ問題

以下の$\varepsilon\tau = t$によって変換された fast system

$$\varepsilon \dot{x}_{2f} = A_{22}x_{2f} + B_2 u_f,\ x_{2f}(0) = x_2(0) - x_{2s}(0) \tag{2.18}$$

について, 評価関数

$$J_f = \frac{1}{2}\int_0^\infty (x_{2f}^T C_2^T C_2 x_{2f} + u_f^T R u_f)dt \tag{2.19}$$

を最小化する最適制御則u_fを求める. ここで, $x_{2f} = x_2 - x_{2s}$, $u_f = u - u_s$である.

注意 2.3 ここで考えている fast system は, 時間的に状態変化が激しい, すなわち, 過渡状態におけるシステムを表現している. したがって, (2.18) で与えられる fast system は, $\dot{x}_1 = 0$, すなわちx_1は定数と仮定している. 以上から, x_1を考慮することなく独立に設計できる.

注意 2.4 注意 2.2, 及び注意 2.3 から, full-order system の状態は$x_1(t) \approx x_{1s}(t)$, $x_2(t) \approx x_{2s}(t) + x_{2f}(t)$ と近似できる. これは, x_{2f}が定状状態となる時刻t_fとして,

表 2.1 状態変数 x_1, x_2

Tab.2.1. State vectors x_1 and x_2

State vector	fast system ($0 \le t \le t_f$)	slow system ($t_f \le t$)
$x_1(t)$	$x_1(0)$	$x_{1s}(t)$
$x_2(t)$	$x_{2f}(t)$	$x_{2s}(t) + x_{2f}(t)$

と表現できるためである. したがって, full-order system を扱う代わりに, 分解 (低次元化) された 2 つの sub system である slow system, fast system について解析している.

次に, 以下の仮定の条件もとで, slow レギュレータ問題, fsat レギュレータ問題の解を求める.

仮定 2.1 slow system (2.16) は可安定かつ可検出である. (付録2 参照) すなわち, $\mathrm{Re}[s] \ge 0$ を満足するすべての s において,

$$\mathrm{rank}\begin{bmatrix} sI_n - A_{11} & -A_{12} & B_1 \\ -A_{21} & -A_{22} & B_2 \end{bmatrix} = n + m,\quad \mathrm{Re}[s] \ge 0,\quad \forall s \tag{2.20a}$$

$$\mathrm{rank}\begin{bmatrix} sI_n - A_{11}^T & -A_{21}^T & C_1^T \\ -A_{12}^T & -A_{22}^T & C_2^T \end{bmatrix} = n + m,\quad \mathrm{Re}[s] \ge 0,\quad \forall s \tag{2.20b}$$

である. ただし, $\mathrm{Re}[\cdot]$ は $[\cdot]$ の実数部分を表す. 以下も同様に定義される.

仮定 2.2 fast system (2.18) は可安定かつ可検出である.

まず, fast レギュレータ問題の解を求める.

命題 2.1 仮定 2.2 が成立するならば, 以下の最適フィードバック制御則 (2.21) は, 評価関数 (2.19) を最小化する.

$$u_f^* = -R^{-1}B_{22}P_{22f}^+x_{2f} \tag{2.21}$$

ここで P_{22f}^+は, リカッチ方程式 (2.22) の準正定対称である安定化解である.

$$P_{22f}A_{22} + A_{22}^TP_{22f} - P_{22f}B_2R^{-1}B_2^TP_{22f} + Q_{22} = 0 \tag{2.22}$$

注意 2.5 仮定 2.2 は一般的なディスクリプタシステムにおいて必要以上に強い仮定である. もし, 一般的なディスクリプタシステムならば, 仮定 2.2 の代わりに, fast system(2.18) はインパルス可制御, 可観測つまり,

$$\mathrm{rank}[A_{22} \quad B_2] = m, \ \mathrm{rank}[A_{22}^T \quad C_2^T] = m \tag{2.23}$$

であることを仮定するだけで良い. これは, 明らかに条件 (2.23) が仮定 2.2 を含んでいることを示している.

続いて, slow レギュレータ問題の解を求める. Kokotović ら (1976) と異なり, 係数行列 A_{22}は非特異行列でないので, 従来の A_{22}^{-1}を利用して, slow system の最適レギュレータ問題を解くことができない. そこで, A_{22}^{-1}が存在しない slow system は, ディスクリプタシステムの特別な場合と考えることができるので, ディスクリプタシステム (付録 3 参照) の線形レギュレータ問題と同様にして制御則を求める.

まず, 最適レギュレータ問題の解を求める前に, 一般化リカッチ方程式 (2.24) (Wang *et al.* 1993, Xu and Mizukami 1994) について説明を与える.

$$A^TP_s + P_s^TA - P_s^TBR^{-1}B^TP_s + Q = 0 \tag{2.24a}$$

$$E^TP_s = P_s^TE \tag{2.24b}$$

ここで, Q は (2.3) で定義されたものと同一である. また, 一般化リカッチ方程式 (2.24) の解 P_sは, (2.24b) から以下の (2.25) の形をもつ.

$$P_s = \begin{bmatrix} P_{11s} & 0 \\ P_{21s} & P_{22s} \end{bmatrix}, \ P_{11s}^T = P_{11s} \tag{2.25}$$

いま, P_{22s}は対称解でないことに注意する必要がある. 一般化リカッチ方程式 (2.24) に (2.25) の P_sを代入して, ブロックごとに分割計算すれば (2.26) を得る.

$$\begin{aligned} &P_{11s}A_{11} + P_{21s}^TA_{21} + A_{11}^TP_{11s} + A_{21}^TP_{21s} - P_{11s}S_{11}P_{11s} \\ &\quad -P_{21s}^TS_{12}^TP_{11s} - P_{11s}S_{12}P_{21s} - P_{21s}^TS_{22}P_{21s} + Q_{11} = 0 \end{aligned} \tag{2.26a}$$

$$P_{22s}^T A_{21} + A_{12}^T P_{11s} + A_{22}^T P_{21s} \\ - P_{22s}^T S_{12}^T P_{11s} - P_{22s}^T S_{22} P_{21s} + Q_{12}^T = 0 \tag{2.26b}$$

$$P_{22s}^T A_{22} + A_{22}^T P_{22s} - P_{22s}^T S_{22} P_{22s} + Q_{22} = 0 \tag{2.26c}$$

ここで

$$\begin{aligned} S_{11} &= B_1 R^{-1} B_1^T \\ S_{12} &= B_1 R^{-1} B_2^T \\ S_{22} &= B_2 R^{-1} B_2^T \end{aligned}$$

である.

仮定 2.2 の条件のもとでは, リカッチ方程式 (2.26c) は準正定対称である安定化解 P_{22s} をもつ. さらに, 安定化解の条件から $A_{22} - S_{22}P_{22s}$は非特異行列である. (2.26c) の解 P_{22s} を (2.26b) に代入すれば (2.27) を得る.

$$P_{21s} = -N_{2s}^T + N_{1s}^T P_{11s} \tag{2.27}$$

ここで

$$N_{2s}^T = \hat{A}_{22s}^{-T} \hat{Q}_{12s}^T, \ \ N_{1s}^T = -\hat{A}_{22s}^{-T} \hat{A}_{12s}^T$$

$$\hat{A}_{12s} = A_{12} - S_{12} P_{22s}, \ \ \hat{A}_{22s} = A_{22} - S_{22} P_{22s}$$

$$\hat{Q}_{12s} = Q_{12} + A_{21}^T P_{22s}$$

である. P_{21s}を (2.26a) に代入して代数計算を行えば (2.28) を得る.

$$P_{11s} A_s + A_s^T P_{11s} - P_{11s} S_s P_{11s} + Q_s = 0 \tag{2.28}$$

ここで

$$A_s = A_{11} + N_{1s} A_{21} + S_{12} N_{2s}^T + N_{1s} S_{22} N_{2s}^T \tag{2.29a}$$

$$S_s = S_{11} + N_{1s} S_{12}^T + S_{12} N_{1s}^T + N_{1s} S_{22} N_{1s}^T \tag{2.29b}$$

$$Q_s = Q_{11} - N_{2s} A_{21} - A_{21}^T N_{2s}^T - N_{2s} S_{22} N_{2s}^T \tag{2.29c}$$

である.

補題 2.2 仮定 2.1, 2.2 の条件のもとで以下の結果が成立する.

(i) リカッチ方程式 (2.28) はリカッチ方程式 (2.26c) と独立である．すなわち，リカッチ方程式 (2.26c) の解 P_{22s} に依存しない．

(ii) $S_s = B_s R^{-1} B_s^T$, $Q_s = C_s^T C_s$を満足するような $n \times r$次元である行列 B_s, 及び C_1と同一次元である行列 C_sが存在する．すなわち，2 つの行列対 (A_s, B_s), (A_s, C_s) は可安定かつ可検出である．

(補題 2.2 の証明)　まず，(i) について証明を与える．以下の 4 つの行列を定義する．

$$T_1 = \begin{bmatrix} A_{11} & -S_{11} \\ -Q_{11} & -A_{11}^T \end{bmatrix},\ T_2 = \begin{bmatrix} A_{12} & -S_{12} \\ -Q_{12} & -A_{21}^T \end{bmatrix} \tag{2.30a}$$

$$T_3 = \begin{bmatrix} A_{21} & -S_{12}^T \\ -Q_{12}^T & -A_{12}^T \end{bmatrix},\ T_4 = \begin{bmatrix} A_{22} & -S_{22} \\ -Q_{22} & -A_{22}^T \end{bmatrix} \tag{2.30b}$$

ここで，行列 T_4はハミルトン行列である．さらにT_4は，少なくとも仮定 2.2 の条件のもとで準正定対称かつ安定化解である P_{22s}^+を解にもつリカッチ方程式 (2.26c) または (2.22) に関係している．また，リカッチ方程式 (2.26c) の任意の解を P_{22s} とおく．このとき，

$$\begin{bmatrix} A_{22} & -S_{22} \\ -Q_{22} & -A_{22}^T \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I & 0 \\ P_{22s} & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{A}_{22s} & -S_{22} \\ 0 & -\hat{A}_{22s}^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I & 0 \\ -P_{22s} & I \end{bmatrix} \tag{2.31}$$

が成立する．ここで，$\hat{A}_{22s}$は (2.27) で定義されたものである．T_4は非特異行列であるので，$\hat{A}_{22s}$も非特異行列である．これは，T_4^{-1}が$\hat{A}_{22s}^{-1}$の項で陽に表現できることを意味する．さらに，リカッチ方程式 (2.28) はハミルトン行列 H_s に関係している．ここで，

$$H_s = \begin{bmatrix} A_s & -S_s \\ -Q_s & -A_s^T \end{bmatrix} \tag{2.32}$$

である．したがって，i. の証明の残りは $H_s = T_1 - T_2 T_4^{-1} T_3$ を示せば良い．実際に $T_1 - T_2 T_4^{-1} T_3$を計算すれば，

$$\begin{aligned}
& T_1 - T_2 T_4^{-1} T_3 \\
= & \begin{bmatrix} A_{11} & -S_{11} \\ -Q_{11} & -A_{11}^T \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} A_{12} & -S_{12} \\ -Q_{12} & -A_{21}^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_{22} & -S_{22} \\ -Q_{22} & -A_{22}^T \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} A_{21} & -S_{12}^T \\ -Q_{12}^T & -A_{12}^T \end{bmatrix} \\
= & \begin{bmatrix} A_{11} & -S_{11} \\ -Q_{11} & -A_{11}^T \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} A_{12} & -S_{12} \\ -Q_{12} & -A_{21}^T \end{bmatrix} \\
& \cdot \begin{bmatrix} I & 0 \\ P_{22s} & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{A}_{22s}^{-1} & -\hat{A}_{22s}^{-1} S_{22} \hat{A}_{22}^{-T} \\ 0 & -\hat{A}_{22s}^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I & 0 \\ -P_{22s} & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_{21} & -S_{12}^T \\ -Q_{12}^T & -A_{12}^T \end{bmatrix} \\
= & \begin{bmatrix} A_s & -S_s \\ -Q_s & -A_s^T \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

となるので，$H_s = T_1 - T_2 T_4^{-1} T_3$が成立する．

続いて, (ii) について証明を行う. (ii) の前半は, (2.29b) から $B_s = B_1 + N_{1s}B_2$が得られる. しかしながら, (2.29c) から C_sを表現することは困難である. これを克服するために, リカッチ方程式 (2.26c) に対して, 相対の関係にある補助的なリカッチ方程式を導入する. つまり,

$$A_{22}K_{22s} + K_{22s}A_{22}^T - K_{22s}Q_{22}K_{22s} + S_{22} = 0, \tag{2.33}$$

が, 仮定 2.2 の条件のもとで少なくとも 1 つの準正定対称解 K_{22s}^+をもつとする. (2.31) と同様にして

$$\begin{bmatrix} A_{22} & -S_{22} \\ -Q_{22} & -A_{22}^T \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I & -K_{22s} \\ 0 & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{A}_{22s} & 0 \\ -Q_{22} & -\tilde{A}_{22s}^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I & K_{22s} \\ 0 & I \end{bmatrix} \tag{2.34}$$

を得る. ここで, $\tilde{A}_{22s} = A_{22}^T - Q_{22}K_{22s}$ は, T_4が非特異行列であるから非特異行列である. $T_1 - T_2T_4^{-1}T_3$を新たに計算した後, A_s, S_s及び Q_sは, 以下のように表現できる.

$$Q_s = Q_{11} + Q_{12}M_{2s}^T + M_{2s}Q_{12}^T + M_{2s}Q_{22}M_{2s}^T \tag{2.35a}$$

$$A_s = A_{11} + M_{2s}Q_{12}^T + A_{12}M_{1s}^T + M_{2s}Q_{22}M_{1s}^T \tag{2.35b}$$

$$S_s = S_{11} - A_{12}M_{1s}^T - M_{1s}A_{12}^T - M_{1s}Q_{22}M_{1s}^T \tag{2.35c}$$

$$M_{2s} = \tilde{S}_{12s}\tilde{A}_{22s}^{-1}, \quad M_{1s} = -\tilde{A}_{21s}^T\tilde{A}_{22s}^{-1} \tag{2.35d}$$

$$\tilde{A}_{21s} = A_{21}^T - Q_{12}K_{22s}, \quad \tilde{A}_{22s} = A_{22}^T - Q_{22}K_{22s} \tag{2.35e}$$

$$\tilde{S}_{12s} = S_{12} + A_{12}^TW_{22s} \tag{2.35f}$$

したがって, (2.35a) から $C_s = C_1 + C_2M_{1s}^T$ となることが分かる. 次に, 後半の可安定性, 可検出性について考える.

$$\begin{aligned} &\begin{bmatrix} I_n & -\hat{A}_{12s}\hat{A}_{22s}^{-1} \\ 0 & -\hat{A}_{22s}^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} sI_n - A_{11} & -A_{12} & B_1 \\ -A_{21} & -A_{22} & B_2 \end{bmatrix} \\ &\cdot \begin{bmatrix} I_n & 0 & 0 \\ -\hat{A}_{22s}^{-1}A_{21} & I_m & \hat{A}_{22s}^{-1}B_2 \\ -B_2^TP_{22s}\hat{A}_{22s}^{-1}A_{21} & B_2^TP_{22s} & I_r + B_2^TP_{22s}\hat{A}_{22s}^{-1}B_2 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} sI_n - (A_{11} + N_{1s}A_{21}) & 0 & B_s \\ 0 & I_m & 0 \end{bmatrix} \end{aligned} \tag{2.36}$$

という関係式に注意する. したがって,

$$\operatorname{rank} \begin{bmatrix} sI_n - A_{11} & -A_{12} & B_1 \\ -A_{21} & -A_{22} & B_2 \end{bmatrix} = n + m, \quad \mathrm{Re}[s] \geq 0, \quad \forall s \tag{2.37}$$

であることは, $\mathrm{rank}[sI_n-(A_{11}+N_{1s}A_{21})\ \ B_s]=n$, $\mathrm{Re}[s]\geq 0$, $\forall s$ と等価である. 言い換えれば, 行列対 $(A_{11}+N_{1s}A_{21}, B_s)$ は可安定である. ここで, $A_s=A_{11}+N_{1s}A_{21}+B_sR^{-1}B_2^TN_{2s}^T$ であり, フィードバック $R^{-1}B_2^TN_{2s}^T$ は $(A_{11}+N_1A_{21}, B_s)$ の可安定性を保存するので, 行列対 (A_s, B_s) も可安定であると結論できる. 同様にして,

$$
\begin{bmatrix} I_n & -\tilde{A}_{21}^T\tilde{A}_{22s}^{-1} \\ 0 & -\tilde{A}_{22s}^{-1} \end{bmatrix}
\begin{bmatrix} sI_n-A_{11}^T & -A_{21}^T & C_1^T \\ -A_{12}^T & -A_{22}^T & C_2^T \end{bmatrix}
$$

$$
\cdot\begin{bmatrix} I_n & 0 & 0 \\ -\tilde{A}_{22s}^{-1}A_{12}^T & I_m & \tilde{A}_{22s}^{-1}C_2^T \\ -C_2K_{22s}\tilde{A}_{22s}^{-1}A_{12}^T & C_2K_{22s} & I_r+C_2K_{22s}\tilde{A}_{22s}^{-1}C_2^T \end{bmatrix}
$$

$$
=\begin{bmatrix} sI_n-(A_{11}^T+M_{1s}A_{12}^T) & 0 & C_s^T \\ 0 & I_m & 0 \end{bmatrix} \tag{2.38}
$$

の関係式から,

$$
\mathrm{rank}\begin{bmatrix} sI_n-A_{11}^T & -A_{21}^T & C_1^T \\ -A_{12}^T & -A_{22}^T & C_2^T \end{bmatrix}=n+m,\quad \mathrm{Re}[s]\geq 0,\quad \forall s \tag{2.39}
$$

であることは, $\mathrm{rank}[sI_n-(A_{11}^T+M_{1s}A_{12}^T)\ \ C_s^T]=n$, $\mathrm{Re}[s]\geq 0$, $\forall s$ と等価である. 言い換えれば, 行列対 $(A_{11}^T+M_{1s}A_{12}^T, C_s^T)$ は可検出である. ここで, $A_s=A_{11}+A_{12}M_{1s}^T+M_{2s}C_2^TC_s$ であり, 行列 $M_{2s}C_2^T$ は $(A_{11}^T+M_1A_{12}^T, C_s^T)$ の可検出性を保存するので, 行列対 (A_s, C_s) も可検出であると結論できる. したがって, 行列対 (A_s, C_s) が可検出であることが証明される.

以上から補題 2.2 の証明が完了する. □

2 つの行列対 (A_s, B_s), (A_s, C_s) は可安定かつ可検出であるので, リカッチ方程式 (2.28) は唯一の準正定対称である安定化解をもつ. すなわち, $A_s-S_sP_{11s}^+$ が安定行列となる解 P_{11s}^+をもつ. そこで以下の命題 2.2 が成立する.

命題 2.2 仮定 2.1, 2.2 が成立するとする. また, (2.40) で与えられる線形フィードバック制御則のクラスが slow system に実装されたとする. このとき, 最適フィードバック制御則 (2.40) は, slow レギュレータ問題の唯一の解となる.

$$
u_s^*=-R^{-1}B^TP_sy_s \tag{2.40}
$$

ここで,

$$
P_s=\begin{bmatrix} P_{11s}^+ & 0 \\ P_{21s} & P_{22s} \end{bmatrix} \tag{2.41}
$$

は一般化リカッチ方程式 (2.24) の解である.

(命題 2.2 の証明)　まず, (2.40) で与えられる線形フィードバックが, すべての初期値 Ey_0 に関して $t \to \infty$ で $x_{1s}(t) \to 0$, $x_{2s}(t) \to 0$ かつ $x_{1s}(t), x_{2s}(t)$ がともに impulse–free † であるとき, 真に安定なフィードバックであることを示す. (2.40) を (2.16) に代入すれば

$$\begin{bmatrix} I_n & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \dot{x}_{1s} \\ \dot{x}_{2s} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \hat{A}_{11s} & \hat{A}_{12s} \\ \hat{A}_{21s} & \hat{A}_{22s} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_{1s} \\ x_{2s} \end{bmatrix} \tag{2.42}$$

となる. ここで, $\hat{A}_{11s}$, $\hat{A}_{21s}$は方程式 (2.27) の条件のもと, 以下で定義された行列である.

$$\hat{A}_{11s} = A_{11} - S_{11}P_{11s}^{+} - S_{12}P_{21s}, \quad \hat{A}_{21s} = A_{21} - S_{21}P_{11s}^{+} - S_{22}P_{21s}$$

補題 2.2 の証明から$\hat{A}_{22s}$が非特異行列なので, (2.42) は標準の状態空間システムとして表現が可能となる. すなわち, (2.42) は以下の (2.43) で表現できる.

$$\dot{x}_{1s} = (\hat{A}_{11s} - \hat{A}_{12s}\hat{A}_{22s}^{-1}\hat{A}_{21s})x_{1s} \tag{2.43a}$$

$$x_{2s} = -\hat{A}_{22s}^{-1}\hat{A}_{21s}x_{1s} \tag{2.43b}$$

さらに, $\hat{A}_{22s}$が非特異行列なので, $x_{1s}(t)$, $x_{2s}(t)$ は impulse–free である. ここで, もし, システム (2.43a) の行列$\hat{A}_{11s} - \hat{A}_{12s}\hat{A}_{22s}^{-1}\hat{A}_{21s}$が $A_s - S_sP_{11s}^{+}$に等しいことが示されれば, $t \to \infty$ で $x_{1s}(t) \to 0$, $x_{2s}(t) \to 0$ が結論できる. そこで, (2.27) を$\hat{A}_{11s} - \hat{A}_{12s}\hat{A}_{22s}^{-1}\hat{A}_{21s}$に代入して計算を行えば,

$$\begin{aligned}
&\hat{A}_{11s} - \hat{A}_{12s}\hat{A}_{22s}^{-1}\hat{A}_{21s} \\
=\;& A_{11} - S_{11}P_{11s}^{+} - S_{12}(N_{1s}^TP_{11s}^{+} - N_{2s}^T) \\
&\quad +N_{1s}[A_{21} - S_{21}P_{11s}^{+} - S_{22}(N_{1s}^TP_{11s}^{+} - N_{2s}^T)] \\
=\;& A_{11} + N_{1s}A_{21} + S_{12}N_{2s}^T + N_{1s}S_{22}N_{2s}^T \\
&\quad -(S_{11} + N_{1s}S_{12}^T + S_{12}N_{1s}^T + N_{1s}S_{22}N_{1s}^T)P_{11s}^{+} \\
=\;& A_s - S_sP_{11s}^{+}
\end{aligned} \tag{2.44}$$

となる. したがって, (2.40) は真に安定なフィードバックである.

続いて, 命題 2.1 の記述から, P_sが一般化リカッチ方程式 (2.24) の解であることが分かる.

最後に, (2.40) が, 実際の最適制御則であることを証明する. この証明は, 平方完成の手法を利用することによって証明できる. システム (2.16) 及び評価関数 (2.17) において, 一般化リカッチ方程式 (2.24) を利用すれば

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2}y_s^T(T)E^TP_sy_s(T) - \frac{1}{2}y_0^TE^TP_sy_0 \\
=\;& \frac{1}{2}\int_0^T \frac{d}{dt}[y_s^TE^TP_sy_s]dt
\end{aligned}$$

†インパルスを含まない, なめらかな軌道状態.

$$
\begin{aligned}
&= \frac{1}{2}\int_0^T y_s^T[-A^TP_s - P_s^TA + P_s^TBR^{-1}B^TP_s - Q]y_s dt \\
&\quad +\frac{1}{2}\int_0^T [\dot{y}_s^TE^TP_sy_s + y_s^TP_s^TE\dot{y}_s]dt
\end{aligned} \tag{2.45}
$$

ここで $E\dot{y}_s(t)$ を (2.45) に代入すれば

$$
\begin{aligned}
&\frac{1}{2}y_s^T(T)E^TP_sy_s(T) - \frac{1}{2}y_0^TE^TP_sy_0 \\
&= \frac{1}{2}\int_0^T [u_s^TB^TP_sy_s + y_s^TP_s^TBu_s - y_s^TQy_s + y_s^TP_s^TBR^{-1}B^TP_sy_s]dt
\end{aligned} \tag{2.46}
$$

(2.46) の左辺を右辺に移項して，足したものをまとめて $J_s(u_s;T)$ で定義する．

$$
\begin{aligned}
J_s(u_s;T) &= \frac{1}{2}y_0^TE^TP_sy_0 - \frac{1}{2}y_s^T(T)E^TP_sy_s(T) \\
&\quad +\frac{1}{2}\int_0^T \{[u_s + R^{-1}B^TP_sy_s]^TR[u_s + R^{-1}B^TP_sy_s]\}dt
\end{aligned} \tag{2.47}
$$

ここで，$T \to \infty$ とする．また，$t \to \infty$ では $y_s(t) \to 0$ であるので (2.47) は (2.48) になる．

$$
\begin{aligned}
J_s(u_s;\infty) &= \frac{1}{2}y_0^TE^TP_sy_0 \\
&\quad +\frac{1}{2}\int_0^\infty \{[u_s + R^{-1}B^TP_sy_s]^TR[u_s + R^{-1}B^TP_sy_s]\}dt
\end{aligned} \tag{2.48}
$$

(2.48) の右辺第 1 項は u_sに依存しない．また，E^TP_sは唯一である．(P_{11s}^+が唯一であるため．) 以上から，(2.40) によって与えられる u_s^*は最適制御則である． □

注意 2.6 命題 2.2 の結果は，通常のディスクリプタシステムにおける最適レギュレータ問題の結果から導出されている．ここでは，ディスクリプタシステム (Wang *et al.*1993, Xu and Mizukami 1994) における最適レギュレータ問題の相違点を挙げるにとどめて，証明は行わない．

注意 2.7 ディスクリプタシステムに類似して，slow レギュレータ問題の重要な性質は，最適制御則は唯一ではないことである．これは，リカッチ方程式 (2.26c) のある解が (2.40) の最適制御則に利用できることに注意すれば，容易に確認できる．しかし，$P_{11s}^+ \geq 0$ から $E^TP_s = P_s^TE \geq 0$ は唯一であるので，リカッチ方程式 (2.28) の準正定対称である安定化解は唯一である．したがって，(2.40) の最適制御則 u_s^*を利用することができる．

2.4 合成制御則の準最適性

この節では，標準特異摂動システム (Kokotović *et al.*1986) について，合成制御則 $u_c^* = u_s^* + u_f^*$を構築する．よく知られているように，slow レギュレータ問題の最適制御則は唯一

でない．しかし，fast レギュレータ問題の最適制御則は唯一である．したがって，合成制御則を構成するためには，slow レギュレータ問題において特殊な最適制御則を選択することになる．すなわち，本研究では，命題 2.2 で設計されたコントローラ

$$u_s^{*+} = -R^{-1}B^T P_s^+ y_s \tag{2.49}$$

を選択する．ここで

$$P_s^+ = \begin{bmatrix} P_{11s}^+ & 0 \\ P_{21s}^+ & P_{22s}^+ \end{bmatrix} \tag{2.50}$$

P_{22s}^+は，リカッチ方程式 (2.26c) の唯一の準正定対称かつ安定化解である．また，P_{21s}^+は，方程式 (2.27) によって計算される行列である．ここで，$P_{22s} = P_{22s}^+$, $P_{11s} = P_{11s}^+$である．いま，リカッチ方程式 (2.22) 及び (2.26c) を比較すれば，$P_{22s}^+ = P_{22f}^+$となる．その結果，

$$\begin{aligned} u_c^* &= u_s^{*+} + u_f^* \\ &= -R^{-1}[B_1^T \ \ B_2^T]\begin{bmatrix} P_{11s}^+ & 0 \\ P_{21s}^+ & P_{22s}^+ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_{1s} \\ x_{2s} \end{bmatrix} - R^{-1}B_2^T P_{22f}^+ x_{2f} \\ &= -R^{-1}[B_1^T \ \ B_2^T]\begin{bmatrix} P_{11s}^+ & 0 \\ P_{21s}^+ & P_{22s}^+ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \end{aligned} \tag{2.51}$$

を得る．ここで，$x_1(t) \approx x_{1s}(t)$, $x_2(t) \approx x_{2s}(t) + x_{2f}(t)$ と近似できる．

注意 2.8 (2.51) で与えられる合成制御則 u_c^*は，fast レギュレータ問題で得られた唯一の制御則 (2.21) つまり，u_f^*を利用しているので，最終的に唯一である．

注意 2.9 制御則 (2.49) 及び合成制御則 (2.51) を比較すれば，u_s^{*+}は，状態変数 y_sが u_c^*と異なる．これは，u_c^*が簡単なディスクリプタシステムにおける slow レギュレータ問題を解くことによって得られることを示している．(詳しい設計手順は 2.5 節で紹介する.) 言い換えれば，まず，リカッチ方程式 (2.26c) の解 P_{22s}^+を選択する．次に，(2.49) において，slow の状態変数である y_sを実現値 y に変化することによって合成制御則 u_c^*を得る．

ここでは，合成制御則 u_c^*を full–order system (2.1) に適用したときと，分割計算することなく直接一般化リカッチ方程式 (2.12) を解いて得られる最適制御則を full–order system (2.1) に適用したときの制御仕様を比較する．比較を行うために，まず，一般化リカッチ方程式 (2.12) の解の唯一性について研究する．この唯一性に関して以下の定理 2.1 を得ることができる．

定理 2.1 仮定 2.1, 2.2 が成立するとする．このとき，一般化リカッチ方程式 (2.12) について，$\varepsilon \in [0, \varepsilon^*)$ の範囲で $E_\varepsilon P \geq 0$ を満たす安定化解 Pをもつような十分小さな正のパラメータε^*が存在する．さらに，Pは$\varepsilon = 0$ で以下のマクローリン展開 (2.52) をもつ．

$$P = \begin{bmatrix} P_{11}^{(0)} & \varepsilon P_{21}^{(0)T} \\ P_{21}^{(0)} & P_{22}^{(0)} \end{bmatrix} + \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\varepsilon^i}{i!} \begin{bmatrix} P_{11}^{(i)} & \varepsilon P_{21}^{(i)T} \\ P_{21}^{(i)} & P_{22}^{(i)} \end{bmatrix} \tag{2.52}$$

定理 2.1 の証明を与える前に, 陰関数定理について説明を与える.

補題 2.3 (陰関数定理) (Dieudonné 1982, 杉浦 1985) ある領域 $D \subset R^m$ において連続微分可能な関数

$$f_\mu = f_\mu(x_1, x_2, \cdots, x_m), \mu = 1, 2, \cdots, m \tag{2.53}$$

が与えられたとして

$$J(x_1, x_2, \cdots, x_m) = \frac{\partial(f_1, f_2, \cdots, f_m)}{\partial(x_1, x_2, \cdots, x_m)} \tag{2.54}$$

とおく.

点 $(x_1^0, x_2^0, \cdots, x_m^0) \in D$ においてヤコビ行列 $J(x_1^0, x_2^0, \cdots, x_m^0) \neq 0$ とする. また, $u_\mu^0 = f_\mu^0(x_1^0, x_2^0, \cdots, x_m^0)$ とおく.

このとき, 十分小さな $\bar{\varepsilon} > 0$ に対して $|f_\mu - f_\mu^0| < \bar{\varepsilon}, \mu = 1, 2, \cdots, m$ なる条件の下で連立方程式

$$f_\mu(x_1, x_2, \cdots, x_m) = u_\mu^0, \mu = 1, 2, \cdots, m \tag{2.55}$$

はただ 1 組の解 $x_\mu, \mu = 1, 2, \cdots, m$ をもつ.

(定理 2.1 の証明) リカッチ方程式 (2.12a) を分割計算する.

$$\begin{aligned} &A_{11}^T P_{11} + P_{11} A_{11} + A_{21}^T P_{21} + P_{21}^T A_{21} - P_{11} S_{11} P_{11} \\ &\quad - P_{21}^T S_{22} P_{21} - P_{11} S_{12} P_{21} - P_{21}^T S_{12}^T P_{11} + Q_{11} = 0 \end{aligned} \tag{2.56a}$$

$$\begin{aligned} &\varepsilon P_{21} A_{11} + P_{22} A_{21} + A_{12}^T P_{11} + A_{22}^T P_{21} - \varepsilon P_{21} S_{11} P_{11} \\ &\quad - \varepsilon P_{21} S_{12}^T P_{21} - P_{22} S_{12}^T P_{11} - P_{22} S_{22} P_{21} + Q_{12}^T = 0 \end{aligned} \tag{2.56b}$$

$$\begin{aligned} &A_{22}^T P_{22} + P_{22} A_{22} + \varepsilon A_{12}^T P_{21}^T + \varepsilon P_{21} A_{12} - P_{22} S_{22} P_{22} \\ &\quad - \varepsilon P_{22} S_{12}^T P_{21}^T - \varepsilon P_{21} S_{12} P_{22} - \varepsilon^2 P_{21} S_{11}^T P_{21}^T + Q_{22} = 0 \end{aligned} \tag{2.56c}$$

方程式 (2.56) で $\varepsilon = 0$ とおけば, 0–オーダ方程式 (2.57) が得られる.

$$\begin{aligned} &P_{11}^{(0)} A_{11} + P_{21}^{(0)T} A_{21} + A_{11}^T P_{11}^{(0)} + A_{21}^T P_{21}^{(0)} - P_{11}^{(0)} S_{11} P_{11}^{(0)} \\ &\quad - P_{21}^{(0)T} S_{12}^T P_{11}^{(0)} - P_{11}^{(0)} S_{12} P_{21}^{(0)} - P_{21}^{(0)T} S_{22} P_{21}^{(0)} + Q_{11} = 0 \end{aligned} \tag{2.57a}$$

$$P_{22}^{(0)}A_{21} + A_{12}^T P_{11}^{(0)} + A_{22}^T P_{21}^{(0)}$$
$$-P_{22}^{(0)} S_{12}^T P_{11}^{(0)} - P_{22}^{(0)} S_{22} P_{21}^{(0)} + Q_{12}^T = 0 \tag{2.57b}$$

$$P_{22}^{(0)}A_{22} + A_{22}^T P_{22}^{(0)} - P_{22}^{(0)} S_{22} P_{22}^{(0)} + Q_{22} = 0 \tag{2.57c}$$

0–オーダ方程式 (2.57) は，リカッチ方程式 (2.26c) の解 $P_{22}^{(0)}$を除いて等価である．ただし，$P_{22}^{(0)}$は対称である必要はない．したがって，仮定 2.1, 2.2 の条件のもとでは，0–オーダ方程式 (2.57) は，解 $P_{11}^{(0)} = P_{11s}^+$, $P_{22}^{(0)} = P_{22s}^+$, $P_{21}^{(0)} = P_{21s}^+$をもつ．さらに，方程式 (2.56) において，$\varepsilon = 0$ の近傍で，陰関数定理 (Dieudonné 1982, 杉浦 1985) を適用すれば以下のヤコビ行列 (2.58) を得る．

$$J_{acobi} = \begin{bmatrix} J_{11} & J_{12} & J_{13} \\ J_{21} & J_{22} & J_{23} \\ J_{31} & J_{32} & J_{33} \end{bmatrix} \tag{2.58}$$

クロネッカ積を利用して，(2.56c) から

$$J_{31} = 0,\ J_{32} = 0,\ J_{33} = I_m \otimes (A_{22} - S_{22}P_{22}^{(0)}) + (A_{22} - S_{22}P_{22}^{(0)})^T \otimes I_m \tag{2.59}$$

また，(2.56b) から

$$J_{22} = (A_{22} - S_{22}P_{22}^{(0)})^T \otimes I_n, \tag{2.60}$$

となる．さらに，(2.56b) から

$$P_{21} = -N_2^T + N_1^T P_{11} + O(\varepsilon), \tag{2.61}$$

となる．ここで，

$$N_2^T = \hat{A}_{22}^{-T}\hat{Q}_{12}^T,\quad N_1^T = -\hat{A}_{22}^{-T}\hat{A}_{12}^T$$

$$\hat{A}_{12} = A_{12} - S_{12}P_{22},\ \hat{A}_{22} = A_{22} - S_{22}P_{22}$$

$$\hat{Q}_{12} = Q_{12} + A_{21}^T P_{22}$$

(2.61) を (2.56a) に代入して代数計算する．このとき，リカッチ方程式 (2.56a) の解 P_{11}に関して，$\varepsilon = 0$ の近傍で，ヤコビ行列の J_{11}成分は (2.62) になる．

$$\begin{aligned} J_{11} \ &= \ I_n \otimes [A_{11} + N_{1s}A_{21} + S_{12}N_{2s}^T + N_{1s}S_{22}N_{2s}^T \\ &\qquad -(S_{11} + N_{1s}S_{12}^T + S_{12}N_{1s}^T + N_{1s}S_{22}N_{1s}^T)P_{11s}^+] \\ &\qquad +[A_{11} + N_{1s}A_{21} + S_{12}N_{2s}^T + N_{1s}S_{22}N_{2s}^T \\ &\qquad -(S_{11} + N_{1s}S_{12}^T + S_{12}N_{1s}^T + N_{1s}S_{22}N_{1s}^T)P_{11s}^+]^T \otimes I_n \\ &= \ I_n \otimes (A_s - S_sP_{11s}^+) + (A_s - S_sP_{11s}^+)^T \otimes I_n \end{aligned} \tag{2.62}$$

ここで, $P_{11}^{(0)}=P_{11s}^{+}$, $P_{22}^{(0)}=P_{22s}^{+}$, $P_{21}^{(0)}=P_{21s}^{+}$である.

ヤコビ行列の J_{13}, J_{21}, J_{23}成分は J_{acobi}の非特異性には関係しないので, J_{11}, J_{22}, J_{33}について考える. $(A_{22}-S_{22}P_{22s}^{+})$, $(A_s-S_sP_{11s}^{+})$ は安定行列であるから, J_{11}, J_{22}, J_{33}は非特異行列である. したがって,

$$J_{acobi}=\begin{bmatrix} J_{11} & 0 & J_{13} \\ J_{21} & J_{22} & J_{23} \\ 0 & 0 & J_{33} \end{bmatrix} \tag{2.63}$$

は非特異行列となる. その結果, $E_\varepsilon P\geq 0$ を満たす一般化リカッチ方程式 (2.24a) の唯一の安定化解が, $\forall\varepsilon\in[0,\varepsilon^*)$ の範囲で存在する. 又, このような十分小さなε^*が存在することが結論できる. ここで, $E_\varepsilon P\geq 0$ は, $Q\geq 0$ 及び $R>0$ を与える. さらに, $P_{21}^{(0)}=P_{21s}^{+}$なので, $P_{11}^{(0)}=P_{11s}^{+}$及び $P_{22}^{(0)}=P_{22s}^{+}$は唯一である. 以上から, $E_\varepsilon P\geq 0$ の唯一性が示される. 最終的に, $\varepsilon=0$ での展開式 (2.52) の存在は, 陰関数定理 (Dieudonné 1982) を利用することによって保証される. □

注意 2.10 標準特異摂動システム (Kokotović *et al.* 1986) の場合, 非標準特異摂動システムと同様に, full–order レギュレータ問題の解の存在条件は, εに無関係に 2 つのレギュレータ問題の解の存在条件によって記述されている. すなわち, slow レギュレータ問題と fast レギュレータ問題の可安定性, 可検出性を仮定することによって, full–order レギュレータ問題の解の存在条件が記述される. さらに, 仮定 2.1 は補題 2.1 に記述されている 2 つの行列対 (A_s,B_s), (A_s,C_s) が可安定かつ可検出であることに等価であることが証明できる.

次に, (2.51) で与えられる合成制御則 u_c^*を実システムに実装したときの評価関数 (2.2) の値が, (2.14) によって与えられる最適制御則 u^*を実システムに実装したときと比較して $O(\varepsilon^2)$ 程度の近似であることを示す. 合成制御則 u_c^*を実システム (2.1) に適用すれば

$$J^c=\frac{1}{2}y^T(0)E_\varepsilon P_c y(0) \tag{2.64}$$

となる. ここで, P_cは以下のリアプノフ方程式 (2.65) の解である.

$$(A-BR^{-1}B^TP_s^+)^TP_c+P_c^T(A-BR^{-1}B^TP_s^+)=-P_s^{+T}BR^{-1}B^TP_s^+-Q \tag{2.65a}$$

$$E_\varepsilon P_c=P_c^TE_\varepsilon \tag{2.65b}$$

以上の準備のもとで, 定理 2.2 を得ることができる.

定理 2.2 定理 2.1 の条件を満たすとする. また, 式 (2.51) によってえられる合成制御則 u_c^*を適用したときの評価関数 J^cと, 式 (2.14) によってえられる最適フィードバック u^*を適用したときの評価関数 J^*をεに関して, マクローリン展開する. このとき, $\varepsilon=0$ とすれば, マクローリン展開の最初の 2 項は同一である. すなわち, 近似式 (2.66) が成立する.

$$J^c = J^* + O(\varepsilon^2) \tag{2.66}$$

したがって, 合成制御則 (2.51) は, full-order レギュレータ問題に対して, $O(\varepsilon^2)$ 程度の準最適解である.

(定理 2.2 の証明)　一般化リカッチ方程式 (2.12) からリアプノフ方程式 (2.65) を引いて変形すれば新たなリアプノフ方程式 (2.67) を得る. ここで, $W = P_c - P$とおく.

$$(A - SP_s^+)^T W + W^T (A - SP_s^+) = -(P - P_s^+)^T S (P - P_s^+) \tag{2.67a}$$

$$E_\varepsilon W = W^T E_\varepsilon \tag{2.67b}$$

同様に, (2.65) に陰関数定理を適用すれば, P_cは$\varepsilon = 0$ でマクローリン展開をもつ. したがって, Wは以下の (2.68) で表現できる.

$$W = \begin{bmatrix} W_{11}^{(0)} & \varepsilon W_{21}^{(0)T} \\ W_{21}^{(0)} & W_{22}^{(0)} \end{bmatrix} + \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\varepsilon^i}{i!} \begin{bmatrix} W_{11}^{(i)} & \varepsilon W_{21}^{(i)T} \\ W_{21}^{(i)} & W_{22}^{(i)} \end{bmatrix} \tag{2.68}$$

(2.50) を代入して得られた合成制御則 (2.51) と, $P_{11}^{(0)} = P_{11s}^+$, $P_{22}^{(0)} = P_{22s}^+$の結果から,

$$(P - P_s^+)^T S (P - P_s^+) = O(\varepsilon^2) \tag{2.69}$$

を得る. 行列 $(A_{22} - S_{22} P_{22s}^+)$ 及び $(A_s - S_s P_{11}^+)$ は安定行列であり, (2.68) を (2.67a) に代入すれば $W_{11}^{(0)} = 0$, $W_{21}^{(0)} = 0$, $W_{22}^{(0)} = 0$, $W_{11}^{(1)} = 0$, $W_{21}^{(1)} = 0$, $W_{22}^{(1)} = 0$ となる. 以上から, $E_\varepsilon W = O(\varepsilon^2)$ となるので, (2.66) が示される. □

定理 2.2 は, 標準, 非標準特異摂動システムにおける合成制御則を利用した準最適化問題の解析的理論を与えた. この節の最後に, 本研究で提案された合成制御則 (2.51) が, 従来からある Kokotović ら (1986) が提案した A_{22}^{-1}が存在する標準特異摂動システムに関する合成制御則と等価であることを証明する. A_{22}^{-1}が存在する条件のもとでは, 合成制御則は以下の (2.70) になる.

$$\begin{aligned} u_c^* &= -R^{-1} \begin{bmatrix} B_1^T & \varepsilon^{-1} B_2^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} K_s & 0 \\ \varepsilon K_m^T & \varepsilon K_f \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \\ &= -R^{-1} \begin{bmatrix} B_1^T & B_2^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} K_s & 0 \\ K_m^T & K_f \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \end{aligned} \tag{2.70}$$

(2.70) の K_sは, 以下のリカッチ方程式 (2.71) の準正定かつ安定化解である. さらに, 解 K_sは対称行列であり, かつ唯一であることが Kokotović ら (1986) によって示されている.

$$\begin{aligned} &K_s (A_0 - B_0 R_0^{-1} N_0^T M_0) + (A_0 - B_0 R_0^{-1} N_0^T M_0)^T K_s \\ &\quad - K_s B_0 R_0^{-1} B_0^T K_s + M_0^T (I - N_0 R_0^{-1} N_0^T) M_0 = 0 \end{aligned} \tag{2.71}$$

ここで，

$$
\begin{aligned}
R_0 &= R + N_0^T N_0 \\
A_0 &= A_{11} - A_{12}A_{22}^{-1}A_{21} \\
B_0 &= -A_{12}A_{22}^{-1}B_2 + B_1 \\
M_0 &= C_1 - C_2A_{22}^{-1}A_{21} \\
N_0 &= -C_2A_{22}^{-1}B_2
\end{aligned}
$$

又，(2.70) の K_f は，以下のリカッチ方程式 (2.72) の唯一の準正定かつ安定化解である．

$$K_fA_{22} + A_{22}^TK_f - K_fB_2R^{-1}B_2^TK_f + C_2^TC_2 = 0 \tag{2.72}$$

K_m は (2.73) によって与えられる．

$$K_m = [K_s(B_1R^{-1}B_2^TK_f - A_{12}) - (A_{21}^TK_f + C_1^TC_2)](A_{22} - B_2R^{-1}B_2^TK_f)^{-1} \tag{2.73}$$

以上の準備のもとで，従来からある Kokotović ら (1986) が提案した A_{22}^{-1} が存在する標準特異摂動システムに関する合成制御則と，本研究で提案された合成制御則に関して以下の定理 2.3 が得られる．

定理 2.3 係数行列 A_{22} が非特異である標準特異摂動システムを考える．また，仮定 2.1, 2.2 を満たすとする．このとき，以下の (2.74) 式が成立する．

$$K_f = P_{22s}^+,\ K_m^T = P_{21s}^+,\ K_s = P_{11s}^+ \tag{2.74}$$

すなわち，Kokotović ら (1986) が提案した合成制御則 (2.70) は，本章で提案された合成制御則 (2.51) と同一である．

(定理 2.3 の証明)　まず，(2.72) 及び (2.26c) を比較することによって直接 $K_f = P_{22s}^+$ を得ることができる．

次に，$K_f = P_{22s}^+$ から，(2.73) 及び (2.27) を比較して，もし $K_s = P_{11s}^+$ が成立するならば $K_m^T = P_{21s}^+$ をえることができる．したがって，証明の大部分は $K_s = P_{11s}^+$ を示すことである．$K_s = P_{11s}^+$ を証明するために，まず，2 つのリカッチ方程式 (2.28),(2.71) が同値であることを示す．すなわち，

$$A_s = A_0 - B_0R_0^{-1}N_0^TM_0 \tag{2.75a}$$

$$S_s = B_0R_0^{-1}B_0^T \tag{2.75b}$$

$$Q_s = M_0^T(I - N_0R_0^{-1}N_0^T)M_0 \tag{2.75c}$$

を示す．これらの関係式 (2.75) を示すために (2.76) を定義する (Kokotović *et al.* [1] 1996, pp.115)

$$H = I + R^{-1}B_2^TK_f(A_{22}-S_{22}K_f)^{-1}B_2 \tag{2.76}$$

このとき，

$$H^{-1} = I - R^{-1}B_2^TK_fA_{22}^{-1}B_2 \tag{2.77}$$

である．したがって

$$\begin{aligned}
R_0^{-1} &= HR^{-1}H^T \\
&= R^{-1} + R^{-1}B_2^T(A_{22}-S_{22}K_f)^{-T}K_fB_2R^{-1} \\
&\quad +R^{-1}B_2^TK_f(A_{22}-S_{22}K_f)^{-1}B_2R^{-1} \\
&\quad +R^{-1}B_2^TK_f(A_{22}-S_{22}K_f)^{-1} \\
&\quad \cdot B_2R^{-1}B_2^T(A_{22}-S_{22}K_f)^{-T}K_fB_2R^{-1}
\end{aligned} \tag{2.78}$$

ここで, 4 つの恒等式を導入する．

$$(A_{22}-S_{22}K_f)^{-1} = A_{22}^{-1} + A_{22}^{-1}S_{22}K_f(A_{22}-S_{22}K_f)^{-1} \tag{2.79a}$$

$$(A_{22}-S_{22}K_f)^{-1} = A_{22}^{-1} + (A_{22}-S_{22}K_f)^{-1}S_{22}K_fA_{22}^{-1} \tag{2.79b}$$

$$A_{22}(A_{22}-S_{22}K_f)^{-1} = I + S_{22}K_f(A_{22}-S_{22}K_f)^{-1} \tag{2.79c}$$

$$A_{22}^T(A_{22}-S_{22}K_f)^{-T} = I + K_fS_{22}(A_{22}-S_{22}K_f)^{-T} \tag{2.79d}$$

このとき，

$$\begin{aligned}
&N_0^TM_0 \\
&= -B_2^TA_{22}^{-T}C_2^T(C_1 - C_2A_{22}^{-1}A_{21}) \\
&= -B_2^TA_{22}^{-T}C_2^TC_1 + B_2^TA_{22}^{-T}[K_fS_{22}K_f - A_{22}^TK_f - K_fA_{22}]A_{22}^{-1}A_{21} \\
&= -B_2^TA_{22}^{-T}C_2^TC_1 - B_2^TA_{22}^{-T}K_fS_{22}K_fA_{22}^{-1}A_{21} \\
&\quad -B_2^TK_fA_{22}^{-1}A_{21} - B_2^TA_{22}^{-T}K_fA_{21}
\end{aligned} \tag{2.80}$$

行列 (2.78) 及び行列 (2.80) から, 関係式 (2.79a),(2.79b) を利用することによって, 以下の (2.81) のように行列 $R_0^{-1}N_0^TM_0$を簡単化する．

$$\begin{aligned}
&R_0^{-1}N_0^TM_0 \\
&= -R^{-1}B_2^T(A_{22}-S_{22}K_f)^{-T}C_2^TC_1 - R^{-1}B_2^T(A_{22}-S_{22}K_f)^{-T}K_fA_{21}
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&-R^{-1}B_2^TK_fA_{22}^{-1}A_{21}-R^{-1}B_2^TK_f(A_{22}-S_{22}K_f)^{-1}\\
&\cdot S_{22}(A_{22}-S_{22}K_f)^{-T}C_2^TC_1\\
&-R^{-1}B_2^TK_f(A_{22}-S_{22}K_f)^{-1}S_{22}(A_{22}-S_{22}K_f)^{-T}K_fA_{21}\\
&-R^{-1}B_2^TK_f(A_{22}-S_{22}K_f)^{-1}S_{22}K_fA_{22}^{-1}A_{21}
\end{aligned}
\tag{2.81}
$$

したがって，

$$
\begin{aligned}
&A_0-B_0R_0^{-1}N_0^TM_0\\
=\;&A_{11}-A_{12}A_{22}^{-1}A_{21}-[B_1-A_{12}A_{22}^{-1}B_2]\cdot[-R^{-1}B_2^T(A_{22}-S_{22}K_f)^{-T}C_2^TC_1\\
&-R^{-1}B_2^T(A_{22}-S_{22}K_f)^{-T}K_fA_{21}-R^{-1}B_2^TK_fA_{22}^{-1}A_{21}\\
&-R^{-1}B_2^TK_f(A_{22}-S_{22}K_f)^{-1}S_{22}(A_{22}-S_{22}K_f)^{-T}C_2^TC_1\\
&-R^{-1}B_2^TK_f(A_{22}-S_{22}K_f)^{-1}S_{22}(A_{22}-S_{22}K_f)^{-T}K_fA_{21}\\
&-R^{-1}B_2^TK_f(A_{22}-S_{22}K_f)^{-1}S_{22}K_fA_{22}^{-1}A_{21}]\\
=\;&A_{11}-A_{12}(A_{22}-S_{22}K_f)^{-1}A_{21}+S_{12}K_f(A_{22}-S_{22}K_f)^{-1}A_{21}\\
&+S_{12}(A_{22}-S_{22}K_f)^{-T}C_2^TC_1+S_{12}(A_{22}-S_{22}K_f)^{-T}K_fA_{21}\\
&+S_{12}K_f(A_{22}-S_{22}K_f)^{-1}S_{22}(A_{22}-S_{22}K_f)^{-T}C_2^TC_1\\
&+S_{12}K_f(A_{22}-S_{22}K_f)^{-1}S_{22}(A_{22}-S_{22}K_f)^{-T}K_fA_{21}\\
&-A_{12}(A_{22}-S_{22}K_f)^{-1}S_{22}(A_{22}-S_{22}K_f)^{-T}C_2^TC_1\\
&-A_{12}(A_{22}-S_{22}K_f)^{-1}S_{22}(A_{22}-S_{22}K_f)^{-T}K_fA_{21}
\end{aligned}
\tag{2.82}
$$

ここで，2つの恒等式 (2.79a), (2.79b) は，式の簡略化に利用されている．以上から，拡張された (2.29a) の A_s は (2.82) と等価である．したがって，(2.75a) が示された．

次に，(2.75b) を考える．まず，B_0Hを以下のように変形する．

$$
\begin{aligned}
&B_0H\\
=\;&(B_1-A_{12}A_{22}^{-1}B_2)[I+R^{-1}B_2^TK_f(A_{22}-S_{22}K_f)^{-1}B_2]\\
=\;&B_1+S_{12}K_f(A_{22}-S_{22}K_f)^{-1}B_2\\
&-A_{12}[A_{22}^{-1}+A_{22}^{-1}S_{22}K_f(A_{22}-S_{22}K_f)^{-1}]B_2\\
=\;&B_1+S_{12}K_f(A_{22}-S_{22}K_f)^{-1}B_2-A_{12}(A_{22}-S_{22}K_f)^{-1}B_2\\
=\;&B_1-(A_{12}-S_{12}K_f)(A_{22}-S_{22}K_f)^{-1}B_2\\
=\;&B_1+N_{1s}B_2
\end{aligned}
\tag{2.83}
$$

(2.83) を利用して

$$
B_0R_0^{-1}B_0^T
$$

$$
\begin{aligned}
&= B_0 H R^{-1} H^T B_0^T \\
&= (B_1 + N_{1s} B_2) R^{-1} (B_1 + N_{1s} B_2)^T \\
&= B_s R^{-1} B_s^T \\
&= S_s
\end{aligned} \tag{2.84}
$$

したがって, (2.75b) が示された.

最後に (2.75c) が成立することを証明する. まず, 以下のように変形する.

$$
\begin{aligned}
&-M_0^T N_0 R_0^{-1} N_0^T M_0 \\
&= [-C_1^T C_2 A_{22}^{-1} B_2 - A_{21}^T K_f A_{22}^{-1} B_2 \\
&\qquad -A_{21}^T A_{22}^{-T} K_f B_2 + A_{21}^T A_{22}^{-T} K_f S_{22} K_f A_{22}^{-1} B_2] \\
&\qquad \cdot [R^{-1} B_2^T (A_{22} - S_{22} K_f)^{-T} C_2^T C_1 + R^{-1} B_2^T (A_{22} - S_{22} K_f)^{-T} K_f A_{21} \\
&\qquad +R^{-1} B_2^T K_f A_{22}^{-1} A_{21} \\
&\qquad +R^{-1} B_2^T K_f (A_{22} - S_{22} K_f)^{-1} S_{22} (A_{22} - S_{22} K_f)^{-T} C_2^T C_1 \\
&\qquad +R^{-1} B_2^T K_f (A_{22} - S_{22} K_f)^{-1} S_{22} (A_{22} - S_{22} K_f)^{-T} K_f A_{21} \\
&\qquad +R^{-1} B_2^T K_f (A_{22} - S_{22} K_f)^{-1} S_{22} K_f A_{22}^{-1} A_{21}] \\
&= -C_1^T C_2 A_{22}^{-1} S_{22} (A_{22} - S_{22} K_f)^{-T} C_2^T C_1 \\
&\qquad -C_1^T C_2 A_{22}^{-1} S_{22} (A_{22} - S_{22} K_f)^{-T} K_f A_{21} \\
&\qquad -C_1^T C_2 A_{22}^{-1} S_{22} K_f (A_{22} - S_{22} K_f)^{-1} S_{22} (A_{22} - S_{22} K_f)^{-T} C_2^T C_1 \\
&\qquad -C_1^T C_2 A_{22}^{-1} S_{22} K_f (A_{22} - S_{22} K_f)^{-1} S_{22} (A_{22} - S_{22} K_f)^{-T} K_f A_{21} \\
&\qquad -C_1^T C_2 A_{22}^{-1} S_{22} K_f A_{22}^{-1} A_{21} \\
&\qquad -C_1^T C_2 A_{22}^{-1} S_{22} K_f (A_{22} - S_{22} K_f)^{-1} S_{22} K_f A_{22}^{-1} A_{21} \\
&\qquad -A_{21}^T K_f A_{22}^{-1} S_{22} (A_{22} - S_{22} K_f)^{-T} C_2^T C_1 \\
&\qquad -A_{21}^T K_f A_{22}^{-1} S_{22} (A_{22} - S_{22} K_f)^{-T} K_f A_{21} \\
&\qquad -A_{21}^T K_f A_{22}^{-1} S_{22} K_f A_{22}^{-1} A_{21} \\
&\qquad -A_{21}^T K_f A_{22}^{-1} S_{22} K_f (A_{22} - S_{22} K_f)^{-1} S_{22} (A_{22} - S_{22} K_f)^{-T} C_2^T C_1 \\
&\qquad -A_{21}^T K_f A_{22}^{-1} S_{22} K_f (A_{22} - S_{22} K_f)^{-1} S_{22} (A_{22} - S_{22} K_f)^{-T} K_f A_{21} \\
&\qquad -A_{21}^T K_f A_{22}^{-1} S_{22} K_f (A_{22} - S_{22} K_f)^{-1} S_{22} K_f A_{22}^{-1} A_{21} \\
&\qquad -A_{21}^T A_{22}^{-T} K_f S_{22} (A_{22} - S_{22} K_f)^{-T} C_2^T C_1 \\
&\qquad -A_{21}^T A_{22}^{-T} K_f S_{22} (A_{22} - S_{22} K_f)^{-T} K_f A_{21} \\
&\qquad -A_{21}^T A_{22}^{-T} K_f S_{22} K_f (A_{22} - S_{22} K_f)^{-1} S_{22} (A_{22} - S_{22} K_f)^{-T} C_2^T C_1 \\
&\qquad -A_{21}^T A_{22}^{-T} K_f S_{22} K_f (A_{22} - S_{22} K_f)^{-1} S_{22} (A_{22} - S_{22} K_f)^{-T} K_f A_{21}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&-A_{21}^T A_{22}^{-T} K_f S_{22} K_f A_{22}^{-1} A_{21} \\
&-A_{21}^T A_{22}^{-T} K_f S_{22} K_f (A_{22} - S_{22}K_f)^{-1} S_{22} K_f A_{22}^{-1} A_{21} \\
&+A_{21}^T A_{22}^{-T} K_f S_{22} K_f A_{22}^{-1} S_{22} (A_{22} - S_{22}K_f)^{-T} C_2^T C_1 \\
&+A_{21}^T A_{22}^{-T} K_f S_{22} K_f A_{22}^{-1} S_{22} (A_{22} - S_{22}K_f)^{-T} K_f A_{21} \\
&+A_{21}^T A_{22}^{-T} K_f S_{22} K_f A_{22}^{-1} S_{22} (A_{22} - S_{22}K_f)^{-T} K_f A_{21} \\
&+A_{21}^T A_{22}^{-T} K_f S_{22} K_f A_{22}^{-1} S_{22} K_f \\
&\cdot (A_{22} - S_{22}K_f)^{-1} S_{22} (A_{22} - S_{22}K_f)^{-T} C_2^T C_1 \\
&+A_{21}^T A_{22}^{-T} K_f S_{22} K_f A_{22}^{-1} S_{22} K_f \\
&\cdot (A_{22} - S_{22}K_f)^{-1} S_{22} (A_{22} - S_{22}K_f)^{-T} K_f A_{21} \\
&+A_{21}^T A_{22}^{-T} K_f S_{22} K_f A_{22}^{-1} S_{22} K_f (A_{22} - S_{22}K_f)^{-1} S_{22} K_f A_{22}^{-1} A_{21}
\end{aligned}
\tag{2.85}
$$

恒等式 (2.79) 及び (2.85) を利用すれば (2.86) を得ることができる.

$$
\begin{aligned}
& -M_0^T N_0 R_0^{-1} N_0^T M_0 \\
= \; & -C_1^T C_2 (A_{22} - S_{22}K_f)^{-1} S_{22} (A_{22} - S_{22}K_f)^{-T} C_2^T C_1 \\
& -C_1^T C_2 (A_{22} - S_{22}K_f)^{-1} S_{22} (A_{22} - S_{22}K_f)^{-T} K_f A_{21} \\
& -C_1^T C_2 (A_{22} - S_{22}K_f)^{-1} S_{22} K_f A_{22}^{-1} A_{21} \\
& -A_{21}^T K_f (A_{22} - S_{22}K_f)^{-1} S_{22} (A_{22} - S_{22}K_f)^{-T} C_2^T C_1 \\
& -A_{21}^T K_f (A_{22} - S_{22}K_f)^{-1} S_{22} (A_{22} - S_{22}K_f)^{-T} K_f A_{21} \\
& -A_{21}^T K_f (A_{22} - S_{22}K_f)^{-1} S_{22} K_f A_{22}^{-1} A_{21} \\
& -A_{21}^T A_{22}^{-T} K_f A_{22} (A_{22} - S_{22}K_f)^{-1} S_{22} (A_{22} - S_{22}K_f)^{-T} C_2^T C_1 \\
& -A_{21}^T A_{22}^{-T} K_f A_{22} (A_{22} - S_{22}K_f)^{-1} S_{22} (A_{22} - S_{22}K_f)^{-T} K_f A_{21} \\
& -A_{21}^T A_{22}^{-T} K_f A_{22} (A_{22} - S_{22}K_f)^{-1} S_{22} K_f A_{22}^{-1} A_{21} \\
& +A_{21}^T A_{22}^{-T} K_f S_{22} K_f (A_{22} - S_{22}K_f)^{-1} S_{22} (A_{22} - S_{22}K_f)^{-T} C_2^T C_1 \\
& +A_{21}^T A_{22}^{-T} K_f S_{22} K_f (A_{22} - S_{22}K_f)^{-1} S_{22} (A_{22} - S_{22}K_f)^{-T} K_f A_{21} \\
& +A_{21}^T A_{22}^{-T} K_f S_{22} K_f (A_{22} - S_{22}K_f)^{-1} S_{22} K_f S_{22} K_f A_{22}^{-1} A_{21} \\
= \; & -C_1^T C_2 (A_{22} - S_{22}K_f)^{-1} S_{22} (A_{22} - S_{22}K_f)^{-T} C_2^T C_1 \\
& -C_1^T C_2 (A_{22} - S_{22}K_f)^{-1} S_{22} (A_{22} - S_{22}K_f)^{-T} K_f A_{21} \\
& -C_1^T C_2 (A_{22} - S_{22}K_f)^{-1} S_{22} K_f A_{22}^{-1} A_{21} \\
& -A_{21}^T K_f (A_{22} - S_{22}K_f)^{-1} S_{22} (A_{22} - S_{22}K_f)^{-T} C_2^T C_1 \\
& -A_{21}^T K_f (A_{22} - S_{22}K_f)^{-1} S_{22} (A_{22} - S_{22}K_f)^{-T} K_f A_{21} \\
& -A_{21}^T K_f (A_{22} - S_{22}K_f)^{-1} S_{22} K_f A_{22}^{-1} A_{21}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&-A_{21}^T A_{22}^{-T} K_f S_{22}(A_{22}-S_{22}K_f)^{-T} C_2^T C_1 \\
&-A_{21}^T A_{22}^{-T} K_f S_{22}(A_{22}-S_{22}K_f)^{-T} K_f A_{21} \\
&-A_{21}^T A_{22}^{-T} K_f S_{22} K_f A_{22}^{-1} A_{21}
\end{aligned} \tag{2.86}
$$

よって,

$$
\begin{aligned}
& M_0^T M_0 - M_0^T N_0 R_0^{-1} N_0^T M_0 \\
= \; & C_1^T C_1 - A_{21}^T A_{22}^{-T} C_2^T C_1 - C_1^T C_2 A_{22}^{-1} A_{21} \\
& + A_{21}^T A_{22}^{-T}[-K_f A_{22} - A_{22}^T K_f + K_f S_{22} K_f] A_{22}^{-1} A_{21} \\
& - C_1^T C_2 (A_{22}-S_{22}K_f)^{-1} S_{22} (A_{22}-S_{22}K_f)^{-T} C_2^T C_1 \\
& - C_1^T C_2 (A_{22}-S_{22}K_f)^{-1} S_{22} (A_{22}-S_{22}K_f)^{-T} K_f A_{21} \\
& - C_1^T C_2 (A_{22}-S_{22}K_f)^{-1} S_{22} K_f A_{22}^{-1} A_{21} \\
& - A_{21}^T K_f (A_{22}-S_{22}K_f)^{-1} S_{22} (A_{22}-S_{22}K_f)^{-T} C_2^T C_1 \\
& - A_{21}^T K_f (A_{22}-S_{22}K_f)^{-1} S_{22} (A_{22}-S_{22}K_f)^{-T} K_f A_{21} \\
& - A_{21}^T K_f (A_{22}-S_{22}K_f)^{-1} S_{22} K_f A_{22}^{-1} A_{21} \\
& - A_{21}^T A_{22}^{-T} K_f S_{22} (A_{22}-S_{22}K_f)^{-T} C_2^T C_1 \\
& - A_{21}^T A_{22}^{-T} K_f S_{22} (A_{22}-S_{22}K_f)^{-T} K_f A_{21} \\
& - A_{21}^T A_{22}^{-T} K_f S_{22} K_f A_{22}^{-1} A_{21} \\
= \; & C_1^T C_1 - A_{21}^T (A_{22}-S_{22}K_f)^{-T} C_2^T C_1 - C_1^T C_2 (A_{22}-S_{22}K_f)^{-1} A_{21} \\
& - C_1^T C_2 (A_{22}-S_{22}K_f)^{-1} S_{22} (A_{22}-S_{22}K_f)^{-T} C_2^T C_1 \\
& - C_1^T C_2 (A_{22}-S_{22}K_f)^{-1} S_{22} (A_{22}-S_{22}K_f)^{-T} K_f A_{21} \\
& - A_{21}^T K_f (A_{22}-S_{22}K_f)^{-1} S_{22} (A_{22}-S_{22}K_f)^{-T} C_2^T C_1 \\
& - A_{21}^T K_f (A_{22}-S_{22}K_f)^{-1} S_{22} (A_{22}-S_{22}K_f)^{-T} K_f A_{21} \\
& - A_{21}^T K_f (A_{22}-S_{22}K_f)^{-1} A_{21} - A_{21}^T (A_{22}-S_{22}K_f)^{-T} K_f A_{21}
\end{aligned} \tag{2.87}
$$

一方, 拡張された (2.29c) の Q_s と $K_f = P_{22s}^+$ から, Q_s が (2.87) と等価である. したがって, (2.75c) が示された. 以上から, $K_s = P_{11s}^+$ が示されたので $K_m^T = P_{21s}^+$ であることが示された. □

定理 2.3 から, 新たに提案した合成制御則は, 従来の Kokotović ら (1986) が提案した合成制御則と同様に, 標準特異摂動システムにも適用できるという意味で拡張されていることがわかる.

2.5 設計方法

注意 2.7 から, 合成制御則 u_c^*は, slow システムのレギュレータ問題の解を修正することによって得ることができる. したがって, 合成制御則の設計手順はディスクリプタシステム (Wang *et al.* 1993) における最適レギュレータ問題の設計手順に類似している. 基本的な設計方法は以下である.

STEP 1. 以下の (2.88) で与えられるハミルトン行列 H_sを利用することによって, 行列 A_s, S_s, Q_s を計算する.

$$H_s = \begin{bmatrix} A_s & -S_s \\ -Q_s & -A_s \end{bmatrix} = T_1 - T_2 T_4^{-1} T_3, \tag{2.88}$$

ここで, 行列 $T_i, i = 1, 2, 3, 4,$ は, (2.30) によって定義されたものである.

STEP 2. リカッチ方程式 (2.26c), (2.28) の準正定安定化解 P_{22s}^+, P_{11s}^+ を求める.

STEP 3. 行列 P_{22s}^+, P_{11s}^+を利用することによって, (2.27) 式の P_{21s}^+を計算する.

STEP 4. (2.49) の $y_s(t)$ を $y(t)$ として, (2.51) 式の得られた合成制御則に代入する.

ここで, 設計手順 STEP 2. には, 低次元化された 2 つのリカッチ方程式 (2.26c), (2.28) を解くことを含む.

2.6 数値例

以下の非標準特異摂動システムを考える.

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \varepsilon \dot{x}_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} u(t), \quad \begin{bmatrix} x_1(0) \\ x_2(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \tag{2.89}$$

ここで, 最小化する評価関数は (2.90) によって与えられる.

$$J = \frac{1}{2} \int_0^\infty \{ \begin{bmatrix} x_1 & x_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + u^2 \} dt \tag{2.90}$$

この数値例において, 係数行列 A_{22}が 0 なので, Kokotović ら (1986) による方法が適用できない. しかしながら, この章で提案された手法は利用することができる. 先の 2.5 節の設計手順にしたがって, まず, 行列 $T_i, i = 1, 2, 3, 4$ を計算する.

$$T_1 = \begin{bmatrix} 1 & -4 \\ -4 & -1 \end{bmatrix}, \quad T_2 = \begin{bmatrix} 2 & -2 \\ -2 & -2 \end{bmatrix}$$

$$T_3 = \begin{bmatrix} 2 & -2 \\ -2 & -2 \end{bmatrix},\ T_4 = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$$

したがって, ハミルトン行列 H_sは以下のように計算される.

$$H_s = T_1 - T_2 T_4^{-1} T_3 = \begin{bmatrix} -7 & -4 \\ -4 & 7 \end{bmatrix}$$

次に, 設計手順 STEP 2. における低次元化された 2 つのリカッチ方程式 (2.26c), (2.28) は, ハミルトン行列 H_s, T_4から (2.91a), (2.91b) になる.

$$1 - p_{22s}^2 = 0 \tag{2.91a}$$

$$2 - 7p_{11s} - 2p_{11s}^2 = 0 \tag{2.91b}$$

リカッチ方程式 (2.91a) から, 準正定かつ安定化解は $p_{22s}^+ = 1$ である. 一方, リカッチ方程式 (2.91b) から, 同様に準正定かつ安定化解は, $p_{11s}^+ = (\sqrt{65} - 7)/4 \approx 0.2656$ である. 又, (2.27) を利用して $p_{21s}^+ = 4$ となる.

以上から, 合成制御則 u_c^*は (2.92) によって与えられる.

$$u_c^* = -\begin{bmatrix} 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0.2656 & 0 \\ 4 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} \tag{2.92}$$

ここで, $\varepsilon = 0.1$ としたときの最適フィードバックは (2.93) である.

$$u^* = -\begin{bmatrix} 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0.7217 & 0.2472 \\ 2.4723 & 0.9158 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} \tag{2.93}$$

(2.92) による合成制御則及び, (2.93) による最適フィードバックをそれぞれシステム (2.89) に入力したときの評価関数 (2.90) の値はそれぞれ, $J^c = 0.6845$, $J^* = 0.6539$ である. したがって, 合成制御則による評価関数の値 $J^c = 0.6845$ は, 最適フィードバックによる評価関数の値 $J^* = 0.6539$ と比較して $|J^* - J^c| = 3.06 \times 10^{-2}$の誤差がある.

次に, $\varepsilon = 0.01$ における最適フィードバックは (2.94) で与えられる.

$$u^* = -\begin{bmatrix} 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0.3544 & 0.0371 \\ 3.714 & 0.997 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} \tag{2.94}$$

同様に, (2.92) による合成制御則及び, (2.94) による最適フィードバックをそれぞれシステム (2.89) に入力したときの評価関数 (2.90) の値はそれぞれ, $J^c = 0.2216$, $J^* = 0.2193$ である. したがって, 合成制御則による評価関数の値 $J^c = 0.2216$ は, 最適フィードバックによる評価関数の値 $J^* = 0.2193$ と比較して $|J^* - J^c| = 2.3 \times 10^{-3}$の誤差がある.

最後に, $\varepsilon = 0.001$ における最適フィードバックは (2.95) で与えられる.

$$u^* = -\begin{bmatrix} 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0.2755 & 0.00397 \\ 3.9676 & 0.9997 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} \tag{2.95}$$

(2.92) による合成制御則及び, (2.95) による最適フィードバックをそれぞれシステム (2.89) に入力したときの評価関数 (2.90) の値はそれぞれ, $J^c = 0.14227$, $J^* = 0.14224$ である. したがって, 合成制御則による評価関数の値 $J^c = 0.14227$ は, 最適フィードバックによる評価関数の値 $J^* = 0.14224$ と比較して $|J^* - J^c| = 3.0 \times 10^{-5}$の誤差がある.

これらの数値例から, εが十分 0 に近づくとする. すなわち, $\varepsilon \to 0$ であるとき,

$$u_c^* \to u^* \tag{2.96a}$$

$$J^c \to J^* \tag{2.96b}$$

が成立することを確認した.

注意 2.11 数値例において, 最適フィードバックによる評価関数の値 J^*と, 合成制御則による評価関数の値 J^cとの誤差 $|J^* - J^c|$ が, 関係式 (2.66) を満足していないように見えるが, これは, $O(\cdot)$ 関数の定義

$$|\mathcal{F}_1(\varepsilon) - \mathcal{F}_2(\varepsilon)| = O(\varepsilon^k) \tag{2.97}$$

$$\Leftrightarrow \quad \lim_{\varepsilon \to +0} \frac{|\mathcal{F}_1(\varepsilon) - \mathcal{F}_2(\varepsilon)|}{\varepsilon^k} < \infty \tag{2.98}$$

から, 実際には関係式 (2.66) を満足している. すなわち, $\varepsilon = 0.001$ での数値例では,

$$|J^* - J^c| = 30.0 \times \varepsilon^2 = 30.0 \times 10^{-6} \tag{2.99}$$

と解釈すれば良い.

2.7 まとめ

この章では, 特異摂動システムにおいて, ディスクリプタシステムで扱われている一般化リカッチ方程式を利用した合成制御則による最適レギュレータ (LQR) 問題をとりあげた.

Kokotović ら (1976) の方法と, 本章で提案された方法の 1 番の違いは, 係数行列 A_{22}が特異行列であっても, 準最適制御が可能となったことである. 従来では, 係数行列 A_{22}は非特異行列ではないとコントローラが設計できない. この理由は A_{22}^{-1}を利用して, x_2を消去した後, x_1だけでコントローラを設計するためである. しかし, 本章で扱っている問題では, A_{22}^{-1}が一般的に存在しないので, Kokotović ら (1976) の結果が使用できない. そこで, $\varepsilon = 0$ であるとき, slow system をディスクリプタシステムと考えることによって, slow system におけるコントローラを設計した (Wang *et al.* 1993, Xu and Mizukami 1994). これは, A_{22}が特異行列かつ, $\varepsilon = 0$ のシステムがディスクリプタシステムと同一であると考えられるからである. ディスクリプタ理論は, slow system の制御ゲインを求めるときに使用している (Xu and Mizukami 1993). 以上が大きな特徴である.

本章で提案された新しい合成制御則は，Kokotović ら (1976) と異なり，標準，非標準特異摂動システムのどちらにも適用することができる．又，合成制御則は，低次元化された slow system のレギュレータ問題を解くことによって簡単に得られる．さらに，full–order system のレギュレータ問題の解が存在するための条件 (可安定性，可検出性) が，εに依存しない低次元化された slow system, fast system のレギュレータ問題の解の存在するための条件によって記述されることを示した．

後半では，非標準特異摂動システムにおいて，従来の標準特異摂動システムの場合と同様に，提案された合成制御則が，評価関数について，$J^c = J^* + O(\varepsilon^2)$ を満足することを証明した．つまり，非標準特異摂動システムについても，最適フィードバックを利用した場合と合成制御則を利用した場合との評価関数の誤差が $O(\varepsilon^2)$ であることを示した．

したがって，新たに提案した合成制御則は，従来の Kokotović ら (1986) が提案した合成制御則と同様に，標準特異摂動システムにも適用できるという意味で Kokotović ら (1986) の手法を完全に含んでいることがわかる．

第3章

非標準特異摂動システムにおけるLQR問題のための再帰的アルゴリズム

この章では, 非標準特異摂動システムの最適レギュレータ問題 (LQR 問題) に対して, 第2章で提案された合成制御則と異なり, 再帰的アルゴリズムによるコントローラの設計を提案する. 提案されたコントローラは, 第2章で提案された合成制御則と比較して, より最適な評価関数の値を達成できる.

3.1 はじめに

第2章で提案された合成制御則を利用したレギュレータ問題に対して, 特異摂動システムにおける最適レギュレータ問題 (以後, LQR 問題という) のコントローラの設計に, リカッチ方程式を利用する方法がある. 通常, 摂動項εのためにリカッチ方程式を数値計算によって解を得ることが困難であるが, そのリカッチ方程式の解を直接求める方法の1つに再帰的アルゴリズムがあげられる. Gajic ら (1990) は, まず, 最適解を求めるためのリカッチ方程式において, εを無視した0–オーダ解を求めている. つぎに, この解に偏差を付加し, この偏差における差分方程式を導入してリカッチ方程式の真の最適解を再帰的に求めている. しかし, 標準的な特異摂動システムでは, 係数行列であるA_{22}が非特異であることを仮定しなければならない.

近年, Wang ら (1988) はディスクリプタシステムにおける手法を用いて, 特異摂動システムのレギュレータ問題の最適フィードバックゲインを求めている.

また, Khalil(1989) は, A_{22}が特異である非標準特異摂動システムにおいて, 特異摂動法を用いてシステムを安定化するためのコントローラを構築している. しかし, ここでは, レギュレータ問題は扱われていない.

従来, A_{22}が特異である非標準特異摂動システムにおける最適レギュレータ問題について, Gajic ら (1990) と同様に, 再帰的アルゴリズムを利用してリカッチ方程式の解を得ることはできなかった. これは, A_{22}^{-1}が存在しないため, リカッチ方程式の変換ができないからである.

そこで, 本章では, 第 2 章の合成制御則によるコントローラの設計と異なり, リカッチ方程式を直接, 数値計算によって解を求め, コントローラを設計することを考える. リカッチ方程式の解を得るために再帰的アルゴリズムを利用するが, システムの対象を A_{22}^{-1}が存在しない非標準特異摂動に拡張して, Gajic(1990) とは異なった方法で再帰的アルゴリズムを導出する. すなわち, A_{22}^{-1}が存在しない場合, 通常の最適レギュレータ理論でみられたような方法 (Kokotović *et al.* 1986) で, 最適フィードバックゲインを求めず, ディスクリプタシステムにおける Hamilton–Jacobi 方程式を利用して最適フィードバックゲインを求める (Xu and Mizukami 1994). このとき, あらわれるリカッチ方程式は一般化リカッチ方程式と呼ばれ, $A^TP + P^TA - P^TBR^{-1}B^TP + Q = 0, D^TP = P^TD$ の形をもつ. この一般化リカッチ方程式において再帰的アルゴリズムを導出し, 収束解の存在を証明することが本章の目的である.

3.2 一般化リカッチ方程式の導出

3.2.1 非標準特異摂動システム

以下の線形時不変特異摂動システムにおける LQR 問題を考える.

$$\dot{x}_1(t) = A_{11}x_1(t) + A_{12}x_2(t) + B_1u(t), \quad x_1(t_0) = x_1^0 \tag{3.1a}$$

$$\varepsilon\dot{x}_2(t) = A_{21}x_1(t) + A_{22}x_2(t) + B_2u(t), \quad x_2(t_0) = x_2^0 \tag{3.1b}$$

以上の拘束条件のもとで, $x(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix}$ とおくとき, 評価関数

$$\min_u \{\frac{1}{2}\int_{t_0}^{\infty}[x^T(t)Qx(t) + u^T(t)Ru(t)]dt\} \tag{3.2}$$

を最小にする最適制御入力を決定する.

ここで, $u(t) \in \mathbf{R}^m$は制御入力, $x_i(t) \in \mathbf{R}^{n_i}(i = 1, 2)$ は状態ベクトルをあらわす. εは十分小さな正のパラメータである. 又, 各係数行列は適当な次元をもつ. ここで, システム (3.1) において, A_{22}が特異である, つまり, A_{22}^{-1}が存在しないシステムを一般に非標準特異摂動システムと呼ぶ.

3.2.2 Hamilton–Jacobi 方程式

いま, 各係数行列を以下のようにおく.

$$D=\begin{bmatrix} I_{n_1} & 0 \\ 0 & \varepsilon I_{n_2} \end{bmatrix},\ A=\begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix},\ B=\begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \end{bmatrix}$$
$$Q=\begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{12} \\ Q_{12}^T & Q_{22} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} C_1^T \\ C_2^T \end{bmatrix}\begin{bmatrix} C_1 & C_2 \end{bmatrix}$$

このとき, 与えられたシステムは

$$D\dot{x}(t)=Ax(t)+Bu(t)\quad x(t_0)=x^0 \tag{3.3}$$

となる. まず, (3.3) における最適制御入力を求める. ここで, 第 2 章で記述された一般化リカッチ方程式の導出と同様にして最適制御入力を求める. すなわち, ディスクリプタシステムにおける Hamilton–Jacobi 方程式を用いて full-order レギュレータ問題を解く (Xu and Mizukami 1994, Xu and Mizukami 1993). まず, $t\in[t_0,t_f]$ と固定する. $V^*(Dx(t),t)=(1/2)x^T(t)D^TP(t)x(t)$ とおくとき, $P(t)$ は $D^TP(t)=P^T(t)D$を満たす時変マトリクスである. また,

$$L(x(t),u(t),t)=\frac{1}{2}\{x^T(t)Qx(t)+u^T(t)Ru(t)\} \tag{3.4}$$

$$f(x(t),u(t),t)=Ax(t)+Bu(t) \tag{3.5}$$

$$W^*(x(t),t)=x^T(t)P^T(t) \tag{3.6}$$

を定義する. ここで $D^TP=P^TD$である. このとき, Hamilton–Jacobi 方程式

$$\frac{\partial V^*}{\partial t}\ =\ -\min_{u(t)}\{L(x(t),u(t),t)+W^*f(x(t),u(t),t)\} \tag{3.7}$$

に代入すれば,

$$\begin{aligned} x^T(t)D^T\dot{P}x(t)\ &=\ -\min_{u(t)}[x^T(t)Qx(t)+u^T(t)Ru(t) \\ &\qquad +2x^T(t)P^T\{Ax(t)+Bu(t)\}] \end{aligned} \tag{3.8}$$

となる.

ここで, $D^TP=P^TD$が成立するので, 実際に V^*の微分を行えば,

$$\frac{\partial V^*}{\partial t}=\frac{1}{2}x^T(t)D^T\dot{P}x(t)$$

となる. 右辺の最小値を与える $u^*(t)$ を求めれば,

$$u^*(t)=-R^{-1}B^TP(t)x(t) \tag{3.9}$$

となる．この最適制御入力 (3.9) を (3.8) に代入する．

$$2x^T(t)P^TAx(t) = x^T(t)(P^TA + A^TP)x(t) \tag{3.10}$$

に注意して，

$$x^T(t)D^T(t)\dot{P}x(t) \;\; = \;\; -x^T(t)[Q + A^TP + P^TA - P^TBR^{-1}B^TP]x(t) \tag{3.11}$$

が，すべての $x(t)$ について成立する．よってつぎの一般化リカッチ微分方程式 (Generalized Riccati differential equation) が得られる．

$$D^T\dot{P} = -Q - A^TP - P^TA + P^TBR^{-1}B^TP \tag{3.12a}$$

$$D^TP = P^TD \tag{3.12b}$$

ここで $t_f \to \infty$ であるから $\dot{P}(t) \equiv 0$ をみたすので，最終的につぎの一般化リカッチ代数方程式 (Generalized Riccati algebraic equation) が得られる．

$$A^TP + P^TA - P^TBR^{-1}B^TP + Q = 0 \tag{3.13a}$$

$$D^TP = P^TD \tag{3.13b}$$

この一般化リカッチ代数方程式 (3.13) は一般化リカッチ代数方程式 (2.12) と同一である．以後，特にことわらない限り，一般化リカッチ代数方程式を簡単に一般化リカッチ方程式と呼ぶことにする．

3.3 再帰的アルゴリズム

本章では，一般化リカッチ方程式における再帰的アルゴリズムを導出する．リカッチ方程式 (3.13) を各ブロックごとに計算する．ただし，

$$\begin{aligned} D^TP = P^TD \;\; &\Leftrightarrow \;\; \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & \varepsilon I \end{bmatrix}\begin{bmatrix} P_{11} & P_{12} \\ P_{21} & P_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} P_{11}^T & P_{21}^T \\ P_{12}^T & P_{22}^T \end{bmatrix}\begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & \varepsilon I \end{bmatrix} \\ &\Leftrightarrow \;\; P = \begin{bmatrix} P_{11} & \varepsilon P_{21}^T \\ P_{21} & P_{22} \end{bmatrix},\; P_{11} = P_{11}^T, P_{22} = P_{22}^T \end{aligned} \tag{3.14}$$

となることに注意する．ここで，

$$\begin{aligned} S_{11} &= B_1R^{-1}B_1^T \\ S_{12} &= B_1R^{-1}B_2^T \\ S_{22} &= B_2R^{-1}B_2^T \end{aligned}$$

とおく．

$$
\begin{aligned}
&A_{11}^TP_{11}+P_{11}^TA_{11}+A_{21}^TP_{21}+P_{21}^TA_{21}-P_{11}^TS_{11}P_{11}-P_{21}^TS_{22}P_{21}\\
&\qquad -P_{11}^TS_{12}P_{21}-P_{21}^TS_{12}^TP_{11}+Q_{11}=0 \qquad (3.15a)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&\varepsilon P_{21}A_{11}+P_{22}^TA_{21}+A_{12}^TP_{11}+A_{22}^TP_{21}-\varepsilon P_{21}S_{11}P_{11}-\varepsilon P_{21}S_{12}P_{21}\\
&\qquad -P_{22}^TS_{12}^TP_{11}-P_{22}^TS_{22}P_{21}+Q_{12}^T=0 \qquad (3.15b)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&A_{22}^TP_{22}+P_{22}^TA_{22}+\varepsilon A_{12}^TP_{21}^T+\varepsilon P_{21}A_{12}-P_{22}^TS_{22}P_{22}\\
&\qquad -\varepsilon P_{22}^TS_{12}^TP_{21}^T-\varepsilon P_{21}S_{12}P_{22}-\varepsilon^2P_{21}S_{11}P_{21}^T+Q_{22}=0 \qquad (3.15c)
\end{aligned}
$$

ここで，$\varepsilon\equiv 0$ とおくとそれぞれ下記式 (3.16) になる．

$$
\begin{aligned}
&A_{11}^TP_{11}+P_{11}^TA_{11}+A_{21}^TP_{21}+P_{21}^TA_{21}-P_{11}^TS_{11}P_{11}-P_{21}^TS_{22}P_{21}\\
&\qquad -P_{11}^TS_{12}P_{21}-P_{21}^TS_{12}^TP_{11}+Q_{11}=0 \qquad (3.16a)
\end{aligned}
$$

$$
P_{22}^TA_{21}+A_{12}^TP_{11}+A_{22}^TP_{21}-P_{22}^TS_{12}^TP_{11}-P_{22}^TS_{22}P_{21}+Q_{12}^T=0 \qquad (3.16b)
$$

$$
A_{22}^TP_{22}+P_{22}^TA_{22}-P_{22}^TS_{22}P_{22}+Q_{22}=0 \qquad (3.16c)
$$

後で述べる仮定 3.1 のもとで方程式 (3.16c) が解をもてば $A_{22}-S_{22}P_{22}$が，非特異であることから $(A_{22}-S_{22}P_{22})^{-1}$は存在する．したがってつぎの 0–オーダ方程式が得られる．ここで，0–オーダ方程式の解を$\bar{P}_{11},\bar{P}_{21},\bar{P}_{22}$ とおく．

[0-order equation]

$$
\bar{P}_{11}^TA_0+A_0^T\bar{P}_{11}-\bar{P}_{11}^TS_0\bar{P}_{11}+Q_0=0 \qquad (3.17a)
$$

$$
\bar{P}_{21}=-N_2^T+N_1^T\bar{P}_{11} \qquad (3.17b)
$$

$$
A_{22}^T\bar{P}_{22}+\bar{P}_{22}^TA_{22}-\bar{P}_{22}^TS_{22}\bar{P}_{22}+Q_{22}=0 \qquad (3.17c)
$$

ただし

$$
\begin{aligned}
A_0 &= A_{11}+N_1A_{21}+S_{12}N_2^T+N_1S_{22}N_2^T\\
S_0 &= S_{11}+N_1S_{12}^T+S_{12}N_1^T+N_1S_{22}N_1^T\\
Q_0 &= Q_{11}-N_2A_{21}-A_{21}^TN_2^T-N_2S_{22}N_2^T\\
N_2^T &= D_4^{-T}\hat{Q}_{12}^T,\ N_1^T=-D_4^{-T}D_2^T\\
D_2 &= A_{12}-S_{12}\bar{P}_{22},\ D_4=A_{22}-S_{22}\bar{P}_{22}\\
\hat{Q}_{12} &= Q_{12}+A_{21}^T\bar{P}_{22}
\end{aligned}
$$

ここで，以下の仮定を導入する．

仮定 3.1 行列対 (A_{22}, B_2) 及び行列対 (A_{22}, C_2) は，それぞれ可安定であり，及び可検出である．また，行列対 $(A_0, \sqrt{S_0})$ 及び行列対 $(A_0, \sqrt{Q_0})$ は，それぞれ可安定であり，及び可検出である．

注意 3.1 行列 A_0, S_0, Q_0を記述する公式の中には，リカッチ方程式 (3.17c) の解$\bar{P}_{22}$が含まれているが，以下の補題により，実際には依存しない．

補題 3.1 行列

$$T_1 = \begin{bmatrix} A_{11} & -S_{11} \\ -Q_{11} & -A_{11}^T \end{bmatrix}, \; T_2 = \begin{bmatrix} A_{12} & -S_{12} \\ -Q_{12} & -A_{21}^T \end{bmatrix}$$
$$T_3 = \begin{bmatrix} A_{21} & -S_{12}^T \\ -Q_{12}^T & -A_{12}^T \end{bmatrix}, \; T_4 = \begin{bmatrix} A_{22} & -S_{22} \\ -Q_{22} & -A_{22}^T \end{bmatrix}$$

に対し，

$$T_0 = T_1 - T_2 T_4^{-1} T_3 = \begin{bmatrix} A_0 & -S_0 \\ -Q_0 & -A_0^T \end{bmatrix} \tag{3.18}$$

が成立する．

(補題 3.1 の証明)　まず，T_4について，

$$T_4 = \begin{bmatrix} I & 0 \\ \bar{P}_{22}^T & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} D_4 & -S_{22} \\ 0 & -D_4^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I & 0 \\ -\bar{P}_{22} & I \end{bmatrix}$$

が成立する．さらに，

$$T_4^{-1} = \begin{bmatrix} I & 0 \\ \bar{P}_{22} & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} D_4^{-1} & -D_4^{-1} S_{22} D_4^{-T} \\ 0 & -D_4^{-T} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I & 0 \\ -\bar{P}_{22}^T & I \end{bmatrix}$$

と計算される．したがって，実際に $T_1 - T_2 T_4^{-1} T_3$に代入して計算すれば関係式 (3.18) が導出される．□

つぎに偏差を定義する．

$$P_{11} = \bar{P}_{11} + \varepsilon E_{11} \tag{3.19a}$$

$$P_{21} = \bar{P}_{21} + \varepsilon E_{21} \tag{3.19b}$$

$$P_{22} = \bar{P}_{22} + \varepsilon E_{22} \tag{3.19c}$$

以上を方程式 (3.15) に代入する.

0–オーダ方程式 (3.17) を用いて, 偏差 Eについての方程式 (3.20) が得られる.

$$E_{11}^T D_0 + D_0^T E_{11} + V^T H_1^T + H_1 V - V^T H_3 V - \varepsilon H_2 = 0 \tag{3.20a}$$

$$E_{11}^T D_2 + E_{21}^T D_4 + D_3^T E_{22} - H_1 = 0 \tag{3.20b}$$

$$E_{22}^T D_4 + D_4^T E_{22} - H_3 = 0 \tag{3.20c}$$

ただし

$$\begin{aligned}
H_1 &= -A_{11}^T P_{21}^T + P_{11}^T S_{11} P_{21}^T + P_{21}^T S_{12}^T P_{21}^T + \varepsilon(E_{11}^T S_{12} E_{22} + E_{21}^T S_{22} E_{22}) \\
H_2 &= E_{11}^T S_{11} E_{11} + E_{21}^T S_{22} E_{21} + E_{11}^T S_{12} E_{21} + E_{21}^T S_{12}^T E_{11} \\
H_3 &= -A_{12}^T P_{21}^T - P_{21} A_{12} + \varepsilon P_{21} S_{11} P_{21}^T \\
&\quad +\varepsilon E_{22}^T S_{22} E_{22} + P_{21} S_{12} P_{22} + P_{22}^T S_{12}^T P_{21}^T \\
D_0 &= D_1 - D_2 D_4^{-1} D_3,\ V = D_4^{-1} D_3 \\
D_1 &= A_{11} - S_{11} \bar{P}_{11} - S_{12} \bar{P}_{21} \\
D_3 &= A_{21} - S_{12}^T \bar{P}_{11} - S_{22} \bar{P}_{21}
\end{aligned}$$

したがって偏差についての以下の再帰的アルゴリズム (3.21) が導出される.

$$E_{11}^{(j+1)T} D_0 + D_0^T E_{11}^{(j+1)} = -V^T H_1^{(j)T} - H_1^{(j)} V + V^T H_3^{(j)} V + \varepsilon H_2^{(j)} \tag{3.21a}$$

$$E_{11}^{(j+1)T} D_2 + E_{21}^{(j+1)T} D_4 + D_3^T E_{22}^{(j+1)} = H_1^{(j)} \tag{3.21b}$$

$$E_{22}^{(j+1)T} D_4 + D_4^T E_{22}^{(j+1)} = H_3^{(j)} \tag{3.21c}$$

ただし

$$\begin{aligned}
H_1^{(j)} &= -A_{11}^T P_{21}^{(j)T} + P_{11}^{(j)T} S_{11} P_{21}^{(j)T} + P_{21}^{(j)T} S_{12}^T P_{21}^{(j)T} \\
&\quad +\varepsilon(E_{11}^{(j)T} S_{12} E_{22}^{(j)} + E_{21}^{(j)T} S_{22} E_{22}^{(j)}) \\
H_2^{(j)} &= E_{11}^{(j)T} S_{11} E_{11}^{(j)} + E_{21}^{(j)T} S_{22} E_{21}^{(j)} + E_{11}^{(j)T} S_{12} E_{21}^{(j)} + E_{21}^{(j)T} S_{12}^T E_{11}^{(j)} \\
H_3^{(j)} &= -A_{12}^T P_{21}^{(j)T} - P_{21}^{(j)} A_{12} \\
&\quad +\varepsilon P_{21}^{(j)} S_{11} P_{21}^{(j)T} + \varepsilon E_{22}^{(j)T} S_{22} E_{22}^{(j)} + P_{21}^{(j)} S_{12} P_{22}^{(j)} + P_{22}^{(j)T} S_{12}^T P_{21}^{(j)T} \\
P_{11}^{(j)} &= \bar{P}_{11} + \varepsilon E_{11}^{(j)} \\
P_{21}^{(j)} &= \bar{P}_{21} + \varepsilon E_{21}^{(j)} \\
P_{22}^{(j)} &= \bar{P}_{22} + \varepsilon E_{22}^{(j)} \\
E_{11}^{(0)} &= E_{21}^{(0)} = E_{22}^{(0)} = 0
\end{aligned}$$

ここで, $^{(j)}$はj番目の値, $^{(j+1)}$は$j+1$番目の値を意味する. したがって, j番目の値が求まれば, 逐次的に$j+1$番目の値が定まり, これを再帰的に求めればよい.

注意 3.2 初期値を$E_{11}^{(0)} = E_{21}^{(0)} = E_{22}^{(0)} = 0$と選択しているが, 陰関数定理及び, (3.22)からεが十分小さいとき, 任意の初期値に対して提案された再帰的アルゴリズムは収束する. ここでは, 収束するための時間を短縮するために, εが十分小さいとき, 偏差E_{ij}が十分小さいことを利用して, $E_{11}^{(0)} = E_{21}^{(0)} = E_{22}^{(0)} = 0$と選択する.

つぎに, 簡単にアルゴリズムの説明を与える.

STEP 1. 0–オーダ方程式である (3.17) から, 0–オーダ解$\bar{P}_{11}, \bar{P}_{21}, \bar{P}_{22}$を求める.

STEP 2. 偏差$E_{11}^{(i)}, E_{21}^{(i)}, E_{22}^{(i)}$から, 再帰的アルゴリズムである差分方程式 (3.21) を用いて, 偏差$E_{11}^{(i+1)}, E_{21}^{(i+1)}, E_{22}^{(i+1)}$を計算する.

STEP 3. 誤差

$$\alpha_1 = ||E_{11}^{(i+1)} - E_{11}^{(i)}||_2$$
$$\alpha_2 = ||E_{21}^{(i+1)} - E_{21}^{(i)}||_2$$
$$\alpha_3 = ||E_{22}^{(i+1)} - E_{22}^{(i)}||_2$$

を計算する.

ただし, マトリクスノルム$||\cdot||_2$は, 任意の行列Xについて最大特異値をあらわす. すなわち, $||X||_2 \equiv [\lambda_{\max}(X^TX)]^{1/2}$である. 以下も同様に定義される.

STEP 4. $\alpha_l < \delta, (l = 1, 2, 3)$ を満足するまで STEP 2.～ STEP 4. を繰り返す. ここで, δは十分小さな正の定数である.

STEP 5. 一般化リカッチ方程式 (3.13) の解

$$P = \begin{bmatrix} P_{11} & \varepsilon P_{21}^T \\ P_{21} & P_{22} \end{bmatrix}$$

を求める.

3.4 再帰的アルゴリズムの収束

まず, 定理をあげる.

定理 3.1 仮定 3.1 における条件のもとで, アルゴリズム (3.21) は, k回の繰り返し計算によって, 偏差 Eの正確な値に $O(\varepsilon^k)$ の高精度で収束する. すなわち,

$$||\bar{E} - E^{(k)}||_2 = O(\varepsilon^k), \quad (k = 1, 2, \cdots) \tag{3.22}$$

または

$$||\bar{E} - E^{(k+1)}||_2 = O(\varepsilon)||\bar{E} - E^{(k)}||_2, \quad (k = 1, 2, \cdots) \tag{3.23}$$

ただし

$$E = \begin{bmatrix} \bar{E}_{11} & \bar{E}_{21} \\ \bar{E}_{21}^T & \bar{E}_{22} \end{bmatrix}, E^{(k)} = \begin{bmatrix} E_{11}^{(k)} & E_{21}^{(k)} \\ E_{21}^{(k)T} & E_{22}^{(k)} \end{bmatrix}$$

(定理 3.1 の証明)　まず, 収束解の存在 (解の唯一性) は, $\varepsilon = 0$ におけるヤコビ行列が非特異であることを示せばよい. 陰関数定理 (Dieudonné 1982, 杉浦 1985) を用いるために, アルゴリズム (3.21) に対するヤコビ行列を以下のように計算する.

[Jacobi matrix]

$$J|_{\varepsilon=0} \;=\; \begin{bmatrix} J_{11} & 0 & 0 \\ J_{21} & J_{22} & J_{23} \\ 0 & 0 & J_{33} \end{bmatrix} \tag{3.24}$$

ただし

$$\begin{aligned}
J_{11} &= I \otimes D_0 + D_0^T \otimes I \\
J_{22} &= I \otimes D_4 \\
J_{33} &= I \otimes D_4 + D_4^T \otimes I \\
J_{k1} &= \frac{\partial L_k}{\partial E_{11}}|_{\varepsilon=0},\ J_{k2} \;=\; \frac{\partial L_k}{\partial E_{21}}|_{\varepsilon=0},\ J_{k3} \;=\; \frac{\partial L_k}{\partial E_{22}}|_{\varepsilon=0},\ (k = 1, 2, 3) \\
L_1 &= E_{11}^T D_0 + D_0^T E_{11} + V^T H_1^T + H_1 V 12pt - V^T H_3 V - \varepsilon H_2 \\
L_2 &= E_{11}^T D_2 + E_{21}^T D_4 + D_3^T E_{22} - H_1 \\
L_3 &= E_{22}^T D_4 + D_4^T E_{22} - H_3
\end{aligned}$$

$\otimes$はクロネッカ積である. ここで, $D_4 = A_{22} - S_{22}\bar{P}_{22}$はリカッチ方程式 (3.17c) が, 仮定 3.1 から安定化解をもつので安定である.

同様に, $A_0 - S_0\bar{P}_{11}$は, リカッチ方程式 (3.17a) が, 仮定 3.1 から安定化解をもつので安定である. したがって,

$$\begin{aligned}
& A_0 - S_0\bar{P}_{11} \\
= \;& A_{11} + N_1 A_{21} + S_{12} N_2^T + N_1 S_{22} N_2^T
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
& -(S_{11}+N_1S_{12}^T+S_{12}N_1^T+N_1S_{22}N_1^T)\bar{P}_{11} \\
= \quad & A_{11}+N_1A_{21}-S_{11}\bar{P}_{11}-N_1S_{12}^T\bar{P}_{11}+S_{12}N_2^T+N_1S_{22}N_2^T-S_{12}N_1^T\bar{P}_{11} \\
& -N_1S_{22}N_1^T\bar{P}_{11} \\
= \quad & A_{11}-S_{11}\bar{P}_{11}+N_1(A_{21}-S_{12}^T\bar{P}_{11})-S_{12}(-N_2^T+N_1^T\bar{P}_{11}) \\
& -N_1S_{22}(-N_2^T+N_1^T\bar{P}_{11}) \\
= \quad & A_{11}-S_{11}\bar{P}_{11}-S_{12}\bar{P}_{21}+N_1(A_{21}-S_{12}^T\bar{P}_{11}-S_{22}\bar{P}_{21}) \\
= \quad & D_1-D_2D_4^{-1}D_3=D_0
\end{aligned}
$$

となるので, D_0は安定となる. 以上より, ヤコビ行列が非特異であるから, 陰関数定理を適用してただ1組の解 $(E_{11},\ E_{21},\ E_{22})=(\bar{E}_{11},\ \bar{E}_{21},\ \bar{E}_{22})$ をもつ. 続いて, 収束性について証明する. $\bar{E}_{11},\ \bar{E}_{21},\ \bar{E}_{22}$は, (3.20) を満足するので,

$$\bar{E}_{11}^TD_0+D_0^T\bar{E}_{11}+V^T\bar{H}_1^T+\bar{H}_1V-V^T\bar{H}_3V-\varepsilon\bar{H}_2=0 \tag{3.25a}$$

$$\bar{E}_{11}^TD_2+\bar{E}_{21}^TD_4+D_3^T\bar{E}_{22}-\bar{H}_1=0 \tag{3.25b}$$

$$\bar{E}_{22}^TD_4+D_4^T\bar{E}_{22}-\bar{H}_3=0 \tag{3.25c}$$

となる. ただし,

$$
\begin{aligned}
\bar{H}_1 &= -A_{11}^T\hat{P}_{21}^T+\hat{P}_{11}^TS_{11}\hat{P}_{21}^T+\hat{P}_{21}^TS_{12}^T\hat{P}_{21}^T+\varepsilon(\bar{E}_{11}^TS_{12}\bar{E}_{22}+\bar{E}_{21}^TS_{22}\bar{E}_{22}) \\
\bar{H}_2 &= \bar{E}_{11}^TS_{11}\bar{E}_{11}+\bar{E}_{21}^TS_{22}\bar{E}_{21}+\bar{E}_{11}^TS_{12}\bar{E}_{21}+\bar{E}_{21}^TS_{12}^T\bar{E}_{11} \\
\bar{H}_3 &= -A_{12}^T\hat{P}_{21}^T-\hat{P}_{21}A_{12}+\varepsilon\hat{P}_{21}S_{11}\hat{P}_{21}^T \\
&\qquad +\varepsilon\bar{E}_{22}^TS_{22}\bar{E}_{22}+\hat{P}_{21}S_{12}\hat{P}_{22}+\hat{P}_{22}^TS_{12}^T\hat{P}_{21}^T \\
\hat{P}_{11} &= \bar{P}_{11}+\varepsilon\bar{E}_{11},\ \hat{P}_{21} = \bar{P}_{21}+\varepsilon\bar{E}_{21},\ \hat{P}_{22} = \bar{P}_{22}+\varepsilon\bar{E}_{22}
\end{aligned}
$$

である. 次に, アルゴリズム (3.21) において, $j=0$ とおき, (3.25) との差をとる.

$$(\bar{E}_{22}-E_{22}^{(1)})D_4+D_4^T(\bar{E}_{22}-E_{22}^{(1)})=\varepsilon\mathcal{F}_3(\bar{E}_{21},\ \bar{E}_{22},\ \varepsilon) \tag{3.26a}$$

$$(\bar{E}_{11}-E_{11}^{(1)})D_0+D_0^T(\bar{E}_{11}-E_{11}^{(1)})=\varepsilon\mathcal{F}_1(\bar{E}_{11},\ \bar{E}_{21},\ \varepsilon) \tag{3.26b}$$

$$(\bar{E}_{21}-E_{21}^{(1)})^TD_4=\varepsilon\mathcal{F}_2(\bar{E}_{11},\ \bar{E}_{21},\ \bar{E}_{22},\ \varepsilon) \tag{3.26c}$$

ここで, 関数 $\mathcal{F}_1,\ \mathcal{F}_2,\ \mathcal{F}_3$は, $\varepsilon,\ \bar{E}_{11},\ \bar{E}_{21},\ \bar{E}_{22}$を適切に含む陰関数である. $D_4,\ D_0$は安定行列なので,

$$||\bar{E}_{22}-E_{22}^{(1)}||_2=O(\varepsilon),\ ||\bar{E}_{11}-E_{11}^{(1)}||_2=O(\varepsilon),\ ||\bar{E}_{21}-E_{21}^{(1)}||_2=O(\varepsilon) \tag{3.27}$$

となる．この操作を帰納的に $j=1,\ 2,\ 3,\cdots$ と続ければ，

$$||H_1-H_1^{(j-1)}||_2=O(\varepsilon^j),\ ||H_2-H_2^{(j-1)}||_2=O(\varepsilon^j),\ ||H_3-H_3^{(j-1)}||_2=O(\varepsilon^j) \quad (3.28)$$

に注意して，

$$||\bar{E}_{11}-E_{11}^{(j)}||_2=O(\varepsilon^j),\ ||\bar{E}_{21}-E_{21}^{(j)}||_2=O(\varepsilon^j),\ ||\bar{E}_{22}-E_{22}^{(j)}||_2=O(\varepsilon^j) \quad (3.29)$$

となる．したがって，(3.22) が得られる．以上から，任意の初期値に対して，εが小さいなら再帰的アルゴリズム (3.21) は収束する．また，その収束解は$\bar{E}_{11}$，$\bar{E}_{21}$，$\bar{E}_{22}$である． □

3.5 数値例

簡単な 2 つの数値例に対して上述のアルゴリズムを適用し，解を求める．

3.5.1 数値例 1

システムはつぎのように記述される (Wang *et al.* 1993).

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \varepsilon \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}u \quad (3.30)$$

以上の拘束条件のもとで，評価関数

$$J=\frac{1}{2}\int_0^\infty(x_1^2+x_2^2+u^2)dt \quad (3.31)$$

を最小にする最適制御入力を決定する．

方程式 (3.30) において，(2,2) 成分すなわち小行列 A_{22}は 0 なので非標準特異摂動システムである．

本章で提案されたアルゴリズムを上述の問題に適用すれば，つぎの一般化リカッチ方程式の解を得ることができる．

$\varepsilon=0.01$ における計算結果は以下のとおりである．

表 3.1 $\varepsilon=0.01$ の Pの値
Tab.3.1. Value of P when $\varepsilon=0.01$

j	P_{11}	P_{21}	P_{22}
1	1.41421	2.41421	1.0
2	1.44836	2.41421	1.02414
3	1.44794	2.41421	1.02385
4	1.44795	2.41421	1.02386
5	1.44795	2.41421	1.02386
6	1.44795	2.41421	1.02386
7	1.44795	2.41421	1.02386

したがって, Pはつぎの値になる.

$$P_{pro} = \begin{bmatrix} 1.44795 & 2.41421 \times 10^{-2} \\ 2.41421 & 1.02386 \end{bmatrix} \tag{3.32}$$

このとき, 最適制御入力は,

$$u^*_{pro} = -\begin{bmatrix} 2.41421 & 1.02386 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \tag{3.33}$$

と求められる. ただし, $\delta = 10^{-8}$とした.

ここで, Wang ら (1988) によって求められたこのシステムにおける最適制御入力は, 次式で与えられる.

$$u^*_{exa} = -\begin{bmatrix} 2.4142 & 1.0239 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \tag{3.34}$$

また, 初期値

$$\begin{bmatrix} x_1(0) \\ x_2(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1.0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

に対する評価関数Jの値は以下のとおりである.

$$\begin{aligned} J_0 &= 1.44834 \\ J_{pro} &= 1.44794 \\ J_{exa} &= 1.44794 \end{aligned}$$

ここで, J_0は0–オーダ解の評価関数の値. J_{pro}は提案型の方法を利用して得られた解P_{pro}の評価関数の値. J_{exa}は Wang ら (1988) によって求められた評価関数の値を意味する.

以上, 本章で提案されたアルゴリズムは, 再帰的に求めているために, 収束までの計算が7回となったが, この計算の複雑さを除けば, 数値的に比較して, 十分有効であることがわかる.

3.5.2 数値例 2

Chow ら (1976) が扱っている数値例に対し, 以下の修正したシステムを考える. すなわち, 行列A_{22}の (1,1) 成分を 0 に修正し, A_{22}が特異になるように選ぶ.

$$\dot{x}_1 = A_{11}x_1 + A_{12}x_2 + B_1u \tag{3.35a}$$

$$\varepsilon\dot{x}_2 = A_{21}x_1 + A_{22}x_2 + B_2u \tag{3.35b}$$

$$A_{11} = \begin{bmatrix} 0 & 0.4 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad A_{12} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0.345 & 0 \end{bmatrix}$$
$$A_{21} = \begin{bmatrix} 0 & -0.524 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad A_{22} = \begin{bmatrix} 0 & 0.262 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$
$$B_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad B_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

以上の拘束条件のもとで, $x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$ とおくとき, 評価関数

$$J = \frac{1}{2}\int_0^\infty (x^T Q x + u^T R u)dt \tag{3.36}$$
$$Q = \mathrm{diag}\{1, 0, 1, 0\}, \quad R = 1$$

を最小にする最適制御入力を決定する. まず, $\varepsilon = 0$ における 0–オーダ解を求める.

$$\bar{P}_{11} = \begin{bmatrix} 6.28430 & 2.89855 \\ 2.89855 & 7.28616 \end{bmatrix}$$
$$\bar{P}_{21} = \begin{bmatrix} 4.71185 & 2.21075 \\ 1.0 & 4.47252 \times 10^{-2} \end{bmatrix}$$
$$\bar{P}_{22} = \begin{bmatrix} 4.71184 & 1.0 \\ 1.0 & 2.34504 \times 10^{-1} \end{bmatrix}$$

つぎに, $\varepsilon = 0.1$ に対する一般化リカッチ方程式の解は, 8 回の繰返し計算によって, つぎのように得られる.

$$\begin{aligned} P_{pro} &= \begin{bmatrix} P_{11} & \varepsilon P_{21}^T \\ P_{21} & P_{22} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 6.45275 & 3.12766 & 0.47755 & 0.1 \\ 3.12766 & 7.50339 & 0.23816 & 0.00788 \\ 4.77545 & 2.38163 & 5.14253 & 1.07904 \\ 1.0 & 0.07878 & 1.07904 & 0.25116 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

このとき, 最適制御入力は,

$$u_{pro}^* = -\begin{bmatrix} 1.0 & 7.87788 \times 10^{-2} & 1.07904 & 2.51167 \times 10^{-1} \end{bmatrix} x$$

と求められる. ただし, $\delta = 10^{-8}$とした.

ここで, 本章で提案されたアルゴリズムの有効性を比較するために, 通常のレギュレータ理論で扱われているリカッチ方程式の手法を用いて, リカッチ方程式を分割計算しない

で直接解いた解と，最適制御入力は次式で与えられる．

$$P_{exa} = \begin{bmatrix} 6.45261 & 3.12756 & 0.47752 & 0.1 \\ 3.12756 & 7.50334 & 0.23814 & 0.00787 \\ 0.47753 & 0.23815 & 0.51425 & 0.10790 \\ 0.1 & 0.00786 & 0.10790 & 0.02511 \end{bmatrix}$$

$$u^*_{exa} = -\begin{bmatrix} 9.99971\times 10^{-1} & 7.87612\times 10^{-2} & 1.07904 & 2.51165\times 10^{-1} \end{bmatrix} x$$

最後に，初期値

$$\begin{bmatrix} x_1(0) \\ x_2(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1.0 \\ 1.0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

に対する評価関数 Jの値は以下のとおりである．

$$\begin{aligned} J_0 &= 20.25387 \\ J_{pro} &= 20.21159 \\ J_{exa} &= 20.21107 \end{aligned}$$

ここで，J_0は 0–オーダ解の評価関数の値．J_{pro}は提案型の方法を利用して得られた解 P_{pro}の評価関数の値．J_{exa}は直接リカッチ方程式を解いて得られた解 P_{exa}の評価関数の値を意味する．

この 2 つの結果を比較する．まず，本章で提案されたアルゴリズムで得られた解 P_{pro}の P_{21}, P_{22}にεをかければ，リカッチ方程式を直接解いて得られた解 P_{exa}に限りなく近づく．つまり，

$$\begin{bmatrix} P_{11} & \varepsilon P_{21}^T \\ \varepsilon P_{21} & \varepsilon P_{22} \end{bmatrix} \to P_{exa} \tag{3.37}$$

したがって一般化リカッチ方程式の解が 10^{-3}オーダの範囲で得られた結果は妥当であることがわかる．制御入力に関しても 10^{-3}オーダの範囲で一致していることがわかる．

続いて，$\varepsilon = 0.0001$ であるとき，本アルゴリズムでは，4 回の繰返し計算によって以下の収束解が得られる．

$$\begin{aligned} P_{pro} &= \begin{bmatrix} P_{11} & \varepsilon P_{21}^T \\ P_{21} & P_{22} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 6.28447 & 2.89877 & 0.00047 & 0.0001 \\ 2.89877 & 7.28635 & 0.00022 & 0.000004 \\ 4.71191 & 2.21092 & 4.71226 & 1.00008 \\ 1.0 & 0.04475 & 1.00008 & 0.23452 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

このとき, 最適制御入力は,

$$u_{pro}^{*} = -\left[\begin{array}{cccc} 1.0 & 4.47598\times10^{-2} & 1.00008 & 2.34520\times10^{-1}\end{array}\right] x$$

である. また, MATLAB を使用しての計算結果は以下である.

$$\begin{aligned} P_{exa} &= \begin{bmatrix} 6.2845 & 2.8988 & 0.0005 & 0.0001 \\ 2.8988 & 7.2864 & 0.0002 & 0.0000 \\ 0.0005 & 0.0002 & 0.0005 & 0.0001 \\ 0.0001 & 0.0000 & 0.0001 & 0.0000 \end{bmatrix} \\ u_{exa} &= -\left[\begin{array}{cccc} 1.0000 & 0.0448 & 1.0001 & 0.2345 \end{array}\right] x \end{aligned}$$

これらを比較してみれば, 提案型の再帰的アルゴリズムでは, εが十分 0 に近くても解を得ることができる.

注意 3.3 MATLAB は制御工学やシステム理論に役立つ豊富な関数をもつ制御設計用 CAD である. 数値例で使用した関数は, *Control System* TOOLBOX にあるリカッチ代数方程式 $A^TX+XA-XBX+C=0$ を解くための関数 are である. are で使用されているアルゴリズムは, Schur 分解法である. この Schur 分解は, 基本的に固有ベクトル法と同じであるが, 固有ベクトルの代わりに, 固有空間の基底ベクトルを利用する点に特徴がある. これは, 数値計算上問題のある固有ベクトルをわざわざ求めなくても, 固有空間の基底さえ分かれば, 固有ベクトル法と同様の計算によって解が得られる. 以上の観点から, 現在では数あるリカッチ方程式の解法の中でも, 演算効率, 信頼性などの点で最も優れた解法とされている.

3.6 まとめ

本章では, A_{22}^{-1}が存在しない非標準特異摂動システムにおける最適レギュレータ問題を扱っている. A_{22}^{-1}が存在しない場合, 通常の最適レギュレータ理論でみられたような方法を用いて, リカッチ方程式を導出すると, 0–オーダ方程式の変換はできない. よって, ディスクリプタシステムにおける Hamilton–Jacobi 方程式を利用して最適フィードバックゲインを求めることを提案した.

このとき, 最適制御入力を求めるために一般化リカッチ方程式が現れる. したがって, 非標準特異摂動システムの最適レギュレータ問題について, Gajic らと異なった方法で再帰的アルゴリズムを導出できた.

また, このアルゴリズムの収束性の証明に陰関数定理を用いた. その結果, 十分小さな正のパラメータ (ε) に対し, 収束解の存在を証明することができた.

以上から, 第 2 章の合成制御則と異なり, 再帰的アルゴリズムを利用することにより, 最適な評価関数の値を達成することができた.

本章では，導出されたアルゴリズムの有効性を検証するために2つの簡単な数値例を示した．この数値例によって，εが十分小さくても，収束解が得られることが示された．また，得られた解は妥当なものであることがわかる．

|||| 第4章

非標準特異摂動システムにおける LQG 問題のための再帰的アルゴリズム

この章では, 第3章と比較して, 問題の対象を最適レギュレータ問題 (LQR 問題) から, LQG 問題に拡張し, 扱われていなかった非標準特異摂動システムにおける LQG 問題のための再帰的アルゴリズムを導出する.

4.1 はじめに

第3章で扱った最適レギュレータ問題 (LQR 問題) に対して, 特異摂動システムにおける Linear–Quadratic–Gaussian (LQG) 問題について, 多くの研究結果が報告されている (Haddad *et al.* 1976, Khalil *et al.* 1984, Gajic 1986). Khalil ら (1984) は, レギュレータゲインとフィルタゲインを求めるための2つのリカッチ方程式を分割して解の性質を研究している. また, Gajic(1986) は, Khalil ら (1984) の論文に基づいて, 2つのレギュレータリカッチ方程式とフィルタリカッチ方程式に再帰的アルゴリズムを適用して解を求めている. しかし, これらの研究報告のいずれの場合においても, A_{22}が非特異である標準特異摂動システムの場合のみ研究の対象としている. 近年, A_{22}が特異であるようなシステムにおける研究報告がなされている (Khalil 1989, Wang *et al.* 1988, Wang *et al.* 1992, Xu *et al.* 1988). 中でも, Khalil(1989) 及び, Wang ら (1992) は, A_{22}が特異である非標準特異摂動システムにおけるレギュレータ問題を扱っている. これらの論文では, ディスクリプタシステムの理論を用いての研究が行われている. しかし, 再帰的アルゴリズムを利用しての制御ゲインを求める研究は行われていない. さらに, 標準特異摂動システムにおける再帰的アルゴリズムの研究はここ10年間にわたり行われてきたが, その間 A_{22}が特異である非標準特異摂動システムにおける再帰的アルゴリズムの研究はなされていない.

そこで, 本章では, 第 3 章と同様に, 扱われていなかった非標準特異摂動システムにおける LQG 問題に対する再帰的アルゴリズムを導出する. 大きな特徴は以下の 2 つである. まず第 1 に, 第 3 章と同様に, 2 つのリカッチ方程式の解の存在性を保証する仮定に Gajic(1986) と異なり, A_{22}が非特異である必要がないことである. つまり, 2 つのレギュレータリカッチ方程式とフィルタリカッチ方程式が, A_{22}が特異行列であっても解が存在する. 第 2 に, 2 つの最適ゲインを求める際に, 解く必要のある 2 つのリカッチ方程式を一般化リカッチ方程式に変換し, この一般化リカッチ方程式を解くことである. 第 3 章では, ディスクリプタ理論を利用して一般化リカッチ方程式を導出したが, 本章では, 代数計算による等価性を利用して一般化リカッチ方程式を導出する. この一般化リカッチ方程式を導入することにより, Gajic(1986) が提案している 2 つのリカッチ方程式の解 P, Q の形を変形することができた. また, 新たな公式を導入することにより 0–オーダ方程式を変形することができた. ここでも, A_{22}は非特異である必要はない.

4.2 非標準特異摂動システムのための LQG 問題

4.2.1 非標準特異摂動システム

システムに摂動項を含む状態空間法において, 以下のような線形時不変非標準特異摂動システム (4.1) を考える.

$$\dot{x}_1(t) = A_{11}x_1(t) + A_{12}x_2(t) + B_1u(t) + G_1w(t) \tag{4.1a}$$

$$\varepsilon\dot{x}_2(t) = A_{21}x_1(t) + A_{22}x_2(t) + B_2u(t) + G_2w(t) \tag{4.1b}$$

$$y(t) = C_1x_1(t) + C_2x_2(t) + v(t) \tag{4.1c}$$

このシステムに対する評価関数は (4.2) である.

$$J = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T}\mathcal{E}\{\int_0^T [z^T(t)z(t) + u^T(t)Ru(t)]dt\},\ R > 0 \tag{4.2}$$

ここで, 記号 $\mathcal{E}$は期待値を意味する. 又, システム (4.1b) 中のεは十分小さな正のパラメータ, $u(t) \in \mathbf{R}^m$は制御入力, $y(t) \in \mathbf{R}^l$は観測出力, $x_i(t) \in \mathbf{R}^{n_i} (i = 1, 2)$ は状態ベクトル, $w(t) \in \mathbf{R}^r$と $v(t) \in \mathbf{R}^l$は互いに独立で平均 0 の正規白色雑音, すなわち,

$$\begin{aligned}
\mathcal{E}\{w(t)\} &= \mathcal{E}\{v(t)\} = 0 \\
\mathcal{E}\{w(t)w^T(\tau)\} &= V_1\delta(t-\tau) \\
\mathcal{E}\{v(t)v^T(\tau)\} &= V_2\delta(t-\tau) \\
\mathcal{E}\{w(t)v^T(\tau)\} &= 0 \\
V_1 > 0,\ V_2 > 0 &
\end{aligned}$$

をあらわす．ここでδはディラックのデルタ関数を表す．また，$z(t) \in \mathbf{R}^s$は評価出力であり，(4.3) の形をもつ．

$$z(t) = \bar{C}_1 x_1(t) + \bar{C}_2 x_2(t) \tag{4.3}$$

システム (4.1) において，A_{22}が特異である，つまり，A_{22}^{-1}が存在しないシステムを一般に非標準特異摂動システムと呼ぶ．

4.2.2 LQG 問題の解

まず，以下の行列を定義する．

$$\begin{aligned}
A_\varepsilon &= \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ \varepsilon^{-1}A_{21} & \varepsilon^{-1}A_{22} \end{bmatrix} \\
B_\varepsilon &= \begin{bmatrix} B_1 \\ \varepsilon^{-1}B_2 \end{bmatrix},\ G_\varepsilon = \begin{bmatrix} G_1 \\ \varepsilon^{-1}G_2 \end{bmatrix} \\
C &= \begin{bmatrix} C_1 & C_2 \end{bmatrix} \\
Q &= \begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{12} \\ Q_{12}^T & Q_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{C}_1^T\bar{C}_1 & \bar{C}_1^T\bar{C}_2 \\ \bar{C}_2^T\bar{C}_1 & \bar{C}_2^T\bar{C}_2 \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

したがって，システム (4.1) は，システム (4.4) になる．

$$\dot{x}(t) = A_\varepsilon x(t) + B_\varepsilon u(t) + G_\varepsilon w(t) \tag{4.4a}$$

$$y(t) = Cx(t) + v(t) \tag{4.4b}$$

この非標準特異摂動システムに対する LQG 問題の制御則は，(4.5) によって与えられる (Haddad *et al.* 1977)．

$$\dot{\hat{x}}(t) = A_\varepsilon \hat{x}(t) + B_\varepsilon u(t) + L[y(t) - C\hat{x}(t)] \tag{4.5a}$$

$$u(t) = K\hat{x}(t) \tag{4.5b}$$

レギュレータゲイン Kは

$$K = -R^{-1}B_\varepsilon^T P_\varepsilon \tag{4.6}$$

である．ここで P_εは，次のリカッチ方程式を満たす．

$$P_\varepsilon A_\varepsilon + A_\varepsilon^T P_\varepsilon - P_\varepsilon B_\varepsilon R^{-1} B_\varepsilon^T P_\varepsilon + Q = 0 \tag{4.7}$$

一方，フィルタゲイン L は

$$L = W_\varepsilon C^T V_2^{-1} \tag{4.8}$$

である. 同様に W_ε は, 次のリカッチ方程式を満たす.

$$A_\varepsilon W_\varepsilon + W_\varepsilon A_\varepsilon^T - W_\varepsilon C^T V_2^{-1} C W_\varepsilon + G_\varepsilon V_1 G_\varepsilon^T = 0 \tag{4.9}$$

ただし,

$$P_\varepsilon = \begin{bmatrix} P_{11} & \varepsilon P_{21}^T \\ \varepsilon P_{21} & \varepsilon P_{22} \end{bmatrix},\ W_\varepsilon = \begin{bmatrix} W_{11} & W_{12} \\ W_{12}^T & \varepsilon^{-1} W_{22} \end{bmatrix}$$

4.3 一般化リカッチ方程式の変換

この章では, 2つのリカッチ方程式 (4.7), (4.9) を一般化リカッチ方程式に変換する補題をあげる.

補題 4.1 2つの代数リカッチ方程式 (4.7), (4.9) は, それぞれ以下によって与えられる2組の一般化リカッチ方程式 (4.10), (4.11) に等価である.

$$P^T A + A^T P - P^T B R^{-1} B^T P + Q = 0 \tag{4.10a}$$

$$D_1^T P = P^T D_1 \tag{4.10b}$$

$$A W^T + W A^T - W C^T V_2^{-1} C W^T + G V_1 G^T = 0 \tag{4.11a}$$

$$W^T D_2 = D_2^T W \tag{4.11b}$$

ここで,

$$\begin{aligned} P &= \begin{bmatrix} P_{11} & \varepsilon P_{21}^T \\ P_{21} & P_{22} \end{bmatrix},\ W = \begin{bmatrix} W_{11} & W_{12} \\ \varepsilon W_{12}^T & W_{22} \end{bmatrix} \\ D_1 &= \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & \varepsilon I \end{bmatrix},\ D_2 = \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & \varepsilon^{-1} I \end{bmatrix} \\ A &= \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix},\ B = \begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \end{bmatrix} \\ G &= \begin{bmatrix} G_1 \\ G_2 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

(補題 4.1 の証明)　まず, 方程式 (4.10b) から

$$P_\varepsilon = D_1^T P = P^T D_1 \tag{4.12}$$

となる．したがって，$A_\varepsilon = D_1^{-1}A$, $B_\varepsilon = D_1^{-1}B$に注意すれば，

$$
\begin{aligned}
& P_\varepsilon A_\varepsilon + A_\varepsilon^T P_\varepsilon - P_\varepsilon B_\varepsilon R^{-1} B_\varepsilon^T P_\varepsilon + Q \\
= \;& P^T D_1 D_1^{-1} A + A^T D_1^{-T} D_1^T P - P^T D_1 D_1^{-1} B R^{-1} B^T D_1^{-T} D_1^T P = 0 \\
\Leftrightarrow \;& P^T A + A^T P - P^T B R^{-1} B^T P + Q = 0
\end{aligned}
$$

となる．同様に，方程式 (4.11b) から

$$
W_\varepsilon = W^T D_2 = D_2^T W \tag{4.13}
$$

であり，$A_\varepsilon = D_2 A$, $G_\varepsilon = D_2 G$ に注意すれば，

$$
\begin{aligned}
& A_\varepsilon W_\varepsilon + W_\varepsilon A_\varepsilon^T - W_\varepsilon C^T V_2^{-1} C W_\varepsilon + G_\varepsilon V_1 G_\varepsilon^T \\
= \;& D_2 A W^T D_2 + D_2^T W A^T D_2^T - D_2^T W C^T V_2^{-1} C W^T D_2 + D_2 G V_1 G^T D_2^T = 0 \\
\Leftrightarrow \;& A W^T + W A^T - W C^T V_2^{-1} C W^T + G V_1 G^T = 0
\end{aligned}
$$

となる．以上から，2 つの代数リカッチ方程式 (4.7), (4.9) を解くことは，導出された一般化リカッチ方程式 (4.10), (4.11) を解くことに等価である． □

4.4 再帰的アルゴリズムの導出

この節では，一般化リカッチ方程式 (4.10) 及び (4.11) の再帰的アルゴリズムを導出する．まず，以下のように行列を定義する．

$$
\begin{aligned}
S_{11} &= B_1 R^{-1} B_1^T \\
S_{12} &= B_1 R^{-1} B_2^T \\
S_{22} &= B_2 R^{-1} B_2^T
\end{aligned}
$$

方程式 (4.10a) を分割計算することにより，

$$
\begin{aligned}
& A_{11}^T P_{11} + P_{11}^T A_{11} + A_{21}^T P_{21} + P_{21}^T A_{21} - P_{11}^T S_{11} P_{11} - P_{21}^T S_{22} P_{21} \\
& \quad - P_{11}^T S_{12} P_{21} - P_{21}^T S_{12}^T P_{11} + Q_{11} = 0
\end{aligned} \tag{4.14a}
$$

$$
\begin{aligned}
& \varepsilon P_{21} A_{11} + P_{22}^T A_{21} + A_{12}^T P_{11} + A_{22}^T P_{21} - \varepsilon P_{21} S_{11} P_{11} \\
& \quad - \varepsilon P_{21} S_{12} P_{21} - P_{22}^T S_{12}^T P_{11} - P_{22}^T S_{22} P_{21} + Q_{12}^T = 0
\end{aligned} \tag{4.14b}
$$

$$
\begin{aligned}
& A_{22}^T P_{22} + P_{22}^T A_{22} + \varepsilon A_{12}^T P_{21}^T + \varepsilon P_{21} A_{12} - P_{22}^T S_{22} P_{22} \\
& \quad - \varepsilon P_{22}^T S_{12}^T P_{21}^T - \varepsilon P_{21} S_{12} P_{22} - \varepsilon^2 P_{21} S_{11} P_{21}^T + Q_{22} = 0
\end{aligned} \tag{4.14c}
$$

同様に, 以下のように行列を定義する.

$$
\begin{aligned}
U_{11} &= C_1^T V_2^{-1} C_1 \\
U_{12} &= C_1^T V_2^{-1} C_2 \\
U_{22} &= C_2^T V_2^{-1} C_2
\end{aligned}
$$

方程式 (4.11a) を分割計算することにより,

$$
\begin{aligned}
&A_{11}W_{11}^T + W_{11}A_{11}^T + A_{12}W_{12}^T + W_{12}A_{12}^T - W_{11}U_{11}W_{11}^T - W_{12}U_{22}W_{12}^T \\
&\quad -W_{11}U_{12}W_{12}^T - W_{12}U_{12}^TW_{11}^T + G_1V_1G_1^T = 0 \qquad (4.15a)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&\varepsilon A_{11}W_{12} + A_{12}W_{22}^T + W_{11}A_{21}^T + W_{12}A_{22}^T - \varepsilon W_{11}U_{11}W_{12} \\
&\quad -\varepsilon W_{12}U_{12}^TW_{12} - W_{11}U_{12}W_{22}^T - W_{12}U_{22}W_{22}^T + G_1V_1G_2^T = 0 \qquad (4.15b)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&A_{22}W_{22}^T + W_{22}A_{22}^T + \varepsilon A_{21}W_{12} + \varepsilon W_{12}^TA_{21}^T - W_{22}U_{22}W_{22}^T \\
&\quad -\varepsilon W_{12}^TU_{12}W_{22}^T - \varepsilon W_{22}U_{12}^TW_{12} - \varepsilon^2 W_{12}^TU_{11}W_{12} + G_2V_1G_2^T = 0 \qquad (4.15c)
\end{aligned}
$$

を得る.

4.4.1 Pの一般化リカッチ方程式の再帰的アルゴリズム

リカッチ方程式 (4.14) において$\varepsilon = 0$ とすれば, 方程式 (4.16) を得る. ここで, 0–オーダ方程式の解を$\bar{P}_{11}, \bar{P}_{21}, \bar{P}_{22}$とおく.

$$
\begin{aligned}
&A_{11}^T\bar{P}_{11} + \bar{P}_{11}^TA_{11} + A_{21}^T\bar{P}_{21} + \bar{P}_{21}^TA_{21} \\
&\quad -\bar{P}_{11}^TS_{11}\bar{P}_{11} - \bar{P}_{21}^TS_{22}\bar{P}_{21} - \bar{P}_{11}^TS_{12}\bar{P}_{21} - \bar{P}_{21}^TS_{12}^T\bar{P}_{11} + Q_{11} = 0 \qquad (4.16a)
\end{aligned}
$$

$$
\bar{P}_{22}^TA_{21} + A_{12}^T\bar{P}_{11} + A_{22}^T\bar{P}_{21} - \bar{P}_{22}^TS_{12}^T\bar{P}_{11} - \bar{P}_{22}^TS_{22}\bar{P}_{21} + Q_{12}^T = 0 \qquad (4.16b)
$$

$$
A_{22}^T\bar{P}_{22} + \bar{P}_{22}^TA_{22} - \bar{P}_{22}^TS_{22}\bar{P}_{22} + Q_{22} = 0 \qquad (4.16c)
$$

方程式 (4.16c) について以下の仮定を導入する.

仮定 4.1 方程式 (4.16c) は, 行列 $A_{22} - S_{22}\bar{P}_{22}$を安定とするような唯一の準正定解$\bar{P}_{22}$をもつ.

仮定 4.1 から，方程式 (4.16c) が安定化解$\bar{P}_{22}$ をもつ．したがって $A_{22} - S_{22}\bar{P}_{22}$が非特異であることから $(A_{22} - S_{22}\bar{P}_{22})^{-1}$は存在する．

以上から次の 0–オーダ方程式 (4.17) を得る．

[0–order equation]

$$\bar{P}_{11}^T A_P + A_P^T \bar{P}_{11} - \bar{P}_{11}^T S_P \bar{P}_{11} + Q_P = 0 \tag{4.17a}$$

$$\bar{P}_{21} = -N_2^T + N_1^T \bar{P}_{11} \tag{4.17b}$$

$$A_{22}^T \bar{P}_{22} + \bar{P}_{22}^T A_{22} - \bar{P}_{22}^T S_{22} \bar{P}_{22} + Q_{22} = 0 \tag{4.17c}$$

ただし

$$\begin{aligned}
A_P &= A_{11} + N_1 A_{21} + S_{12} N_2^T + N_1 S_{22} N_2^T \\
S_P &= S_{11} + N_1 S_{12}^T + S_{12} N_1^T + N_1 S_{22} N_1^T \\
Q_P &= Q_{11} - N_2 A_{21} - A_{21}^T N_2^T - N_2 S_{22} N_2^T \\
N_2^T &= D_4^{-T} \hat{Q}_{12}^T,\ N_1^T = -D_4^{-T} D_2^T \\
D_2 &= A_{12} - S_{12}\bar{P}_{22},\ D_4 = A_{22} - S_{22}\bar{P}_{22} \\
\hat{Q}_{12} &= Q_{12} + A_{21}^T \bar{P}_{22}
\end{aligned}$$

次に，以下の仮定を導入する．

仮定 4.2 方程式 (4.17a) は，行列 $A_P - S_P\bar{P}_{11}$を安定とするような唯一の準正定解$\bar{P}_{11}$をもつ．

次に偏差 Eを定義する．

$$P_{11} = \bar{P}_{11} + \varepsilon E_{11} \tag{4.18a}$$

$$P_{21} = \bar{P}_{21} + \varepsilon E_{21} \tag{4.18b}$$

$$P_{22} = \bar{P}_{22} + \varepsilon E_{22} \tag{4.18c}$$

以上を方程式 (4.14) に代入する．

0–オーダ方程式 (4.17) を用いて，偏差 Eについての方程式 (4.19) が得られる．

$$E_{11}^T D_0 + D_0^T E_{11} + V^T H_{P1}^T + H_{P1} V - V^T H_{P3} V - \varepsilon H_{P2} = 0 \tag{4.19a}$$

$$E_{11}^T D_2 + E_{21}^T D_4 + D_3^T E_{22} - H_{P1} = 0 \tag{4.19b}$$

$$E_{22}^T D_4 + D_4^T E_{22} - H_{P3} = 0 \tag{4.19c}$$

ただし

$$\begin{aligned}
H_{P1} &= -A_{11}^T P_{21}^T + P_{11}^T S_{11} P_{21}^T + P_{21}^T S_{12}^T P_{21}^T + \varepsilon(E_{11}^T S_{12} E_{22} + E_{21}^T S_{22} E_{22}) \\
H_{P2} &= E_{11}^T S_{11} E_{11} + E_{21}^T S_{22} E_{21} + E_{11}^T S_{12} E_{21} + E_{21}^T S_{12}^T E_{11} \\
H_{P3} &= -A_{12}^T P_{21}^T - P_{21} A_{12} + \varepsilon P_{21} S_{11} P_{21}^T + \varepsilon E_{22}^T S_{22} E_{22} \\
&\quad + P_{21} S_{12} P_{22} + P_{22}^T S_{12}^T P_{21}^T \\
D_0 &= D_1 - D_2 D_4^{-1} D_3,\ V = D_4^{-1} D_3 \\
D_1 &= A_{11} - S_{11}\bar{P}_{11} - S_{12}\bar{P}_{21} \\
D_3 &= A_{21} - S_{12}^T \bar{P}_{11} - S_{22}\bar{P}_{21}
\end{aligned}$$

したがって偏差 Eについての以下の再帰的アルゴリズム (4.20) が導出される.

$$E_{11}^{(j+1)T} D_0 + D_0^T E_{11}^{(j+1)} = -V^T H_{P1}^{(j)T} - H_{P1}^{(j)} V + V^T H_{P3}^{(j)} V + \varepsilon H_{P2}^{(j)} \tag{4.20a}$$

$$E_{11}^{(j+1)T} D_2 + E_{21}^{(j+1)T} D_4 + D_3^T E_{22}^{(j+1)} = H_{P1}^{(j)} \tag{4.20b}$$

$$E_{22}^{(j+1)T} D_4 + D_4^T E_{22}^{(j+1)} = H_{P3}^{(j)} \tag{4.20c}$$

ただし

$$\begin{aligned}
H_{P1}^{(j)} &= -A_{11}^T P_{21}^{(j)T} + P_{11}^{(j)T} S_{11} P_{21}^{(j)T} + P_{21}^{(j)T} S_{12}^T P_{21}^{(j)T} \\
&\quad + \varepsilon(E_{11}^{(j)T} S_{12} E_{22}^{(j)} + E_{21}^{(j)T} S_{22} E_{22}^{(j)}) \\
H_{P2}^{(j)} &= E_{11}^{(j)T} S_{11} E_{11}^{(j)} + E_{21}^{(j)T} S_{22} E_{21}^{(j)} + E_{11}^{(j)T} S_{12} E_{21}^{(j)} + E_{21}^{(j)T} S_{12}^T E_{11}^{(j)} \\
H_{P3}^{(j)} &= -A_{12}^T P_{21}^{(j)T} - P_{21}^{(j)} A_{12} + \varepsilon P_{21}^{(j)} S_{11} P_{21}^{(j)T} + \varepsilon E_{22}^{(j)T} S_{22} E_{22}^{(j)} \\
&\quad + P_{21}^{(j)} S_{12} P_{22}^{(j)} + P_{22}^{(j)T} S_{12}^T P_{21}^{(j)T} \\
P_{11}^{(j)} &= \bar{P}_{11} + \varepsilon E_{11}^{(j)} \\
P_{21}^{(j)} &= \bar{P}_{21} + \varepsilon E_{21}^{(j)} \\
P_{22}^{(j)} &= \bar{P}_{22} + \varepsilon E_{22}^{(j)} \\
E_{11}^{(0)} &= E_{21}^{(0)} = E_{22}^{(0)} = 0
\end{aligned}$$

ここで, $^{(j)}$は j番目の値, $^{(j+1)}$は $j+1$ 番目の値を意味する. したがって, j番目の値が求まれば, 逐次的に $j+1$ 番目の値が定まり, これを再帰的に求めれば良い.

4.4.2 偏差 Eの収束性の証明

まず, 定理をあげる.

定理 4.1 2つの仮定 4.1, 仮定 4.2 における条件のもとで, アルゴリズム (4.20) は, k回の繰り返し計算によって, 偏差 Eの正確な値に $O(\varepsilon^k)$ の高精度で収束する. すなわち,

$$||E - E^{(k)}||_2 = O(\varepsilon^k), \quad (k = 1, 2, \cdots) \tag{4.21}$$

または

$$||E - E^{(k+1)}||_2 = O(\varepsilon)||E - E^{(k)}||_2 \tag{4.22}$$

$$(k = 1, 2, \cdots)$$

ただし

$$E = \begin{bmatrix} E_{11} & E_{21}^T \\ E_{21} & E_{22} \end{bmatrix}, E^{(k)} = \begin{bmatrix} E_{11}^{(k)} & E_{21}^{(k)T} \\ E_{21}^{(k)} & E_{22}^{(k)} \end{bmatrix}$$

(定理 4.1 の証明) 再帰的アルゴリズム (4.20) において, $\varepsilon = 0$ の近傍における収束解 E の存在は陰関数定理により証明できる. 陰関数定理 (Dieudonné 1982, 杉浦 1985) を適用するために, アルゴリズム (4.20) に対するヤコビ行列を計算する.

[Jacobi matrix]

$$J^1|_{\varepsilon=0} \quad = \quad \begin{bmatrix} J_{11}^1 & 0 & 0 \\ J_{21}^1 & J_{22}^1 & J_{23}^1 \\ 0 & 0 & J_{33}^1 \end{bmatrix} \tag{4.23}$$

ただし

$$\begin{aligned} J_{11}^1 &= I \otimes D_0 + D_0^T \otimes I \\ J_{22}^1 &= I \otimes D_4 \\ J_{33}^1 &= I \otimes D_4 + D_4^T \otimes I \end{aligned}$$

$\otimes$はクロネッカ積である. ここで, $D_4 = A_{22} - S_{22}\bar{P}_{22}$はリカッチ方程式 (4.17c) が, 仮定 4.1 から安定化解をもつので安定である. 同様に, $A_P - S_P\bar{P}_{11}$は, リカッチ方程式 (4.17a) が, 仮定 4.2 から安定化解をもつので安定である. したがって,

$$\begin{aligned} & A_P - S_P\bar{P}_{11} \\ = \; & A_{11} + N_1A_{21} + S_{12}N_2^T + N_1S_{22}N_2^T \\ & \quad -(S_{11} + N_1S_{12}^T + S_{12}N_1^T + N_1S_{22}N_1^T)\bar{P}_{11} \\ = \; & A_{11} + N_1A_{21} - S_{11}\bar{P}_{11} - N_1S_{12}^T\bar{P}_{11} + S_{12}N_2^T + N_1S_{22}N_2^T \\ & \quad -S_{12}N_1^T\bar{P}_{11} - N_1S_{22}N_1^T\bar{P}_{11} \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= A_{11} - S_{11}\bar{P}_{11} + N_1(A_{21} - S_{12}^T\bar{P}_{11}) - S_{12}(-N_2^T + N_1^T\bar{P}_{11}) \\
&\qquad -N_1S_{22}(-N_2^T + N_1^T\bar{P}_{11}) \\
&= A_{11} - S_{11}\bar{P}_{11} - S_{12}\bar{P}_{21} + N_1(A_{21} - S_{12}^T\bar{P}_{11} - S_{22}\bar{P}_{21}) \\
&= D_1 - D_2D_4^{-1}D_3 \\
&= D_0
\end{aligned}
$$

となるので，D_0は安定となる．以上より，ヤコビ行列が非特異であるから，陰関数定理を適用して再帰的アルゴリズムの収束性が証明される． □

4.4.3 Wの一般化リカッチ方程式の再帰的アルゴリズム

Pと同様に，リカッチ方程式 (4.15) において$\varepsilon = 0$ とする．

次の連立方程式 (4.24) について考える．このとき，方程式 (4.24c) について以下の仮定を導入する．

仮定 4.3 方程式 (4.24c) は，行列 $A_{22} - \bar{W}_{22}U_{22}$を安定とするような唯一の準正定解$\bar{W}_{22}$をもつ．

仮定 4.3 から，方程式 (4.24c) が安定化解$\bar{W}_{22}$ をもつ．したがって $A_{22} - U_{22}\bar{W}_{22}$が非特異であることから $(A_{22} - U_{22}\bar{W}_{22})^{-1}$は存在する．

以上から$\bar{W}$についての 0–オーダ方程式 (4.24) を得る．ここで，0–オーダ方程式の解を$\bar{W}_{11}, \bar{W}_{21}, \bar{W}_{22}$とおく．

[0–order equation]

$$\bar{W}_{11}A_W^T + A_W\bar{W}_{11}^T - \bar{W}_{11}U_W\bar{W}_{11}^T + Q_W = 0 \tag{4.24a}$$

$$\bar{W}_{12} = -M_2 + \bar{W}_{11}M_1 \tag{4.24b}$$

$$\bar{W}_{22}A_{22}^T + A_{22}\bar{W}_{22}^T - \bar{W}_{22}U_{22}\bar{W}_{22}^T + G_2V_1G_2^T = 0 \tag{4.24c}$$

ただし

$$
\begin{aligned}
A_W &= A_{11} + A_{12}M_1^T + M_2U_{12}^T + M_2U_{22}M_1^T \\
U_W &= U_{11}^T + U_{12}M_1^T + M_1U_{12}^T + M_1U_{22}M_1^T \\
Q_W &= G_1V_1G_1^T - A_{12}M_2^T - M_2A_{12}^T - M_2U_{22}M_2^T
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
M_2^T &= T_4^{-1}\hat{V}_{12},\ M_1^T = -T_4^{-1}T_2 \\
T_2 &= A_{21} - \bar{W}_{22}U_{12}^T,\ T_4 = A_{22} - \bar{W}_{22}U_{22}^T \\
\hat{V}_{12} &= \bar{W}_{22}A_{12}^T + G_2V_1G_1^T
\end{aligned}
$$

次に, 以下の仮定を導入する.

仮定 4.4 方程式 (4.24a) は, 行列 $A_W - \bar{W}_{11}U_W$を安定とするような唯一の準正定解$\bar{W}_{11}$をもつ.

次に偏差 Fを定義する.

$$W_{11} = \bar{W}_{11} + \varepsilon F_{11} \tag{4.25a}$$

$$W_{12} = \bar{W}_{12} + \varepsilon F_{12} \tag{4.25b}$$

$$W_{22} = \bar{W}_{22} + \varepsilon F_{22} \tag{4.25c}$$

以上を方程式 (4.15) に代入する. 0-オーダ方程式 (4.24) を用いて, 偏差 Fについての以下の再帰的アルゴリズム (4.26) が導出される.

$$T_0F_{11}^{T(j+1)} + F_{11}^{(j+1)}T_0^T = \varepsilon H_{W2}^{(j)} - Z_2H_{W1}^{T(j)} - H_{W1}^{(j)}Z_2^T + Z_2H_{W3}^{(j)}Z_2^T \tag{4.26a}$$

$$F_{11}^{(j+1)}T_2^T + F_{12}^{(j+1)}T_4^T + T_3F_{22}^{T(j+1)} = H_{W1}^{(j)} \tag{4.26b}$$

$$T_4F_{22}^{T(j+1)} + F_{22}^{(j+1)}T_4^T = H_{W3}^{(j)} \tag{4.26c}$$

ただし

$$
\begin{aligned}
H_{W1}^{(j)} &= -A_{11}W_{12}^{(j)} + W_{11}^{(j)}U_{11}W_{12}^{(j)} + W_{12}^{(j)}U_{12}^TW_{12}^{(j)} \\
&\quad +\varepsilon(F_{11}^{(j)}U_{12}F_{22}^{T(j)} + F_{12}^{(j)}U_{22}F_{22}^{T(j)}) \\
H_{W2}^{(j)} &= F_{11}^{(j)}U_{11}F_{11}^{T(j)} + F_{12}^{(j)}U_{22}F_{12}^{T(j)} + F_{11}^{(j)}U_{12}F_{12}^{T(j)} + F_{12}^{(j)}U_{12}^TF_{11}^{(j)} \\
H_{W3}^{(j)} &= -A_{21}W_{12}^{(j)} - W_{12}^{T(j)}A_{21}^T + \varepsilon W_{12}^{T(j)}U_{11}W_{12}^{(j)} \\
&\quad +\varepsilon F_{22}^{(j)}U_{22}F_{22}^{T(j)} + W_{12}^{T(j)}U_{12}W_{22}^{T(j)} + W_{22}^{(j)}U_{12}^TW_{12}^{(j)} \\
W_{11}^{(j)} &= \bar{W}_{11} + \varepsilon F_{11}^{(j)} \\
W_{12}^{(j)} &= \bar{W}_{12} + \varepsilon F_{12}^{(j)} \\
W_{22}^{(j)} &= \bar{W}_{22} + \varepsilon F_{22}^{(j)} \\
F_{11}^{(0)} &= F_{12}^{(0)} = F_{22}^{(0)} = 0 \\
T_0 &= T_1 - T_3T_4^{-1}T_2,\ Z_2 = T_3T_4^{-1} \\
T_1 &= A_{11} - \bar{W}_{12}U_{12}^T - \bar{W}_{11}U_{11}^T \\
T_3 &= A_{12} - \bar{W}_{12}U_{22}^T - \bar{W}_{11}U_{12}
\end{aligned}
$$

4.4.4 偏差 Fの収束性の証明

定理 4.2 仮定 4.3, 仮定 4.4 における条件のもとで, アルゴリズム (4.26) は, k回の繰り返し計算によって, 偏差 F の正確な値に $O(\varepsilon^k)$ の高精度で収束する. すなわち,

$$||F - F^{(k)}||_2 = O(\varepsilon^k), \quad (k = 1, 2, \cdots) \tag{4.27}$$

ただし

$$F = \begin{bmatrix} F_{11} & F_{12} \\ F_{12}^T & F_{22} \end{bmatrix},\ F^{(k)} = \begin{bmatrix} F_{11}^{(k)} & F_{12}^{(k)} \\ F_{12}^{(k)T} & F_{22}^{(k)} \end{bmatrix}$$

(定理 4.2 の証明)　定理 4.1 と同様に再帰的アルゴリズム (4.26) において, $\varepsilon = 0$ の近傍における収束解 Fの存在は陰関数定理 (Dieudonné 1982, 杉浦 1985) により証明できる. ヤコビ行列は以下のように計算される.

[Jacobi matrix]

$$J^2|_{\varepsilon=0} \;=\; \begin{bmatrix} J_{11}^2 & 0 & 0 \\ J_{21}^2 & J_{22}^2 & J_{23}^2 \\ 0 & 0 & J_{33}^2 \end{bmatrix} \tag{4.28}$$

ただし

$$\begin{aligned} J_{11}^2 &= I \otimes T_0 + T_0^T \otimes I \\ J_{22}^2 &= I \otimes T_4 \\ J_{33}^2 &= I \otimes T_4 + T_4^T \otimes I \end{aligned}$$

ここで, $T_4^T = A_{22}^T - U_{22}\bar{W}_{22}^T$はリカッチ方程式 (4.24c) が, 仮定 4.3 から安定化解をもつので安定である. 同様に, $A_W^T - U_W\bar{W}_{11}^T$は, リカッチ方程式 (4.24a) が, 仮定 4.4 から安定化解をもつので安定である. したがって,

$$\begin{aligned} & A_W^T - U_W\bar{W}_{11}^T \\ =\;& A_{11}^T + A_{12}M_1^T + M_2U_{12}^T + M_2U_{22}M_1^T \\ & \quad -(U_{11}^T + U_{12}M_1^T + M_1U_{12}^T + M_1U_{22}M_1^T)\bar{W}_{11} \\ =\;& A_{11}^T - U_{11}\bar{W}_{11}^T - U_{12}\bar{W}_{12}^T + M_1(A_{12}^T - U_{12}^T\bar{W}_{11}^T - U_{22}\bar{W}_{12}^T) \\ =\;& T_1^T + M_1T_3^T = T_1^T - T_2^TT_4^{-T}T_3^T \\ =\;& T_0^T \end{aligned}$$

となるので, T_0は安定となる. 以上より, ヤコビ行列が非特異であるから, 陰関数定理を適用して再帰的アルゴリズムの収束性が証明される. □

4.5 数値例

簡単な数値例に対して上述のアルゴリズムを適用し，解を求める．
システムは次のように記述される．

$$\dot{x}_1 = x_2 + w \tag{4.29a}$$

$$\varepsilon\dot{x}_2 = x_1 + u + w \tag{4.29b}$$

$$y = 2x_1 + x_2 + v \tag{4.29c}$$

ただし，w, vは正規白色雑音であり，

$$\begin{aligned}
\mathcal{E}\{w(t)\} &= \mathcal{E}\{v(t)\} = 0 \\
\mathcal{E}\{w(t)w^T(\tau)\} &= V_1\delta(t-\tau) \\
\mathcal{E}\{v(t)v^T(\tau)\} &= V_2\delta(t-\tau) \\
\mathcal{E}\{w(t)v^T(\tau)\} &= 0 \\
V_1 = V_2 = 1.0
\end{aligned}$$

を満たす．このとき，最小化する評価関数は (4.30) である．

$$J = \lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\mathcal{E}[\int_0^T (x_1^2 + x_2^2 + u^2)dt] \tag{4.30}$$

システム (4.29b) において，システム (4.1b) における (2,2) 成分すなわち小行列 A_{22}は 0 なので非標準特異摂動システムである．本章で提案されたアルゴリズムを上述の問題に適用すれば，2 つの一般化リカッチ方程式の解を得ることができる．

まず，$\varepsilon = 1.0\times10^{-4}$における計算結果は以下のとおりである．一般化リカッチ方程式 (4.10) の解 Pは，4 回の繰り返し計算によって得られる．収束の判定は $||P^{(j+1)} - P^{(j)}||_2 < 10^{-7}, j = 1, 2, \cdots$ となったところで計算を打ち切る．以下の収束の判定は同様に行う．

$$P_{pro} = \begin{bmatrix} P_{11} & \varepsilon P_{21}^T \\ P_{21} & P_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1.41455 & 2.41421\times10^{-4} \\ 2.41421 & 1.00024 \end{bmatrix}$$

このとき，フィードバックゲイン K_{pro}は，

$$K_{pro} = \begin{bmatrix} -2.41421 & -1.00024 \end{bmatrix}$$

と求められる．

一方，一般化リカッチ方程式 (4.11) の解 Wは，4 回の繰り返し計算によって得られる．

$$W_{pro} = \begin{bmatrix} W_{11} & W_{12} \\ \varepsilon W_{12}^T & W_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1.62491\times10^{-1} & 1.83693 \\ 1.83693\times10^{-4} & 9.99816\times10^{-1} \end{bmatrix}$$

このとき，フィルタゲイン L_{pro} は，

$$L_{pro} = \left[\begin{array}{cc} 2.16191 & 1.00018 \times 10^4 \end{array}\right]$$

と求められる．

ここで，レギュレータリカッチ方程式 (4.7) を分割計算，つまり，提案したアルゴリズムを使用しないで，MATLAB を使用して直接解いた解 P_{exa} と (4.6) 式で与えられるフィードバックゲイン K_{exa} は，次式のように計算される．

$$\begin{aligned} P_{exa} &= \begin{bmatrix} P_{11} & \varepsilon P_{21}^T \\ \varepsilon P_{21} & \varepsilon P_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1.41455 & 2.4142 \times 10^{-4} \\ 2.4142 \times 10^{-4} & 1.00024 \times 10^{-4} \end{bmatrix} \\ K_{exa} &= \left[\begin{array}{cc} -2.4142 & -1.0002 \end{array}\right] \end{aligned}$$

同様に，フィルタリカッチ方程式 (4.9) を直接解いた解 W_{exa} と (4.8) 式で与えられるフィルタゲイン L_{exa} は，次式のように計算される．

$$\begin{aligned} W_{exa} &= \begin{bmatrix} W_{11} & W_{12} \\ W_{12}^T & W_{22}/\varepsilon \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1.6249 \times 10^{-1} & 1.83693 \\ 1.83693 & 9.99816 \times 10^3 \end{bmatrix} \\ L_{exa} &= \left[\begin{array}{cc} 2.16191 & 1.00018 \times 10^4 \end{array}\right] \end{aligned}$$

提案型の再帰的アルゴリズムと直接型の 2 つの結果を比較する．再帰的アルゴリズムを用いて解いた 2 つの一般化リカッチ方程式 (4.10), (4.11) の解 P_{pro}, W_{pro}，および 2 つの最適ゲイン K_{pro}, L_{pro} は，分割計算せず直接解いたリカッチ方程式 (4.7), (4.9) の解 P_{exa}, W_{exa} と 2 つの最適ゲイン K_{exa}, L_{exa} について 10^{-4} オーダの範囲で，行列の各要素について一致する．したがって，Gajic ら (1984) が提案した従来型と異なり，係数行列 A_{22} が特異であっても，提案型のアルゴリズムが有効であることがわかる．

続いて，$\varepsilon = 1.0 \times 10^{-8}$ における計算結果は以下のとおりである．一般化リカッチ方程式 (4.10) の解 P は，3 回の繰り返し計算によって得られる．

$$P_{pro} = \begin{bmatrix} P_{11} & \varepsilon P_{21}^T \\ P_{21} & P_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1.41421 & 2.41421 \times 10^{-8} \\ 2.41421 & 1.00000 \end{bmatrix}$$

このとき，フィードバックゲイン K_{pro} は，

$$K_{pro} = \left[\begin{array}{cc} -2.41421 & -1.00000 \end{array}\right]$$

と求められる．また，一般化リカッチ方程式 (4.11) の解 W は，3 回の繰り返し計算によって得られる．

$$W_{pro} = \begin{bmatrix} W_{11} & W_{12} \\ \varepsilon W_{12}^T & W_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1.62278 \times 10^{-1} & 1.83772 \\ 1.83772 \times 10^{-8} & 1.00000 \end{bmatrix}$$

このとき，フィルタゲイン L_{pro} は，

$$L_{pro} = \left[\begin{array}{cc} 2.16228 & 1.0 \times 10^8 \end{array}\right]$$

と求められる.

ここで, レギュレータリカッチ方程式 (4.7) を直接解いた解 P_{exa} と (4.6) 式で与えられるフィードバックゲイン K_{exa} は, 次式のように計算される.

$$
\begin{aligned}
P_{exa} &= \begin{bmatrix} P_{11} & \varepsilon P_{21}^T \\ \varepsilon P_{21} & \varepsilon P_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1.4142 & 2.4142 \times 10^{-8} \\ 2.4142 \times 10^{-8} & 1.0000 \times 10^{-8} \end{bmatrix} \\
K_{exa} &= \begin{bmatrix} -2.4142 & -1.0000 \end{bmatrix}
\end{aligned}
$$

一方, フィルタリカッチ方程式 (4.9) は, 係数行列である $G_\varepsilon V_1 G_\varepsilon^T$ と $C^T V_2^{-1} C$ のオーダの違いから直接解くことは困難である. しかし, ε が十分小さいシステムにおいても提案型の再帰的アルゴリズムでは, 容易に 2 つのリカッチ方程式 (4.7), (4.9) の解が得られた. したがって, この数値例の場合, 提案型が有効であることが示された.

4.6 まとめ

本章では, 第 3 章の拡張として, A_{22}^{-1} が存在しない非標準特異摂動システムにおける LQG 問題を扱っている. 本章では, 次の 2 つの大きな特徴がある.

(i) 2 つのリカッチ方程式の解の存在性を保証する仮定に, A_{22} が非特異である必要がない.

(ii) 2 つの最適ゲインを求める際に, 解く必要のある 2 つのリカッチ方程式を一般化リカッチ方程式に変換し, この一般化リカッチ方程式を解く.

したがって, 非標準特異摂動システムの LQG 問題について, Gajic ら (1986) と異なった仮定で, 第 3 章と同様に再帰的アルゴリズムを導出できた. また, このアルゴリズムの収束性の証明に陰関数定理を用いることにより, 十分小さな正のパラメータ (ε) に対し, 収束解の存在を証明することができた.

さらに, 本章では, 導出されたアルゴリズムの有効性を検証するために数値例を示した. この数値例によって, A_{22} が特異行列の場合でも解が得られることが示された. また, ε が十分小さくても, 収束解が得られることが示された.

以上の得られた結果は, 数値例からも妥当なものであることがわかる.

第5章

摂動項を含むH_∞タイプリカッチ方程式のための再帰的アルゴリズム

この章では, 第3章, 第4章で扱った最適レギュレータ及びLQGタイプのリカッチ代数方程式のための再帰的アルゴリズムの拡張として, H_∞タイプリカッチ代数方程式のための再帰的アルゴリズムを導出する.

5.1 はじめに

第3章及び, 第4章で扱った最適レギュレータ (LQR) 及びLQGタイプのリカッチ代数方程式の解の性質は従来から大変多く研究されている (児玉, 須田 1978). さらに, 近年では, H_∞制御問題に関連するリカッチ方程式の解の構造について盛んに研究されている (Hewer 1993, 西村, 狩野 1996). 中でも, 有界実補題 (strict bounded real lemma) に現れる以下の形式のリカッチ方程式 (5.1)

$$A^TP + PA + PBB^TP + C^TC = 0 \tag{5.1}$$

について, 準正定である安定化解の存在する必要十分条件は,

"Aが漸近安定かつ$||B(sI-A)^{-1}C||_\infty < 1$"

を満たすことである. (Zhou *et al.* 1988, Hewer 1993, Doyle *et al.*1989)

標準的な特異摂動システムにおけるH_∞制御問題において, Pan ら (1993, 1994) はゲーム理論の手法を利用して, 2つのsubsystemであるfast system及びslow systemの伝達関数のH_∞ノルムの最大値を考えることによって, full-order systemの制御則が存在するための十分条件を導出している. また, 特異摂動システムにおける有界実補題において, Dragon(1996) は摂動項εが十分小さいとき, full-order systemの伝達関数のH_∞ノルムが,

$||G_\varepsilon||_\infty < \gamma$ を満たすことは, 2 つの subsystem である fast system 及び slow system の伝達関数の H_∞ ノルムの最大値が $\max\{||G_F||_\infty, ||G_S||_\infty\} < \gamma$を満たすことと等価であることを証明している.

特異摂動システムの場合において, 有界実補題で扱われる以下の形式の H_∞タイプリカッチ方程式

$$A_\varepsilon^T P_\varepsilon + P_\varepsilon A_\varepsilon + (P_\varepsilon B_\varepsilon + C^T H)(\gamma^2 I - H^T H)^{-1}(B_\varepsilon^T P_\varepsilon + H^T C) + C^T C = 0 \tag{5.2}$$

について, 解の存在条件は, Dragon(1996) によって研究された. しかし, 実際に方程式 (5.2) を解くとき, 係数行列である $A_\varepsilon, B_\varepsilon$に摂動項$\varepsilon$を含むので, 数値的に解くことは困難である. 過去に, 再帰的アルゴリズム (Gajic *et al.* 1995, Gajic *et al* 1990) を利用した方程式 (5.2) の数値解法は研究されていない. この理由は, まず, 第 3 章や第 4 章で扱ったリカッチ方程式と異なり, H_∞タイプリカッチ方程式 (5.2) の P_εの 2 次項である係数行列中に存在する$\gamma^2 I - H^T H$が正定である. したがって, 従来の仮定である可制御性や可観測性の条件のもとでは, 再帰的アルゴリズムを利用して得られた H_∞タイプリカッチ方程式 (5.2) の解が準正定かつ安定化解である保証がない. つぎに, H_∞タイプリカッチ方程式 (5.2) の係数行列中には, パラメータγが含まれている. したがって, 準正定かつ安定化解が存在するγの範囲を直接摂動項を含んだままγ-イタレーションなどの方法によって試行錯誤的に決定しなければ H_∞タイプリカッチ方程式 (5.2) を解くことができない. その結果, 準正定かつ安定化解が存在するγの範囲が先に求まらない限り, 収束する保証がないため再帰的アルゴリズムを使用することはできない. 以上の理由が考えられる.

そこで, 本章では, 第 3 章及び, 第 4 章で扱った最適レギュレータ及び LQG タイプのリカッチ方程式の再帰的アルゴリズムの手法を利用して, H_∞タイプリカッチ方程式 (5.2) を解くための新たな再帰的アルゴリズを提案する. アルゴリズム自体には, 第 3 章及び, 第 4 章と大きな差異はないが, リカッチ方程式の 2 次の項が正定であることから, 再帰的アルゴリズムによって得られた解が準正定かつ安定化解の保証がない. したがって, 新たに導出された再帰的アルゴリズムによって得られた解が所要の性質 (準正定かつ安定化解) を満たすことを示すのが本章の大きな目的である. さらに, この章では, リカッチ方程式 (5.2) が, 準正定かつ安定化解が存在するための十分条件を低次元化された 2 つのリカッチ方程式から導出する. すなわち, 再帰的アルゴリズムを利用して導出する. 導出された十分条件は, 2 つの subsystem である fast system 及び slow system の伝達関数の H_∞ノルム条件によって与えられるという点では本質的に Pan ら (1993, 1994) の結果と類似しているが, 証明方法において重要な変更点もある. また, 提案したアルゴリズムは, 導出された 2 つのノルム条件を満足すれば, 必ず収束解をもつ. 得られた収束解は準正定であり, リカッチ方程式 (5.2) の安定化解になる.

5.2 準備

以下の線形時不変システムを考える (Dragan 1996).

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bw(t) \tag{5.3a}$$

$$z(t) = Cx(t) + Hw(t) \tag{5.3b}$$

ここで, $w(t) \in \mathbf{R}^m$は外乱, $z(t) \in \mathbf{R}^l$は出力ベクトル, $x(t) \in \mathbf{R}^n$は状態ベクトルをあらわす. 又, 各係数行列は適当な次元をもつ. このとき, $w(t)$ から $z(t)$ までの伝達関数は (5.4) によって与えられる.

$$G(s) = C(sI - A)^{-1}B + H \tag{5.4}$$

このとき以下の補題が成立する. (Zhou *et al.* 1988, Hewer 1993, Doyle *et al.*1989 Lancaster *et al.* 1995)

補題 5.1 2 つの条件 i. 及び ii. は等価である.

(i) A が安定行列かつ,

$$||G(s)||_\infty = \sup_\omega \bar{\sigma}(G(j\omega)) < \gamma \tag{5.5}$$

ここで, $\bar{\sigma}$は最大特異値をあらわす.

(ii) $\gamma^2 I - H^T H > 0$ かつリカッチ方程式

$$\begin{aligned} &A^T P + PA + (PB + C^T H)(\gamma^2 I - H^T H)^{-1} \\ &\cdot(B^T P + H^T C) + C^T C = 0 \end{aligned} \tag{5.6}$$

が準正定である安定化解をもつ.

5.3 再帰的アルゴリズム

5.3.1 一般化リカッチ方程式の変換

特異摂動システムにおいて, システム (5.3) の係数行列 A, B, Cは以下になる.

$$A = A_\varepsilon = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ \varepsilon^{-1}A_{21} & \varepsilon^{-1}A_{22} \end{bmatrix}$$

$$B = B_\varepsilon = \begin{bmatrix} B_1 \\ \varepsilon^{-1}B_2 \end{bmatrix}$$

$$C = \begin{bmatrix} C_1 & C_2 \end{bmatrix}$$

まず, H_∞タイプリカッチ方程式 (5.2) を一般化リカッチ方程式に変換する補題をあげる.

補題 5.2 H_∞タイプリカッチ方程式 (5.2) は, 以下の一般化リカッチ方程式 (5.7) を解くことに等価である.

$$\begin{aligned}&\hat{A}^T P + P^T \hat{A} + (P^T \hat{B} + C^T H)\\&\quad\cdot(\gamma^2 I - H^T H)^{-1}(\hat{B}^T P + H^T C) + C^T C = 0\end{aligned} \tag{5.7a}$$

$$D^T P = P^T D \tag{5.7b}$$

ただし,

$$D = \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & \varepsilon I \end{bmatrix},\ P = \begin{bmatrix} P_{11} & \varepsilon P_{21}^T \\ P_{21} & P_{22} \end{bmatrix}$$

$$\hat{A} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix},\ \hat{B} = \begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \end{bmatrix}$$

(補題 5.2 の証明)　まず, (5.7b) から,

$$P_\varepsilon = D^T P = P^T D \tag{5.8}$$

ただし, リカッチ方程式 (5.2) の解 P_εは

$$P_\varepsilon = \begin{bmatrix} P_{11} & \varepsilon P_{21}^T \\ \varepsilon P_{21} & \varepsilon P_{22} \end{bmatrix} \tag{5.9}$$

である. 続いて,

$$A_\varepsilon = D^{-1}\hat{A},\ B_\varepsilon = D^{-1}\hat{B} \tag{5.10}$$

から,

$$\begin{aligned}&A_\varepsilon^T P_\varepsilon + P_\varepsilon A_\varepsilon + (P_\varepsilon B_\varepsilon + C^T H)(\gamma^2 I - H^T H)^{-1}(B_\varepsilon^T P_\varepsilon + H^T C) + C^T C\\
=\ & \hat{A}^T D^{-T} D^T P + P^T D D^{-1}\hat{A} + (P^T D D^{-1}\hat{B} + C^T H)(\gamma^2 I - H^T H)^{-1}\\
&\qquad (\hat{B}^T D^{-T} D^T P + H^T C) + C^T C = 0\\
\Leftrightarrow\ & \hat{A}^T P + P^T \hat{A} + (P^T \hat{B} + C^T H)\\
&\qquad \cdot(\gamma^2 I - H^T H)^{-1}(\hat{B}^T P + H^T C) + C^T C = 0\end{aligned} \tag{5.11}$$

となる. したがって, H_∞タイプリカッチ方程式 (5.2) を解くことは一般化リカッチ方程式 (5.7) を解くことに等価である. □

5.3.2 再帰的アルゴリズムの導出

この節では一般化リカッチ方程式 (5.7) における再帰的アルゴリズムを導出する．リカッチ方程式 (5.7a) を各ブロックごとに計算する．すなわち，

$$P = \begin{bmatrix} P_{11} & \varepsilon P_{21}^T \\ P_{21} & P_{22} \end{bmatrix} \tag{5.12}$$

を方程式 (5.7a) に代入して計算する．

$$\begin{aligned} &A_{11}^T P_{11} + P_{11}^T A_{11} + A_{21}^T P_{21} + P_{21}^T A_{21} \\ &\qquad + F_1^T(\gamma^2 I - H^T H)F_1 + C_1^T C_1 = 0 \end{aligned} \tag{5.13a}$$

$$\begin{aligned} &\varepsilon P_{21} A_{11} + P_{22}^T A_{21} + A_{12}^T P_{11} + A_{22}^T P_{21} \\ &\qquad + F_2^T(\gamma^2 I - H^T H)F_1 + C_2^T C_1 = 0 \end{aligned} \tag{5.13b}$$

$$\begin{aligned} &A_{22}^T P_{22} + P_{22}^T A_{22} + \varepsilon A_{12}^T P_{21}^T + \varepsilon P_{21} A_{12} \\ &\qquad + F_2^T(\gamma^2 I - H^T H)F_2 + C_2^T C_2 = 0 \end{aligned} \tag{5.13c}$$

$$P_{11}^T B_1 + P_{21}^T B_2 + C_1^T H = F_1^T(\gamma^2 I - H^T H) \tag{5.13d}$$

$$\varepsilon P_{21} B_1 + P_{22}^T B_2 + C_2^T H = F_2^T(\gamma^2 I - H^T H) \tag{5.13e}$$

(5.13) において$\varepsilon \equiv 0$ とおくと 0–オーダ方程式 (5.14) が得られる．ここで，0–オーダ方程式の解を$\bar{P}_{11}, \bar{P}_{21}, \bar{P}_{22}$とおく．

$$A_{11}^T \bar{P}_{11} + \bar{P}_{11}^T A_{11} + A_{21}^T \bar{P}_{21} + \bar{P}_{21}^T A_{21} + F_1^T(\gamma^2 I - H^T H)F_1 + C_1^T C_1 = 0 \tag{5.14a}$$

$$\bar{P}_{22}^T A_{21} + A_{12}^T \bar{P}_{11} + A_{22}^T \bar{P}_{21} + F_2^T(\gamma^2 I - H^T H)F_1 + C_2^T C_1 = 0 \tag{5.14b}$$

$$A_{22}^T \bar{P}_{22} + \bar{P}_{22}^T A_{22} + F_2^T(\gamma^2 I - H^T H)F_2 + C_2^T C_2 = 0 \tag{5.14c}$$

$$\bar{P}_{11}^T B_1 + \bar{P}_{21}^T B_2 + C_1^T H = F_1^T(\gamma^2 I - H^T H) \tag{5.14d}$$

$$\bar{P}_{22}^T B_2 + C_2^T H = F_2^T(\gamma^2 I - H^T H) \tag{5.14e}$$

また, 以下の行列を定義する.

$$\begin{aligned}
\bar{A} &= \begin{bmatrix} A_{111} & A_{112} \\ A_{121} & A_{122} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} + B_1 R^{-1} H^T C_1 & A_{12} + B_1 R^{-1} H^T C_2 \\ A_{21} + B_2 R^{-1} H^T C_1 & A_{22} + B_2 R^{-1} H^T C_2 \end{bmatrix} \\
\bar{B} &= \begin{bmatrix} B_{11} \\ B_{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} B_1 R^{-1/2} \\ B_2 R^{-1/2} \end{bmatrix} \\
\bar{C} &= \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} [I + HR^{-1}H^T]^{1/2} C_1 & [I + HR^{-1}H^T]^{1/2} C_2 \end{bmatrix} \\
R &= \gamma^2 I - H^T H, \quad S_{11} = B_{11} B_{11}^T \\
S_{12} &= B_{11} B_{12}^T, \quad S_{22} = B_{12} B_{12}^T
\end{aligned}$$

したがって, 方程式 (5.14) は下記式 (5.15) になる.

$$\begin{aligned}
& A_{111}^T \bar{P}_{11} + \bar{P}_{11}^T A_{111} + A_{121}^T \bar{P}_{21} + \bar{P}_{21}^T A_{121} + \bar{P}_{11}^T S_{11} \bar{P}_{11} \\
& \quad + \bar{P}_{21}^T S_{22} \bar{P}_{21} + \bar{P}_{11}^T S_{12} \bar{P}_{21} + \bar{P}_{21}^T S_{12}^T \bar{P}_{11} + C_{11}^T C_{11} = 0
\end{aligned} \tag{5.15a}$$

$$\begin{aligned}
& \bar{P}_{22}^T A_{121} + A_{112}^T \bar{P}_{11} + A_{122}^T \bar{P}_{21} \\
& \quad + \bar{P}_{22}^T S_{12}^T \bar{P}_{11} + \bar{P}_{22}^T S_{22} \bar{P}_{21} + C_{12}^T C_{11} = 0
\end{aligned} \tag{5.15b}$$

$$A_{122}^T \bar{P}_{22} + \bar{P}_{22}^T A_{122} + \bar{P}_{22}^T S_{22} \bar{P}_{22} + C_{12}^T C_{12} = 0 \tag{5.15c}$$

後で述べる補題 5.3 のもとで方程式 (5.15c) が解をもつので, $A_{22} + B_2 R^{-1} H^T C_2 + B_2 R^{-1} B_2^T \bar{P}_{22} = A_{122} + S_{22} \bar{P}_{22}$は, 非特異である. したがって $(A_{122} + S_{22} \bar{P}_{22})^{-1}$は存在する. したがって 0–オーダ方程式 (5.16) が得られる.

[0-order equation]

$$\bar{P}_{11}^T A_P + A_P^T \bar{P}_{11} + \bar{P}_{11}^T S_P \bar{P}_{11} + Q_P = 0 \tag{5.16a}$$

$$\bar{P}_{21} = N_2^T + N_1^T \bar{P}_{11} \tag{5.16b}$$

$$A_{122}^T \bar{P}_{22} + \bar{P}_{22}^T A_{122} + \bar{P}_{22}^T S_{22} \bar{P}_{22} + C_{12}^T C_{12} = 0 \tag{5.16c}$$

ただし

$$\begin{aligned}
A_P &= A_{111} + N_1 A_{121} + S_{12} N_2^T + N_1 S_{22} N_2^T \\
S_P &= S_{11} + N_1 S_{12}^T + S_{12} N_1^T + N_1 S_{22} N_1^T \\
Q_P &= C_{11}^T C_{11} + N_2 A_{121} + A_{121}^T N_2^T + N_2 S_{22} N_2^T \\
N_2 &= -\hat{Q}_{12} D_4^{-1}, \ N_1 = -D_2 D_4^{-1} \\
D_2 &= A_{112} + S_{12} \bar{P}_{22}, \ D_4 = A_{122} + S_{22} \bar{P}_{22} \\
\hat{Q}_{12} &= C_{11}^T C_{12} + A_{121}^T \bar{P}_{22}
\end{aligned}$$

ここで, 以下の仮定を導入する (Dragan 1996).

仮定 5.1 $A_{22}, \tilde{A} = A_{11} - A_{12}A_{22}^{-1}A_{21}$は安定行列である.

以上の条件のもとで, 補題 5.3 が成立する.

補題 5.3 仮定 5.1 の条件が成立するとする. また,

$$\underline{\gamma} = \max\{||G_S||_\infty, ||G_F||_\infty\} \tag{5.17a}$$

$$G_S = \tilde{C}(sI - \tilde{A})^{-1}\tilde{B} + \tilde{H} \tag{5.17b}$$

$$G_F = C_2(sI - A_{22})^{-1}B_2 + H \tag{5.17c}$$

と定義する. このとき, $\underline{\gamma} < \gamma$を満足するすべての$\gamma$において, 2 つのリカッチ方程式 (5.16a), (5.16c) は準正定である安定化解$\bar{P}_{11}, \bar{P}_{22}$ をそれぞれもつ. ただし,

$$\begin{aligned}
\tilde{A} &= A_{11} - A_{12}A_{22}^{-1}A_{21} \\
\tilde{B} &= B_1 - A_{12}A_{22}^{-1}B_2 \\
\tilde{C} &= C_1 - C_2A_{22}^{-1}A_{21} \\
\tilde{H} &= H - C_2A_{22}^{-1}B_2
\end{aligned}$$

(補題 5.3 の証明)　まず, 方程式 (5.14) は以下の方程式 (5.18) に変形できる (Dragan 1996).

$$\begin{aligned}
&\tilde{A}\bar{P}_{11} + \bar{P}_{11}^T\tilde{A} + (P_{11}^T\tilde{B} + \tilde{C}^T\tilde{H})(\gamma^2 - \tilde{H}^T\tilde{H})^{-1}(\tilde{B}P_{11} + \tilde{H}^T\tilde{C}) \\
&\quad + \tilde{C}_1^T\tilde{C}_1 = 0
\end{aligned} \tag{5.18a}$$

$$\begin{aligned}
&A_{22}\bar{P}_{22} + \bar{P}_{22}^TA_{22} + (P_{22}^TB_2 + C_2^TH)(\gamma^2 - H^TH)^{-1}(B_2P_{22} \\
&\quad + H^TC_2) + C_2^TC_2 = 0
\end{aligned} \tag{5.18b}$$

したがって, 方程式 (5.18) が準正定である安定化解が存在する条件は, $A_{22}, \tilde{A} = A_{11} - A_{12}A_{22}^{-1}A_{21}$が安定行列かつ, 条件式 (5.17) であたえられる$\underline{\gamma}$について, $\underline{\gamma} < \gamma$を満足することである. 以上から, 方程式 (5.16a), (5.16c) は方程式 (5.18) の変形にすぎないので, 条件式 (5.17) を満足すれば, ブロック分割された新公式であるリカッチ方程式 (5.16a), (5.16c) が準正定である安定化解をもつことがわかる. □

つぎに偏差を定義する.

$$P_{11} = \bar{P}_{11} + \varepsilon E_{11} \tag{5.19a}$$

$$P_{21} = \bar{P}_{21} + \varepsilon E_{21} \tag{5.19b}$$

$$P_{22} = \bar{P}_{22} + \varepsilon E_{22} \tag{5.19c}$$

以上を方程式 (5.13) に代入する.

0–オーダ方程式 (5.16) を用いて, 偏差 Eについての以下の再帰的アルゴリズム (5.20) が導出される.

$$E_{11}^{(j+1)T} D_0 + D_0^T E_{11}^{(j+1)} = V^T H_1^{(j)T} + H_1^{(j)} V - V^T H_3^{(j)} V - \varepsilon H_2^{(j)} \tag{5.20a}$$

$$E_{11}^{(j+1)T} D_2 + E_{21}^{(j+1)T} D_4 + D_3^T E_{22}^{(j+1)} + H_1^{(j)} = 0 \tag{5.20b}$$

$$E_{22}^{(j+1)T} D_4 + D_4^T E_{22}^{(j+1)} + H_3^{(j)} = 0 \tag{5.20c}$$

ただし

$$\begin{aligned}
H_1^{(j)} &= A_{111}^T P_{21}^{(j)T} + P_{11}^{(j)T} S_{11} P_{21}^{(j)T} + P_{21}^{(j)T} S_{12}^T P_{21}^{(j)T} \\
&\quad + \varepsilon (E_{11}^{(j)T} S_{12} E_{22}^{(j)} + E_{21}^{(j)T} S_{22} E_{22}^{(j)}) \\
H_2^{(j)} &= E_{11}^{(j)T} S_{11} E_{11}^{(j)} + E_{21}^{(j)T} S_{22} E_{21}^{(j)} + E_{11}^{(j)T} S_{12} E_{21}^{(j)} + E_{21}^{(j)T} S_{12}^T E_{11}^{(j)} \\
H_3^{(j)} &= A_{112}^T P_{21}^{(j)T} + P_{21}^{(j)} A_{112} + \varepsilon P_{21}^{(j)} S_{11} P_{21}^{(j)T} + \varepsilon E_{22}^{(j)T} S_{22} E_{22}^{(j)} \\
&\quad + P_{21}^{(j)} S_{12} P_{22}^{(j)} + P_{22}^{(j)T} S_{12}^T P_{21}^{(j)T} \\
P_{11}^{(j)} &= \bar{P}_{11} + \varepsilon E_{11}^{(j)} \\
P_{21}^{(j)} &= \bar{P}_{21} + \varepsilon E_{21}^{(j)} \\
P_{22}^{(j)} &= \bar{P}_{22} + \varepsilon E_{22}^{(j)} \\
E_{11}^{(0)} &= E_{21}^{(0)} = E_{22}^{(0)} = 0 \\
D_0 &= D_1 - D_2 D_4^{-1} D_3, \quad V = D_4^{-1} D_3 \\
D_1 &= A_{111} + S_{11} \bar{P}_{11} + S_{12} \bar{P}_{21} \\
D_3 &= A_{121} + S_{12}^T \bar{P}_{11} + S_{22} \bar{P}_{21}
\end{aligned}$$

ここで, $^{(j)}$は j番目の値, $^{(j+1)}$は $j+1$ 番目の値を意味する. したがって, j番目の値が求まれば, 逐次的に $j+1$ 番目の値が定まり, これを再帰的に求めればよい.

5.3.3 再帰的アルゴリズムの収束

定理 5.1 仮定 5.1 における条件のもとで, $\underline{\gamma} < \gamma$を満足するすべての$\gamma$において, H_∞タイプリカッチ方程式 (5.2) は準正定である安定化解をもつ.

このとき, 準正定である安定化解 P_εは, 一般化リカッチ方程式 (5.7) の解 Pを用いて

$$P_\varepsilon = \begin{bmatrix} P_{11} & \varepsilon P_{21}^T \\ \varepsilon P_{21} & \varepsilon P_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{P}_{11} + \varepsilon E_{11} & \varepsilon (\bar{P}_{21} + \varepsilon E_{21})^T \\ \varepsilon (\bar{P}_{21} + \varepsilon E_{21}) & \varepsilon (\bar{P}_{22} + \varepsilon E_{22}) \end{bmatrix} \tag{5.21}$$

によって与えられる．また，アルゴリズム (5.20) は，k回の繰り返し計算によって，偏差 E の正確な値に $O(\varepsilon^k)$ の高精度で収束する．すなわち，

$$||E - E^{(k)}||_2 = O(\varepsilon^k), \quad (k = 1, 2, \cdots) \tag{5.22}$$

ただし

$$E = \begin{bmatrix} E_{11} & E_{21} \\ E_{21}^T & E_{22} \end{bmatrix}, \ E^{(k)} = \begin{bmatrix} E_{11}^{(k)} & E_{21}^{(k)} \\ E_{21}^{(k)T} & E_{22}^{(k)} \end{bmatrix}$$

(定理 5.1 の証明)　収束性の証明には陰関数定理 (Dieudonné 1982, 杉浦 1985) の手法を利用する．すなわち，収束解の存在は，$\varepsilon = 0$ の近傍におけるヤコビ行列が非特異であることを示せばよい．アルゴリズム (5.20) に対するヤコビ行列は以下のように計算される．

[Jacobi matrix]

$$J|_{\varepsilon=0} \ = \ \begin{bmatrix} J_{11} & 0 & 0 \\ J_{21} & J_{22} & J_{23} \\ 0 & 0 & J_{33} \end{bmatrix} \tag{5.23}$$

ただし

$$\begin{aligned}
J_{11} &= I \otimes D_0 + D_0^T \otimes I \\
J_{22} &= I \otimes D_4 \\
J_{33} &= I \otimes D_4 + D_4^T \otimes I \\
J_{k1} &= \frac{\partial L_k}{\partial E_{11}}|_{\varepsilon=0}, \ J_{k2} \ = \ \frac{\partial L_k}{\partial E_{21}}|_{\varepsilon=0} \\
J_{k3} &= \frac{\partial L_k}{\partial E_{22}}|_{\varepsilon=0}, \ (k = 1, 2, 3) \\
L_1 &= E_{11}^T D_0 + D_0^T E_{11} - V^T H_1^T - H_1 V + V^T H_3 V + \varepsilon H_2 \\
L_2 &= E_{11}^T D_2 + E_{21}^T D_4 + D_3^T E_{22} + H_1 \\
L_3 &= E_{22}^T D_4 + D_4^T E_{22} + H_3
\end{aligned}$$

$\otimes$はクロネッカ積である．ここで，$D_4 = A_{122} + S_{22}\bar{P}_{22}$はリカッチ方程式 (5.16c) が，補題 5.3 から安定化解をもつので安定である．

同様に，$A_P + S_P\bar{P}_{11}$は，リカッチ方程式 (5.16a) が，補題 5.3 から安定化解をもつので安定である．したがって，

$$A_P + S_P\bar{P}_{11} = D_1 - D_2 D_4^{-1} D_3 = D_0 \tag{5.24}$$

となるので，D_0は安定となる．以上より，ヤコビ行列が非特異であるから，陰関数定理を適用して再帰的アルゴリズムの収束性が証明される．

続いて, H_∞タイプリカッチ方程式 (5.2) の解 P_εが準正定かつ安定化解であることを示す. 通常, Gajic ら (1990) などで扱われている最適レギュレータ問題において, 最適ゲインを得るために解く必要がある摂動項を含むリカッチ方程式は, 可制御性, 可観測性が仮定されている. したがって, 得られた解は準正定かつ安定化解を保証している. しかし, 本章で扱われている H_∞タイプリカッチ方程式 (5.2) は, 可制御性, 可観測性を仮定していない. そこで, 補題 5.3 を利用して再帰的アルゴリズムによって得られた解が準正定かつ安定化解である証明を新たに行う.

この証明は, $\varepsilon = 0$ の近傍における解 P_εが準正定かつ安定化解であることを示すことに等価である. (5.21) から

$$P_\varepsilon = \begin{bmatrix} P_{11} & \varepsilon P_{21}^T \\ \varepsilon P_{21} & \varepsilon P_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{P}_{11} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + O(\varepsilon) \tag{5.25}$$

である. 補題 5.3 で$\bar{P}_{11}$は準正定であるからεが十分小さいとき, P_εも準正定になる. 続いて,

$$\begin{aligned} & A_\varepsilon + B_\varepsilon R^{-1} H^T C + B_\varepsilon R^{-1} B_\varepsilon^T P_\varepsilon \\ = & \begin{bmatrix} A_{111} & A_{112} \\ \varepsilon^{-1} A_{121} & \varepsilon^{-1} A_{122} \end{bmatrix} \\ & + \begin{bmatrix} S_{11}P_{11} + S_{12}P_{21} & \varepsilon S_{11}P_{21}^T + S_{12}P_{22} \\ \varepsilon^{-1}(S_{12}^T P_{11} + S_{22}P_{21}) & \varepsilon^{-1}(\varepsilon S_{12}^T P_{21}^T + S_{22}P_{22}) \end{bmatrix} \\ = & \begin{bmatrix} D_1 + O(\varepsilon) & D_2 + O(\varepsilon) \\ \varepsilon^{-1}(D_3 + O(\varepsilon)) & \varepsilon^{-1}(D_4 + O(\varepsilon)) \end{bmatrix} \end{aligned} \tag{5.26}$$

である. 収束性の証明と同様に補題 5.3 から D_4は安定行列であり, 関係式 (5.24) と補題 5.3 から $D_0 = D_1 - D_2 D_4^{-1} D_3$も安定行列である. また, 以下の補題が成立する.

補題 5.4 M_{22}^{-1}が存在して, $M_0 = M_{11} - M_{12}M_{22}^{-1}M_{21}$および M_{22}が安定行列であると仮定とする. このとき, システム

$$\dot{y}_1(t) = [M_{11} + O_1(\varepsilon)]y_1(t) + [M_{12} + O_2(\varepsilon)]y_2(t),\ y_1(t_0) = y_1^0 \tag{5.27a}$$

$$\varepsilon\dot{y}_2(t) = [M_{21} + O_3(\varepsilon)]y_1(t) + [M_{22} + O_4(\varepsilon)]y_2(t),\ y_2(t_0) = y_2^0 \tag{5.27b}$$

が$\varepsilon \in (0, \varepsilon^*]$ を満たすすべてのεで漸近安定となるような$\varepsilon^* > 0$ が存在する.

(補題 5.4 の証明) 特異摂動システム (7.1) に対して, $\Delta A_{11}(t) = O_1(\varepsilon)$, $\Delta A_{12}(t) = O_2(\varepsilon)$, $\Delta A_{21}(t) = O_3(\varepsilon)$, $\Delta A_{22}(t) = O_4(\varepsilon)$ とすれば, εが十分小さいとき, $|O_1(\varepsilon)| \le \bar{m}_1$, $|O_2(\varepsilon)| \le \bar{m}_2$, $|O_3(\varepsilon)| \le \bar{m}_3$, $|O_4(\varepsilon)| \le \bar{m}_4$となる十分小さな正定数$\bar{m}_1 \sim \bar{m}_4$が存在する. したがって,

$$\dot{y}_1(t) = [M_{11} + m_1]y_1(t) + [M_{12} + m_2]y_2(t) \tag{5.28a}$$

$$\varepsilon\dot{y}_2(t) = [M_{21} + m_3]y_1(t) + [M_{22} + m_4]y_2(t) \tag{5.28b}$$

となる．ここで，$M_0 = M_{11} - M_{12}M_{22}^{-1}M_{21}$および M_{22}が安定行列であり，かつ，十分小さな$\bar{m}_1 \sim \bar{m}_4$に対して，不等式 (7.5) を満足するから定理 7.1 を利用して安定性が証明される． □

注意 5.1 7 章で，より一般的な不確定要素を含む特異摂動システムの安定性について言及されている．

したがって，εが十分小さいとき補題 5.4 から行列 (5.26) は安定となる．以上から，(5.2) の解 P_εが準正定かつ安定化解であることが示される． □

本章で提案した再帰的アルゴリズムの手法を用いて，定理 5.1 から以下の命題を得ることができる．

命題 5.1 仮定 5.1 および補題 5.3 が成立するとき，十分小さなεに対して

$$||G_\varepsilon(s)||_\infty \;=\; \sup_\omega \bar{\sigma}(G_\varepsilon(j\omega)) \le \max\{||G_S||_\infty,\ ||G_F||_\infty\} \tag{5.29}$$

が成立する．ここで，

$$G_\varepsilon(s) = C(sI - A_\varepsilon)^{-1}B_\varepsilon + H \tag{5.30}$$

である．

(命題 5.1 の証明) 定理 5.1 および補題 5.3 から，まず，$\gamma^2 I - H^T H > 0$ が成立している．次に，$\gamma > \underline{\gamma} = \max\{||G_S||_\infty,\ ||G_F||_\infty\}$ を満たすすべてのγにおいて，H_∞タイプリカッチ方程式 (5.2) は準正定である安定化解をもつので，有界実補題を利用して

$$||G_\varepsilon(s)||_\infty < \gamma \tag{5.31}$$

となる．また，係数行列 A_ε，B_ε，C，H を与えれば H_∞ ノルム $||G_\varepsilon(s)||_\infty$は一意的に定まる．したがって，$H_\infty$タイプリカッチ方程式 (5.2) が準正定かつ安定化解をもつγの下限値$\underline{\gamma}$を用いて，$\underline{\gamma} \ge ||G_\varepsilon(s)||_\infty$が成立する． □

注意 5.2 命題 5.1 は，Dragan(1996) の Corollary 3.2 に類似している．しかし，全く同一の問題設定において，Dragon(1996) によって

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \sup ||G_\varepsilon(s)||_\infty = \max\{||G_S||_\infty,\ ||G_F||_\infty\} \tag{5.32}$$

が示されている．すなわち，εが十分小さいとき，H_∞タイプリカッチ方程式 (5.2) が準正定かつ安定化解をもつためのγの範囲の決定には，全次元の伝達関数の H_∞ ノルム $||G_\varepsilon(s)||_\infty$を計算するかわりに，低次元化された fast system, slow system の伝達関数の H_∞ ノルム $||G_S||_\infty$，$||G_F||_\infty$を利用した$\underline{\gamma} = \max\{||G_S||_\infty,\ ||G_F||_\infty\}$ を計算すれば十分である．

5.4 数値例

以下のシステム (5.32) に対して, 本章で提案された再帰的アルゴリズムを適用し解を求める.

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \varepsilon\dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} w \tag{5.33a}$$

$$z = \begin{bmatrix} 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + w \tag{5.33b}$$

ここで, slow system および fast system の伝達関数は補題 5.3 から (5.33) によって与えられる.

$$G_S = (s+1)^{-1} + 2 \tag{5.34a}$$

$$G_F = (s+1)^{-1} + 1 \tag{5.34b}$$

本章で導出された定理 5.1 の十分条件から, ε が十分小さいとき, H_∞タイプリカッチ方程式 (5.2) は

$$\gamma > \underline{\gamma} = \max\{||G_S||_\infty,\ ||G_F||_\infty\} = 3 \tag{5.35}$$

を満たすすべてのγにおいて, 準正定である安定化解をもつことがわかる. ここで, $\varepsilon = 1.0 \times 10^{-8}$におけるシステム (5.32) の伝達関数 $G_\varepsilon = C(sI - A_\varepsilon)^{-1}B_\varepsilon + H$ の H_∞ノルムの値γ_{opt}は MATLAB によって以下のように計算される.

$$\gamma_{opt} = ||G_\varepsilon||_\infty = 3.0 \tag{5.36}$$

したがって, $\varepsilon = 1.0 \times 10^{-8}$であるとき

$$\gamma_{opt} = ||G_\varepsilon||_\infty = \underline{\gamma} \tag{5.37}$$

である.

続いて, $\varepsilon = 1.0 \times 10^{-8}$におけるシュミレーション結果を示す. ただし, $\gamma = 4 > \underline{\gamma} = 3$ と設定する. まず, $\varepsilon = 0$ における 0–オーダ解を求める. 方程式 (5.16) から,

$$\bar{P} = \begin{bmatrix} \bar{P}_{11} & 0 \\ \bar{P}_{21} & \bar{P}_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.8348486 & 0 \\ 2.7530492 & 0.5835921 \end{bmatrix} \tag{5.38}$$

となる.

通常, $\varepsilon = 1.0 \times 10^{-8}$のオーダで H_∞ タイプリカッチ方程式 (5.2) を分割計算しないで直接解を求めることは困難である. しかし, 本章で提案された再帰的アルゴリズムを上述の問題に適用すれば, 一般化リカッチ方程式 (5.7) の解 P_{pro}は, 3 回の繰り返し計算によって得られる. 収束の判定は $||P^{(j+1)} - P^{(j)}||_2 < 10^{-7}, j = 1, 2, \cdots$ となったところで計算を打ち切る.

表 5.1 $\varepsilon = 1.0 \times 10^{-8}$の Pの値

Tab.5.1. Value of P when $\varepsilon = 1.0 \times 10^{-8}$

j	P_{11}	P_{21}	P_{22}
1	0.83484861	2.75304923	0.58359214
2	0.83484863	2.75304923	0.58359217
3	0.83484863	2.75304923	0.58359217

注意 5.3 収束までの回数が3回と, 急速に収束しているが, これは初期値を $E_{11}^{(0)} = E_{21}^{(0)} = E_{22}^{(0)} = 0$ と選択しているためである. 初期値を $E_{11}^{(0)} = E_{21}^{(0)} = E_{22}^{(0)} = 0$ 以外で, 再帰的アルゴリズムを使用すれば収束までの回数は増加する. しかし, どんな初期値でも, 第3章の 3.4 節と同様に, εが十分小さければ (5.22) から収束することには変わりない.

表 5.1 から, 一般化リカッチ方程式 (5.7) の解 P_{pro}は

$$P_{pro} = \begin{bmatrix} 8.3484863 \times 10^{-1} & 2.75304923 \times 10^{-8} \\ 2.75304923 & 5.8359217 \times 10^{-1} \end{bmatrix} \tag{5.39}$$

となる. 得られた非対称解 P_{pro}を用いて, 行列 (5.9) から H_∞タイプリカッチ方程式 (5.2) の解$\hat{P}_\varepsilon$ は次式で与えられる.

$$\hat{P}_\varepsilon = \begin{bmatrix} 8.3484863 \times 10^{-1} & 2.75304923 \times 10^{-8} \\ 2.75304923 \times 10^{-8} & 5.8359217 \times 10^{-9} \end{bmatrix} \tag{5.40}$$

一方, MATLAB の最適レギュレータタイプのリカッチ方程式 $PA + A^TP - PBP + Q = 0$ を解くための関数 are を用いた$\varepsilon = 1.0 \times 10^{-8}$での解 $P_{\rm are}$は

$$P_{\rm are} = \begin{bmatrix} 0.8348 & 0.0000 \\ 0.0000 & 0.0000 \end{bmatrix} \tag{5.41}$$

である. (ここで, Bは正定である必要はない.)

さらに, MATLAB のリカッチ方程式 (5.2) を直接解くための関数 care を用いた$\varepsilon = 1.0 \times 10^{-8}$での解 $P_{\rm care}$は

$$P_{\rm care} = \begin{bmatrix} 0.8037 & 0.0000 \\ 0.0000 & 0.0000 \end{bmatrix} \tag{5.42}$$

である. 次に, 本章で提案されたアルゴリズムの有効性を確認するために, $\hat{P}_\varepsilon$, $P_{\rm are}$及び, $P_{\rm care}$を H_∞タイプリカッチ方程式 (5.2) に代入したときの残差を計算する.

$$\begin{aligned} & A_\varepsilon^T \hat{P}_\varepsilon + \hat{P}_\varepsilon A_\varepsilon + (\hat{P}_\varepsilon B_\varepsilon + C^T H)(\gamma^2 I - H^T H)^{-1}(B_\varepsilon^T \hat{P}_\varepsilon + H^T C) + C^T C \\ = & \begin{bmatrix} 5.55202 \times 10^{-9} & -3.83165 \times 10^{-10} \\ -3.83165 \times 10^{-10} & -7.54666 \times 10^{-9} \end{bmatrix} \end{aligned} \tag{5.43}$$

$$\begin{aligned} & A_\varepsilon^T P_{\rm are} + P_{\rm are} A_\varepsilon + (P_{\rm are} B_\varepsilon + C^T H)(\gamma^2 I - H^T H)^{-1}(B_\varepsilon^T P_{\rm are} + H^T C) \\ & \quad + C^T C \\ = & \begin{bmatrix} 0.0686 \times 10^{-7} & 0.0003 \times 10^{-7} \\ 0.1266 \times 10^{-7} & 0.0007 \times 10^{-7} \end{bmatrix} \end{aligned} \tag{5.44}$$

$$
\begin{aligned}
&A_\varepsilon^T P_{\text{care}} + P_{\text{care}} A_\varepsilon + (P_{\text{care}} B_\varepsilon + C^T H)(\gamma^2 I - H^T H)^{-1}(B_\varepsilon^T P_{\text{care}} + H^T C) \\
&\qquad + C^T C \\
&= \begin{bmatrix} 0.0476 & 0.000 \\ 0.000 & 0.000 \end{bmatrix}
\end{aligned} \tag{5.45}
$$

以上の結果を比較する．まず，本章で提案されたアルゴリズムによって計算された H_∞タイプリカッチ方程式(5.2)の解$\hat{P}_\varepsilon$が，10^{-9}オーダの範囲で妥当であることがわかる．MATLABでは，最適レギュレータタイプのリカッチ方程式を解くための関数 are を使用した場合，P_{are}は，10^{-8}オーダの範囲で妥当であるが，リカッチ方程式(5.2)を直接解くための関数 care を使用した場合，解 P_{care}の精度は良くない．したがって，この数値例の場合，再帰的アルゴリズムを利用して解くことは有効であることがわかる．

最後に，本章で提案されたアルゴリズムによって計算された H_∞タイプリカッチ方程式(5.2)の解$\hat{P}_\varepsilon$が準正定かつ安定化解であることを確認する．

$$
\begin{aligned}
&A_\varepsilon + B_\varepsilon R^{-1} H^T C + B_\varepsilon R^{-1} B_\varepsilon^T \hat{P}_\varepsilon \\
&= \begin{bmatrix} 0.0 & 1.0 \\ -6.8313 \times 10^7 & -8.944272 \times 10^7 \end{bmatrix}
\end{aligned} \tag{5.46}
$$

行列(5.46)から，再帰的アルゴリズムによって求められた解$\hat{P}_\varepsilon$は，明らかに準正定である．さらに，行列(5.46)の固有値について $\mathrm{Re}\,\lambda\{A_\varepsilon + B_\varepsilon R^{-1} H^T C + B_\varepsilon R^{-1} B_\varepsilon^T \hat{P}_\varepsilon\} < 0$ を満たすので安定化解である．

以上から，再帰的アルゴリズムによって得られた解$\hat{P}_\varepsilon$は，H_∞タイプリカッチ方程式(5.2)の準正定かつ安定化解であることが数値的に示された．本章で提案された再帰的アルゴリズムは，繰り返し計算によって解を求めているために，収束までの回数が3回となったが，この計算の複雑さを除けば，数値的に比較して，十分有効であることがわかる．

5.5 まとめ

本章では，第3章及び第4章の再帰的アルゴリズムの手法を利用して，摂動項εを含む H_∞タイプリカッチ方程式(5.2)の再帰的アルゴリズムを導出した．また，準正定かつ安定化解が存在する十分条件を2つの subsystem である fast system および slow system のノルム条件によって与えた．得られた結果は，Dragon(1996)に類似しているが，証明方法にアルゴリズムの手法を導入することによって，従来の証明方法を変更することが可能となった．同時に，提案された十分条件を満たすとき，導出した再帰的アルゴリズムが十分小さなεに対して，$O(\varepsilon^k)$の高精度で収束することを示した．さらに，得られた解は準正定かつ安定化解となる．本章では，導出されたアルゴリズムの有効性を検証するために簡単な数値例を示した．この数値例によって，εが十分小さくても，高精度の収束解が得られることが示された．ここで，得られた解は準正定かつ安定化解である．

第6章

非標準特異摂動システムにおける H_∞ 制御問題のための再帰的アルゴリズム

この章では, 第5章の拡張として, 非標準特異摂動システムにおける H_∞ 制御問題に対し, 再帰的アルゴリズムの手法を利用した制御器の構築を提案する. 再帰的アルゴリズムを利用することにより, 直接 full–order system におけるリカッチ方程式の解を $O(\varepsilon^k)$ の高精度で解くことを示す. このとき, 構築された制御器は $O(\varepsilon^k)$ の高精度であるので, 特異摂動法による近似解を利用したコントローラに比べて, より最適である.

6.1 はじめに

第5章で扱った有界実補題を利用することによって, 近年, 標準特異摂動システムにおける H_∞ 制御問題に対して, さまざまな研究が行われている. Pan ら (1993, 1994) は, 微分ゲーム理論に基づき, 特異摂動法を利用して制御器を構築している. しかし, この設計法によれば, 従来の特異摂動システムと同様に A_{22}^{-1} の存在が必要である. さらに, composite 制御器の場合, $O(\varepsilon)$ 程度の精度しか保証されない. また, Fridman(1996) によって, high–order である正確な制御器を得るためのアルゴリズムの研究報告がある. この設計法によれば, A_{22}^{-1} が存在する仮定は必要であり, かつ補助的な状態変数を導入しなければならないため, システムの高次元化, ならびに, 制御器を得るための計算が増加するなどの傾向がある.

従来, 係数行列である A_{22}^{-1} の存在が仮定されていない非標準特異摂動システムにおいて, H_∞ 制御問題に関する研究はほとんど扱われていない. また, 制御器を構成するために解く必要があるリカッチ方程式の再帰的アルゴリズムを利用した数値解法もほとんど研究されていない.

そこで，本章では，第 5 章の拡張として，非標準特異摂動システムにおける状態を利用した H_∞ 制御問題に対して，再帰的アルゴリズムの手法を利用した制御器の構築を提案する．ここでは，再帰的アルゴリズムを利用することにより，特異摂動法を用いずに，直接 full–order system におけるリカッチ方程式の解を $O(\varepsilon^k)$ の高精度で解くことを示す．このとき，構築された制御器は $O(\varepsilon^k)$ の高精度であるので，特異摂動法による近似解を利用した制御器に比べて，より最適である．つまり，再帰的アルゴリズムによって得られた制御器は，設計仕様のγに対して$\gamma + O(\varepsilon^{k+1})$ を保証する．

又，本章では，アルゴリズムの有効性を検証するため，数値例に適用し解を求める．このとき，再帰的アルゴリズムによって得られたリカッチ方程式の解で構成される制御器が，数値的に十分有効であることを示す．

6.2 問題設定

6.2.1 特異摂動システム

システムに摂動項を含む状態空間法において，以下のような線形時不変特異摂動システムを考える．

$$\dot{x}_1(t) = A_{11}x_1(t) + A_{12}x_2(t) + B_{11}w(t) + B_{21}u(t),\ x_1(0) = 0 \tag{6.1a}$$

$$\varepsilon\dot{x}_2(t) = A_{21}x_1(t) + A_{22}x_2(t) + B_{12}w(t) + B_{22}u(t),\ x_2(0) = 0 \tag{6.1b}$$

このシステムに対する 2 次評価関数は (6.2) である．

$$J = \int_0^\infty z^T(t)z(t)dt \tag{6.2}$$

ただし，

$$z(t) = Cx(t) + Du(t)$$

である．システム (6.1b) 中のεは摂動項に相当する十分小さな正のパラメータ，$x(t) = \begin{bmatrix} x_1^T(t) & x_2^T(t) \end{bmatrix}^T$は $x_i(t) \in \mathbf{R}^{n_i} (i = 1, 2)$ である状態ベクトル，$u(t) \in \mathbf{R}^m$は制御入力，$w(t) \in \mathbf{R}^r$は外乱，$z(t) \in \mathbf{R}^l$は制御量である．また，各係数行列は適当な次元をもち，直交条件として $C^TD = 0, D^TD = I$ であると仮定する．ここで，システム (6.1) において，A_{22}が特異である，つまり，A_{22}^{-1}が存在しないシステムを一般に非標準特異摂動システムと呼ぶ．

続いて，以下の行列を定義する．

$$Q = C^TC = \begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{12} \\ Q_{12}^T & Q_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_1^TC_1 & C_1^TC_2 \\ C_2^TC_1 & C_2^TC_2 \end{bmatrix} \geq 0$$

$$
\begin{aligned}
S_{ij} &= B_{2i}B_{2j}^T - \gamma^{-2}B_{1i}B_{1j}^T,\ i=1,2, j=1,2 \\
B_{1\varepsilon} &= \begin{bmatrix} B_{11} \\ \varepsilon^{-1}B_{12} \end{bmatrix},\ B_{2\varepsilon} = \begin{bmatrix} B_{21} \\ \varepsilon^{-1}B_{22} \end{bmatrix} \\
A_\varepsilon &= \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ \varepsilon^{-1}A_{21} & \varepsilon^{-1}A_{22} \end{bmatrix} \\
S_{\varepsilon\gamma} &= \begin{bmatrix} S_{11} & \varepsilon^{-1}S_{12} \\ \varepsilon^{-1}S_{21} & \varepsilon^{-2}S_{22} \end{bmatrix}
\end{aligned}
$$

また, 以下の仮定を導入する.

仮定 6.1 $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0]$ を満たすεに対して, 行列対 $(A_\varepsilon, B_{2\varepsilon})$ が可安定であり, また同時に行列対 (A_ε, C) が可検出であるような$\varepsilon_0 > 0$ が存在する.

以上の条件のもと, H_∞制御問題とは,

(i) 状態フィードバック $u = Kx$ によって, 閉ループシステム (6.1) を内部安定にする.

(ii) システム (6.1) における外乱 $w(t)$ から制御量 $z(t)$ にいたる伝達関数 G_εの H_∞ノルム $||G_\varepsilon||_\infty$をある与えられた設計仕様γ以下, すなわち $||G_\varepsilon||_\infty < \gamma$にする. ただし,

$$
G_\varepsilon = (C + DK) \cdot (sI - A_\varepsilon - B_{2\varepsilon}K)^{-1}B_{1\varepsilon} \tag{6.3}
$$

この H_∞制御問題に対して, システム (6.1) 及び評価関数 (6.2) に対する H_∞制御則は以下の (6.4), (6.5) によって与えられる.
リカッチ方程式 (6.4)

$$
P_\varepsilon A_\varepsilon + A_\varepsilon^T P_\varepsilon - P_\varepsilon S_{\varepsilon\gamma} P_\varepsilon + Q = 0 \tag{6.4}
$$

が準正定である安定化解, すなわち, $P_\varepsilon \geq 0$ かつ, 行列 $A_\varepsilon - S_{\varepsilon\gamma}P_\varepsilon$が安定であるような解をもつとき, 制御器の制御入力

$$
u(t) = -B_{2\varepsilon}^T P_\varepsilon x(t) = Kx(t) \tag{6.5}
$$

は, $||G_\varepsilon||_\infty < \gamma$を満足する. ただし,

$$
P_\varepsilon = \begin{bmatrix} P_{11}(\varepsilon) & \varepsilon P_{21}^T(\varepsilon) \\ \varepsilon P_{21}(\varepsilon) & \varepsilon P_{22}(\varepsilon) \end{bmatrix} \tag{6.6}
$$

である.

6.3 0–オーダ方程式の導出

まず, full-order リカッチ方程式 (6.4) を一般化リカッチ方程式に変換する補題をあげる.

補題 6.1 full-order リカッチ方程式 (6.4) は, 以下の一般化リカッチ方程式 (6.7) を解くことに等価である.

$$P^T A + A^T P - P^T S_\gamma P + Q = 0 \tag{6.7a}$$

$$\bar{D}^T P = P^T \bar{D} \tag{6.7b}$$

このとき, (6.5) で与えられる制御入力 $u(t)$ は以下によって変形できる.

$$u(t) = -B_2^T P x(t) = K x(t) \tag{6.8}$$

ただし,

$$\bar{D} = \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & \varepsilon I \end{bmatrix},\ P = \begin{bmatrix} P_{11} & \varepsilon P_{21}^T \\ P_{21} & P_{22} \end{bmatrix}$$
$$A = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix},\ S_\gamma = \begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} \\ S_{12}^T & S_{22} \end{bmatrix}$$
$$B_2 = \begin{bmatrix} B_{21} \\ B_{22} \end{bmatrix}$$

注意 6.1 (6.5) 及び, (6.8) の制御ゲイン Kは, $B_{2\varepsilon}^T P_\varepsilon = B_2^T P$より同一である.

次に, 一般化リカッチ方程式 (6.7) における再帰的アルゴリズムを導出する. 方程式 (6.7) を各ブロックごとに計算する.

$$\begin{aligned} &A_{11}^T P_{11} + P_{11}^T A_{11} + A_{21}^T P_{21} + P_{21}^T A_{21} - P_{11}^T S_{11} P_{11} - P_{21}^T S_{22} P_{21} \\ &\quad - P_{11}^T S_{12} P_{21} - P_{21}^T S_{12}^T P_{11} + Q_{11} = 0 \end{aligned} \tag{6.9a}$$

$$\begin{aligned} &\varepsilon P_{21} A_{11} + P_{22}^T A_{21} + A_{12}^T P_{11} + A_{22}^T P_{21} - \varepsilon P_{21} S_{11} P_{11} - \varepsilon P_{21} S_{12} P_{21} \\ &\quad - P_{22}^T S_{12}^T P_{11} - P_{22}^T S_{22} P_{21} + Q_{12}^T = 0 \end{aligned} \tag{6.9b}$$

$$\begin{aligned} &A_{22}^T P_{22} + P_{22}^T A_{22} + \varepsilon A_{12}^T P_{21}^T + \varepsilon P_{21} A_{12} - P_{22}^T S_{22} P_{22} - \varepsilon P_{22}^T S_{12}^T P_{21}^T \\ &\quad - \varepsilon P_{21} S_{12} P_{22} - \varepsilon^2 P_{21} S_{11} P_{21}^T + Q_{22} = 0 \end{aligned} \tag{6.9c}$$

続いて, リカッチ方程式 (6.9) において$\varepsilon = 0$ とすれば, 方程式 (6.10) を得る. ここで, 0–オーダ方程式の解を$\bar{P}_{11}, \bar{P}_{21}, \bar{P}_{22}$とおく.

$$\begin{aligned} &A_{11}^T \bar{P}_{11} + \bar{P}_{11}^T A_{11} + A_{21}^T \bar{P}_{21} + \bar{P}_{21}^T A_{21} - \bar{P}_{11}^T S_{11} \bar{P}_{11} - \bar{P}_{21}^T S_{22} \bar{P}_{21} \\ &\quad - \bar{P}_{11}^T S_{12} \bar{P}_{21} - \bar{P}_{21}^T S_{12}^T \bar{P}_{11} + Q_{11} = 0 \end{aligned} \tag{6.10a}$$

$$\bar{P}_{22}^T A_{21} + A_{12}^T \bar{P}_{11} + A_{22}^T \bar{P}_{21} - \bar{P}_{22}^T S_{12}^T \bar{P}_{11} - \bar{P}_{22}^T S_{22} \bar{P}_{21} + Q_{12}^T = 0 \tag{6.10b}$$

$$A_{22}^T \bar{P}_{22} + \bar{P}_{22}^T A_{22} - \bar{P}_{22}^T S_{22} \bar{P}_{22} + Q_{22} = 0 \tag{6.10c}$$

ここで, 以下の仮定を導入する.

仮定 6.2 行列対 (A_{22}, B_{22}) は可安定であり, かつ行列対 (A_{22}, C_2) は可検出である.

また, リカッチ方程式 (6.10c) においてγ_fを以下のように定める.

$\gamma_f = \inf\{\gamma > 0|$ リカッチ方程式 (6.10c) が準正定である安定化解をもつ. $\}$

このとき, $\gamma > \gamma_f$をみたすすべてのγに対して, 方程式 (6.10c) は安定化解をもつので行列 $A_{22} - S_{22}\bar{P}_{22}$は非特異である. したがって, $(A_{22} - S_{22}\bar{P}_{22})^{-1}$は存在する. 以上から 0–オーダ方程式 (6.11) が得られる.

[0–order equation]

$$\bar{P}_{11}^T A_0 + A_0^T \bar{P}_{11} - \bar{P}_{11}^T S_0 \bar{P}_{11} + Q_0 = 0 \tag{6.11a}$$

$$\bar{P}_{21} = -N_2^T + N_1^T \bar{P}_{11} \tag{6.11b}$$

$$A_{22}^T \bar{P}_{22} + \bar{P}_{22}^T A_{22} - \bar{P}_{22}^T S_{22} \bar{P}_{22} + Q_{22} = 0 \tag{6.11c}$$

ただし

$$\begin{aligned}
A_0 &= A_{11} + N_1 A_{21} + S_{12} N_2^T + N_1 S_{22} N_2^T \\
S_0 &= S_{11} + N_1 S_{12}^T + S_{12} N_1^T + N_1 S_{22} N_1^T \\
Q_0 &= Q_{11} - N_2 A_{21} - A_{21}^T N_2^T - N_2 S_{22} N_2^T \\
N_2^T &= \bar{A}_{22}^{-T} \hat{Q}_{12}^T,\ N_1^T = -\bar{A}_{22}^{-T} \bar{A}_{12}^T \\
\bar{A}_{12} &= A_{12} - S_{12}\bar{P}_{22},\ \bar{A}_{22} = A_{22} - S_{22}\bar{P}_{22} \\
\hat{Q}_{12} &= Q_{12} + A_{21}^T \bar{P}_{22}
\end{aligned}$$

注意 6.2 行列 A_0, S_0, Q_0を記述する公式の中には, リカッチ方程式 (6.11c) の解$\bar{P}_{22}$が含まれているが,

$$\begin{aligned}
T_1 &= \begin{bmatrix} A_{11} & -S_{11} \\ -Q_{11} & -A_{11}^T \end{bmatrix},\ T_2 = \begin{bmatrix} A_{12} & -S_{12} \\ -Q_{12} & -A_{21}^T \end{bmatrix} \\
T_3 &= \begin{bmatrix} A_{21} & -S_{12}^T \\ -Q_{12}^T & -A_{12}^T \end{bmatrix},\ T_4 = \begin{bmatrix} A_{22} & -S_{22} \\ -Q_{22} & -A_{22}^T \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

に対し,

$$T_0 = T_1 - T_2 T_4^{-1} T_3 = \begin{bmatrix} A_0 & -S_0 \\ -Q_0 & -A_0^T \end{bmatrix} \tag{6.12}$$

が成立するので実際には, 行列 A_0, S_0, Q_0はリカッチ方程式 (6.11c) の解$\bar{P}_{22}$に依存しない.

リカッチ方程式 (6.11a) が準正定である安定化解をもつために, 以下の仮定を導入する.

仮定 6.3 $Q_{ij} = C_i^T C_j \ (i, j = 1, 2)$ とする. このとき,

$$\operatorname{rank} \begin{bmatrix} sI_{n_1} - A_{11} & -A_{12} & B_{21} \\ -A_{21} & -A_{22} & B_{22} \end{bmatrix} = n_1 + n_2 \tag{6.13}$$

$\forall s = \in \mathrm{C}^+$

$$\operatorname{rank} \begin{bmatrix} sI_{n_1} - A_{11}^T & -A_{21}^T & C_1^T \\ -A_{12}^T & -A_{22}^T & C_2^T \end{bmatrix} = n_1 + n_2 \tag{6.14}$$

$\forall s = \in \mathrm{C}$

である.

注意 6.3 仮定6.3 が成立することは, $\gamma > \gamma_f$を満たすすべてのγに対して, 行列対 (A_0, B_0) は可安定であり, かつ行列対 (A_0, C_0) は可検出であることと等価である (Xu and Mizukami 1996). ただし,

$$\begin{aligned}
&Q_0 = C_0^T C_0, \ C_0 = C_1 + C_2 M_1^T \\
&M_1 = -\tilde{A}_{21} \tilde{A}_{22} \\
&\tilde{A}_{21} = A_{21}^T + Q_{12} \bar{P}_{22}^{-1} \\
&\tilde{A}_{22} = A_{22}^T + Q_{22} \bar{P}_{22}^{-1} \\
&S_0 = B_0 B_0^T - \gamma^{-2} \bar{A}_0 \bar{A}_0^T \\
&B_0 = B_{21} + N_1 B_{22}, \bar{A}_0 = \bar{A}_{11} + N_1 \bar{A}_{12}
\end{aligned}$$

である.

次に, リカッチ方程式 (6.10c) に関して, Hamilton 行列

$$H_\gamma = T_4 = \begin{bmatrix} A_{22} & -S_{22} \\ -Q_{22} & -A_{22}^T \end{bmatrix} \tag{6.15}$$

を定義する．この Hamilton 行列に関して，以下を定める．

$\gamma_0 = \max\{\gamma > 0 | \text{Hamilton 行列 (6.15) が特異である．}\}$

さらに，リカッチ方程式 (6.11a) においてγ_s を以下のように定める．

$\gamma_s = \inf\{\gamma > \gamma_0 | \text{ リカッチ方程式 (6.11a) が準正定である安定化解をもつ．}\}$

以上から，リカッチ方程式 (6.11a), (6.11c) は$\gamma > \bar{\gamma}$を満たすすべてのγに対して，準正定である安定化解をもつ．ただし，$\bar{\gamma} = \max\{\gamma_s, \gamma_f\}$ とする．

6.4 再帰的アルゴリズムの導出

再帰的アルゴリズムを導出するために，偏差を定義する．

$$P_{11} = \bar{P}_{11} + \varepsilon E_{11} \tag{6.16a}$$

$$P_{21} = \bar{P}_{21} + \varepsilon E_{21} \tag{6.16b}$$

$$P_{22} = \bar{P}_{22} + \varepsilon E_{22} \tag{6.16c}$$

以上を方程式 (6.9) に代入する．

0–オーダ方程式 (6.11) を用いて，偏差 Eについての以下の再帰的アルゴリズム (6.17) が導出される．

$$E_{11}^{(j+1)T} \bar{A}_0 + \bar{A}_0^T E_{11}^{(j+1)} = -V^T H_1^{(j)T} - H_1^{(j)} V + V^T H_3^{(j)} V + \varepsilon H_2^{(j)} \tag{6.17a}$$

$$E_{11}^{(j+1)T} \bar{A}_{12} + E_{21}^{(j+1)T} \bar{A}_{22} + \bar{A}_{21}^T E_{22}^{(j+1)} = H_1^{(j)} \tag{6.17b}$$

$$E_{22}^{(j+1)T} \bar{A}_{22} + \bar{A}_{22}^T E_{22}^{(j+1)} = H_3^{(j)} \tag{6.17c}$$

ただし

$$\begin{aligned}
H_1^{(j)} &= -A_{11}^T P_{21}^{(j)T} + P_{11}^{(j)T} S_{11} P_{21}^{(j)T} + P_{21}^{(j)T} S_{12}^T P_{21}^{(j)T} \\
&\quad + \varepsilon (E_{11}^{(j)T} S_{12} E_{22}^{(j)} + E_{21}^{(j)T} S_{22} E_{22}^{(j)}) \\
H_2^{(j)} &= E_{11}^{(j)T} S_{11} E_{11}^{(j)} + E_{21}^{(j)T} S_{22} E_{21}^{(j)} + E_{11}^{(j)T} S_{12} E_{21}^{(j)} + E_{21}^{(j)T} S_{12}^T E_{11}^{(j)} \\
H_3^{(j)} &= -A_{12}^T P_{21}^{(j)T} - P_{21}^{(j)} A_{12} + \varepsilon P_{21}^{(j)} S_{11} P_{21}^{(j)T} + \varepsilon E_{22}^{(j)T} S_{22} E_{22}^{(j)} \\
&\quad + P_{21}^{(j)} S_{12} P_{22}^{(j)} + P_{22}^{(j)T} S_{12}^T P_{21}^{(j)T} \\
P_{11}^{(j)} &= \bar{P}_{11} + \varepsilon E_{11}^{(j)}, \ P_{21}^{(j)} \ = \ \bar{P}_{21} + \varepsilon E_{21}^{(j)}
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
P_{22}^{(j)} &= \bar{P}_{22} + \varepsilon E_{22}^{(j)},\ E_{11}^{(0)} = E_{21}^{(0)} = E_{22}^{(0)} = 0 \\
\bar{A}_{11} &= A_{11} - S_{11}\bar{P}_{11} - S_{12}\bar{P}_{21} \\
\bar{A}_{21} &= A_{11} - S_{12}^T\bar{P}_{11} - S_{22}\bar{P}_{21} \\
\bar{A}_{0} &= \bar{A}_{11} - \bar{A}_{12}\bar{A}_{22}^{-1}\bar{A}_{21},\ V = \bar{A}_{22}^{-1}\bar{A}_{21}
\end{aligned}
$$

ここで, $^{(j)}$はj番目の値, $^{(j+1)}$は$j+1$番目の値を意味する. したがって, j番目の値が求まれば, 逐次的に$j+1$番目の値が定まり, これを再帰的に求めればよい.

6.5 再帰的アルゴリズムの収束

まず, 定理をあげる.

定理 6.1 εが十分小さいと仮定する. また, 仮定 6.1～仮定 6.3 が成立するとする. このとき, $\gamma > \bar{\gamma} = \max\{\gamma_s, \gamma_f\}$ を満足するあるγに対して, 再帰的アルゴリズム (6.17) は, k回の繰り返し計算によって, 偏差 Eの正確な値に $O(\varepsilon^k)$ の高精度で収束する. すなわち,

$$
||E - E^{(k)}||_2 = O(\varepsilon^k), \quad (k = 1, 2, \cdots) \tag{6.18}
$$

また, 一般化リカッチ方程式 (6.7) は準正定である安定化解 Pをもつ. このとき, 準正定である安定化解 Pは

$$
P = \begin{bmatrix} P_{11} & \varepsilon P_{21}^T \\ P_{21} & P_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{P}_{11} + \varepsilon E_{11} & \varepsilon(\bar{P}_{21} + \varepsilon E_{21})^T \\ \bar{P}_{21} + \varepsilon E_{21} & \bar{P}_{22} + \varepsilon E_{22} \end{bmatrix} \tag{6.19}
$$

によって与えられる. ただし

$$
E = \begin{bmatrix} E_{11} & E_{21} \\ E_{21}^T & E_{22} \end{bmatrix},\ E^{(k)} = \begin{bmatrix} E_{11}^{(k)} & E_{21}^{(k)} \\ E_{21}^{(k)T} & E_{22}^{(k)} \end{bmatrix}
$$

また, マトリクスノルム $||\cdot||_2$は, 任意の行列 Xについて $||X||_2 \equiv [\lambda_{\max}(X^TX)]^{1/2}$をあらわす. 以下も同様に定義される.

(定理 6.1 の証明)　再帰的アルゴリズム (6.17) において, $\varepsilon = 0$ の近傍における収束解 E の存在は陰関数定理により証明できる. 陰関数定理 (Dieudonné 1982, 杉浦 1985) を用いるために, 再帰的アルゴリズム (6.17) に対するヤコビ行列を以下のように計算する.

[Jacobi matrix]

$$
J|_{\varepsilon=0} = \begin{bmatrix} J_{11} & 0 & 0 \\ J_{21} & J_{22} & J_{23} \\ 0 & 0 & J_{33} \end{bmatrix} \tag{6.20}
$$

ただし

$$
\begin{aligned}
J_{11} &= I \otimes \bar{A}_0 + \bar{A}_0^T \otimes I \\
J_{22} &= I \otimes \bar{A}_{22} \\
J_{33} &= I \otimes \bar{A}_{22} + \bar{A}_{22}^T \otimes I \\
J_{k1} &= \frac{\partial L_k}{\partial E_{11}}|_{\varepsilon=0},\ J_{k2} \ = \ \frac{\partial L_k}{\partial E_{21}}|_{\varepsilon=0} \\
J_{k3} &= \frac{\partial L_k}{\partial E_{22}}|_{\varepsilon=0},\ (k=1,2,3) \\
L_1 &= E_{11}^T \bar{A}_0 + \bar{A}_0^T E_{11} + V^T H_1^T + H_1 V - V^T H_3 V - \varepsilon H_2 \\
L_2 &= E_{11}^T \bar{A}_{12} + E_{21}^T \bar{A}_{22} + \bar{A}_{21}^T E_{22} - H_1 \\
L_3 &= E_{22}^T \bar{A}_{22} + \bar{A}_{22}^T E_{22} - H_3
\end{aligned}
$$

$\otimes$はクロネッカ積である．ここで，$\bar{A}_{22} = A_{22} - S_{22}\bar{P}_{22}$はリカッチ方程式 (6.11c) が，安定化解をもつので安定である．同様に，$A_0 - S_0\bar{P}_{11}$は，リカッチ方程式 (6.11a) が，安定化解をもつので安定である．したがって，

$$
A_0 - S_0\bar{P}_{11} = \bar{A}_{11} - \bar{A}_{12}\bar{A}_{22}^{-1}\bar{A}_{21} = \bar{A}_0 \tag{6.21}
$$

となるので，$\bar{A}_0$は安定となる．以上より，ヤコビ行列が非特異であるから，陰関数定理を適用して再帰的アルゴリズムの収束性が証明される．

続いて，一般化リカッチ方程式 (6.7) の解 Pが準正定かつ安定化解であることを示す．この証明は，$\varepsilon = 0$ の近傍における解 Pが準正定かつ安定化解であることを示すことと等価である．(6.19) から

$$
P = \begin{bmatrix} P_{11} & \varepsilon P_{21}^T \\ P_{21} & P_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{P}_{11} & 0 \\ \bar{P}_{21} & \bar{P}_{22} \end{bmatrix} + O(\varepsilon) = \bar{P} + O(\varepsilon) \tag{6.22}
$$

である．仮定 6.2, 仮定 6.3 から，リカッチ方程式 (6.11a), (6.11c) の解$\bar{P}_{11}, \bar{P}_{22}$はともに準正定であるから$\varepsilon$が十分小さいとき，$P$も準正定になる．続いて，

$$
\begin{aligned}
& A - SP \\
&= \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} S_{11}P_{11} + S_{12}P_{21} & \varepsilon S_{11}P_{21}^T + S_{12}P_{22} \\ S_{12}^T P_{11} + S_{22}P_{21} & \varepsilon S_{12}^T P_{21}^T + S_{22}P_{22} \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} \bar{A}_{11} & \bar{A}_{12} \\ \bar{A}_{21} & \bar{A}_{22} \end{bmatrix} + O(\varepsilon)
\end{aligned} \tag{6.23}
$$

である．同様に仮定 6.2 から$\bar{A}_{22}$は安定行列であり，関係式 (6.21) と仮定 6.3 から$\bar{A}_0 = \bar{A}_{11} - \bar{A}_{12}\bar{A}_{22}^{-1}\bar{A}_{21}$ も安定行列である．したがって，

$$
\bar{A} = \begin{bmatrix} \bar{A}_{11} & \bar{A}_{12} \\ \bar{A}_{21} & \bar{A}_{22} \end{bmatrix}
$$

は安定となる．以上から，解 Pが準正定かつ安定化解であることが示される． □

次に，ある$\gamma > \bar{\gamma}$に対して，本章で提案された再帰的アルゴリズム (6.17) を利用して，一般化リカッチ方程式 (6.7) を解いた解 P_{pro}を用いて，(6.8) によって制御器を構成することを考える．このとき，設計された制御器に対して以下の定理を得ることができる．

定理 6.2 $\gamma > \bar{\gamma} = \max\{\gamma_s, \gamma_f\}$ を満足するあるγに対して，一般化リカッチ方程式 (6.7) を再帰的アルゴリズム (6.17) によって解 P_{pro}を求めたとき，(6.8) によって構成された制御器は，

$$\begin{aligned} & \|(C + DK_{pro})(sI - A_\varepsilon - B_{2\varepsilon}K_{pro})^{-1}B_{1\varepsilon}\|_\infty \\ = \ & \|(C + DK_{exa})(sI - A_\varepsilon - B_{2\varepsilon}K_{exa})^{-1}B_{1\varepsilon}\|_\infty + O(\varepsilon^{k+1}) \\ < \ & \gamma + O(\varepsilon^{k+1}) \end{aligned} \tag{6.24}$$

を満たす．ただし，$K_{exa} = -B_{2\varepsilon}^T P_\varepsilon, K_{pro} = -B_2^T P_{pro}$ である．

(定理 6.2 の証明)　Fridman(1996) の手法を用いて証明を行う．まず，リカッチ方程式 (6.4) の解 P_εを用いて，(6.5) によって構築された制御器をシステム (6.1) に適用する．このとき，システム (6.1) および，評価関数 (6.2) は，以下の (6.25) になる．

$$\dot{x}(t) = \bar{A}_\varepsilon x(t) + \varepsilon F_\varepsilon x(t) + B_{1\varepsilon}w(t),\ x(0) = 0 \tag{6.25a}$$

$$J = \int_0^\infty x^T(t)\bar{Q}x(t)dt \tag{6.25b}$$

ここで，

$$\begin{aligned} \bar{A}_\varepsilon &= A_\varepsilon - B_{2\varepsilon}B_2^T\bar{P} \\ &= A_\varepsilon - \begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} \\ \varepsilon^{-1}S_{12}^T & \varepsilon^{-1}S_{22} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \bar{P}_{11} & 0 \\ \bar{P}_{21} & \bar{P}_{22} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \bar{A}_{11} & \bar{A}_{12} \\ \varepsilon^{-1}\bar{A}_{21} & \varepsilon^{-1}\bar{A}_{22} \end{bmatrix} \\ F_\varepsilon &= -\varepsilon^{-1}B_{2\varepsilon}(B_{2\varepsilon}^T P_\varepsilon - B_2^T\bar{P}) = \begin{bmatrix} F_1 \\ \varepsilon^{-1}F_2 \end{bmatrix} \\ \bar{Q} &= Q + P_\varepsilon B_{2\varepsilon}B_{2\varepsilon}^T P_\varepsilon \end{aligned}$$

である．$\bar{A}_{22} = A_{22} - S_{22}\bar{P}_{22}$は安定行列であるから，

$$\begin{aligned} & T^{-1}\bar{A}_\varepsilon T = \begin{bmatrix} A_s & 0 \\ 0 & A_f \end{bmatrix},\ y = T^{-1}x \\ & T = \begin{bmatrix} I_{n_1} & \varepsilon H \\ -L & I_{n_2} - \varepsilon LH \end{bmatrix} \end{aligned} \tag{6.26}$$

$$A_s = \bar{A}_{11} - \bar{A}_{12}L = \bar{A}_0 + O(\varepsilon) \tag{6.27a}$$

$$A_f = \bar{A}_{22} + \varepsilon L\bar{A}_{12} = \bar{A}_{22} + O(\varepsilon) \tag{6.27b}$$

である線形変換行列 Tが存在する． ただし， L, Hは以下の代数方程式 (6.28) の解である．

$$\bar{A}_{22}L - \bar{A}_{21} - \varepsilon L(\bar{A}_{11} - \bar{A}_{12}L) = 0 \tag{6.28a}$$

$$H(\bar{A}_{22} + \varepsilon L\bar{A}_{12}) - \bar{A}_{12} - \varepsilon(\bar{A}_{11} - \bar{A}_{12}L)H = 0 \tag{6.28b}$$

したがって，線形変換 (6.26) をシステム (6.25a) に適用することによって，システム (6.29) を得る．

$$\dot{y}_1(t) = A_s y_1(t) + \varepsilon F_s y(t) + B_{1s}w(t),\ y_1(0) = 0 \tag{6.29a}$$

$$\varepsilon\dot{y}_2(t) = A_f y_2(t) + \varepsilon F_f y(t) + B_{1f}w(t),\ y_2(0) = 0 \tag{6.29b}$$

ただし，

$$\begin{bmatrix} B_{1s} \\ \varepsilon^{-1}B_{1f} \end{bmatrix} = T^{-1}B_{1\varepsilon},\ \begin{bmatrix} F_s \\ \varepsilon^{-1}F_f \end{bmatrix} = T^{-1}F_\varepsilon T,$$
$$y(t) = \begin{bmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \end{bmatrix}$$

である．

続いて，一般化リカッチ方程式 (6.7) を本章で提案した再帰的アルゴリズム (6.17) を利用して得られた解 P_{pro}とする．この P_{pro}を用いて，(6.8) によって構築された制御器をシステム (6.1) に適用する．このときのシステム (6.1) および，評価関数 (6.2) は，以下の (6.30) になる．

$$\dot{x}(t) = \bar{A}_\varepsilon x(t) + \varepsilon\hat{F}_\varepsilon x(t) + B_{1\varepsilon}w(t),\ x(0) = 0 \tag{6.30a}$$

$$\hat{J} = \int_0^\infty x^T(t)\hat{Q}x(t)dt \tag{6.30b}$$

ただし，

$$\begin{aligned} \hat{F}_\varepsilon &= -\varepsilon^{-1}B_{2\varepsilon}(B_2^T P_{pro} - B_2^T\bar{P}) = \begin{bmatrix} \hat{F}_1 \\ \varepsilon^{-1}\hat{F}_2 \end{bmatrix}, \\ \hat{Q} &= Q + P_{pro}B_2B_2^T P_{pro} \end{aligned}$$

である．同様に，$\bar{A}_{22} = A_{22} - S_{22}\bar{P}_{22}$は安定行列であるから，線形変換 $f = T^{-1}x$ をシステム (6.30a) に適用すれば，システム (6.31) を得る．

$$\dot{f}_1(t) = A_s f_1(t) + \varepsilon \hat{F}_s f(t) + B_{1s} w(t),\ f_1(0) = 0 \tag{6.31a}$$

$$\varepsilon \dot{f}_2(t) = A_f f_2(t) + \varepsilon \hat{F}_f f(t) + B_{1f} w(t),\ f_2(0) = 0 \tag{6.31b}$$

ただし,

$$\begin{bmatrix} \hat{F}_s \\ \varepsilon^{-1}\hat{F}_f \end{bmatrix} = T^{-1}\hat{F}_\varepsilon T,$$

$$f(t) = \begin{bmatrix} f_1(t) \\ f_2(t) \end{bmatrix}$$

である.

いま,

$$T^{-1}\hat{F}_\varepsilon T - T^{-1}F_\varepsilon T = O(\varepsilon^k) \tag{6.32}$$

$$||\hat{Q} - \bar{Q}||_2 = m_0\varepsilon^{k+1},\ m_0 > 0 \tag{6.33}$$

であることに注意すれば, コーシ・シュワルツの不等式 (Cauchy–Schwarz inequality)(付録 4 参照) を利用することによって,

$$\begin{aligned} |J - \hat{J}| &\le \int_0^\infty [m_1|e(t)||y(t)| + m_2|e(t)||f(t)| + m_0\varepsilon^{k+1}|y(t)||f(t)|]dt \\ &\le \bar{m}[||e||(||y|| + ||f||) + \varepsilon^{k+1}||y||\cdot||f||] \end{aligned} \tag{6.34}$$

ただし,

$$\begin{aligned} e(t) &= y(t) - f(t) = \begin{bmatrix} e_1(t) \\ e_2(t) \end{bmatrix} \\ \bar{m} &= \max\{m_0, m_1, m_2\} \\ m_1 &= ||T^T\bar{Q}T||_2,\ m_2 = ||T^T\hat{Q}T||_2 \end{aligned}$$

また, $||\cdot||$ 及び, $|\cdot|$ は, それぞれ $L_2[0,\infty]$ ノルム及び, ベクトルのユークッリドノルムをあらわす.

システム (6.29) とシステム (6.31) の差を考えることによって, 以下のシステム (6.35) を導入する.

$$\dot{e}_1(t) = A_s e_1(t) + \varepsilon\hat{F}_s e(t) + O(\varepsilon^{k+1})y(t) \tag{6.35a}$$

$$\varepsilon\dot{e}_2(t) = A_f e_2(t) + \varepsilon\hat{F}_f e(t) + O(\varepsilon^{k+1})y(t) \tag{6.35b}$$

以上の準備のもとで, まず, 微分方程式 (6.29b) を解く.

$$\begin{aligned} ||y_2||^2 \le &\int_0^\infty \int_0^t \int_0^t \frac{\beta_2}{\varepsilon^2}\exp[-\frac{\alpha_2}{\varepsilon}(2t - r - p)][|w(p)| + \varepsilon|y(p)|] \\ &\cdot[|w(r)| + \varepsilon|y(r)|]drdpdt \end{aligned} \tag{6.36}$$

ただし, α_2, β_2はそれぞれ $||\exp \varepsilon^{-1} A_f t||_2 \leq \beta_2 \exp(-\varepsilon^{-1}\alpha_2 t)$ を満たす正の定数である. ここで, 一般に成立する不等式 (Fridman 1996)

$$
\begin{aligned}
& [|w(p)| + \varepsilon|y(p)|] \cdot [|w(r)| + \varepsilon|y(r)|] \\
\leq \ & \varepsilon^2[|y(p)|^2 + |y(r)|^2] + |w(p)|^2 + |w(r)|^2
\end{aligned} \tag{6.37}
$$

および, 積分方程式 (6.36) の積分順序の変更を利用することによって以下のように変形する.

$$
\begin{aligned}
||y_2||^2 \ &\leq \ \frac{2\beta_2}{\varepsilon^2}\int_0^\infty \int_p^\infty \int_0^t \exp[-\frac{\alpha_2}{\varepsilon}(2t - r - p)]drdt[|w(p)|^2 + \varepsilon^2|y(p)|^2]dp \\
&\leq \ \frac{2\beta_2}{\alpha_2^2}[||w||^2 + \varepsilon^2||y||^2]
\end{aligned} \tag{6.38}
$$

同様にして, 微分方程式 (6.29a) を解けば.

$$
||y_1||^2 \leq \frac{2\beta_1}{\alpha_1^2}[||w||^2 + \varepsilon^2||y||^2] \tag{6.39}
$$

を得ることができる. したがって, εが十分小さいときには,

$$
||y|| \leq c_1||w||, \ c_1 > 0 \tag{6.40}
$$

が成立する. また, (6.31), (6.35) から,

$$
||f|| \ \leq \ c_2||w||, \ c_2 > 0 \tag{6.41}
$$

$$
||e|| \ \leq \ c_3\varepsilon^{k+1}||y|| \ \leq \ c_4\varepsilon^{k+1}||w||, \ c_3, c_4 > 0 \tag{6.42}
$$

が得られる. 以上の結果から不等式 (6.41) を (6.34) に代入すれば,

$$
\begin{aligned}
|J - \hat{J}| \ &\leq \ \bar{m}[||e||(||y|| + ||f||) + \varepsilon^{k+1}||y|| \cdot ||f||] \\
&\leq \ \bar{m}[c_4(c_1 + c_2) + c_1 \cdot c_2]\varepsilon^{k+1}||w||^2 \ \leq \ \bar{m}_0\varepsilon^{k+1}||w||^2
\end{aligned} \tag{6.43}
$$

となるが, $J < \gamma^2||w||^2$に注意すれば

$$
\hat{J} = J + O(\varepsilon^{k+1})||w||^2 \Leftrightarrow \hat{J} < [\gamma^2 + O(\varepsilon^{k+1})]||w||^2 \tag{6.44}
$$

と等価である. □

6.6 数値例

システム (6.1) および, 評価関数 (6.2) における各係数行列を以下によって与える.

$$
A_{11} = \begin{bmatrix} 0 & 0.4 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \ A_{12} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0.345 & 0 \end{bmatrix}
$$

$$
\begin{aligned}
A_{21} &= \begin{bmatrix} 0 & -0.524 \\ 0 & 0 \end{bmatrix},\ A_{22} = \begin{bmatrix} 0 & 0.262 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \\
B_{11} &= \begin{bmatrix} 1.0 \\ 0 \end{bmatrix},\ B_{12} = \begin{bmatrix} 0.2 \\ 1.2 \end{bmatrix} \\
B_{21} &= \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix},\ B_{22} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \\
Q &= C^T C = diag\{1, 0, 1, 0\} \\
C^T &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \\
D^T &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}
\end{aligned}
$$

このとき, 2 次評価関数は以下になる.

$$
J = \int_0^\infty [x^T(t)Qx(t) + u^T(t)u(t)]dt \tag{6.45}
$$

システム (6.1b) における行列 A_{22}の行列式 $\det A_{22}$は, $\det A_{22} = 0$ なので非標準特異摂動システムである. まず, $\gamma_f = 0.7680, \gamma_s = 7.0817$ であるので, εが十分小さいとき$\gamma > \bar{\gamma} = \max\{\gamma_s, \gamma_f\} = 7.0817$ を満足するあるγに対して, 一般化リカッチ方程式 (6.7) は準正定である安定化解をもつことがわかる. はじめに, $\varepsilon = 0$ とおくことによって得られる 0–オーダ解$\bar{P}_0$, および制御ゲイン K_0は以下によって与えられる. ただし, $\varepsilon = 0.0001$ であり, $\gamma = 8 > \bar{\gamma}$として設計する.

$$
\bar{P}_0 = \begin{bmatrix} 14.85007 & 6.26150 & 0 & 0 \\ 6.26150 & 8.74375 & 0 & 0 \\ 12.54696 & 5.27678 & 4.86116 & 1.03771 \\ 2.77242 & 0.72567 & 1.03771 & 0.24405 \end{bmatrix}
$$

$$
K_0 = \begin{bmatrix} -2.77242 & -0.72567 & -1.03771 & -0.24405 \end{bmatrix}
$$

続いて, 本章で提案されたアルゴリズムを上述の問題に適用すれば, 4 回の繰り返し計算によって次の一般化リカッチ方程式 (6.7) の解 P_{pro}, および制御ゲイン K_{pro}を得ることができる.

$$
P_{pro} = \begin{bmatrix} 14.85237 & 6.26272 & 0.00126 & 0.00028 \\ 6.26272 & 8.74439 & 0.00053 & 0.00007 \\ 12.54901 & 5.27789 & 4.86227 & 1.03794 \\ 2.77286 & 0.72592 & 1.03794 & 0.24411 \end{bmatrix}
$$

$$
K_{pro} = \begin{bmatrix} -2.77286 & -0.72592 & -1.03794 & -0.24411 \end{bmatrix}
$$

本章では，収束の判定は $||P^{(j+1)} - P^{(j)}||_2 < 10^{-7}, j = 1, 2, \cdots$ となったところで計算を打ち切る．一般化リカッチ方程式の解の精度を比較するために，リカッチ方程式 (6.4) を MATLAB を利用して解いた解 P_{exa}，および制御ゲイン K_{exa}は以下になる．

$$P_{exa} = \begin{bmatrix} 14.8509 & 6.2620 & 0.0013 & 0.0003 \\ 6.2620 & 8.7440 & 0.0005 & 0.0001 \\ 0.0013 & 0.0005 & 0.0005 & 0.0001 \\ 0.0003 & 0.0001 & 0.0001 & 0.0000 \end{bmatrix}$$

$$K_{exa} = \begin{bmatrix} -2.7726 & -0.7258 & -1.0379 & -0.2441 \end{bmatrix}$$

最後に，$\gamma = 8$ で設計した制御器に対する式 (6.3) による H_∞ノルムの値は以下のとおりである．

$$\begin{aligned} \gamma_0 &= 7.8729 \\ \gamma_{pro} &= 7.8727 \\ \gamma_{exa} &= 7.8729 \\ \gamma_{opt} &= 6.6602 \end{aligned}$$

ここで，γ_0は 0–オーダ解$\bar{P}_0$によって得られた制御器 K_0をシステム (6.1) に入力したときの式 (6.3) で与えられる H_∞ノルムの値である．同様にγ_{pro}は提案型の方法を利用して得られた解 P_{pro}による H_∞ノルムの値．γ_{exa}は直接リカッチ方程式 (6.4) を$\gamma = 8$ として得られた解 P_{exa}による H_∞ノルムの値を意味する．最後のγ_{opt}は，$\varepsilon = 0.0001$ としたときのシステム (6.1) に関するリカッチ方程式 (6.4) が準正定である安定化解をもつためのγの下限値である．

これらの結果を比較する．まず，0–オーダ解$\bar{P}_0$によって得られた制御器 K_0をシステムに入力したときの H_∞ノルムの値γ_0，提案型の方法を利用して得られた制御器による H_∞ノルムの値γ_{pro}，直接リカッチ方程式 (6.4) を$\gamma = 8$ として得られた制御器を入力したときの H_∞ノルムの値γ_{exa}はいずれも，$\varepsilon = 0.0001$ としたときのγ_{opt} より大きいが，設計前の $\gamma = 8$ より小さくなっていることが確認される．

さらに，本章で提案されたアルゴリズムで得られた解 P_{pro}の P_{21}, P_{22}にεをかければ，リカッチ方程式を直接解いて得られた解 P_{exa}に限りなく近づく．つまり，

$$\begin{bmatrix} P_{11} & \varepsilon P_{21}^T \\ \varepsilon P_{21} & \varepsilon P_{22} \end{bmatrix} \to P_{exa} \tag{6.46}$$

したがって一般化リカッチ方程式の解が 10^{-3}オーダの範囲で得られた結果は妥当であることがわかる．また，制御入力および，そのときの H_∞ ノルムの値に関しても 10^{-3}オーダの範囲で一致していることがわかる．以上から，数値例からも定理 6.2 における H_∞ノルムの不等式 (6.24) を確認することができる．

6.7 まとめ

本章では，第 5 章の拡張として，A_{22}^{-1}の存在を仮定しない非標準特異摂動システムにおける状態を利用した H_∞ 制御問題に対して，一般化リカッチ方程式を利用した再帰的アルゴリズムの手法による制御器の構築を提案した．再帰的アルゴリズムを利用することにより，第 5 章と同様にリカッチ方程式の 2 次の項が正定でなくても，摂動項εが十分小さいとき，得られた一般化リカッチ方程式の解は準正定かつ安定化解であることを証明した．さらに，直接 full-order system における一般化リカッチ方程式の解を $O(\varepsilon^k)$ の高精度で解くことによって，構築された制御器は $O(\varepsilon^k)$ の高精度であることを同時に示した．その結果，特異摂動法による近似解を利用した制御器に比べて，より最適な制御が可能となった．つまり再帰的アルゴリズムによって得られた制御器は，設計仕様のγに対して$\gamma+O(\varepsilon^{k+1})$ を保証している．さらに，本章では，アルゴリズムの有効性を検証するため，数値例に適用し解を求めた．このとき，再帰的アルゴリズムによって得られた一般化リカッチ方程式の解で構成される制御器が，数値的に十分有効であることが確認された．

第 7 章

不確定性を有する特異摂動システムのロバスト安定性

この章では, 第 5 章及び, 第 6 章で扱われた H_∞ 制御問題に関係するリカッチ代数方程式の解が, 安定化解である証明の部分で用いた補題 5.4 を詳しく研究する. すなわち, (5.27) の不確定部分 $O_i(\varepsilon)$, $(i = 1 \sim 4)$ を不確定要素Δに置き換え, 特異摂動システムが漸近安定となる十分条件を導出する.

7.1 はじめに

特異摂動システムの分野において確立された安定解析の 1 つに特異摂動法 (Kokotović *et al.* 1986) がある. この方法は, まず, full–order system において, 摂動パラメータであるεを恒等的に 0 にする. 次に, 標準的な仮定である係数行列 A_{22}が非特異であることを利用して得られる slow system, および, $\tau = t/\varepsilon$に変換して得られる fast system の 2 つの subsystem について, それぞれ独立に解析を行う. 最後に, 低次元化された 2 つの subsystem から得られた結果を利用して, full–order system の解析を行うものである.

特異摂動システムの安定解析の問題は大きく分けて 2 つに分類することができる. 1 つは, システムの係数行列が時変である特異摂動システムを対象にした安定解析である. この場合, システムの係数行列の要素は非線形であっても, その具体的な関数が既知であることを前提にしている. Kokotović ら (1986) や Javid(1978) は, 特異摂動システムが漸近安定であるためのεの範囲を導出している. また, O'Reilly(1979) は, システムが安定化するための合成制御則を提案している. もう 1 つは, 係数行列に不確定要素を含んだ特異摂動システムのロバスト安定性についての解析である. この場合, システムの係数行列は, ノミナル部分と不確定要素の部分の和として表現することができる. ここで, ノミナル部分

の係数行列は時不変であり，また，不確定要素の部分の係数行列は時変である．不確定要素の部分の係数行列については，その大きさの上限値，下限値は知らされているが具体的な関数は未知である．このロバスト安定性問題について，Shao ら (1993) は，行列の H_∞ ノルムによる指標を用いてシステムが安定するための ε の範囲を導出している．また，鈴木ら (1996) は，リアプノフ関数を用いてシステムが 2 次安定化するための制御器を構築している．

従来，係数行列が時変である場合の特異摂動システムの安定解析の研究，及び，不確定要素を含む場合の特異摂動システムのロバスト安定性の研究において，特異摂動法を用いるためにシステムの係数行列の仮定に，$A_{22}(t)$ または，$A_{22}+\Delta A_{22}(t)$ が安定行列である必要がある．係数行列が時変である場合，係数行列の要素を構成する関数が既知なので，$A_{22}(t)$ が時間によらず安定であるという仮定は妥当である．一方，不確定要素を含むときのロバスト安定性の問題の場合，不確定要素である $\Delta A_{22}(t)$ を含んでの安定行列であるという仮定は，不確定要素が時変であり，かつその構造が明確でないことを考慮すれば，一般的でない．しかし，不確定要素である係数行列の変動幅が，ノミナル部分の係数行列の値と比較して，小さい．例えば，Shao ら (1993) が Example 2 で扱っている数値例の場合，電気回路に含まれている抵抗について，熱によるノミナル値からの変動幅が $R_1 \leq 0.05\Omega$，$R_2 = 1\Omega \pm 0.05\%$ ならば，時間によらず $A_{22}+\Delta A_{22}(t)$ が安定行列である仮定は妥当と考えられる．

通常，不確定要素を含む場合の特異摂動システムのロバスト安定性の研究において，不確定要素である $\Delta A_{22}(t)$ の大きさが，係数行列 A_{22} と比較して，どの程度なら特異摂動法を用いて安定解析を行うことができるか，はじめに仮定する必要がある．

そこで，本章では，第 5 章及び，第 6 章で扱われた H_∞ 制御問題に関係するリカッチ代数方程式の解が，安定化解である証明の部分で用いた補題 5.4 に対して，摂動項 ε を不確定要素に置き換え，特異摂動システムが指数漸近安定となる十分条件を導出する．大きな特徴は，$A_{22}+\Delta A_{22}(t)$ が安定行列である仮定を行わないでシステムが指数漸近安定となるための十分条件を導出したことである．さらに，導出には，従来から用いられていた特異摂動法を一切使用していない．又，本章で導出された指数漸近安定となるための十分条件を利用することにより，補題 5.4 が証明できる．

本章では，まず，Kokotović ら (1986) によって提案された座標変換法を用いて，ノミナル部分の係数行列を対角ブロックに変換する．さらに，この対角ブロックに変換されたシステムを大規模システムと考えることによって，Zhang ら (1996) によって提案された安定化の手法を利用して，full-order system の指数漸近安定を保証する十分条件を導出する．導出された十分条件は，保守的ではあるが，$A_{22}+\Delta A_{22}(t)$ が安定行列である仮定を必要としない．したがって，本章で得られた十分条件は，従来の $A_{22}+\Delta A_{22}(t)$ が安定行列である仮定

と比較して，不確定要素$\Delta A_{22}(t)$に対しての仮定が行列A_{22}と独立であるという意味で緩和である．すなわち，$A_{22}+\Delta A_{22}(t)$が安定行列であるとする仮定は直接せずに，指数漸近安定であるための十分条件を導出する．ただし，間接的にノミナル部分の係数行列に対してA_{22}, $A_0 = A_{11} - A_{12}A_{22}^{-1}A_{21}$は安定行列であり，かつ不確定要素$\Delta A_{ij}(t)$, $i=1,2$ $j=1,2$は有界であることを用いている．

7.2 問題設定

以下の不確定要素を含む特異摂動システムを考える．

$$\dot{x}_1(t) = [A_{11} + \Delta A_{11}(t)]x_1(t) + [A_{12} + \Delta A_{12}(t)]x_2(t) \tag{7.1a}$$

$$\varepsilon\dot{x}_2(t) = [A_{21} + \Delta A_{21}(t)]x_1(t) + [A_{22} + \Delta A_{22}(t)]x_2(t) \tag{7.1b}$$

ここで，システム(7.1b)中のεは摂動項に相当する十分小さな正のパラメータ，$x_i(t) \in \mathbf{R}^{n_i}(i=1,2)$は状態ベクトルである．また，初期状態は$x_1(0)=x_1^0$, $x_2(0)=x_2^0$で与えられる．$\Delta A_{ij}(t)(\equiv \Delta A_{ij})$ $(i=1,2$ $j=1,2)$はシステムの不確かさを表す未知の関数行列である．次に，システム(7.1)に関して，安定性の条件を求めるために基本的仮定を行う．

仮定 7.1 (Kokotović *et al.* 1986) $A_{22}, A_0 = A_{11} - A_{12}A_{22}^{-1}A_{21}$は安定行列である．

仮定 7.2 (Wu and Mizukami 1994) システム(7.1)は，以下で与えられる構造的不確かさをもつ．

$$|\Delta a_{kl}^{ij}(t)| \le \bar{a}_{kl}^{ij},\ i=1,2\ j=1,2 \tag{7.2}$$

ここで，$\Delta a_{kl}^{ij}(t)$は不確定行列関数$\Delta A_{ij}(t)$の(k,l)要素，$\bar{a}_{kl}^{ij}$は$|\Delta a_{kl}^{ij}(t)|$の上限を表す．本章では，任意の実数行列Zのモジュラス行列(modulus matrix)をZ^+と表す．また，任意の実数行列X, Yに対して，$X[\le]Y$はすべての(k,l)要素に対し$x_{kl} \le y_{kl}$を意味する．したがって，$\bar{A}_{ij}$を各(k,l)要素が$\bar{a}_{kl}^{ij}$である行列と定義すれば(7.2)は

$$\Delta A_{ij}(t)^+[\le]\Delta\bar{A}_{ij},\ i=1,2\ j=1,2 \tag{7.3}$$

と表現できる．

7.3 安定性のための十分条件

まず，システム(7.1)に対する指数漸近安定性を保証する以下の定理を示す．

定理 7.1 εが十分小さいと仮定する．また，

$$\alpha_1 < \min_i\{|\mathrm{Re}\lambda_i(A_s)|, i = 1, 2, \cdots\} \tag{7.4a}$$

$$\alpha_2 < \min_i\{|\mathrm{Re}\lambda_i(A_f)|, i = 1, 2, \cdots\} \tag{7.4b}$$

とおく．ただし，$\mathrm{Re}\lambda_i(Z)$ は任意の実数行列 Z の i 番目の固有値の実数部分を表す．このとき，以下の 3 つの不等式，

$$\alpha_1 > \beta_{11}K_1^2 \tag{7.5a}$$

$$\alpha_2 > \beta_{22}K_2^2 \tag{7.5b}$$

$$(\alpha_1 - \beta_{11}K_1^2)(\alpha_2 - \beta_{22}K_2^2) > \beta_{12}\beta_{21}K_1^2K_2^2 \tag{7.5c}$$

を同時に満足するとき，システム (7.1) は指数漸近安定である．ここで，β_{ij}，$(i = 1, 2,\ j = 1, 2)$，K_1，K_2は下記のように与えられる．

$$T^{-1}\begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ \varepsilon^{-1}A_{21} & \varepsilon^{-1}A_{22} \end{bmatrix} T = \begin{bmatrix} A_s & 0 \\ 0 & \varepsilon^{-1}A_f \end{bmatrix}$$

$$T = \begin{bmatrix} I_{n_1} & \varepsilon H \\ -L & I_{n_2} - \varepsilon LH \end{bmatrix}$$

$$A_s = A_{11} - A_{12}L = A_0 + O(\varepsilon)$$

$$A_f = A_{22} + \varepsilon LA_{12} = A_{22} + O(\varepsilon)$$

$$A_{22}L - A_{21} - \varepsilon L(A_{11} - A_{12}L) = 0$$

$$H(A_{22} + \varepsilon LA_{12}) - A_{12} - \varepsilon(A_{11} - A_{12}L)H = 0$$

$$\begin{aligned} ||\Delta\bar{A}_{11} &+ (A_{12}A_{22}^{-1})^+\Delta\bar{A}_{21} + \Delta\bar{A}_{12}(A_{22}^{-1}A_{21})^+ \\ &+ (A_{12}A_{22}^{-1})^+\Delta\bar{A}_{22}(A_{22}^{-1}A_{21})^+||_S \le \beta_{11} \end{aligned}$$

$$||\Delta\bar{A}_{12} + (A_{12}A_{22}^{-1})^+\Delta\bar{A}_{22}||_S \le \beta_{12}$$

$$||\Delta\bar{A}_{21} + \Delta\bar{A}_{22}(A_{22}^{-1}A_{21})^+||_S \le \beta_{21}$$

$$||\Delta\bar{A}_{22}||_S \le \beta_{22}$$

$$K_1 = \sqrt{\frac{\lambda_{\max}(P_1)}{\lambda_{\min}(P_1)}},\ K_2 = \sqrt{\frac{\lambda_{\max}(P_2)}{\lambda_{\min}(P_2)}}$$

$$(A_s + \alpha_1 I)^T P_1 + P_1(A_s + \alpha_1 I) + Q_1 = 0$$

$$(A_f + \alpha_2 I)^T P_2 + P_2(A_f + \alpha_2 I) + Q_2 = 0$$

であり，Q_1，Q_2は任意の正定対称行列である．又，$||\cdot||_S$ は行列の最大特異値を表す．

定理の証明の前に，以下の補題を準備する (Kokotović *et al.* 1987, Wu and Mizukami 1994).

補題 7.1 (Bellman–Gronwall Lemma)

$p(t)$, $q(t)$, $r(t)$ は不等式 (7.6) を満たす正の値をとる関数とする.

$$p(t) \leq r(t) + \int_0^t q(\tau)p(\tau)d\tau \tag{7.6}$$

このとき, 以下の不等式 (7.7a) または (7.7b) が成立する.

$$p(t) \;\; \leq \;\; r(0)\exp\{\int_0^t q(\sigma)d\sigma\} + \int_0^t \dot{r}(\tau)\exp\{\int_\tau^t q(\sigma)d\sigma\}d\tau \tag{7.7a}$$

$$p(t) \;\; \leq \;\; r(t) + \int_0^t r(\sigma)q(\sigma)\exp\{\int_\sigma^t q(\tau)d\tau\}d\sigma \tag{7.7b}$$

特に, $q(t)$ が定数, つまり, $q(t) = K = (\mathrm{constant})$ であるとき, 以下の不等式 (7.8a) または (7.8b) が成立する.

$$p(t) \;\; \leq \;\; r(0)\exp(Kt) + \int_0^t \dot{r}(\tau)\exp\{K(t-\tau)\}d\tau \tag{7.8a}$$

$$p(t) \;\; \leq \;\; r(t) + K\int_0^t r(\sigma)\exp\{K(t-\sigma)\}d\sigma \tag{7.8b}$$

(定理 7.1 の証明)　仮定 7.1 から線形変換行列 $y(t) = T^{-1}x(t)$ が存在するので, この線形変換行列を用いることによって, システム (7.1) をシステム (7.9) に変換する.

$$\dot{y}_1(t) = A_s y_1(t) + \Delta\tilde{A}_{11}y_1(t) + \Delta\tilde{A}_{12}y_2(t) \tag{7.9a}$$

$$\varepsilon\dot{y}_2(t) = A_f y_2(t) + \Delta\tilde{A}_{21}y_1(t) + \Delta\tilde{A}_{22}y_2(t) \tag{7.9b}$$

$$x(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} = T\begin{bmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \end{bmatrix} = Ty(t) \tag{7.9c}$$

ただし,

$$T^{-1}\begin{bmatrix} \Delta A_{11} & \Delta A_{12} \\ \varepsilon^{-1}\Delta A_{21} & \varepsilon^{-1}\Delta A_{22} \end{bmatrix}T = \begin{bmatrix} \Delta\tilde{A}_{11} & \Delta\tilde{A}_{12} \\ \varepsilon^{-1}\Delta\tilde{A}_{21} & \varepsilon^{-1}\Delta\tilde{A}_{22} \end{bmatrix}$$

ここで, 考えているεは, 線形変換Tが存在する条件下でのε の上限値ε^*に対して, $0 \leq \varepsilon < \varepsilon^*$ を満たす. したがって, 以後取り扱うεは, $0 \leq \varepsilon < \varepsilon^*$を満たす十分小さな$\varepsilon$ に対して解析を行う.

$x(t)$ についてノルムをとれば

$$||x(t)||_E \leq ||T||_S \cdot ||y(t)||_E \tag{7.10}$$

を得る．ここで，$||\cdot||_E$はベクトルのユークリッドノルムを表す．$||T||_S$は有界であるから，$||y(t)||_E \to 0$ は $||x(t)||_E \to 0$ と等価である．したがって，$||y(t)||_E$ の収束性について研究する．まず，以下の (7.11) で与えられるリアプノフ関数 $V(y,t)$ を考える．

$$V(y,t) \;=\; V_1(y_1,t) + \varepsilon V_2(y_2,t) = y_1^T P_1 y_1 + \varepsilon y_2^T P_2 y_2 \tag{7.11}$$

ここで，仮定 7.1 から，εが十分小さいとき A_s, A_fはともに安定行列となる (Kokotović *et al.* 1986)．したがって，以下の 2 つのリアプノフ方程式 (付録 1 参照)

$$(A_s + \alpha_1 I)^T P_1 + P_1(A_s + \alpha_1 I) + Q_1 = 0 \tag{7.12a}$$

$$(A_f + \alpha_2 I)^T P_2 + P_2(A_f + \alpha_2 I) + Q_2 = 0 \tag{7.12b}$$

は正定対称解 P_1, P_2をもつ．以上から，レイリ原理 (Rayleigh's principle)(付録 4 参照) を用いて不等式 (7.13) を得る．

$$\lambda_{\min}(P_1)||y_1||_E^2 \le V_1(y_1,t) \le \lambda_{\max}(P_1)||y_1||_E^2 \tag{7.13a}$$

$$\lambda_{\min}(P_2)||y_2||_E^2 \le V_2(y_2,t) \le \lambda_{\max}(P_2)||y_2||_E^2 \tag{7.13b}$$

次に，リアプノフ関数 (7.11) を軌道 $y(t)$ に沿って時間微分を行い，(7.9a), (7.9b) を用いれば下記式 (7.14) になる．

$$\begin{aligned}
&\frac{dV(y,t)}{dt} \\
=\;& \dot{y}_1^T P_1 y_1 + y_1^T P_1 \dot{y}_1 + \varepsilon \dot{y}_2^T P_2 y_2 + \varepsilon y_2^T P_2 \dot{y}_2 \\
=\;& (A_s y_1 + \Delta\tilde{A}_{11} y_1 + \Delta\tilde{A}_{12} y_2)^T P_1 y_1 + y_1^T P_1 (A_s y_1 + \Delta\tilde{A}_{11} y_1 + \Delta\tilde{A}_{12} y_2) \\
& + (A_f y_2 + \Delta\tilde{A}_{21} y_1 + \Delta\tilde{A}_{22} y_2)^T P_2 y_2 + y_2^T P_2 (A_f y_2 + \Delta\tilde{A}_{21} y_1 + \Delta\tilde{A}_{22} y_2) \\
=\;& y_1^T (A_s^T P_1 + P_1 A_s) y_1 + 2 y_1^T P_1 \sum_{j=1}^{2} \Delta\tilde{A}_{1j} y_j \\
& + y_2^T (A_f^T P_2 + P_2 A_f) y_2 + 2 y_2^T P_2 \sum_{j=1}^{2} \Delta\tilde{A}_{2j} y_j \\
=\;& -2\alpha_1 V_1(y_1,t) - y_1^T Q_1 y_1 + 2 y_1^T P_1 \sum_{j=1}^{2} \Delta\tilde{A}_{1j} y_j \\
& -2\alpha_2 V_2(y_2,t) - y_2^T Q_2 y_2 + 2 y_2^T P_2 \sum_{j=1}^{2} \Delta\tilde{A}_{2j} y_j \\
\le\;& -2\alpha_1 V_1(y_1,t) + 2 y_1^T P_1 \sum_{j=1}^{2} \Delta\tilde{A}_{1j} y_j \\
& -2\alpha_2 V_2(y_2,t) + 2 y_2^T P_2 \sum_{j=1}^{2} \Delta\tilde{A}_{2j} y_j
\end{aligned} \tag{7.14}$$

さらに (7.14) の右辺に対して，ベクトルとノルムの性質を用いる．すなわち，任意のベクトル w と任意の実数行列 Z に対して，$w^T Z w \le ||w||_E^2 ||Z||_S$ を利用する．

$$
\begin{aligned}
&\frac{dV(y,t)}{dt} \\
\le\ & -2\alpha_1 V_1(y_1,t) + 2||y_1^T P_1||_E \sum_{j=1}^{2} ||\Delta\tilde{A}_{1j}||_S \cdot ||y_j||_E \\
& -2\alpha_2 V_2(y_2,t) + 2||y_2^T P_2||_E \sum_{j=1}^{2} ||\Delta\tilde{A}_{2j}||_S \cdot ||y_j||_E
\end{aligned}
$$

ここで，不確定要素である係数行列 $\Delta\tilde{A}_{ij}$ $(i=1,2\ j=1,2)$ の各要素は，

$$
\begin{aligned}
\Delta\tilde{A}_{11} &= \Delta A_{11} - A_{12}A_{22}^{-1}\Delta A_{21} - \Delta A_{12}A_{22}^{-1}A_{21} \\
&\quad + A_{12}A_{22}^{-1}\Delta A_{22}A_{22}^{-1}A_{21} + O(\varepsilon) \qquad (7.15a)
\end{aligned}
$$

$$\Delta\tilde{A}_{12} = \Delta A_{12} - A_{12}A_{22}^{-1}\Delta A_{22} + O(\varepsilon) \qquad (7.15b)$$

$$\Delta\tilde{A}_{21} = \Delta A_{21} - \Delta A_{22}A_{22}^{-1}A_{21} + O(\varepsilon) \qquad (7.15c)$$

$$\Delta\tilde{A}_{22} = \Delta A_{22} + O(\varepsilon) \qquad (7.15d)$$

である．ここで，任意の実数行列 Z に対して，$||Z||_S \le ||Z^+||_S$ が成立するので，ε が十分小さいとき，仮定 7.2 を用いれば

$$
\begin{aligned}
||\Delta\tilde{A}_{11}||_S &= ||\Delta\bar{A}_{11} + (A_{12}A_{22}^{-1})^+\Delta\bar{A}_{21} + \Delta\bar{A}_{12}(A_{22}^{-1}A_{21})^+ \\
&\quad + (A_{12}A_{22}^{-1})^+\Delta\bar{A}_{22}(A_{22}^{-1}A_{21})^+||_S + O(\varepsilon) \le \beta_{11} \qquad (7.16a)
\end{aligned}
$$

$$||\Delta\tilde{A}_{12}||_S = ||\Delta\bar{A}_{12} + (A_{12}A_{22}^{-1})^+\Delta\bar{A}_{22}||_S + O(\varepsilon) \le \beta_{12} \qquad (7.16b)$$

$$||\Delta\tilde{A}_{21}||_S = ||\Delta\bar{A}_{21} + \Delta\bar{A}_{22}(A_{22}^{-1}A_{21})^+||_S + O(\varepsilon) \le \beta_{21} \qquad (7.16c)$$

$$||\Delta\tilde{A}_{22}||_S = ||\Delta\bar{A}_{22}||_S + O(\varepsilon) \le \beta_{22} \qquad (7.16d)$$

となる β_{ij} $(i=1,2\ j=1,2)$ が存在する．したがって，

$$
\begin{aligned}
&\frac{dV(y,t)}{dt} \\
\le\ & -2\alpha_1 V_1(y_1,t) + 2\lambda_{\max}(P_1)||y_1||_E \sum_{j=1}^{2} \beta_{1j}||y_j||_E \\
& -2\alpha_2 V_2(y_2,t) + 2\lambda_{\max}(P_2)||y_2||_E \sum_{j=1}^{2} \beta_{2j}||y_j||_E \\
\le\ & -2\sum_{i=1}^{2}\alpha_i V_i(y_i,t) + 2\sum_{i=1}^{2}\sum_{j=1}^{2}\frac{\lambda_{\max}(P_i)}{\sqrt{\lambda_{\min}(P_i)}}\sqrt{V_i(y_i,t)}\beta_{ij}||y_j||_E \qquad (7.17)
\end{aligned}
$$

となる．以下の 2 つの不等式 (7.18a), (7.18b)

$$\frac{dV_1(y_1,t)}{dt} \leq -2\alpha_1 V_1(y_1,t) + 2\frac{\lambda_{\max}(P_1)}{\sqrt{\lambda_{\min}(P_1)}}\sqrt{V_1(y_1,t)}\sum_{j=1}^{2}\beta_{1j}||y_j||_E \tag{7.18a}$$

$$\varepsilon\frac{dV_2(y_2,t)}{dt} \leq -2\alpha_2 V_2(y_2,t) + 2\frac{\lambda_{\max}(P_2)}{\sqrt{\lambda_{\min}(P_2)}}\sqrt{V_2(y_2,t)}\sum_{j=1}^{2}\beta_{2j}||y_j||_E \tag{7.18b}$$

が成立するとき，不等式 (7.17) を満足するので，不等式 (7.17) を考察する代わりに不等式 (7.18a), (7.18b) について議論する．まず，(7.18a) を直接積分すれば

$$\begin{aligned} V_1(t) \leq\ & \lambda_{\max}(P_1)||y_1^0||_E^2 \exp(-2\alpha_1 t) \\ & +2\int_0^t \exp\{-2\alpha_1(t-\tau)\}\frac{\lambda_{\max}(P_1)}{\sqrt{\lambda_{\min}(P_1)}}\sqrt{V_1(\tau)}\sum_{j=1}^{2}\beta_{1j}||y_j(\tau)||_E d\tau \end{aligned} \tag{7.19}$$

となる．ここで，

$$\begin{aligned} S_1(t) =\ & \Big[\lambda_{\max}(P_1)||y_1^0||_E^2 \exp(-2\alpha_1 t) \\ & +2\int_0^t \exp\{-2\alpha_1(t-\tau)\}\frac{\lambda_{\max}(P_1)}{\sqrt{\lambda_{\min}(P_1)}}\sqrt{V_1(\tau)} \\ & \cdot\sum_{j=1}^{2}\beta_{1j}||y_j(\tau)||_E d\tau\Big]^{\frac{1}{2}} \end{aligned} \tag{7.20}$$

を定義する．$S_1(t)$ を t について微分する．

$$\frac{dS_1(t)}{dt} = -\alpha_1 S_1(t) + \frac{\lambda_{\max}(P_1)}{\sqrt{\lambda_{\min}(P_1)}}\sum_{j=1}^{2}\beta_{1j}||y_j||_E \tag{7.21}$$

さらにもう 1 度 (7.21) を直接積分すれば，

$$\begin{aligned} S_1(t) \leq\ & \sqrt{\lambda_{\max}(P_1)}||y_1^0||_E \exp(-\alpha_1 t) \\ & +\int_0^t \exp\{-\alpha_1(t-\tau)\}\frac{\lambda_{\max}(P_1)}{\sqrt{\lambda_{\min}(P_1)}}\sum_{j=1}^{2}\beta_{1j}||y_j(\tau)||_E d\tau \end{aligned} \tag{7.22}$$

となる．したがって，

$$\begin{aligned} ||y_1(t)||_E \leq\ & \sqrt{\frac{V_1(t)}{\lambda_{\min}(P_1)}} \leq \frac{S_1(t)}{\sqrt{\lambda_{\min}(P_1)}} \\ \leq\ & \sqrt{\frac{\lambda_{\max}(P_1)}{\lambda_{\min}(P_1)}}||y_1^0||_E \exp(-\alpha_1 t) \\ & +\int_0^t \exp\{-\alpha_1(t-\tau)\}\frac{\lambda_{\max}(P_1)}{\lambda_{\min}(P_1)}\sum_{j=1}^{2}\beta_{1j}||y_j(\tau)||_E d\tau \end{aligned} \tag{7.23}$$

となる．補題 7.1 を用いるために，(7.23) の両辺に $\exp(\alpha_1 t)$ を掛ける．続いて，Bellman–Gronwall 不等式 (7.8a) を利用すれば (7.24) 式が得られる．

$$\begin{aligned}
&||y_1(t)||_E \exp(\alpha_1 t) \\
\leq\ & K_1||y_1^0||_E \exp(\beta_{11}K_1^2 t) \\
&+\int_0^t \beta_{12}K_1^2 \exp(\alpha_1\tau)||y_2(\tau)||_E \exp\{\beta_{11}K_1^2(t-\tau)\}d\tau
\end{aligned} \tag{7.24}$$

以上から，

$$\begin{aligned}
||y_1(t)||_E \ \leq\ & K_1||y_1^0||_E \exp\{(\beta_{11}K_1^2-\alpha_1)t\} \\
&+\beta_{12}K_1^2\int_0^t ||y_2(\tau)||_E \exp\{(\beta_{11}K_1^2-\alpha_1)(t-\tau)\}d\tau
\end{aligned} \tag{7.25}$$

となる．

(7.18b) に対して，(7.18a) と同様な手法によって (7.26) を得ることができる．

$$\begin{aligned}
||y_2(t)||_E \ \leq\ & K_2||y_2^0||_E \exp\{\varepsilon^{-1}(\beta_{22}K_2^2-\alpha_2)t\} \\
&+\frac{\beta_{21}K_2^2}{\varepsilon}\int_0^t ||y_1(\tau)||_E \exp\{\varepsilon^{-1}(\beta_{22}K_2^2-\alpha_2)(t-\tau)\}d\tau
\end{aligned} \tag{7.26}$$

続いて，(7.26) を (7.25) に代入する．ここで，$\sigma_1=\alpha_1-\beta_{11}K_1^2$，$\sigma_2=\varepsilon^{-1}(\alpha_2-\beta_{22}K_2^2)$ とする．

$$\begin{aligned}
&||y_1(t)||_E \\
\leq\ & K_1||y_1^0||_E \exp(-\sigma_1 t)+\beta_{12}K_1^2\int_0^t K_2||y_2^0||_E\exp(-\sigma_2\tau)\exp\{-\sigma_1(t-\tau)\}d\tau \\
&+\beta_{12}K_1^2\int_0^t\frac{\beta_{21}K_2^2}{\varepsilon}\left[\int_0^\tau ||y_1(s)||_E\exp\{-\sigma_2(\tau-s)\}ds\right]\exp\{-\sigma_1(t-\tau)\}d\tau \\
\leq\ & K_1||y_1^0||_E \exp(-\sigma_1 t)+\beta_{12}K_1^2K_2||y_2^0||_E\frac{\exp(-\sigma_2 t)-\exp(-\sigma_1 t)}{\sigma_1-\sigma_2} \\
&+\frac{\beta_{12}\beta_{21}K_1^2K_2^2}{\varepsilon} \\
&\cdot\int_0^t\int_s^t ||y_1(s)||_E\exp(\sigma_2 s)\exp(-\sigma_1 t)\exp\{-(\sigma_2-\sigma_1)\tau\}d\tau ds \\
\leq\ & K_1||y_1^0||_E \exp(-\sigma_1 t)+\frac{\beta_{12}K_1^2K_2||y_2^0||_E}{\sigma_1-\sigma_2}[\exp(-\sigma_2 t)-\exp(-\sigma_1 t)] \\
&+\frac{\beta_{12}\beta_{21}K_1^2K_2^2}{\varepsilon\sigma_1}\int_0^t ||y_1(s)||_E\exp\{-\sigma_2(t-s)\}ds
\end{aligned} \tag{7.27}$$

(7.27) の両辺に $\exp(\sigma_2 t)$ を掛けて，Bellman–Gronwall 不等式 (7.8b) を利用すれば (7.28) 式が得られる．

$$\begin{aligned}
&||y_1(t)||_E \exp(\sigma_2 t) \\
\leq\ & K_1||y_1^0||_E \exp\{-(\sigma_1-\sigma_2)t\}+\frac{\beta_{12}K_1^2K_2||y_2^0||_E}{\sigma_1-\sigma_2}[1-\exp\{-(\sigma_1-\sigma_2)t\}]
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&+\frac{\beta_{12}\beta_{21}K_1^2K_2^2}{\varepsilon\sigma_1}\int_0^t \exp\Big[\frac{\beta_{12}\beta_{21}K_1^2K_2^2}{\varepsilon\sigma_1}(t-s)\Big] \\
&\cdot\Big[K_1||y_1^0||_E\exp\{-(\sigma_1-\sigma_2)s\}+\frac{\beta_{12}K_1^2K_2||y_2^0||_E}{\sigma_1-\sigma_2} \\
&\cdot[1-\exp\{-(\sigma_1-\sigma_2)s]\Big]ds
\end{aligned} \tag{7.28}
$$

ここで,

$$
\bar{\sigma}=\sigma_2-\frac{\beta_{12}\beta_{21}K_1^2K_2^2}{\varepsilon\sigma_1} \tag{7.29}
$$

とおく. (7.28) の右辺を実際に積分して, $\exp(-\sigma_2 t)$ を両辺にかければ下記式 (7.30) が得られる.

$$
\begin{aligned}
||y_1(t)||_E \;\le\; & \Big[K_1||y_1^0||_E+\frac{\beta_{12}K_1^2K_2||y_2^0||_E}{\bar{\sigma}-\sigma_1}-\frac{\bar{\sigma}-\sigma_2}{\bar{\sigma}-\sigma_1}K_1||y_1^0||_E\Big]\exp(-\sigma_1 t) \\
&+\Big[-\frac{\beta_{12}K_1^2K_2||y_2^0||_E}{\bar{\sigma}-\sigma_1}+\frac{\bar{\sigma}-\sigma_2}{\bar{\sigma}-\sigma_1}K_1||y_1^0||_E\Big]\exp(-\bar{\sigma}t)
\end{aligned} \tag{7.30}
$$

(7.30) と同様に, (7.25) を (7.26) に代入して計算すれば下記式 (7.31) が得られる.

$$
\begin{aligned}
||y_2(t)||_E \;\le\; & \Big[K_2||y_2^0||_E+\frac{\beta_{21}K_1K_2^2||y_1^0||_E}{\hat{\sigma}-\sigma_2}-\frac{\hat{\sigma}-\sigma_1}{\hat{\sigma}-\sigma_2}K_2||y_2^0||_E\Big]\exp(-\sigma_2 t) \\
&+\Big[-\frac{\beta_{21}K_1K_2^2||y_1^0||_E}{\hat{\sigma}-\sigma_2}+\frac{\hat{\sigma}-\sigma_2}{\hat{\sigma}-\sigma_1}K_2||y_2^0||_E\Big]\exp(-\hat{\sigma}t)
\end{aligned} \tag{7.31}
$$

ただし,

$$
\hat{\sigma}=\sigma_1-\frac{\beta_{12}\beta_{21}K_1^2K_2^2}{\varepsilon\sigma_2} \tag{7.32}
$$

である. (7.30) 及び (7.31) から, $y_1(t)$, $y_2(t)$ が指数漸近安定するためには, 4 つの不等式 $\sigma_1>0$, $\sigma_2>0$, $\bar{\sigma}>0$, $\hat{\sigma}>0$ が同時に成立すれば良い. したがって, これらの不等式を解けば,

$$
\begin{aligned}
&\alpha_1>\beta_{11}K_1^2 \\
&\alpha_2>\beta_{22}K_2^2 \\
&(\alpha_1-\beta_{11}K_1^2)(\alpha_2-\beta_{22}K_2^2)>\beta_{12}\beta_{21}K_1^2K_2^2
\end{aligned}
$$

が得られる. □

注意 7.1 不等式 (7.5b) が成立するとき, fast system

$$
\varepsilon\dot{x}_{2f}(t)=[A_{22}+\Delta A_{22}(t)]x_{2f}(t) \tag{7.33}
$$

は, 不確定要素$\Delta A_{22}(t)$ を含んでも漸近安定になる. したがって, 十分条件が成立する限り, $A_{22}+\Delta A_{22}(t)$ は安定行列となるので, $A_{22}+\Delta A_{22}(t)$ が安定行列である仮定をしないで, 十分条件を導出しても, 本論文の定理 7.1 では, 最終的に $A_{22}+\Delta A_{22}(t)$ が$\Delta A_{22}(t)$ に依存しないで安定行列でなくてはならない.

7.4 数値例

以下の不確定要素を含む特異摂動システムを考える.

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \varepsilon\dot{z}_1 \\ \varepsilon\dot{z}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0.5 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -0.5 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & -2 & a(t) \\ 0 & 1 & b(t) & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ z_1 \\ z_2 \end{bmatrix} \tag{7.34}$$

ここで, $a(t)$, $b(t)$ は $|a(t)| \le \bar{a}$, $|b(t)| \le \bar{b}$を満たす不確定要素である. 以下, $\varepsilon = 0.1$ としてシステム (7.34) が指数漸近安定になるための$\bar{a}$, $\bar{b}$の条件を求める. まず, (7.9c) の線形変換Tを計算すれば (7.35) になる.

$$T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0.0542 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0.0542 \\ 0.5271 & 0 & 1.0286 & 0 \\ 0 & 0.5271 & 0 & 1.0286 \end{bmatrix} \tag{7.35}$$

したがって,

$$A_s = \begin{bmatrix} -1.0271 & 0 \\ 0 & -1.0271 \end{bmatrix} \tag{7.36a}$$

$$A_f = \begin{bmatrix} -1.9472 & 0 \\ 0 & -1.9472 \end{bmatrix} \tag{7.36b}$$

となる. ここで, (7.4) より定まるα_1, α_2を

$$\min_i\{|\mathrm{Re}\lambda_i(A_s)|, i = 1, 2, \cdots\} > \alpha_1 = 1.0 \tag{7.37a}$$

$$\min_i\{|\mathrm{Re}\lambda_i(A_f)|, i = 1, 2, \cdots\} > \alpha_2 = 1.9 \tag{7.37b}$$

に設定する. また, (7.16) から

$$\beta_{11} = \frac{\sqrt{\bar{a}\bar{b}}}{4},\ \beta_{12} = \beta_{21} = \frac{\sqrt{\bar{a}\bar{b}}}{2},\ \beta_{22} = \sqrt{\bar{a}\bar{b}} \tag{7.38}$$

である. さらに A_s, A_fの形から, $K_1 = K_2 = 1.0$ である. 以上を条件式 (7.5) に代入して連立不等式を解けば

$$|\bar{a}\bar{b}| < 1.6593 \tag{7.39}$$

となる. 以上より $|\bar{a}\bar{b}| < 1.6593$ を満たすならば, システム (7.34) は指数漸近安定となる.

続いて, $a(t) = 1.2\sin^2(\pi t)$, $b(t) = -1.2\sin(\pi t)\cos(\pi t)$ としたときのシュミレーション結果を Fig.7.1 に示す. ただし, 初期値は

$$\begin{bmatrix} x_1 & x_2 & z_1 & z_2 \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} 0.0 & 0.5 & 1.0 & 1.5 \end{bmatrix}^T \tag{7.40}$$

である.

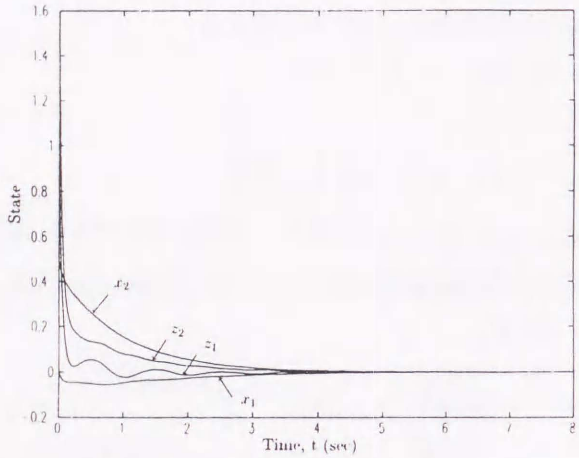

図 7.1: Response of the state variables.

$\bar{a} = 1.2$, $\bar{b} = 0.6$ であるから指数漸近安定条件 (7.39) をみたしている．したがって，システム (7.34) は指数漸近安定となる．

図 7.1から状態変数のすべては，時間の経過とともに 0 に収束していることがわかる．

7.5 まとめ

本章では，5 章，6 章でリカッチ代数方程式の安定化解の証明に利用された補題 5.4 の拡張として，不確定要素を含む特異摂動システムにおけるロバスト安定性のための十分条件を，$A_{22} + \Delta A_{22}(t)$ が安定行列である仮定を行わないで導出した．導出には，一般的に利用されていた特異摂動法を一切使用していない．導出された十分条件は，保守的ではあるが，$A_{22} + \Delta A_{22}(t)$ が安定行列である仮定を必要としない．今後の課題として，係数行列 A_{22}が特異である非標準特異摂動システムに対して，制御入力を付加した安定化についての研究が期待できる．さらに，本章で導出された十分条件は，最終的に $A_{22} + \Delta A_{22}(t)$ が$\Delta A_{22}(t)$ に依存せずに安定行列でなければならないが，本章の十分条件の緩和として，ある時刻 t_0 に対して $A_{22} + \Delta A_{22}(t_0)$ が特異行列であっても，システム全体が漸近安定となる新たな十分条件を導出することが考えられる．

第 8 章

結論

本論文では, 主に, 係数行列 A_{22}が非特異である仮定を必要としない非特異摂動システムにおけるリカッチ代数方程式を解くための再帰的アルゴリズムについて研究した.

第 2 章では, 非標準特異摂動システムにおいて, ディスクリプタシステムで扱われている一般化リカッチ方程式を利用した合成制御則による最適レギュレータ問題をとりあげた. 提案された新しい合成制御則は, 従来と異なり, 標準, 非標準特異摂動システムのどちらにも適用することができる. 又, 合成制御則は, 低次元化された slow system のレギュレータ問題を解くことによって簡単に得られる. さらに, full-order system のレギュレータ問題の解が存在するための条件 (可安定性, 可検出性) が, εに依存しない低次元化された slow system, fast system のレギュレータ問題の解の存在するための条件によって記述されることを示した. また, 非標準特異摂動システムにおいて, 従来の標準特異摂動システムの場合と同様に, 提案された合成制御則が, 評価関数について, $J^c = J^* + O(\varepsilon^2)$ を満足することを証明した. その結果, 非標準特異摂動システムについても, 最適フィードバックを利用した場合と合成制御則を利用した場合との評価関数の誤差が $O(\varepsilon^2)$ であることを示した. 以上から, 新たに提案した合成制御則は, 従来の Kokotović ら (1986) が提案した合成制御則と同様に, 標準特異摂動システムにも適用できるという意味で Kokotović ら (1986) の手法を完全に含んでいることが確認された.

第 3 章から第 6 章までは, 第 2 章と異なり, 非標準特異摂動システムにおける最適レギュレータ問題 (LQR 問題), LQG 問題, 及び, H_∞問題を解くためのリカッチ代数方程式の再帰的アルゴリズムに関して研究を行った.

特に, 非標準特異摂動システムにおける最適レギュレータ問題に対して, 第 3 章では, 第 2 章と異なり, 合成制御則によるコントローラの設計を行わずに, 再帰的アルゴリズムによるコントローラの設計を提案している. まず, ディスクリプタシステムにおける

Hamilton–Jacobi 方程式を利用して最適フィードバックゲインを求めた. 次に, 最適制御入力を求めるために一般化リカッチ方程式を新たに導入した. その結果, 従来の Gajic ら (1986) が提案した標準特異摂動システムにおける再帰的アルゴリズムと異なった方法で新たな再帰的アルゴリズムを導出することができた. また, この再帰的アルゴリズムの収束性の証明に陰関数定理を用いることにより, 十分小さな正のパラメータ (ε) に対し, 収束解の存在を証明することができた. 以上から, Gajic(1986) と異なり, 係数行列 A_{22}が特異行列であっても, 再帰的アルゴリズムが適用できる.

第 4 章では, 第 3 章の拡張として, 非標準特異摂動システムにおける最適レギュレータ問題から, LQG 問題を扱っている. この章では, 次の 2 つの大きな特徴があげられる. まず, 第 3 章と同様に 2 つのリカッチ方程式の解の存在性を保証する仮定に, A_{22}が非特異である必要がない. 次に, 2 つの最適ゲインを求める際に, 解く必要のある 2 つのリカッチ方程式を一般化リカッチ方程式に変換し, この一般化リカッチ方程式を解くことである. したがって, 第 3 章と同様に, 非標準特異摂動システムの LQG 問題について, Gajic ら (1986) と異なった仮定で再帰的アルゴリズムを導出できた.

第 5 章では, 第 6 章の準備として, 摂動項εを含む H_∞ タイプリカッチ方程式について, 一般化リカッチ方程式に変換して, 再帰的アルゴリズムを導出した. ここで, 注意しなければならないことは, 再帰的アルゴリズムは, 基本的に第 3 章及び第 4 章で扱ったともの と変わらないが, 扱うリカッチ方程式のタイプが異なるため, 再帰的アルゴリズムによって得られた収束解が, 準正定かつ安定化解である保証が従来の研究結果として存在しない. したがって, 新たに導出, 証明を行うことにした. その結果, 準正定かつ安定化解が存在する十分条件を 2 つの subsystem である fast system および slow system のノルム条件によって与えた. 得られた結果は, Dragon(1996) に類似しているが, 証明方法にアルゴリズムの手法を導入することによって, 従来の証明方法を変更することが可能となった. 同時に, 提案された十分条件を満たすとき, 導出した再帰的アルゴリズムが十分小さなεに対して, $O(\varepsilon^k)$ の高精度で収束することを示した. さらに, 得られた解は準正定かつ安定化解であることを示した.

第 6 章では, 第 5 章の拡張として, 1980 年代後半に Doyle らによって解かれた状態空間法に基づく H_∞制御を非標準特異摂動システムに適用して, 再帰的アルゴリズムによるコントローラの設計を提案した. 再帰的アルゴリズムを利用することにより, 摂動項εが十分小さいとき, 得られた一般化リカッチ方程式の解は準正定かつ安定化解であることを第 5 章と同様な手法を利用して証明した. さらに, 直接 full–order system における一般化リカッチ方程式の解を $O(\varepsilon^k)$ の高精度で解くことによって, 構築された制御器は $O(\varepsilon^k)$ の高精度であることを同時に示した. その結果, 特異摂動法による近似解を利用した制御器に比べて, より最適な制御が可能となった. つまり再帰的アルゴリズムによって得られた制

御器は，設計仕様のγに対して$\gamma + O(\varepsilon^{k+1})$ を保証している．さらに，Fridman(1996) の研究結果と比較して，本章で構築されたコントローラがγに対して同程度の設計仕様を満たし，かつ再帰的アルゴリズムによって簡単に得られる点から十分実用的である．

第 7 章では，先の第 5 章，及び，第 6 章で，再帰的アルゴリズムによって得られた解が安定化解であることを証明するために必要な補題を，従来と異なる方法で導出した．すなわち，不確定要素を含む特異摂動システムにおけるロバスト安定性のための十分条件を，$A_{22} + \Delta A_{22}(t)$ が安定行列である仮定を行わないで導出した．導出には，一般的に利用されていた特異摂動法を一切使用していない．導出された十分条件は，保守的ではあるが，$A_{22} + \Delta A_{22}(t)$ が安定行列である仮定を必要としない．

謝辞

本研究の全般にわたり, 終始親身なる御指導及び御鞭撻を頂いた水上　孝一教授に心から御礼を申し上げます.

また, 本論文作成に際して, 適切な御指導及びコメントを頂いた佐伯　正美教授, 原田耕一教授, 山縣　敬一教授, ならびに徐　驊助教授に心から感謝いたします. 特に, 徐　驊助教授には, 理論展開から証明の細部に至るまで, 懇切丁寧に御討議及び御検討して頂き, 誠にありがとうございました. さらには, 広島県立大学の呉　漢生助教授, 広島工業大学の鈴村　文寛講師には, 常に有意義な御助言を頂き, 御礼申し上げます.

最後に, 広島大学工学研究科に在学中, いろいろお世話になりました教官, 職員, ならびに水上研究室の学生の方々に御礼を申し上げます.

付録 1

リアプノフ方程式, リカッチ方程式

未知マトリクスを含む微分 (代数) 方程式のうちで, システム制御理論への応用上, 重要なものにリアプノフ微分 (代数) 方程式やリカッチ微分 (代数) 方程式などがあげられる. ここでは, この 2 つの方程式について, 基本的な性質を紹介する.

1.1 リアプノフ方程式

入力が存在しない線形時不変システム

$$\dot{x}(t) = Ax(t) \tag{A.1}$$

の安定性について考える.

まず, リアプノフ関数 (A.2) を定義する.

$$V(t) = x^T(t)Px(t) \tag{A.2}$$

システム (A.1) の軌道に沿っての $V(t)$ の時間微分は (A.3) になる.

$$\begin{aligned}\dot{V}(t) &= \dot{x}^T(t)Px(t) + x^T P\dot{x}(t) \\ &= x^T(t)[PA + A^T P]x(t)\end{aligned} \tag{A.3}$$

したがって, システム (A.1) が漸近安定であるための十分条件は, $V(t) > 0$, $\dot{V}(t) < 0$ から

$$PA + A^T P = -Q \tag{A.4}$$

が成立すれば良い (Gajic *et al.* 1995, 児玉, 須田 1978). ただし, Q は正定対称行列である. ここで, (A.4) をリアプノフ代数方程式と呼ぶ.

リアプノフ代数方程式 (A.4) に関して, 以下の補題 A.1 が知られている.

補題 A.1 (児玉, 須田 1978, 美多 1994) $Q \geq 0$ を満たす任意の行列であるとき,

(i) A が安定なら $P \geq 0$. さらに, 行列対 $(A,\ C)$ が可観測なら $P > 0$ である.

(ii) 行列対 $(A,\ C)$ が可検出で, $P \geq 0$ ならば, A は安定である.

(iii) A が安定なら行列対 $(A,\ C)$ は常に可検出である.

工学的問題では, システム (A.1) の漸近安定性では十分でなく, A の固有値$\lambda_i(A)$ に対して,

$$\mathrm{Re}\lambda_i(A) < -\sigma, \quad \sigma > 0, \quad i = 1, 2, 3, \cdots \tag{A.5}$$

となることが要求される. これは, システム (A.1) の時間的振動の減衰率の 1 つの尺度と解釈できる. (A.5) が成立するためには, 以下の新たなシステム (A.6)

$$\dot{x}(t) = (A + \sigma I_n)x(t) \tag{A.6}$$

が, 漸近安定であればよい. ただし, I_nは n 次単位行列である. したがって, (A.6) が漸近安定となる十分条件として, (A.4) と同様にして導出されたリアプノフ代数方程式

$$P(A + \sigma I_n) + (A + \sigma I_n)^T P = -Q \tag{A.7}$$

が正定対称解 Pをもてば良い (Müller 1989).

続いて, リアプノフ代数方程式の解について考える. はじめに, 以下の (A.8) で与えられる線形マトリクス微分方程式を考える.

$$\dot{X} = XD(t) + E(t)X + F(t) \qquad X(t_0) = X_0 \tag{A.8}$$

ただし, Xは, $\mathbf{R}^{m\times n}$の未知マトリクスである. 又, $D(t)$, $E(t)$, $F(t)$ は, それぞれ適切なサイズのマトリクスで, その要素は t の区分的連続関数とする. このとき, 以下の補題 A.2 が成立する.

補題 A.2 (児玉, 須田 1978) 任意の $X_0 \in \mathbf{R}^{m\times n}$と任意の $t \in \mathbf{R}$ について, (A.8) の一意解 $X(t; t_0, X_0)$ が存在し, それは,

$$X(t; t_0, X_0) = \phi_1(t, t_0)X_0\phi_2(t, t_0) + \int_{t_0}^{t} \phi_1(t, \tau)F(\tau)\phi_2(t, \tau)d\tau \tag{A.9}$$

で与えられる. ただし, $\phi_1(t, t_0), \phi_2(t, t_0)$ は,

$$\begin{aligned} \frac{\partial \phi_1}{\partial t} &= E(t)\phi_1, \ \phi_1(t_0, t_0) = I_m \\ \frac{\partial \phi_2}{\partial t} &= \phi_2 D(t), \ \phi_2(t_0, t_0) = I_n \end{aligned}$$

で定義される状態遷移マトリクスである.

この補題 A.2 で特に,

$$m = n,\ D(t) = A,\ E(t) = A^T,\ F(t) = Q$$

と限定すれば, 次の補題 A.3 が得られる. ただし, A, Q は時不変マトリクスである.

補題 A.3 (児玉, 須田 1978) 任意の $X_0 \in \mathbf{R}^{m\times n}$ と任意の $t \in \mathbf{R}$ について, 線形時不変マトリクス微分方程式

$$\dot{X} = XA + A^T X + Q \qquad X(t_0) = X_0 \tag{A.10}$$

について, 一意解 $X(t; t_0, X_0)$ が存在し, それは,

$$\begin{aligned} & X(t; t_0, X_0) \\ = \ & \exp\{(A^T(t-t_0)\}X_0 \exp\{A(t-t_0)\} \\ & \quad + \int_{t_0}^{t} \exp\{A^T(t-\tau)\}Q\exp\{A(t-\tau)\}d\tau \end{aligned} \tag{A.11}$$

で与えられる. さらに X_0が実対称ならば, 解 $X(t; t_0, X_0)$ も実対称である. すなわち,

$$X(t; t_0, X_0) = [X(t; t_0, X_0)]^T \in \mathbf{R}^{n\times n}, \qquad \forall X_0 = X_0^T \in \mathbf{R}^{n\times n} \tag{A.12}$$

が成立する.

又, A が安定行列 (すなわち, A の固有値の実部が $\mathrm{Re}\lambda_i(A) < 0,\ i = 1, 2, 3, \cdots$) ならば, (A.10) の解 $X(t; t_0, X_0)$ は任意の実対称マトリクス $X_0 \in \mathbf{R}^{n\times n}$に対し, $t \geq t_0$の範囲で一様有界である.

先に示した補題 A.2 から, 有界性を利用することにより以下の代数方程式 (A.13) の解を求める. つまり, A の漸近安定性を利用することにより$\dot{X} = 0$ なる収束解を求め, その解を代数方程式 (A.13) の解とする.

与えられたマトリクス $D \in \mathbf{R}^{n\times n}, E \in \mathbf{R}^{m\times m}, F \in \mathbf{R}^{m\times n}$について, 線形マトリクス代数方程式

$$XD + EX = -F \tag{A.13}$$

を満足するマトリクス $X \in \mathbf{R}^{m\times n}$を求める問題を考える.

まず (A.13) の解 Xの存在と一意性について次の補題 A.4 がある.

補題 A.4 (児玉, 須田 1978) (A.13) の解 Xが任意の $F \in \mathbf{R}^{m\times n}$に対して存在し, かつ F に対して一意に定まるためには, D及び E の固有値が,

$$\lambda_i(D) + \lambda_j(E) \neq 0 \qquad i = 1, 2, 3, \cdots \quad j = 1, 2, 3, \cdots$$

を満足することが必要十分である.

ここで特に $m=n$, $D=A$, $E=A^T$, $F=Q$(ただし $Q=Q^T$) とすると (A.13) は,

$$XA+A^TX=-Q \tag{A.14}$$

となる．この形の線形マトリクス代数方程式は, リアプノフ代数方程式と呼ばれる．この方程式は, 安定論など応用上, 特に重要であり, リアプノフ代数方程式 (A.4) と同一である．

Q の対称性から (A.14) の解が存在すれば, 必ず実対称行列解が存在する．したがって, (A.14) の一意解の存在とその性質については, 次の補題 A.5 が示されている．

補題 A.5 (児玉, 須田 1978) A が漸近安定ならば, (A.14) は任意の $Q=Q^T\in\mathbf{R}^{n\times n}$ に対して一意解 X をもち, 解 X は (A.15) によって与えられる．

$$X=\int_0^\infty \exp(A^Tt)Q\exp(At)dt \tag{A.15}$$

(補題 A.5 の証明)

(A.14) が一意解を持つことは, 補題 A.4 より明かである．

又, (A.15) の右辺の積分が存在することは, 補題 A.3 より

$$X(t;0,0)=\int_0^t \exp(A^T\tau)Q\exp(A\tau)d\tau$$

が, $t\geq 0$ について一様有界であることより明かである．

まず, 以下の微分方程式を導入する．

$$\dot{P}=AP \tag{A.16}$$

ここで,

$$J=\frac{1}{2}\int_0^\infty P^TQPdt \tag{A.17}$$

を考える．したがって,

$$\begin{aligned}
J &= -\frac{1}{2}\int_0^\infty P^T(XA+A^TX)Pdt \\
&= -\frac{1}{2}\int_0^\infty [\dot{P}^TXP+P^TX\dot{P}]dt \\
&= -\frac{1}{2}\int_0^\infty [\frac{d}{dt}P^TXP]dt = -\frac{1}{2}\Big[P^TXP\Big]_0^\infty \\
&= -\frac{1}{2}P(\infty)^TXP(\infty)+\frac{1}{2}P(0)^TXP(0)
\end{aligned}$$

となるが, システムが漸近安定 (A が安定行列) なので, $P(\infty)=0$ となり

$$J=\frac{1}{2}P(0)^TXP(0)$$

となる．又，$\dot{P} = AP$の解は，$P = \exp(At)P(0)$ より

$$\begin{aligned} J &= \frac{1}{2}P(0)^T X P(0) \\ &= \frac{1}{2}\int_0^\infty P^T Q P dt \\ &= \frac{1}{2}\int_0^\infty P(0)^T \exp(A^T t) Q \exp(At) P(0) dt \\ &= \frac{1}{2}P(0)^T \left[\int_0^\infty \exp(A^T t) Q \exp(At) dt\right] P(0) \end{aligned}$$

以上より，

$$X = \int_0^\infty \exp(A^T t) Q \exp(At) dt$$

が示される． □

1.2 最適レギュレータ問題におけるリカッチ方程式

ここでは，最適レギュレータ問題におけるリカッチ代数方程式 (1.1a) の導出を行う．

線形制御対象に対して，2 次形式の評価関数を最小にする制御入力は状態フィードバックとなり，構成系は再び線形となる．そのような問題は最適レギュレータ (Linear Quadratic) 問題と呼ばれている．

制御対象は次の線形時不変システム (A.18) で記述される．

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t), \quad x(t_0) = x_0 \tag{A.18}$$

(A.18) の拘束条件のもと，2 次形式評価関数 (A.19) を最小にする制御入力 $u(t)$ を決定する．

$$J = \frac{1}{2}x^T(t_f)Sx(t_f) + \frac{1}{2}\int_{t_0}^{t_f} [x^T(t)Qx(t) + u^T(t)Ru(t)]dt \tag{A.19}$$

ここで，$x(t) \in \mathbf{R}^n$は状態変数，$u(t) \in \mathbf{R}^m$は制御入力，A，Bは適当な次元をもつ定数行列．Sおよび Q は対称な準正定行列，Rは対称な正定行列である．又，標準的な仮定として，行列対 $(A,\ B)$ は可制御とする．ここで，ハミルトニアン (A.20) を定義する (太田ら 1984)．

$$H = \frac{1}{2}(x^T Q x + u^t R u) + p^T(Ax + Bu) \tag{A.20}$$

これより随伴方程式は (A.21) となる．

$$\dot{p} = -\frac{\partial H}{\partial x} = -Qx - A^T p \tag{A.21}$$

また，

$$\frac{\partial H}{\partial u} = Ru + B^T p = 0 \tag{A.22}$$

より，最適制御入力 u_0は次式で与えられる．

$$u_0 = -R^{-1}B^T p \tag{A.23}$$

ここで Rは正定行列であるから逆行列は存在する．式 (A.23) を式 (A.18) に代入し，式 (A.21) と一緒にまとめて書くと (A.24) を得る．

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{p} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & -BR^{-1}B^T \\ -Q & -A^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ p \end{bmatrix} \tag{A.24}$$

この $2n$ 次元連立 1 階微分方程式を，次の 2 つの境界条件を使って解く

[2 点境界値問題]

(i) 初期条件：$x(t_0) = x_0$

(ii) 横断性の条件：$p(t_f) = \frac{\partial}{\partial x}[\frac{1}{2}x^T(t_f)Sx(t_f)] = Sx(t_f)$

(ii) は $x(t_f)$ が自由端であるために，これに代わる境界条件で，随伴変数に対する終端条件を与える．ここではリカッチ微分方程式の解を利用する方法を示す．x と p の間に次の関係があると仮定する．

$$p(t) = P(t_f - t)x(t), \quad (t_0 \leq t \leq t_f) \tag{A.25}$$

ただし，行列 Pは後述のリカッチ微分方程式の解として与えられる．ここで，Pは $\mathbf{R}^{n\times n}$である行列である．(A.25) を (A.24) に代入すると，次の 2 式 (A.26), (A.27) を得る．

$$\dot{x} = [A - BR^{-1}B^T P(t_f - t)]x \tag{A.26}$$

$$\dot{P}(t_f - t)x + P(t_f - t)\dot{x} = -Qx - A^T P(t_f - t)x \tag{A.27}$$

上式より$\dot{x}$を消去すると (A.28) を得る．

$$[\dot{P}(t_f - t) + P(t_f - t)A + A^T P(t_f - t) - P(t_f - t)BR^{-1}B^T P(t_f - t) + Q]x = 0 \tag{A.28}$$

任意の x に対して上式が成立するためには，$[\cdot]$ 内が零にならなければならない．ここで $\tau = t_f - t$ とおいて，(A.29) を得る．

$$\dot{P}(\tau) - P(\tau)A - A^T P(\tau) + P(\tau)BR^{-1}B^T P(\tau) - Q = 0 \tag{A.29}$$

(A.29) をリカッチ微分方程式という．また，横断性の条件式及び (A.25) より，$P(\tau)$ についての初期条件は

$$P(0) = P(t_f - t)|_{t_f = t} = S \tag{A.30}$$

となる. 又, 最適制御入力 u_0は, 式 (A.25) を式 (A.23) に代入して得られる.

$$u_0(t) = -R^{-1}B^TP(t_f - t)x(t) \tag{A.31}$$

すなわち, u_0は状態フィードバック制御系である.

さらに, $t_f \to \infty$ とすれば, レギュレータリカッチ代数方程式 (A.32) を得る (太田ら 1978, 小郷, 美多 1979).

$$PA + A^TP - PBR^{-1}B^TP + Q = 0, \ P = P(\infty) \tag{A.32}$$

これはリカッチ代数方程式 (1.1a) と同一である. このとき, 最適フィードバック u_0は

$$u_0(t) = -R^{-1}B^TPx(t) \tag{A.33}$$

で与えられる.

|| 付録 2

可安定性, 可検出性

本文中にあらわれる可安定性, 可検出性について説明する (美多 1995).

2.1 可制御, 可安定

$$u_i A = \lambda_i u_i \tag{B.1}$$

を満たす行列 $A \in \mathbf{R}^{n\times n}$の固有値$\lambda_i$と左側固有ベクトル $u_i \neq 0$ に対して,

$$u_i B \neq 0 \tag{B.2}$$

となる場合, λ_iを行列対 $(A,\ B)$ の可制御極,

$$u_i B = 0 \tag{B.3}$$

となる場合, λ_iを行列対 $(A,\ B)$ の不可制御極という. すべてのλ_iが可制御極であるとき, 行列対 $(A,\ B)$ を可制御といい, 不可制御極があってもこれらが安定であるとき, 行列対 $(A,\ B)$ を可安定という.

行列対 $(A,\ B)$ が可制御であることは, 次の (i)~(iv) と等価である.

(i) すべてのλ_i $(i = 1, \cdots, n)$ に対して, $u_i B \neq 0$.

(ii) すべての $s \in \mathrm{C}$(あるいは, すべてのλ_i) に対して, $\mathrm{rank}(A - sI,\ B) = n$

(iii) $A + BF$の固有値を自由に変える Fが存在する.

(iv) $\mathrm{rank}(B,\ AB,\ \cdots,\ A^{n-1}B) = n$

又, 行列対 $(A,\ B)$ が可安定であることは, 次の (i)~(iv) と等価である.

(i) すべての $\mathrm{Re}\lambda_i \geq 0$ に対して, $u_i B \neq 0$.

(ii) すべての $\mathrm{Re}\lambda_i \geq 0$ に対して, $\mathrm{rank}(A - \lambda_i I,\ B) = n$

(iii) $A + BF$を安定行列にする Fが存在する.

(iv) 状態の相似変換により

$$T^{-1}AT = \begin{bmatrix} A_1 & A_{12} \\ 0 & A_2 \end{bmatrix},\ T^{-1}B = \begin{bmatrix} B_1 \\ 0 \end{bmatrix} \tag{B.4}$$

において, A_2は安定行列で, 行列対 $(A_1,\ B_1)$ は可制御とおける.

2.2 可観測, 可検出

次に,

$$Av_i = \lambda_i v_i \tag{B.5}$$

を満たす行列 $A \in \mathbf{R}^{n\times n}$の固有値$\lambda_i$と固有ベクトル $v_i \neq 0$ に対して,

$$Cv_i \neq 0 \tag{B.6}$$

となる場合, λ_iを行列対 $(A,\ C)$ の可観測極,

$$Cv_i = 0 \tag{B.7}$$

となる場合, λ_iを行列対 $(A,\ B)$ の不観測御極という. すべてのλ_iが可観測極であるとき, 行列対 $(A,\ C)$ を可観測といい, 不可観測極があってもこれらが安定であるとき, 行列対 $(A,\ C)$ を可検出という.

行列対 $(A,\ C)$ が可観測であることは, 次の (i)~(iv) と等価である.

(i) すべてのλ_i $(i = 1, \cdots, n)$ に対して, $Cv_i \neq 0$.

(ii) すべての $s \in \mathrm{C}$(あるいは, すべてのλ_i) に対して,

$$\mathrm{rank}\begin{bmatrix} A - sI \\ C \end{bmatrix} = n \tag{B.8}$$

(iii) $A + HC$の固有値を自由に変える Hが存在する.

(iv) $\mathrm{rank}(C^T,\ A^TC^T,\ \cdots,\ (A^T)^{n-1}C^T)^T = n$

又, 行列対 $(A,\ C)$ が可検出であることは, 次の (i)~(iv) と等価である.

(i) すべての $\mathrm{Re}\lambda_i \geq 0$ に対して, $Cv_i \neq 0$.

(ii) すべての $\mathrm{Re}\lambda_i \geq 0$ に対して,

$$\mathrm{rank}\begin{bmatrix} A-\lambda_i I \\ C \end{bmatrix} = n \tag{B.9}$$

(iii) $A+HC$を安定行列にする Hが存在する.

(iv) 状態の相似変換により

$$T^{-1}AT = \begin{bmatrix} A_1 & 0 \\ A_{21} & A_2 \end{bmatrix},\ T^{-1}B = \begin{bmatrix} C_1 \\ 0 \end{bmatrix} \tag{B.10}$$

において, A_2は安定行列で, 行列対 $(A_1,\ C_1)$ は可制御とおける.

付録3

ディスクリプタシステム

ディスクリプタシステムとは, 以下のように表現される.

$$E\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \tag{C.1}$$

$$y(t) = Cx(t) + Du(t) \tag{C.2}$$

これは, 中間標準形, singular system, semistate equation, 微分代数方程式系, などと呼ばれる数式表現である. ここで, $x(t) \in \mathbf{R}^n$は状態変数, $u(t) \in \mathbf{R}^m$は入力, $y(t) \in \mathbf{R}^p$は出力である. また, $A \in \mathbf{R}^{n\times n}$, $B \in \mathbf{R}^{n\times m}$, $C \in \mathbf{R}^{p\times n}$, $D \in \mathbf{R}^{p\times m}$である.

(C.1) 式において, Eは正方行列であるが, 非特異ではないとする (もし, Eが非特異ならば, E^{-1}を左から掛けることによって, (C.1) 式は状態方程式に変換できる). 状態方程式という合理的で実績のある表現をもちながら, なぜディスクリプタ方程式というものが考えられているかというと, 集中定数の物理システムの自然な表現がディスクリプタ方程式であるからである. 集中定数の物理システムは, 適切に変数を選ぶことによって, 一階微分方程式または代数方程式で表される要素がいくつか結合したものとみなすことができる. これら要素と結合を表す式を羅列して得られる最も原始的な数式表現が, ディスクリプタ方程式の形になる. したがって, ディスクリプタシステムは, 状態空間表現の状態という概念を生かしながら, プロパ性と可解性という観点から一般化したシステム表現の一つである. これにより, モデリングや設計計算において対象の物理的な構造を保存できるという実用的な側面と, 微分器やインパルスなど極限的なシステムを表現できるという抽象的な側面とを併せ持っている.

ディスクリプタシステムは, 工学システム, 社会経済システム, 生物学システムなどの多くのシステムに現れる.

付録 4

数学的基礎

まず, 第 6 章で利用したコーシ・シュワルツの不等式 (Cauchy–Schwarz inequality) に関して, 説明をする.

$a_i > 0,\ b_i > 0,\ p > 1,\ q > 1,\ p^{-1} + q^{-1} = 1$ のとき,

$$\left[\sum_{i=1}^{n}(a_i)^p\right]^{\frac{1}{p}}\left[\sum_{i=1}^{n}(b_i)^q\right]^{\frac{1}{q}} \geq \sum_{i=1}^{n} a_1 b_i \tag{D.1}$$

等号は $(a_i)^p = c(b_i)^q$(c は定数) の場合だけ成立する.

(D.1) をヘルダ (Hölder) の不等式と呼び, その特別な場合として, $p = q = 2$ のときは, コーシ・シュワルツの不等式 (Cauchy–Schwarz inequality) と呼ばれる. $p = q = 2$ の場合は, (D.2) 式になる.

$$\left[\sum_{i=1}^{n}(a_i)^2\right]\left[\sum_{i=1}^{n}(b_i)^2\right] \geq \left[\sum_{i=1}^{n} a_1 b_i\right]^2 \tag{D.2}$$

又, 不等式 (D.2) に対応する積分不等式も, 同じ名で呼ばれる. 積分不等式の場合を (D.3) で与える. $f(t) > 0,\ g(t) > 0$ のとき,

$$\left[\int_{t_0}^{t_f}[f(t)]^2 dt\right]\left[\int_{t_0}^{t_f}[g(t)]^2 dt\right] \geq \left[\int_{t_0}^{t_f} f(t)g(t)dt\right]^2 \tag{D.3}$$

が成立する.

続いて, 第 7 章で利用したレイリ原理 (Rayleigh's principle) について, 説明する.

以下の関数 (D.4) の最大化, 最小化を考える (小郷, 美多 1979).

$$J = \frac{x^T A x}{x^T x} \tag{D.4}$$

ただし,

$$||x||^2 = x^T x = 1 \tag{D.5}$$

である．ここで，A は $A \in \mathbf{R}^{n\times n}$である正定行列，$x$ は $x \in \mathbf{R}^n$である実ベクトルとする．

ラグランジュ定数λとして，関数 (D.6) を定義する．

$$L = x^T Ax - \lambda(x^T x - 1) \tag{D.6}$$

(D.6) の両辺を x について偏微分すれば，

$$\frac{\partial L}{\partial x} = 2(Ax - \lambda x) \tag{D.7}$$

したがって，(D.7) の右辺を 0 とすれば，x は $x^T x = 1$ を満たす行列 A の固有ベクトルで，λは固有値である．A は正定行列なので，固有値は正の実数である．これらを

$$\lambda_{\min} = \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \cdots \leq \lambda_n = \lambda_{\max} \tag{D.8}$$

として，又，対応する固有ベクトルを x_1, x_2, $\cdots, x_n$とする．ここで，x_iにおいて

$$J = x_i^T Ax_i = \lambda_i x_i^T x_i \tag{D.9}$$

が成立するので，$x = x_1$で $J_{\min} = \lambda_{\min}$, $x = x_n$で $J_{\max} = \lambda_{\max}$となる．以上から，(D.4) は，

$$\lambda_{\min} \leq \frac{x^T Ax}{x^T x} \leq \lambda_{\max} \tag{D.10}$$

となる．さらに (D.10) の分母をはらい，

$$\lambda_{\min}||x||^2 \leq x^T Ax \leq \lambda_{\max}||x||^2 \tag{D.11}$$

が得られる．(D.11) をレイリ商 (Rayleigh quotient) と呼ぶ．また，以上の性質をレイリ原理 (Rayleigh's principle) と呼ぶ．

参考文献

[1] P. V. Kokotovic, H. K. Khalil, and J. O'Reilly, "Singular Perturbation Methods in Control: Analysis and Design." New York: Academic Press, 1986.

[2] J. H. Chow and P. V. Kokotovic, "A Decomposition of Near-Optimum Regulators for Systems with Slow and Fast Modes." *IEEE Transactions on Automatic Control*, vol.21, no.5, pp. 701–705, 1976.

[3] Y. Y. Wang, S. J. Shi, and Z. J. Zhang, "A Descriptor Variable Approach to Singular Perturbation of Linear Regulator." *IEEE Transactions on Automatic Control*, vol.33, no.4, pp.370–373, 1988.

[4] Y. Y. Wang and P. M. Frank, "Complete Decomposition of Sub-Optimal Regulators for Singularly Perturbed Systems." International Journal of Control, vol.55, no.1, pp.49–60, 1992.

[5] Y. Y. Wang, P. M. Frank and N. E. Wu, "Near-Optimal Control of Nonstandard Singularly Perturbed Systems." Automatica, vol.30, no.2, pp.277–292, 1994.

[6] H. K. Khalil, "Feedback Control of Nonstandard Singularly Perturbed Systems." *IEEE Transactions on Automatic Control*, vol.34, no.10, pp.1052–1060, 1989.

[7] H. Xu and K. Mizukami, "Hamilton–Jacobi Equation for Descriptor Systems." System and Control Letter, vol.21, pp.321–327, 1993.

[8] H. Xu and K. Mizukami, "The Linear-Quadratic Optimal Regulator for Continuous-Time Descriptor Systems : A Dynamic Programming Approach." International Journal of Systems Science, vol.25, no.11, pp.1889–1898, 1994.

[9] H. Xu, H. Mukaidani and K. Mizukami, "New method for composite optimal of singularly perturbed systems." International Journal of Systems Science, vol.28, no.2, pp.161–172, 1997.

[10] J. Dieudonné, J. "Treatise on Analysis", Vol.III. Academic Press, New York, 1982.

[11] Y. Y. Wang, P. M. Frank and D. J. Clements, "The Robustness Properties of the Linear Quadratic Regulators for Singular Systems." *IEEE Transactions on Automatic Control*, vol.38, no.1, pp.96–100, 1993.

[12] Z. Pan and T. Başar, "H^∞-Optimal Control for Singularly Perturbed Systems. Part I: Perfect State Measurements." Automatica, vol.29, no.2, pp.401–423, 1993.

[13] Z. Gajic and X. Shen, "Parallel Algorithms for Optimal Control of Large Scale Linear Systems." London: Springer–Verlag, 1993.

[14] Z. Gajic, Petkovski.D and X. Shen, "Singularly Perturbed and Weakly Coupled Linear System – a Recursive Approach, Lecture Notes in Control and Infomation Sciences." Berlin: Springer–Verlag, 1990.

[15] Y. Y. Wang, P. M. Frank and D. J. Clements, "The Robustness Properties of the Linear Quadratic Regulators for Singular Systems." *IEEE Transactions on Automatic Control*, vol.38, no.1, pp.96–100, 1993.

[16] A.H.Haddad, "Linear Filtering of Singularly Perturbad Systems." *IEEE Transactions on Automatic Control*, vol.21, pp515–519, 1976.

[17] A.H.Haddad and P.V.Kokotovic, "Stochastic Control of Linear Singularly Perturbad Systems." *IEEE Transactions on Automatic Control*, vol.22, pp815–821, 1977.

[18] H.K.Khalil and Z.Gajic, "Near–Optimum Regulator for Stochastic Linear Singularly Perturbad Systems." *IEEE Transactions on Automatic Control*, vol.29, pp531–541, 1984.

[19] Z.Gajic, "Numerical Fixed–Point Solution for Near-Optimum Regulators of Linear Quadratic Gaussian Control Problems for Singular Perturbed Systems." International Journal of Control, vol.43, no.2, pp373–387, 1986.

[20] J.C.Doyle, K.Glover, P.P.Khargonekar and B.A.Francis, "State–Space Solutions to Standard H_2 and H_∞ Control Ploblems." *IEEE Transactions on Automatic Control*, vol.34, no.8, pp831–847, 1989.

[21] G.Zames, "Feedback and Optimal Sensitivity: Model Reference Transformations, Multiplicative Seminorms and Approximate Inverses." *IEEE Transactions on Automatic Control*, vol.26, no.2, pp585–601, 1981.

[22] H.Kimura, "Robust stabilizability for a class of transferfunctions." *IEEE Transactions on Automatic Control*, vol.29, no.9, pp788–793, 1984.

[23] Z.Pan and T.Basar,"H_∞–Optimal Control for Singularly Perturbed Systems–Part II. Imperfect state mesurements." *IEEE Tran. Automatic Control*, vol.39, no.2, pp.230–299, 1994.

[24] E.Fridman, "Near–Optimal H_∞–Control of Linear Singularly Perturbed Systems." *IEEE Transactions Automatic Control*, vol.41, no.2, pp.236–240, 1996.

[25] V.Dragan, "H_∞–Norms and Disturbance Attenuation for Systemes with Fast Transients." *IEEE Transactions Automatic Control*, vol.41, no.5, pp.747–750, 1996.

[26] G.Hewer, "Existence Theorems for Positive Semidefinite and Sign Indefinite Stabilizing Solutions of H_∞ Riccati Equations." SIAM J.Control and Optimization, vol.31, pp.16–29, 1993.

[27] Z.Gajic and M.T.J.Qureshi, "Lyapunov Matrix Equation in Syatem Stabilty and Control." ACADEMIC PRESS. vol.195, 1995.

[28] P.Lancaster and L.Rodman, "Algebraic Riccati Equations." CLARENDON PRESS · OXFORD, 1995.

[29] W.C.Su, Z.Gajic, and X.Shen, "The exact slow–fast decomposition of the algebraic Riccati equation of singularly perturbed systems." *IEEE Transactions Automatic Control*, vol.37, no.9, pp.1456–1459, 1992.

[30] H.Xu and K.Mizukami, "Nonstandard extension of H_∞–optimal control for singularly perturbed systems." Proceeding of the 7th International Symposium on Dynamic Games and Applications, December 16-18, Japan, 1996.

[31] S.H.Javid, "Uniform Asymptotic Stability of Linear Time–Varying Singularly Perturbed Systems." Journal of The Franklin Institute, vol.305, no.1 pp.27–37, 1978.

[32] J.O'Reilly, "Two Time–Scale Feedback Stability of Linear Time–Varying Singularly Perturbed Systems." Journal of The Franklin Institute, vol.5, no.5 pp.465–474, 1979.

[33] H.D.Tuan and S.Hosoe, "A New Design Method for Regulator Problems for Singularly Perturbed Systems with Constrained Control." *IEEE Transactions Automatic Control*, vol.42, no2, pp.260–264, 1997.

[34] PZ.H.Shao and M.E.Sawan, "Robust Stability of Singularly Perturbed Systems." International Journal of Control, vol.58, no.6 pp.1469–1476, 1993.

[35] 鈴木, 小林, 安藤, "特異摂動システムの二次安定化." 計測自動制御学会論文集, vol.32, no11, pp.1493–1500, 1996.

[36] K.M.Sobel, S.S.Banda and H.H.Yeh, "Robust Control for Linear Systems with Structured State Space Uncertainty." International Journal of Control, vol.50, no.5 pp.1991–2004, 1989.

[37] H.Wu and K.Mizukami, "Robust Stability of a Class of Uncertain Nonlinear Dynamical Systems with Time–Varying Delay." International Journal of Syatems Science, vol.25, no.12 pp.2285–2296, 1994.

[38] S.Y.Zhang, K.Mizukami and H.S.Wu, "Decentralized Robust Control for a Class of Uncertain Large–Scale Interconected Nonlinear Dynamical Systems." Journal Optimization Theory and Application, vol.91, no.1 pp.235–256, 1996.

[39] P.V.Kokotović, A.Bensoussan and G.L.Blankenship, "Singular Perturbations and Asymptotic Analysis in Control Systems." Springer–Verlag, 1987.

[40] Z.Gajic, M.T.J Qureshi, "Lyapunov Matrix Equation in System Stability and Control." ACADEMIC PRESS, 1995.

[41] ペーター　C. ミュラー, 森　武宏訳, "安定性と行列." シュプリンガー・フェアラーク東京株式会社, 1989.

[42] 向谷, 水上, 徐, "非標準特異摂動システムにおける最適レギュレータ問題のための再帰的アルゴリズム." 計測自動制御学会論文集　vol.32, no.5, pp.672–678, 1996.

[43] 向谷, 水上, "非標準特異摂動システムにおける Linear–Quadratic–Gaussian (LQG) 問題のための再帰的アルゴリズム." 電気学会論文誌 C vol.116–C, no12, pp.1382–1389, 1996.

[44] 向谷, 水上, "摂動項を含む H_∞タイプリカッチ方程式のための再帰的アルゴリズム." 電気学会論文誌 C vol.117–C, no.10, pp.1464–1471, 1997.

[45] 向谷, 水上, 徐, "標準, 非標準特異摂動システムにおける H_∞ 制御問題のための再帰的アルゴリズム." (投稿中)

[46] 向谷, 水上, "不確定性を有する特異摂動システムのロバスト安定性." (投稿中)

[47] 計測自動制御学会, "LQG から H^∞ へ." 計測と制御, vol.29, no.2, pp111–119, 1990.

[48] ミニ特集 "ロバスト制御－ H^∞ 制御を中心にして." 計測と制御, Vol.29, no.2, 1990.

[49] ミニ特集 "実用期を迎えたロバスト制御." 計測と制御, Vol.30, no-8, 1991.

[50] 前田, 杉江, "アドバンスト制御のためのシステム制御理論." 朝倉書店 1990.

[51] "SICE 夏期セミナー 1993-新しい制御理論に基づく制御系設計法-テキスト." 計測自動制御学会.

[52] "第 41 回システム制御情報講習会「H^∞ 制御の基礎」テキスト." システム制御情報学会.

[53] 児玉, 須田, "システム制御のためのマトリクス理論," 計測自動制御学会, 1978.

[54] 美田, "H_∞ 制御," 昭昇堂, 1994.

[55] 小郷, 美田, "システム制御理論入門," 実教出版株式会社, 1979.

[56] 木村, 藤井, 森, "ロバスト制御." コロナ社, 1994.

[57] 西村, 狩野, "制御のためのマトリクス・リカッチ方程式." 朝倉書店 1996.

[58] 太田編, "自動制御." 朝倉書店 1984.

[59] 安藤, 田沼編, "数値解析による制御設計." 計測自動制御学会 1986.

[60] 杉浦, "解析学入門 2." 東京大学出版会, 1985.

発表論文リスト

(1) 向谷, 水上, 徐, “非標準特異摂動システムにおける最適レギュレータ問題のための再帰的アルゴリズム.” 計測自動制御学会論文集 vol.32, no.5, pp.672–678, 1996.

(2) 向谷, 水上, “非標準特異摂動システムにおける Linear–Quadratic–Gaussian (LQG) 問題のための再帰的アルゴリズム.” 電気学会論文誌 C vol.116–C, no12, pp.1382–1389, 1996.

(3) 向谷, 水上, “摂動項を含む H_∞ タイプリカッチ方程式のための再帰的アルゴリズム.” 電気学会論文誌 C vol.117–C, no.10, pp.1464–1471, 1997.

(4) H.Xu, H.Mukaidani and K.Mizukami, “New Method for Composite Optimal Control of Singularly Perturbed Systems.” International Journal of Systems Sciences vol.28, No.2, pp.161-172, 1997.

(5) H.Mukaidani, H.Xu and K.Mizukami, “The Recusive Algorithm of H_∞ Control Problems for Nonstandard Singularly Perturbed Systems.” Asian Control Conference, pp.591–594, July 1997.

(6) H.Xu, H.Mukaidani and K.Mizukami, “On the Near-optimality of Composite Optimal Control for Nonstandard Singularly Perturbed Systems.” 35th IEEE Conference on Decision and Control, pp.3618-3619, December 1996.

(7) H.Mukaidani, H.Xu and K.Mizukami, “The Recusive Algorithm for Optimal Regulator of Nonstandard Singularly Perturbed Systems.” Proceedings of 10th Korea Automatic Control Conference, International Program, pp.10-13, October 1995.

(8) H.Xu, H.Mukaidani and K.Mizukami, " A New Approach for Stabilization of Non-standard Singularly Perturbed Systems." Proceedings of 10th Korea Automatic Control Conference, International Program, pp.99-102, October 1995.