

①

博士論文

磁場中の超伝導体における秩序パラメータの混成効果

平成7年3月

広島大学大学院生物圏科学研究科

松尾繁政

第 1 章	はじめに	1
第 2 章	BCS 理論	5
2.1.	Gor'kov 近似	5
2.2.	磁場がない場合の超伝導状態	7
2.2.1.	Hamiltonian の対角化	
2.2.2.	秩序パラメータの対称性	
2.2.3.	自由エネルギー	
2.2.4.	転移温度	
2.2.5.	絶対零度の場合	
2.3.	磁場がない場合の混成状態	17
2.3.1.	s 波と BW 状態の場合	
2.3.2.	s 波と planar 状態の場合	
2.3.3.	s 波と ABM 状態の場合	
2.4.	Gor'kov Green 関数	19
2.5.	線形ギャップ方程式	22
2.6.	Ginzburg-Landau 方程式	24
2.7.	線形ギャップ方程式の解	26
2.7.1.	s 波超伝導の場合	
2.7.2.	p 波超伝導の場合	
第 3 章	uniform な状態における秩序パラメータの s 波成分と p 波成分の混成系	30
3.1.	上部臨界磁場への Pauli 常磁性の効果	30
3.2.	s-p 混成系の秩序パラメータ	31
第 4 章	nonuniform な状態における秩序パラメータの s 波成分と p 波成分の混成系	36
4.1.	Fulde-Ferrell 状態	36
4.2.	Pauli 常磁性のみを考慮した混成系の Fulde-Ferrell 状態	39
4.3.	s-p 混成系の Fulde-Ferrell 状態への軌道磁性の効果	43
4.4.	UPd ₂ Al ₃ との比較	50
4.5.	転移温度近傍の Fulde-Ferrell 状態	53

第5章	nonuniform な状態における秩序パラメータの d 波成分間の混成系.....	57
第6章	まとめ.....	65
補遺 A	有効 Hamiltonian と場の演算子の交換関係.....	67
補遺 B	\mathcal{F} の書き換え.....	69
補遺 C	磁場がない場合のギャップ方程式.....	70
補遺 D	磁場の準古典的な取り扱い.....	72
補遺 E	Helfand と Werthamer の方法.....	74
補遺 F	磁場がある場合の線形ギャップ方程式.....	77
補遺 G	Pauli 常磁性.....	80
	「謝辞」.....	84
	「参考文献」.....	85

第1章 はじめに

最近 heavy fermion 超伝導体 UPd_2Al_3 や $CeRu_2$ において Fulde-Ferrell (FF) 状態の可能性が議論されている。Gloos ら [1][2] は、 UPd_2Al_3 の上部臨界磁場の下に一次転移線が存在することを体積膨張率の測定から見つけた。 UPd_2Al_3 の磁場-温度相図 (図 1.1) が、理論的に得られている FF 状態の相図 (図 1.2) と類似していることから、Gloos らは、一次転移線と上部臨界磁場との間は FF 状態である可能性があると主張している。

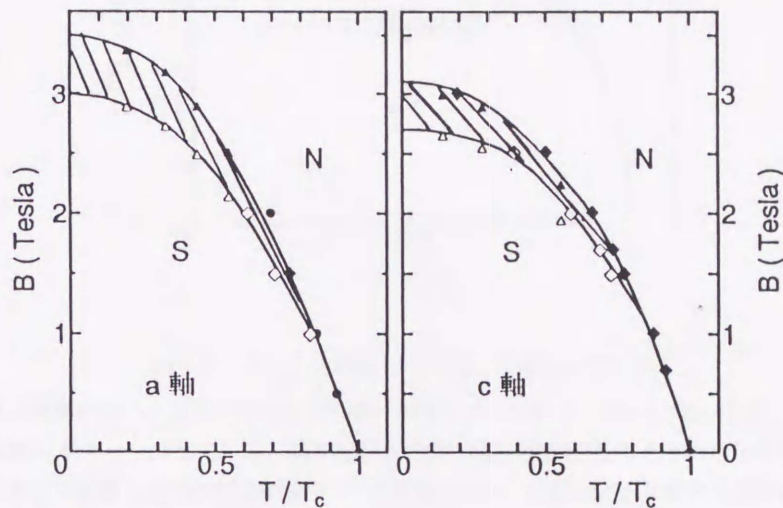


図 1.1 UPd_2Al_3 の温度-磁場相図

縦軸は磁場の絶対値を *Tesla* で示している。横軸は温度を超伝導転移温度 T_c でスケールしている。N の領域が常伝導相。斜線部分が Gloos らが見つけた強磁場相を示す。斜線部分と S の領域の間の線が一次転移線。二つの相図はそれぞれ、a 軸と c 軸に平行に磁場をかけている。(K. Gloos et al. Phys. Rev. Lett. Vol. 70 (1993) 501)

FF 状態は、Fulde と Ferrell[3] 及び Larkin と Ovchinnikov[4] によって理論的に予言された状態で、超伝導体の上部臨界磁場付近に存在する超伝導相である。通常の超伝導体では、上向きスピンの電子と下向きスピンの電子の間で、対凝縮状態がつくられている。弱磁場では、対破壊はエネルギー的に不利であり、従って、スピン分極はほとんど無く帯磁率は小さい。強磁場の場合はスピン分極した方がエネルギー的に有利になるため、対破壊が起こり常伝導状態に転移する。FF 状態とは、スピン分極と対凝縮が両立した状態である。すなわち、スピン分極して異なる Fermi 運動量を持つ上向きスピンの電子と下向きスピンの電子の間に Cooper 対が形成される。その結果 Cooper 対は有限の重心運動量を持ち、運動エネルギーの面からは不利になるが、磁化エネルギーと対凝縮エネルギーの得によって FF 状態が安定化する。このようなスピン常磁性の効果が観測されるためには、超伝導体内部に磁場が十分に侵入していなくてはならず、軌道磁性に

よる臨界磁場 H_{c2} が十分大きい必要がある。また、不純物の少ないいわゆる clean limit でなければならぬことも理論的に示されており [5]、現在に至るまでこの状態は実験的に確認されていなかった。Gloos らは、重い電子系の UPd_2Al_3 では、コヒーレンス長が短いために、Ginzburg-Landau パラメータが大きく、また、clean limit の条件も満たされており、FF 状態が実現している可能性があると主張している [1][2]。

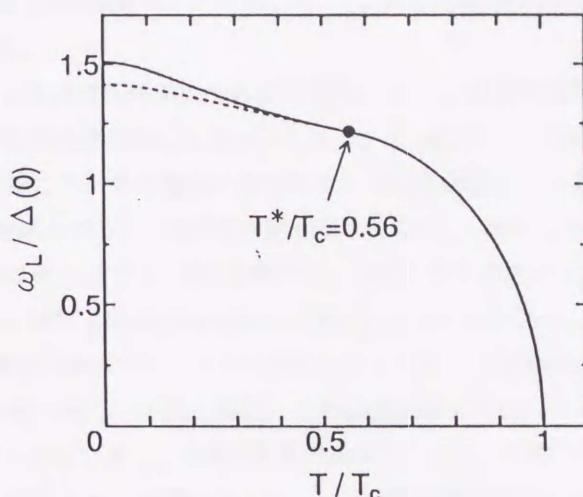


図 1.2 Pauli 常磁性のみ考慮した場合の FF 相図

縦軸は磁場がないときの s 波超伝導の絶対零度でのエネルギーギャップ $\Delta(0)$ で、Larmor 振動数 ω_L をスケールしている。横軸は温度を超伝導転移温度 T_c でスケールしている。実線は常伝導状態と超伝導状態の間の二次転移線を示す。点線は FF 状態とその下の状態の間の一次転移線を示す。点線と実線との領域が FF 相である。

しかし、Gloos らの相図では、強磁場相は、三重臨界点 $T^*/T_c = 0.8$ とかなり高温から存在しており、従来の理論的結果と合わない。Norman[6] や Yin と Maki[7] は s 波超伝導体と d 波超伝導体の場合について、軌道磁性の効果を取り入れて FF 状態の可能性を調べ、FF 状態が存在する温度は高くても三重臨界点 $T^*/T_c = 0.29$ 以下であると報告している [7]。また、軌道磁性の効果が無視できる、いわゆる Pauli 極限と呼ばれる状況においても、FF 状態は三重臨界点 $T^*/T_c = 0.56$ 以下でしか存在しないことが示されている (図 1.2 参照) [5]。従って、Gloos らの強磁場相が FF 状態であるとするならば、FF 状態が高温領域にまで存在できるための機構を明らかにする必要がある。

本論文の目的は、FF 状態を増強する機構のひとつとして、異なる対称性を持つ秩序パラメータ間の混成を考え、その結果 FF 状態が大幅に増強され、より高温領域にも存在する事を示すことである。

結晶の対称性が決まると、それに応じて超伝導の秩序パラメータが持ち得る対称性がいくつか限定される [8][9][10]。通常はそれらの可能な状態のうち、最も高い超伝導転移温度を与える一つの状態が実現している。しかし、いくつかの状態の対相互作用の大きさが接近している場合は、状態間の混成が重要になる場合が生じる。特に、外部磁場がかけられたり、FF 状態のように Cooper 対の重心運動量が有限の値を

持つような場合には、体系の対称性が制限されるために必然的に混成が起こる。heavy fermion 超伝導体では、同じ六方晶系でも、UPt₃のようにスピン三重項超伝導体と考えられている物質や UPd₂Al₃ のようにスピン一重項超伝導体 [11] と考えられている物質があり、異なる対称性を持つ状態がほぼ等しい大きさの対相互作用を持っている可能性がある。

本論文では、議論を簡単にするために球対称な Fermi 面を仮定し、磁場下の超伝導体での秩序パラメータの混成による効果、特に、上部臨界磁場付近における常伝導状態と FF 状態の間の二次相転移、常伝導状態と渦糸状態の間の二次転移における混成効果を調べる。球対称な Fermi 面の場合、秩序パラメータは Cooper 対の軌道角運動量 ℓ で分類され、 $\ell = 0, 1, 2, \dots$ である状態をそれぞれ s 波超伝導、p 波超伝導、d 波超伝導... と呼ぶ [12][13]。

まず、s 波超伝導体が s 波対相互作用に加えて相対的に弱い p 波対相互作用を持つ場合を考える。磁場がない場合は低温に至るまで混成は起こらない。しかし、FF 状態で Cooper 対の重心運動量が有限の場合は、必然的に s-p 混成が起こり、その混成が大幅に FF 状態を増強し、上部臨界磁場を大きくするとともに、FF 状態の上限温度を高くする。p 波相互作用が大きくなり、s 波の大きさに近づくとともに、FF 状態の上限温度は超伝導転移温度に近づく。FF 状態で s-p 混成が起こる理由は、Cooper 対の重心運動量 \mathbf{q} が存在し、それと垂直な面に関する鏡映反転対称性が破れているためである。

つぎに、ある種の d 波超伝導体では、スピン磁性がなくても、軌道磁性の効果のみによって Cooper 対が有限の重心運動量 \mathbf{q} を持つ新しい不均一相が、上部臨界磁場の下の広い温度範囲に存在し得ることを示す。d 波超伝導体のモデルとして $Y_{2,\pm 2}$ 状態が安定であるが、 $Y_{2,\pm 1}$ 状態でも相対的に弱い引力相互作用が働いている系を考える。そのとき、磁場中で Cooper 対が外部磁場方向に有限の重心運動量 \mathbf{q} を持つ状態では、 $Y_{2,\pm 2}$ 状態と $Y_{2,\pm 1}$ 状態の間に混成が生じ、上部臨界磁場近傍ではその混成状態が安定化される。この混成状態は、軌道磁性が主要な原因であり、FF 状態とは性格の異なる新しい不均一状態である。

UPd₂Al₃の超伝導状態は s 波あるいは d 波の可能性が指摘されており、本論文で提出する上の 2 つのモデルは、実験で見いだされた強磁場相を説明できる可能性がある。

不均一相で Cooper 対が有限の重心運動量 \mathbf{q} を持つ場合、秩序パラメータを \mathbf{r} 表示で表すと、 $\Delta(\mathbf{r}) = \Delta e^{i\mathbf{q}\cdot\mathbf{r}}$ のように空間的に波打っていることになる。以下、本論文では、 $\mathbf{q} = 0$ の状態を "uniform" な状態、有限な値の \mathbf{q} を持つ状態を "nonuniform" な状態と呼んで区別する。

本論文の以下の構成は次のとおりである。

第 2 章では、まず超伝導の一般化された BCS 理論について簡単に述べ、s 波と d 波のスピン一重項の超伝導状態と、p 波のスピン三重項の超伝導状態の性質について概観する。また、磁場がないときの s 波と p 波の混成状態の可能性について議論する。s 波の方が高い転移温度を持つ場合は混成状態は出現しない。逆に p 波の異方的超伝導が始めに実現している場合は、Fermi 面上にエネルギーギャップがゼロになっているところがあるためにさらに温度を下げると再び Cooper instability が生じて s 波状態が混成してくる。つぎに、磁場中の超伝導を調べるために、Green 関数法を用いて秩序パラメータが一般的な対称性を持つ場合の線形ギャップ方程式を導出する。この線形ギャップ方程式を用いて後の章で磁場中の秩序パラメータの混成状態について議論する。

第 3 章では s 波成分と p 波成分の相互作用が混在した系について上部臨界磁場を中心に議論する。この

章では uniform な状態 ($\mathbf{q} = 0$) を考える。磁場中においては秩序パラメータの s 波成分に $Y_{1,-1}$ の対称性を持つ p 波成分が関与することで、混成状態が実現する。磁場がない場合 p 波成分の相互作用が s 波超伝導体の中に混在していても混成状態は実現しなかったのに対して、磁場中では秩序パラメータの s 波成分と p 波成分が同時に有限の値を持ち、必然的に混成状態を実現する。

第 4 章では上部臨界磁場付近における s 波成分と p 波成分の相互作用が混在した系の FF 状態 (nonuniform な状態) について議論する。

FF 状態では外部磁場が存在するとともに Cooper 対が有限の重心運動量を持つために必然的に混成状態が生じる。特に、s-p 混成の効果は大きく FF 状態は増強され高温領域まで存在できる。つぎに、軌道磁性の効果も考慮して秩序パラメータの s 波成分と p 波成分の混成系について調べ、UPd₂Al₃ の強磁場相と比較する。

第 5 章では d 波成分で異なる L_z を持つ秩序パラメータの間で実現する混成系の nonuniform な状態について、上部臨界磁場を中心に議論する。

FF 状態では Pauli 常磁性の効果が重要なものに対して、ここで述べる d 波の nonuniform な状態では、軌道磁性の効果が重要である。この状態はまったく新しいタイプの不均一超伝導状態であることを示す。

第 6 章では、まとめ及び今後の課題について述べる。

本論文の 4 章、5 章の内容の一部はすでに公表した以下の論文に基づいたものである。

1. S. Matsuo, H. Shimahara and K. Nagai
Order parameter mixing effect in the Fulde-Ferrell state
J. Phys. Soc. Jpn. Vol. 63, 2499(1994)
2. S. Matsuo, H. Shimahara and K. Nagai
A nonuniform state in a d-wave superconductor
under magnetic field
J. Phys. Soc. Jpn. Vol. 64, 371(1995)

第2章 BCS理論

この章ではまず一般化された BCS 理論について述べ、異方的超伝導状態の典型的な例として p 波超伝導と d 波超伝導について述べる。つぎに Green 関数法を導入し、それを用いて nonuniform な状態の線形ギャップ方程式を導出する。ここで用いる方法は、Helfand と Werthamer[14][15][16] が s 波超伝導の上部臨界磁場を議論する際に用いた方法である。この方法を用いて、Scharnberg と Klemm[17] は秩序パラメータが一般的な対称性を持つ場合について定式化し、p 波超伝導の上部臨界磁場について議論した。また、Gruenberg と Gunther[18] は s 波超伝導について、Pauli 常磁性と軌道磁性の両方を考慮した時の FF 状態の可能性を論じた。以上のように定式化された方法を用いて、秩序パラメータが一般的な対称性を持つ場合の nonuniform な状態の線形ギャップ方程式を導出する。

2.1. Gor'kov 近似

この節では Hamiltonian を Gor'kov 近似して有効 Hamiltonian を導出し、さらに、この有効 Hamiltonian を後の議論のために便利な南部表示に書き換える。

磁場が存在する場合の一般的な Hamiltonian は

$$\begin{aligned} H = & \sum_{\alpha} \int d^3\mathbf{r} \psi_{\alpha}^{\dagger}(\mathbf{r}) \left(\frac{1}{2m} (\mathbf{p} - \frac{e}{c} \mathbf{A})^2 - \mu - \frac{1}{2} (\sigma_3)_{\alpha\alpha} \omega_L \right) \psi_{\alpha}(\mathbf{r}) \\ & + \frac{1}{2} \sum_{\alpha\beta} \int d^3\mathbf{r} d^3\mathbf{r}' V(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \psi_{\alpha}^{\dagger}(\mathbf{r}) \psi_{\beta}^{\dagger}(\mathbf{r}') \psi_{\beta}(\mathbf{r}') \psi_{\alpha}(\mathbf{r}) \end{aligned} \quad (1)$$

で与えられる。 $\psi^{\dagger}(\psi)$ は、電子の生成 (消滅) 演算子であり、 $V(\mathbf{r} - \mathbf{r}')$ は、二体の相互作用である。 α, β はスピン変数で、 σ_3 は Pauli 行列、 μ は化学ポテンシャルである。 $\omega_L = g\mu_B H$ は電子の Larmor 振動数を表す。なお、 \mathbf{A} はベクトルポテンシャルである。

超伝導の特徴として Gor'kov 項

$$\langle \psi_{\beta}(\mathbf{r}') \psi_{\alpha}(\mathbf{r}) \rangle$$

が値を持つことが重要になる。ここで $\langle \dots \rangle$ は熱平均を表す。

そこで、式(1)の Hamiltonian を Gor'kov 近似して、

$$\begin{aligned}
H_{\text{eff}} &= \sum_{\alpha} \int d^3\mathbf{r} d^3\mathbf{r}' \psi_{\alpha}^{\dagger}(\mathbf{r}) \left(\frac{1}{2m} (\mathbf{p} - \frac{e}{c} \mathbf{A})^2 - \mu - \frac{1}{2} (\sigma_3)_{\alpha\alpha} \omega_L \right) \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \psi_{\alpha}(\mathbf{r}') \\
&+ \frac{1}{2} \sum_{\alpha\beta} \int d^3\mathbf{r} d^3\mathbf{r}' \Delta_{\beta\alpha}^{\dagger}(\mathbf{r}', \mathbf{r}) \psi_{\beta}(\mathbf{r}') \psi_{\alpha}(\mathbf{r}) \\
&+ \frac{1}{2} \sum_{\alpha\beta} \int d^3\mathbf{r} d^3\mathbf{r}' \Delta_{\alpha\beta}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \psi_{\alpha}^{\dagger}(\mathbf{r}) \psi_{\beta}^{\dagger}(\mathbf{r}') \\
&- \frac{1}{2} \sum_{\alpha\beta} \int d^3\mathbf{r} d^3\mathbf{r}' V(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \langle \psi_{\alpha}^{\dagger}(\mathbf{r}) \psi_{\beta}^{\dagger}(\mathbf{r}') \rangle \langle \psi_{\beta}(\mathbf{r}') \psi_{\alpha}(\mathbf{r}) \rangle
\end{aligned} \tag{2}$$

と書き換える。但し、

$$\begin{aligned}
\Delta_{\alpha\beta}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') &= V(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \langle \psi_{\beta}(\mathbf{r}') \psi_{\alpha}(\mathbf{r}) \rangle \\
\Delta_{\beta\alpha}^{\dagger}(\mathbf{r}', \mathbf{r}) &= V(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \langle \psi_{\alpha}^{\dagger}(\mathbf{r}) \psi_{\beta}^{\dagger}(\mathbf{r}') \rangle \\
\Delta_{\alpha\beta}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') &= (\Delta_{\beta\alpha}^{\dagger}(\mathbf{r}', \mathbf{r}))^*
\end{aligned} \tag{3}$$

と定義する。 $\Delta_{\alpha\beta}(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$ は超伝導の秩序パラメータであり、*はその複素共役を意味する。

有効 Hamiltonian の第一項を二つに分けて、一方の項について場の演算子 $\psi_{\alpha}(\mathbf{r})$ を交換して、積分変数 \mathbf{r}, \mathbf{r}' を入れ換えると、有効 Hamiltonian は

$$\begin{aligned}
H_{\text{eff}} &= \frac{1}{2} \sum_{\alpha} \int d^3\mathbf{r} d^3\mathbf{r}' \psi_{\alpha}^{\dagger}(\mathbf{r}) \left(\frac{1}{2m} (\mathbf{p} - \frac{e}{c} \mathbf{A})^2 - \mu - \frac{1}{2} (\sigma_3)_{\alpha\alpha} \omega_L \right) \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \psi_{\alpha}(\mathbf{r}') \\
&- \frac{1}{2} \sum_{\alpha} \int d^3\mathbf{r} d^3\mathbf{r}' \psi_{\alpha}(\mathbf{r}) \left(\frac{1}{2m} (\mathbf{p} + \frac{e}{c} \mathbf{A})^2 - \mu - \frac{1}{2} (\sigma_3)_{\alpha\alpha} \omega_L \right) \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \psi_{\alpha}^{\dagger}(\mathbf{r}') \\
&+ \frac{1}{2} \sum_{\alpha\beta} \int d^3\mathbf{r} d^3\mathbf{r}' \Delta_{\beta\alpha}^{\dagger}(\mathbf{r}', \mathbf{r}) \psi_{\beta}(\mathbf{r}') \psi_{\alpha}(\mathbf{r}) \\
&+ \frac{1}{2} \sum_{\alpha\beta} \int d^3\mathbf{r} d^3\mathbf{r}' \Delta_{\alpha\beta}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \psi_{\alpha}^{\dagger}(\mathbf{r}) \psi_{\beta}^{\dagger}(\mathbf{r}') + \mathcal{F}
\end{aligned} \tag{4}$$

と書き換えられる。ここで、 \mathcal{F} は定数項で

$$\begin{aligned}
\mathcal{F} &= -\frac{1}{2} \sum_{\alpha\beta} \int d^3\mathbf{r} d^3\mathbf{r}' V(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \langle \psi_{\alpha}^{\dagger}(\mathbf{r}) \psi_{\beta}^{\dagger}(\mathbf{r}') \rangle \langle \psi_{\beta}(\mathbf{r}') \psi_{\alpha}(\mathbf{r}) \rangle \\
&+ \int d^3\mathbf{r} d^3\mathbf{r}' \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \left(\frac{1}{2m} (\mathbf{p} + \frac{e}{c} \mathbf{A})^2 - \mu \right) \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}')
\end{aligned}$$

である。

後の議論で有用となる南部表示で有効 Hamiltonian を表す。南部スピノールを

$$\Psi(\mathbf{r}) = \begin{pmatrix} \psi_1(\mathbf{r}) \\ \psi_1(\mathbf{r}) \\ \psi_1^{\dagger}(\mathbf{r}) \\ \psi_1^{\dagger}(\mathbf{r}) \end{pmatrix} \tag{5}$$

と定義することによって有効 Hamiltonian は

$$H_{\text{eff}} = \frac{1}{2} \int d^3\mathbf{r} d^3\mathbf{r}' \sum_{s,s'} \Psi_s^{\dagger}(\mathbf{r}) \tilde{H}_{ss'}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \Psi_{s'}(\mathbf{r}') + \mathcal{F} \tag{6}$$

となる。但し、

$$\tilde{H}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = \begin{pmatrix} \xi_{\mathbf{p}\uparrow}^+ \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}') & 0 & \Delta_{\uparrow\uparrow}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') & \Delta_{\uparrow\downarrow}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \\ 0 & \xi_{\mathbf{p}\downarrow}^+ \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}') & \Delta_{\downarrow\uparrow}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') & \Delta_{\downarrow\downarrow}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \\ \Delta_{\uparrow\uparrow}^\dagger(\mathbf{r}, \mathbf{r}') & \Delta_{\downarrow\uparrow}^\dagger(\mathbf{r}, \mathbf{r}') & -\xi_{\mathbf{p}\uparrow}^- \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}') & 0 \\ \Delta_{\uparrow\downarrow}^\dagger(\mathbf{r}, \mathbf{r}') & \Delta_{\downarrow\downarrow}^\dagger(\mathbf{r}, \mathbf{r}') & 0 & -\xi_{\mathbf{p}\downarrow}^- \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \end{pmatrix} \quad (7)$$

$$\xi_{\mathbf{p}\alpha}^+ = \frac{1}{2m} \left(\mathbf{p} - \frac{e}{c} \mathbf{A} \right)^2 - \mu - \frac{1}{2} (\sigma_3)_{\alpha\alpha} \omega_L$$

$$\xi_{\mathbf{p}\alpha}^- = \frac{1}{2m} \left(\mathbf{p} + \frac{e}{c} \mathbf{A} \right)^2 - \mu - \frac{1}{2} (\sigma_3)_{\alpha\alpha} \omega_L$$

である。場の演算子 $\psi_\alpha(\mathbf{r})$ の反交換関係は南部スピノールを用いると

$$\{\Psi_s^\dagger(\mathbf{r}), \Psi_{s'}(\mathbf{r}')\} = \delta_{s,s'} \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}')$$

$$\{\Psi_s(\mathbf{r}), \Psi_{s'}(\mathbf{r}')\} = \Upsilon_{ss'} \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}')$$

$$\Upsilon = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

となる。

また、 $\Psi_s(\mathbf{r})$ と有効 Hamiltonian の交換関係は

$$[\Psi_s(\mathbf{r}), H_{\text{eff}}] = \int d^3\mathbf{r}' \sum_{s'} \tilde{H}_{ss'}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \Psi_{s'}(\mathbf{r}') \quad (8)$$

である (補遺 A)。以後、 H_{eff} を H と書く。

2.2. 磁場がない場合の超伝導状態

この節では、磁場がない場合の BCS 状態について述べ、特に s 波、p 波、d 波の典型的な状態について説明する。

2.2.1. Hamiltonian の対角化

磁場がない場合、系の並進対称性を用いて有効 Hamiltonian を運動量表示で表すと、

$$H = \frac{1}{2} \sum_{s,s'} \sum_{\mathbf{k}} C_{\mathbf{k}s}^\dagger \tilde{H}_{ss'}(\mathbf{k}) C_{\mathbf{k}s'} + \mathcal{F} \quad (9)$$

と書ける。但し、

$$\tilde{H}(\mathbf{k}) = \begin{pmatrix} \hat{\xi}_{\mathbf{k}} & \hat{\Delta}(\mathbf{k}) \\ \hat{\Delta}^\dagger(\mathbf{k}) & -\hat{\xi}_{\mathbf{k}} \end{pmatrix}$$

$$\hat{\xi}_{\mathbf{k}} = \begin{pmatrix} \xi_{\mathbf{k}} & 0 \\ 0 & \xi_{\mathbf{k}} \end{pmatrix}$$

$$\hat{\Delta}(\mathbf{k}) = \begin{pmatrix} \Delta_{11}(\mathbf{k}) & \Delta_{1\downarrow}(\mathbf{k}) \\ \Delta_{\downarrow 1}(\mathbf{k}) & \Delta_{\downarrow\downarrow}(\mathbf{k}) \end{pmatrix}, \quad \hat{\Delta}^\dagger(\mathbf{k}) = \begin{pmatrix} \Delta_{\downarrow\downarrow}^*(\mathbf{k}) & \Delta_{\downarrow 1}^*(\mathbf{k}) \\ \Delta_{1\downarrow}^*(\mathbf{k}) & \Delta_{11}^*(\mathbf{k}) \end{pmatrix}$$

$$C_{\mathbf{k}} = \begin{pmatrix} C_{\mathbf{k}\uparrow} \\ C_{\mathbf{k}\downarrow} \\ C_{-\mathbf{k}\uparrow}^\dagger \\ C_{-\mathbf{k}\downarrow}^\dagger \end{pmatrix} = \int d^3\mathbf{r} \Psi(\mathbf{r}) e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}}$$

である。 $C_{\mathbf{k}\alpha}^\dagger$ ($C_{\mathbf{k}\alpha}$) は運動量表示での電子の生成 (消滅) 演算子を表す。系の体積は単位体積にとる。秩序パラメータは

$$\Delta_{\alpha\beta}(\mathbf{k}) = \int d^3(\mathbf{r}-\mathbf{r}') \Delta_{\alpha\beta}(\mathbf{r}-\mathbf{r}') e^{-i\mathbf{k}\cdot(\mathbf{r}-\mathbf{r}')}$$

$$\Delta_{\beta\alpha}^\dagger(\mathbf{k}) = \int d^3(\mathbf{r}-\mathbf{r}') \Delta_{\beta\alpha}^\dagger(\mathbf{r}-\mathbf{r}') e^{-i\mathbf{k}\cdot(\mathbf{r}-\mathbf{r}')} \quad (10)$$

と Fourier 変換した。また、秩序パラメータは、

$$\Delta_{\alpha\beta}(\mathbf{k}) = (\Delta_{\beta\alpha}^\dagger(\mathbf{k}))^*$$

の関係を持つ。

従って、エネルギー固有値は固有値方程式

$$\begin{pmatrix} \hat{\xi}_{\mathbf{k}} & \hat{\Delta}(\mathbf{k}) \\ \hat{\Delta}^\dagger(\mathbf{k}) & -\hat{\xi}_{\mathbf{k}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{u}_{\mathbf{k}} \\ \mathbf{v}_{\mathbf{k}} \end{pmatrix} = E_{\mathbf{k}} \begin{pmatrix} \mathbf{u}_{\mathbf{k}} \\ \mathbf{v}_{\mathbf{k}} \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{u}_{\mathbf{k}} = \begin{pmatrix} u_{\mathbf{k}\uparrow} \\ u_{\mathbf{k}\downarrow} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{v}_{\mathbf{k}} = \begin{pmatrix} v_{\mathbf{k}\uparrow} \\ v_{\mathbf{k}\downarrow} \end{pmatrix}$$

を解くことによって得られ、解 $(\mathbf{u}_{\mathbf{k}}, \mathbf{v}_{\mathbf{k}})$ に対して、負のエネルギーの状態

$$\begin{pmatrix} \xi_{\mathbf{k}} & \hat{\Delta}(\mathbf{k}) \\ \hat{\Delta}^\dagger(\mathbf{k}) & -\xi_{\mathbf{k}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{v}_{\mathbf{k}}^* \\ \mathbf{u}_{\mathbf{k}}^* \end{pmatrix} = -E_{\mathbf{k}} \begin{pmatrix} \mathbf{v}_{\mathbf{k}}^* \\ \mathbf{u}_{\mathbf{k}}^* \end{pmatrix}$$

が存在する。従って、unitary 行列を

$$U_{\mathbf{k}}^\dagger = \begin{pmatrix} u_{1\mathbf{k}} & u_{2\mathbf{k}} & v_{1\mathbf{k}}^* & v_{2\mathbf{k}}^* \\ v_{1\mathbf{k}} & v_{2\mathbf{k}} & u_{1\mathbf{k}}^* & u_{2\mathbf{k}}^* \end{pmatrix} \quad (11)$$

と定義すれば、有効 Hamiltonian は

$$H = \frac{1}{2} \sum_{\mathbf{k}} C_{\mathbf{k}}^\dagger U_{\mathbf{k}}^\dagger U_{\mathbf{k}} \bar{H}(\mathbf{k}) U_{\mathbf{k}}^\dagger U_{\mathbf{k}} C_{\mathbf{k}} + \mathcal{F}$$

$$= \frac{1}{2} \sum_{\mathbf{k}} \gamma_{\mathbf{k}}^\dagger \tilde{E}(\mathbf{k}) \gamma_{\mathbf{k}} + \mathcal{F} \quad (12)$$

$$\gamma_{\mathbf{k}} = \begin{pmatrix} \gamma_{\mathbf{k}\uparrow} \\ \gamma_{\mathbf{k}\downarrow} \\ \gamma_{-\mathbf{k}\uparrow}^\dagger \\ \gamma_{-\mathbf{k}\downarrow}^\dagger \end{pmatrix} = U_{\mathbf{k}} C_{\mathbf{k}} \quad (13)$$

$$\tilde{E}(\mathbf{k}) = \begin{pmatrix} E_{\mathbf{k}\uparrow} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & E_{\mathbf{k}\downarrow} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -E_{\mathbf{k}\uparrow} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -E_{\mathbf{k}\downarrow} \end{pmatrix} \quad (14)$$

と対角化することができる。但し、

$$E_{\mathbf{k}\alpha} = \sqrt{\xi_{\mathbf{k}}^2 + \frac{1}{2}[\text{tr}\hat{\Delta}(\mathbf{k})\hat{\Delta}^\dagger(\mathbf{k}) - (\sigma_3)_{\alpha\alpha}\sqrt{R}]} \quad (15)$$

$$R = \left(\sum_{\alpha,\beta} \Delta_{\alpha\beta}(\mathbf{k})\Delta_{\beta\alpha}^\dagger(\mathbf{k}) \right)^2 - 4(|\Delta_{\uparrow\uparrow}(\mathbf{k})|^2|\Delta_{\downarrow\downarrow}(\mathbf{k})|^2 + |\Delta_{\uparrow\downarrow}(\mathbf{k})|^2|\Delta_{\downarrow\uparrow}(\mathbf{k})|^2 - \Delta_{\uparrow\downarrow}(\mathbf{k})\Delta_{\downarrow\uparrow}(\mathbf{k})\Delta_{\uparrow\uparrow}^\dagger(\mathbf{k})\Delta_{\downarrow\downarrow}^\dagger(\mathbf{k}) - \Delta_{\downarrow\uparrow}^\dagger(\mathbf{k})\Delta_{\uparrow\downarrow}^\dagger(\mathbf{k})\Delta_{\uparrow\uparrow}(\mathbf{k})\Delta_{\downarrow\downarrow}(\mathbf{k})) \quad (16)$$

である。 $\gamma_{\mathbf{k}\alpha}^\dagger$ ($\gamma_{\mathbf{k}\alpha}$) は準粒子の生成 (消滅) 演算子と解釈でき、反交換関係

$$\{\gamma_{\mathbf{k}}, \gamma_{\mathbf{k}'}^\dagger\} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \delta_{\mathbf{k},\mathbf{k}'}$$

$$\{\gamma_{\mathbf{k}}, \gamma_{\mathbf{k}'}\} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \delta_{\mathbf{k},\mathbf{k}'}$$

を満足する。この準粒子は Fermi 粒子であり、 $E_{\mathbf{k}\alpha}$ は準粒子の励起エネルギーである。

2.2.2. 秩序パラメータの対称性

一様な系の場合、式(10)を Fourier 変換すると

$$\Delta_{\alpha\beta}(\mathbf{k}) = \sum_{\mathbf{k}'} V(\mathbf{k}-\mathbf{k}') \langle C_{-\mathbf{k}',\beta} C_{\mathbf{k}',\alpha} \rangle \quad (17)$$

と書ける。ここで、相互作用 $V(\mathbf{k}-\mathbf{k}')$ は

$$V(\mathbf{k}-\mathbf{k}') = \int d(\mathbf{r}-\mathbf{r}') V(\mathbf{r}-\mathbf{r}') e^{-i(\mathbf{k}-\mathbf{k}')\cdot(\mathbf{r}-\mathbf{r}')} \quad (18)$$

である。

Fermi 面を球面と仮定し、電子間の引力相互作用 $V(\mathbf{k}-\mathbf{k}')$ の働く領域 ($-\epsilon_c < \xi_{\mathbf{k}} < \epsilon_c$) が Fermi エネルギー ϵ_F に比べて十分に小さい場合 ($\epsilon_c \ll \epsilon_F$) を考えると、相互作用は \mathbf{k} と \mathbf{k}' の間の角度のみに依存する。従って、 $V(\mathbf{k}-\mathbf{k}')$ を部分波展開して

$$V(\mathbf{k}-\mathbf{k}') = V(\hat{\mathbf{k}} \cdot \hat{\mathbf{k}}')$$

$$= -\sum_{l=0}^{\infty} (2l+1) g_l P_l(\cos(\gamma_{\mathbf{k},\mathbf{k}'})) \quad \left(\hat{\mathbf{k}} = \frac{\mathbf{k}}{|\mathbf{k}|} \right) \quad (19)$$

と書き換えることができる(図2.1)[12][13]。ここで、 P_ℓ はルジャンドル多項式である。また、 g_ℓ は引力のとき、正となるように定義した。

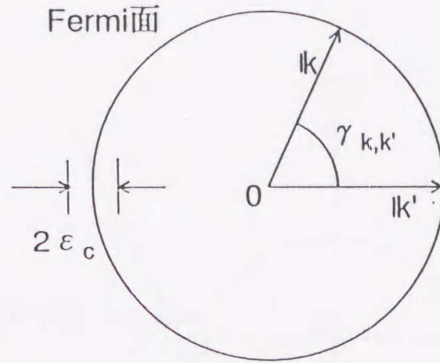


図2.1 Fermi面と相互作用の働く範囲

ϵ_F はFermiエネルギー。相互作用の働く領域は $-\epsilon_c < \xi_{\mathbf{k}} < \epsilon_c$ である。 $\epsilon_c \ll \epsilon_F$ の場合、 $|\mathbf{k}| = k_F$ としてよいので、Fermi面が球面のとき相互作用は角度 $\gamma_{\mathbf{k},\mathbf{k}'}$ のみによる。

ある一つの部分波成分 ℓ による超伝導転移温度が、他の部分波成分の転移温度より十分に高い場合には、 ℓ 成分以外の成分を無視できる。この場合、秩序パラメータは

$$\begin{aligned} \Delta_{\alpha\beta}(\hat{\mathbf{k}}) &= - \sum_{\mathbf{k}'} (2\ell + 1) g_\ell P_\ell(\cos(\gamma_{\mathbf{k},\mathbf{k}'})) \langle C_{-\mathbf{k}',\beta} C_{\mathbf{k}',\alpha} \rangle \\ &= (-1)^{\ell+1} \Delta_{\beta\alpha}(\hat{\mathbf{k}}) \end{aligned} \quad (20)$$

と書ける。 ℓ が偶数の場合、対電子のスピンは一重項を形成し、 ℓ が奇数の場合、対電子のスピンは三重項を形成する。 $\ell = 0, 1, 2, \dots$ の超伝導状態をそれぞれs波、p波、d波、...状態と呼ぶ。

秩序パラメータは一般に Pauli 行列を用いて

$$\hat{\Delta}(\hat{\mathbf{k}}) = \sum_{\mu=0,1,2,3} i \Delta_\mu(\hat{\mathbf{k}}) \sigma_\mu \sigma_2 \quad (21)$$

と展開できる。但し、 σ_0 は単位行列である。ここで Δ_0 がゼロの場合は三重項超伝導の秩序パラメータを表し、 Δ_0 以外がすべてゼロの場合には、一重項超伝導の秩序パラメータを表す。

また、

$$\hat{\Delta}(\hat{\mathbf{k}}) \hat{\Delta}^\dagger(\hat{\mathbf{k}}) = \sum_{\mu,\nu=0,1,2,3} \Delta_\mu \Delta_\nu^* \sigma_\mu \sigma_\nu \quad (22)$$

となるが、特に、秩序パラメータが

$$(\Delta(\hat{\mathbf{k}}) \Delta^\dagger(\hat{\mathbf{k}}))_{\alpha\beta} = \delta_{\alpha\beta} |\Delta(\hat{\mathbf{k}})|^2 \quad (23)$$

の関係を満たすとき、その状態を unitary 状態と呼ぶ。unitary 状態では $R = 0$ (式(16)) となるので、式(15)は

$$E_{\mathbf{k}} = \sqrt{\xi_{\mathbf{k}}^2 + |\Delta(\hat{\mathbf{k}})|^2} \quad (24)$$

となる。

図 2.2 は式 (24) の $E_{\mathbf{k}}$ の分散関係を示す。横軸は運動量で、縦軸はエネルギーである。

$|\Delta(\hat{\mathbf{k}})|$ はエネルギーギャップ (以後、エネルギーギャップを単にギャップと書く) を示す。秩序パラメータが $\hat{\mathbf{k}}$ に依存する場合、一般にギャップは Fermi 面上に異方的に開く。基底状態では負のエネルギー状態が占有されている。

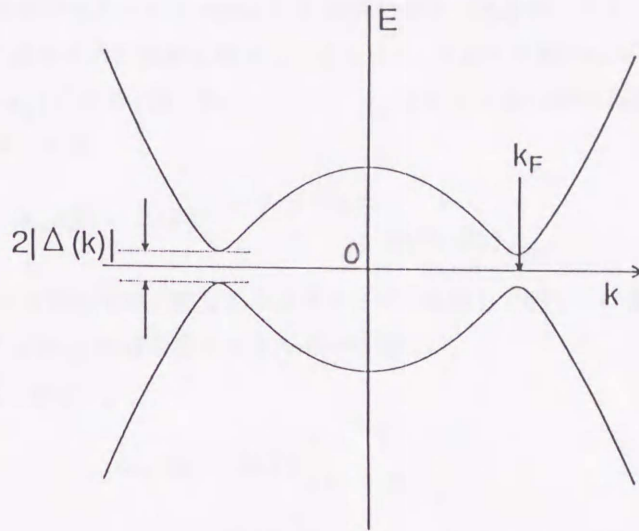


図 2.2 $E_{\mathbf{k}} = \sqrt{\epsilon_{\mathbf{k}}^2 + |\Delta(\hat{\mathbf{k}})|^2}$ の分散関係

横軸は運動量 \mathbf{k} を示し、縦軸はエネルギーを示す。 $|\Delta(\hat{\mathbf{k}})|$ はエネルギーギャップである。

s 波超伝導 ($l = 0$) の場合、相互作用は Fermi 面上に等方的に働くのでギャップは等方的に開く (図 2.3a)。

p 波超伝導 ($l = 1$) の場合、一般に秩序パラメータは

$$\Delta_{\alpha\beta}(\hat{\mathbf{k}}) = \begin{pmatrix} \Delta_{11}(\hat{\mathbf{k}}) & \Delta_{11}(\hat{\mathbf{k}}) \\ \Delta_{11}(\hat{\mathbf{k}}) & \Delta_{11}(\hat{\mathbf{k}}) \end{pmatrix}_{\alpha\beta} \quad (\Delta_{11}(\hat{\mathbf{k}}) = \Delta_{11}(\hat{\mathbf{k}})) \quad (25)$$

$$= \sqrt{4\pi} \sum_{m=-1}^1 Y_{1,m}(\hat{\mathbf{k}}) \Delta_{\alpha\beta m}(\hat{\mathbf{k}}) \quad (26)$$

と書ける。 $Y_{l,m}(\hat{\mathbf{k}})$ は球面調和関数である。三重項超伝導では、スピン量子化軸を適当に選べば、全ての $\hat{\mathbf{k}}$ に対し、 $\Delta_{11} = \Delta_{11} = 0$ にできる状態がある。Cooper 対のスピンが平行に合成されたこのような状態を equal-spin 状態と呼ぶ。三重項状態では、秩序パラメータが複素数であることから一般に 18 種類の可能性がある。そのうち unitary 状態がよく知られたものとして、BW 状態、ABM 状態、planar 状態、polar 状態があり、それらについて述べる。

磁場がないとき、p 波超伝導のうち自由エネルギーが最低の状態は Balian と Werthamer (BW)[19] によって提案された状態で、秩序パラメータは

$$\Delta(\hat{\mathbf{k}})_{\alpha\beta} = \Delta(T) \begin{pmatrix} (-\hat{k}_x + i\hat{k}_y) & \hat{k}_z \\ \hat{k}_z & (\hat{k}_x + i\hat{k}_y) \end{pmatrix}_{\alpha\beta}$$

と書ける。 T は温度を表す。この状態ではギャップは Fermi 面上に等方的に開き、 $|\Delta(\hat{\mathbf{k}})| = \Delta(T)$ となる

(図 2.3a)。異方的なギャップが Fermi 面上に開く状態として、Anderson、Brinkman と Morel (ABM)[20] によって提案された状態、planar 状態、polar 状態などがある。

ABM 状態の秩序パラメータは

$$\Delta_{\alpha\beta}(\hat{\mathbf{k}}) = \Delta(T) \begin{pmatrix} (\hat{k}_x \pm i\hat{k}_y) & 0 \\ 0 & (\hat{k}_x \pm i\hat{k}_y) \end{pmatrix}_{\alpha\beta}$$

と書ける。ここで示した秩序パラメータは equal-spin 状態の場合であるが、スピン量子化軸の取り方を変えれば、スピンの反平行に合成された状態を選ぶこともできる。ABM 状態ではギャップが極軸上で閉じていて、 $|\Delta(\hat{\mathbf{k}})| = \Delta(T)|\sin\theta_{\mathbf{k}}|$ となる (図 2.3b)。ここで、 $\theta_{\mathbf{k}}$ は \mathbf{k} と z 軸の間の角度である。

planar 状態の秩序パラメータは

$$\Delta_{\alpha\beta}(\hat{\mathbf{k}}) = \Delta(T) \begin{pmatrix} (-\hat{k}_x + i\hat{k}_y) & 0 \\ 0 & (\hat{k}_x + i\hat{k}_y) \end{pmatrix}_{\alpha\beta}$$

と表される。planar 状態も ABM 状態と同じようにギャップが極軸上で閉じている (図 2.3b)。また、磁場がないとき、ABM 状態と planar 状態の自由エネルギーは等しい。

polar 状態の秩序パラメータは

$$\Delta_{\alpha\beta}(\hat{\mathbf{k}}) = \Delta(T) \begin{pmatrix} 0 & \hat{k}_z \\ \hat{k}_z & 0 \end{pmatrix}_{\alpha\beta}$$

と表されるが、polar 状態として equal-spin 状態を選ぶこともできる。polar 状態ではギャップが赤道上で閉じていて、 $|\Delta(\hat{\mathbf{k}})| = \Delta(T)|\cos\theta_{\mathbf{k}}|$ となる (図 2.3b)。磁場がないとき、polar 状態の自由エネルギーは今まで述べた p 波の四つの状態の中で最も高い。

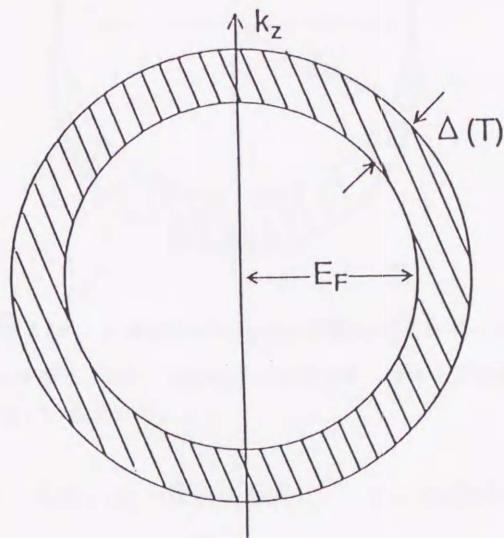


図 2.3a s 波超伝導または、p 波超伝導の BW 状態のエネルギーギャップ
 E_F は Fermi エネルギー、 $\Delta(T)$ はエネルギーギャップを示す。

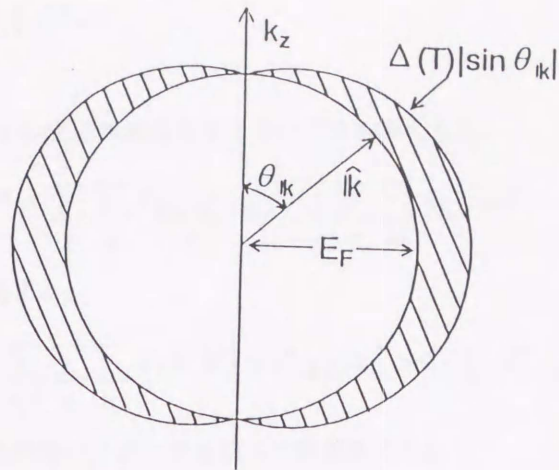


図 2.3b p 波超伝導の ABM 状態、および planar 状態のエネルギーギャップ
 E_F は Fermi エネルギー、 $\Delta(T)|\sin \theta_{\mathbf{k}}|$ はエネルギーギャップを示す。エネルギーギャップは極軸上で閉じている。

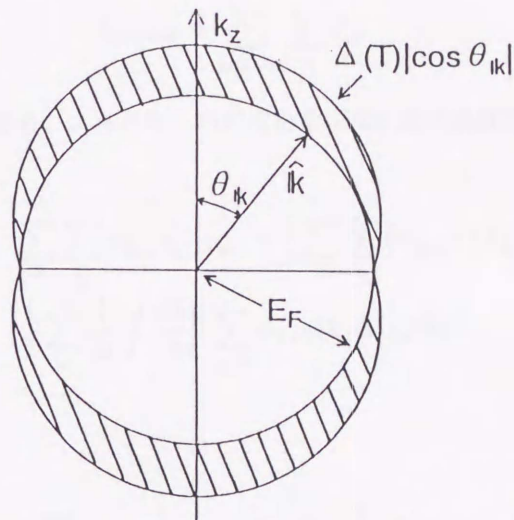


図 2.3c p 波超伝導の polar 状態のエネルギーギャップ
 E_F は Fermi エネルギー、 $\Delta(T)|\cos \theta_{\mathbf{k}}|$ はエネルギーギャップを示す。エネルギーギャップは赤道上で閉じている。

d 波超伝導 ($l = 2$) の場合、スピンは一重項を形成し、一般に秩序パラメータは、

$$\Delta_{\alpha\beta}(\hat{\mathbf{k}}) = \sqrt{4\pi} \sum_{m=-2}^2 Y_{2,m}(\hat{\mathbf{k}}) \Delta_{\alpha\beta m} \quad (\alpha = -\beta)$$

と書ける。磁場がない場合、最も低い自由エネルギーを与える状態の秩序パラメータは

$$\Delta(\hat{\mathbf{k}}) = \sqrt{4\pi} \Delta(T) \left(\sqrt{\frac{1}{2}} Y_{2,0}(\hat{\mathbf{k}}) + \frac{1}{2} (Y_{2,2}(\hat{\mathbf{k}}) - Y_{2,-2}(\hat{\mathbf{k}})) \right)$$

であることが Anderson と Morel[12] によって示されている。

2.2.3. 自由エネルギー

有効 Hamiltonian を準粒子の生成消滅演算子を用いて書き換えると、

$$H = \sum_{\alpha} \sum_{\mathbf{k}} E_{\mathbf{k}\alpha} \gamma_{\mathbf{k}\alpha}^{\dagger} \gamma_{\mathbf{k}\alpha} - \frac{1}{2} \sum_{\alpha} \sum_{\mathbf{k}} E_{\mathbf{k}\alpha} + \mathcal{F} \quad (27)$$

となる。 \mathcal{F} を運動量表示で表すと、

$$\mathcal{F} = -\frac{1}{2} \sum_{\alpha, \beta} \sum_{\mathbf{k}} \sum_{\mathbf{k}'} V(\hat{\mathbf{k}} \cdot \hat{\mathbf{k}}') \langle C_{-\mathbf{k}\beta} C_{\mathbf{k}\alpha} \rangle \langle C_{\mathbf{k}'\alpha}^{\dagger} C_{-\mathbf{k}'\beta}^{\dagger} \rangle + \sum_{\mathbf{k}} \xi_{\mathbf{k}} \quad (28)$$

となる。特に、 \mathcal{F} の第一項を秩序パラメータを使って書き換えると

$$\mathcal{F} = \frac{1}{2} \sum_{\ell} \frac{1}{g_{\ell}} \int \frac{d\Omega_{\mathbf{k}}}{4\pi} \sum_{\alpha, \beta} \Delta_{\ell\alpha\beta}(\hat{\mathbf{k}}) \Delta_{\ell\beta\alpha}^{\dagger}(\hat{\mathbf{k}}) + \sum_{\mathbf{k}} \xi_{\mathbf{k}} \quad (29)$$

と表される (補遺 B)。

常伝導状態の基底状態のエネルギー

$$E_{\text{normal}} = \sum_{\mathbf{k}(\xi < 0)} \sum_{\alpha} \xi_{\mathbf{k}} \quad (30)$$

を有効 Hamiltonian から引きさり、エネルギーの原点を常伝導状態の基底状態のエネルギーに取り直した Hamiltonian を H' とすると、

$$H' = \sum_{\alpha} \sum_{\mathbf{k}} E_{\mathbf{k}\alpha} \gamma_{\mathbf{k}\alpha}^{\dagger} \gamma_{\mathbf{k}\alpha} - \frac{1}{2} \sum_{\alpha} \sum_{\mathbf{k}} (E_{\mathbf{k}\alpha} - |\xi_{\mathbf{k}}|) + \mathcal{D} \quad (31)$$

$$\mathcal{D} = \frac{1}{2} \sum_{\ell} \frac{1}{g_{\ell}} \int \frac{d\Omega_{\mathbf{k}}}{4\pi} \sum_{\alpha, \beta} \Delta_{\ell\alpha\beta}(\hat{\mathbf{k}}) \Delta_{\ell\beta\alpha}^{\dagger}(\hat{\mathbf{k}}) \quad (32)$$

と書くことができる。

分配関数は

$$\begin{aligned} Z &= \sum_{n(\mathbf{k}, \alpha)=0,1} \prod_{\mathbf{k}, \alpha} \exp\left[-\frac{1}{T}(E_{\mathbf{k}\alpha} n(\mathbf{k}, \alpha) - \frac{1}{2}(E_{\mathbf{k}\alpha} - |\xi_{\mathbf{k}}|))\right] \exp\left[-\frac{1}{T}\mathcal{D}\right] \\ &= \exp\left[-\frac{1}{T}\mathcal{D}\right] \prod_{\mathbf{k}, \alpha} \exp\left[\frac{1}{2T}(E_{\mathbf{k}\alpha} - |\xi_{\mathbf{k}}|)\right] (1 - n_{\text{F}}(E_{\mathbf{k}, \alpha}))^{-1} \end{aligned} \quad (33)$$

で与えられ、自由エネルギーは

$$F = -T \ln Z = \sum_{\mathbf{k}, \alpha} [T \ln(1 - n_{\text{F}}(E_{\mathbf{k}\alpha})) - \frac{1}{2}(E_{\mathbf{k}\alpha} - |\xi_{\mathbf{k}}|)] + \mathcal{D} \quad (34)$$

と表せる。 $n_{\text{F}}(E_{\mathbf{k}\alpha})$ は Fermi 分布関数である。絶対零度の自由エネルギーは

$$F_0 = -\frac{1}{2} \sum_{\mathbf{k}, \alpha} (E_{\mathbf{k}\alpha} - |\xi_{\mathbf{k}}|) + \mathcal{D} \quad (35)$$

と与えられる。

2.2.4. 転移温度

磁場がない場合、常伝導状態と超伝導状態の間の転移は二次転移であり、比熱にとびが存在する。二次転移の場合、秩序パラメータの値がゼロから連続的に有限の値になる。したがって、二次転移点は、自由エネルギーを $|\Delta(T)|^2$ について展開し、 $|\Delta(T)|^2$ の一次の係数が正から負に変わる温度を探すことによって求められる。

二次転移点はギャップ方程式からも求めることができる。ギャップ方程式は自由エネルギーを秩序パラメータで変分して得られるので、ギャップ方程式を $\Delta(\hat{\mathbf{k}})$ について一次まで展開して、その係数がゼロになる温度を求めれば、それが超伝導転移温度 T_c である。以後、超伝導転移温度を単に転移温度と書く。

まず、式 (34) の自由エネルギーを $\Delta_{\alpha\beta}(\hat{\mathbf{k}})$ で変分してギャップ方程式を導出する。相互作用のうちただ一つの部分波成分のみを考える場合は、

$$\Delta_{\alpha\beta}(\hat{\mathbf{k}}) = \sum_{\mathbf{k}'} (2\ell + 1) g_\ell P_\ell(\cos(\gamma_{\mathbf{k}, \mathbf{k}'})) \frac{\Delta_{\alpha\beta}(\hat{\mathbf{k}}')}{2E_{\mathbf{k}'}} \tanh\left(\frac{E_{\mathbf{k}'}}{2T}\right) \quad (36)$$

となる。

ギャップ方程式を $\Delta_{\alpha\beta}(\hat{\mathbf{k}})$ について線形化すると、

$$\Delta_{\alpha\beta}(\hat{\mathbf{k}}) = -N(0) \int \frac{d\Omega_{\mathbf{k}'}}{4\pi} V(\hat{\mathbf{k}} \cdot \hat{\mathbf{k}}') \int_{-\epsilon_c}^{\epsilon_c} d\xi_{\mathbf{k}'} \frac{\Delta_{\alpha\beta}(\hat{\mathbf{k}}')}{2\xi_{\mathbf{k}'}} \tanh\left(\frac{\xi_{\mathbf{k}'}}{2T_c}\right) \quad (37)$$

となる。ここで、 $\sum_{\mathbf{k}}$ を

$$\sum_{\mathbf{k}} = N(0) \int \frac{d\Omega_{\mathbf{k}}}{4\pi} \int d\xi_{\mathbf{k}}$$

と書き換えた。球面調和関数 $Y_{\ell,m}$ で展開した秩序パラメータは

$$\Delta_{\alpha\beta}(\hat{\mathbf{k}}) = \sqrt{4\pi} \sum_{m=-\ell}^{\ell} Y_{\ell,m}(\hat{\mathbf{k}}) \Delta_{\alpha\beta m}(\hat{\mathbf{k}})$$

となり、相互作用を

$$V(\hat{\mathbf{k}} \cdot \hat{\mathbf{k}}') = -4\pi g_\ell \sum_{m=-\ell}^{\ell} Y_{\ell,m}(\hat{\mathbf{k}}) Y_{\ell,m}^*(\hat{\mathbf{k}}')$$

と展開して式 (37) のギャップ方程式に代入し、角度積分を実行すると、

$$\frac{1}{g_\ell N(0)} = \int_{-\epsilon_c}^{\epsilon_c} d\xi_{\mathbf{k}} \frac{1}{2\xi_{\mathbf{k}}} \tanh\left(\frac{\xi_{\mathbf{k}}}{2T_c}\right) \quad (38)$$

を得る。 $\xi_{\mathbf{k}}$ 積分については、部分積分を行い

$$\int_0^\infty dx \frac{\ln x}{\cosh^2 x} = -\ln \frac{4\gamma}{\pi}$$

の関係を使った結果

$$\begin{aligned} \frac{1}{g_\ell N(0)} &= [\ln x \tanh x]_0^{\frac{\epsilon_c}{2T_c}} - \int_0^{\frac{\epsilon_c}{2T_c}} dx \frac{\ln x}{\cosh^2 x} \\ &\simeq \ln \frac{2\gamma\epsilon_c}{\pi T_c} \end{aligned} \quad (39)$$

となる。ここで、 $x = \xi_{\mathbf{k}}/2T_c$ で、 $\ln \gamma$ は Euler の定数 ($= 0.577 \dots$) である。

2.2.5. 絶対零度の場合

式 (36) において $T \rightarrow 0$ の極限では

$$\tanh\left(\frac{E_{\mathbf{k}'}}{2T}\right) \rightarrow 1 \quad (T \rightarrow 0)$$

であることを用いて、絶対零度におけるギャップ方程式は

$$\begin{aligned} \Delta_{\alpha\beta}(\hat{\mathbf{k}}) &= \sum_{\mathbf{k}'} (2\ell + 1) g_{\ell} P_{\ell}(\cos(\gamma_{\mathbf{k}, \mathbf{k}'})) \frac{\Delta_{\alpha\beta}(\hat{\mathbf{k}'})}{\sqrt{\xi_{\mathbf{k}'}^2 + |\Delta(\hat{\mathbf{k}'})|^2}} \\ &= N(0) \int \frac{d\Omega_{\mathbf{k}'}}{4\pi} (2\ell + 1) g_{\ell} P_{\ell}(\cos(\gamma_{\mathbf{k}, \mathbf{k}'})) \Delta_{\alpha\beta}(\hat{\mathbf{k}'}) \ln \frac{2\epsilon_c}{|\Delta(\hat{\mathbf{k}'})|} \end{aligned} \quad (40)$$

と与えられる。

1) s 波超伝導と p 波超伝導の BW 状態の場合、 $|\Delta(\hat{\mathbf{k}})|^2 = |\Delta(T)|^2$ であるので、 $E_{\mathbf{k}\alpha}$ は角度によらない。ギャップ方程式 (40) の角度積分は容易に実行でき、絶対零度におけるギャップ $\Delta(0)$ は

$$\Delta(0) = 2\epsilon_c \exp\left[-\frac{1}{g_{\ell} N(0)}\right] \quad (g_{\ell} = 0, 1) \quad (41)$$

となる。また、絶対零度の自由エネルギー F_0 (式 (35)) は

$$F_0 = -\frac{1}{2} N(0) \Delta(0)^2 \quad (42)$$

となる。

2) p 波超伝導の ABM 状態、planar の場合では、 $|\Delta(\hat{\mathbf{k}})|^2 = \Delta_A^2(T)(\hat{k}_x^2 + \hat{k}_y^2)$ となり、絶対零度のギャップ方程式 (式 (40)) と自由エネルギーの表式 (式 (35)) を使って、自由エネルギーは

$$\frac{F_0}{N(0)\Delta_{\text{BW}}^2(0)} = -\frac{8}{9} \left(\frac{\Delta_A(0)}{\Delta_{\text{BW}}(0)}\right)^2 + \frac{1}{3} \left(\frac{\Delta_A(0)}{\Delta_{\text{BW}}(0)}\right)^2 \ln\left(\frac{2\Delta_A(0)}{\Delta_{\text{BW}}(0)}\right)^2$$

と求められる。但し、 $\Delta_{\text{BW}}(0)$ は 1) で求めた BW 状態の絶対零度でのギャップの値である。 $\Delta_A(0)$ で変分し、自由エネルギーの最小値を探すと、 $\Delta_{\text{BW}}(0)$ と $\Delta_A(0)$ の比は

$$\frac{\Delta_A(0)}{\Delta_{\text{BW}}(0)} = \frac{1}{2} e^{\frac{5}{6}} \quad (43)$$

となり

$$\frac{F_0}{N(0)\Delta_{\text{BW}}^2(0)} = -\frac{1}{12} e^{\frac{5}{6}} \quad (44)$$

を得る。

2.3. 磁場がない場合の混成状態

従来の理論では相互作用の部分波成分のうち、最も大きな転移温度を与える成分ただ一つのみを取り扱って議論されてきた。しかし、複数の部分波成分が混在している系については、これまであまり議論されていない。そこで、ここでは最も簡単な混成系のモデルとして s 波相互作用と p 波相互作用が混在している系について考察する。

自由エネルギー (式 (34)) は前節の結果から、

$$F = \sum_{\mathbf{k}, \alpha} [T \ln(1 - n_F(E_{\mathbf{k}\alpha})) - \frac{1}{2}(E_{\mathbf{k}\alpha} - |\xi_{\mathbf{k}}|)] + \mathcal{D}$$

と与えられる。但し、

$$\begin{aligned} \mathcal{D} &= \frac{1}{2} \sum_{\ell} \frac{1}{g_{\ell}} \int \frac{d\Omega_{\mathbf{k}}}{4\pi} \sum_{\alpha, \beta} \Delta_{\ell\alpha\beta}(\hat{\mathbf{k}}) \Delta_{\ell\beta\alpha}^{\dagger}(\hat{\mathbf{k}}) \\ E_{\mathbf{k}\alpha} &= \sqrt{\xi_{\mathbf{k}}^2 + \frac{1}{2} [\text{tr} \hat{\Delta}(\hat{\mathbf{k}}) \hat{\Delta}^{\dagger}(\hat{\mathbf{k}}) - (\sigma_3)_{\alpha\alpha} \sqrt{R}]} \\ R &= \left(\sum_{\alpha, \beta} \Delta_{\alpha\beta}(\hat{\mathbf{k}}) \Delta_{\beta\alpha}^{\dagger}(\hat{\mathbf{k}}) \right)^2 \\ &\quad - 4(|\Delta_{11}(\hat{\mathbf{k}})|^2 |\Delta_{11}(\hat{\mathbf{k}})|^2 + |\Delta_{11}(\hat{\mathbf{k}})|^2 |\Delta_{11}(\hat{\mathbf{k}})|^2 \\ &\quad - \Delta_{11}(\hat{\mathbf{k}}) \Delta_{11}(\hat{\mathbf{k}}) \Delta_{11}^{\dagger}(\hat{\mathbf{k}}) \Delta_{11}^{\dagger}(\hat{\mathbf{k}}) - \Delta_{11}^{\dagger}(\hat{\mathbf{k}}) \Delta_{11}^{\dagger}(\hat{\mathbf{k}}) \Delta_{11}(\hat{\mathbf{k}}) \Delta_{11}(\hat{\mathbf{k}})) \end{aligned}$$

である。

s 波成分と p 波成分の BW 状態が混成する場合には、秩序パラメータは

$$\begin{pmatrix} \Delta_{11}(\hat{\mathbf{k}}) & \Delta_{11}(\hat{\mathbf{k}}) \\ \Delta_{11}(\hat{\mathbf{k}}) & \Delta_{11}(\hat{\mathbf{k}}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (-\hat{k}_x + i\hat{k}_y) \Delta_p(T) & \hat{k}_z \Delta_p(T) + \Delta_s(T) \\ \hat{k}_z \Delta_p(T) - \Delta_s(T) & (\hat{k}_x + i\hat{k}_y) \Delta_p(T) \end{pmatrix} \quad (45)$$

と表せる。また、エネルギー $E_{\mathbf{k}\alpha}$ は

$$\begin{aligned} E_{\mathbf{k}\alpha}^2 &= \xi_{\mathbf{k}}^2 + |\Delta_s(T)|^2 + |\Delta_p(T)|^2 \\ &\quad + (\sigma_3)_{\alpha\alpha} \sqrt{2 |\Delta_s(T)|^2 |\Delta_p(T)|^2 (1 + \cos 2\varphi_{s,p})} \end{aligned} \quad (46)$$

となる。但し、 Δ_s と Δ_p はそれぞれ秩序パラメータの s 波成分と p 波成分を表し、 $\varphi_{s,p}$ は二つの成分の相対的位相差を表し、

$$\Delta_s(T) \Delta_p^*(T) = |\Delta_s(T)| |\Delta_p(T)| e^{i\varphi_{s,p}} \quad (47)$$

である。得られた $E_{\mathbf{k}\alpha}$ を自由エネルギーの表式に代入し、最小となる Δ_s と Δ_p 及び、 $\varphi_{s,p}$ を調べれば混成状態が実現するかどうか分かる。特に、議論を転移温度近傍にかぎる場合、自由エネルギーを Δ について四次まで展開して調べればよい。

同様に、s 波と planar 状態の場合に対しても、 $E_{\mathbf{k}\alpha}$ は

$$\begin{aligned} E_{\mathbf{k}\alpha}^2 &= \xi_{\mathbf{k}}^2 + |\Delta_s(T)|^2 + |\Delta_p(T)|^2 (\hat{\mathbf{k}}_x^2 + \hat{\mathbf{k}}_y^2) \\ &\quad + (\sigma_3)_{\alpha\alpha} \sqrt{2 |\Delta_s(T)|^2 |\Delta_p(T)|^2 (1 + \cos 2\varphi_{s,p})} \end{aligned} \quad (48)$$

と求まる。s 波と ABM 状態の場合の $E_{\mathbf{k}\alpha}$ も

$$\begin{aligned} E_{\mathbf{k}\alpha}^2 &= \xi_{\mathbf{k}}^2 + |\Delta_s(T)|^2 + |\Delta_p(T)|^2 (\hat{\mathbf{k}}_x^2 + \hat{\mathbf{k}}_y^2) \\ &+ (\sigma_3)_{\alpha\alpha} |\Delta_s(T)| |\Delta_p(T)| f(\hat{\mathbf{k}}_x, \hat{\mathbf{k}}_y, \varphi_{s,p}) \\ f &= \sqrt{2(\hat{\mathbf{k}}_x^2 + \hat{\mathbf{k}}_y^2) - 2(\hat{\mathbf{k}}_x^2 - \hat{\mathbf{k}}_y^2) \cos \varphi_{s,p} - 4\hat{\mathbf{k}}_x \hat{\mathbf{k}}_y \sin \varphi_{s,p}} \end{aligned} \quad (49)$$

と得られる。

ここで示した混成状態のうち s 波と BW 状態と、s 波と planar 状態では、相対的位相差 $\varphi_{s,p}$ が $\pi/2$ のとき自由エネルギーが最も低くなる。

2.3.1. s 波と BW 状態の場合

s 波と BW 状態の組み合わせの場合、 Δ について展開を行わず自由エネルギーをそのまま変分することで混成状態が実現しないことを示せる。秩序パラメータのそれぞれの成分について変分した連立ギャップ方程式は

$$\begin{aligned} \sum_{\mathbf{k},\alpha} \frac{1}{E_{\mathbf{k}\alpha}} (n_F(E_{\mathbf{k}\alpha}) - \frac{1}{2}) + \frac{1}{g_0} &= 0 \quad (s \text{ 波成分で変分}) \\ \sum_{\mathbf{k},\alpha} \frac{1}{E_{\mathbf{k}\alpha}} (n_F(E_{\mathbf{k}\alpha}) - \frac{1}{2}) + \frac{1}{g_1} &= 0 \quad (p \text{ 波成分で変分}) \end{aligned}$$

となり、ここで

$$E_{\mathbf{k}\alpha} = \sqrt{\xi_{\mathbf{k}}^2 + |\Delta_s|^2 + |\Delta_p|^2}$$

である。なお、 n_F は Fermi 分布関数を表す。

s 波成分と p 波成分の転移温度が異なる場合には、連立ギャップ方程式を満たす解は存在せず、高い転移温度を与える部分波成分の超伝導が実現するともう一方の部分波成分による超伝導は出現しないことになる。従って、この組み合わせの場合、混成状態は実現しない。

2.3.2. s 波と planar 状態の場合

自由エネルギーを Δ について四次まで展開すると

$$\begin{aligned} \frac{1}{N(0)} F &= -G |\Delta_s|^2 - \frac{T_{c1} - T}{T_{c1}} (|\Delta_s|^2 \frac{2}{3} |\Delta_p|^2) \\ &+ \frac{1}{2} B (|\Delta_s|^4) + \frac{8}{15} |\Delta_p|^4 + \frac{4}{3} |\Delta_s|^2 |\Delta_p|^2 \end{aligned} \quad (50)$$

が得られる。但し、

$$\begin{aligned} G &= \frac{1}{g_1 N(0)} - \frac{1}{g_0 N(0)} \\ B &= \frac{7}{8} \zeta(3) \left(\frac{1}{\pi T_{c1}} \right)^2 \end{aligned}$$

で与えられる。 $\zeta(3)$ は Riemann の zeta 関数であり、 $N(0)$ は Fermi 面上での状態密度を表す。 T_{c1} は p 波成分の転移温度を示す。

変分解は

$$\begin{aligned} |\Delta_s|^2 &= \frac{1}{B} \left(\frac{T_{c1} - T}{T_{c1}} + 6G \right) \\ |\Delta_p|^2 &= -\frac{15G}{2B} \end{aligned}$$

と解ける。しかし、物理的に意味のある解は、 $|\Delta_s|^2 > 0, |\Delta_p|^2 > 0$ を満足しなければならないから、 $G < 0$ すなわち、p 波相互作用が s 波相互作用よりも大きいことが必要となる。s 波成分が大きい場合、混成状態は実現されず s 波のみの超伝導が実現する。p 波成分が大きい場合にのみ混成状態が実現する。

2.3.3. s 波と ABM 状態の場合

自由エネルギーを Δ について四次まで展開すると

$$\begin{aligned} \frac{1}{N(0)} F &= -G |\Delta_s|^2 - \frac{T_{c1} - T}{T_{c1}} \left(|\Delta_s|^2 \frac{2}{3} |\Delta_p|^2 \right) \\ &+ \frac{1}{2} B (|\Delta_s|^4) + \frac{8}{15} |\Delta_p|^4 + \frac{8}{3} |\Delta_s|^2 |\Delta_p|^2 \end{aligned} \quad (51)$$

と書ける。

変分解は

$$\begin{aligned} |\Delta_s|^2 &= \frac{1}{28B} \left(-3G + 2 \frac{T_{c1} - T}{T_{c1}} + 6G \right) \\ |\Delta_p|^2 &= \frac{3}{112B} \left(3G + 5 \frac{T_{c1} - T}{T_{c1}} \right) \end{aligned}$$

となるが、この解は自由エネルギーの極小値を与えるものではなく、鞍点になっている。従って、混成状態は実現しない。

以上、2.3.1., 2.3.2., 2.3.3. をまとめる。s 波相互作用が大きく始めに s 波超伝導が実現し Fermi 面上に完全にギャップが開いている場合、他の部分波成分が混在していても混成状態は実現しない。この事情は、完全にギャップが開いているために Cooper instability が起こらないと解釈できる。磁場がない場合、混成状態が実現するためにはギャップが Fermi 面上で閉じているところが存在する必要がある。これに対して、磁場のある場合、s 波相互作用が大きい場合でも混成状態が実現する。これについては次章で詳しく説明する。

2.4. Gor'kov Green 関数

磁場の効果を入れて nonuniform な状態について議論するには Green 関数を用いるのが便利である [21]。松原温度 Green 関数を

$$g_{ss'} = - \langle T_\tau \Psi_s(\mathbf{r}, \tau) \Psi_{s'}^\dagger(\mathbf{r}', 0) \rangle \quad (52)$$

と定義する。ここで $\langle \dots \rangle$ は熱平均を意味し、 T_τ はいわゆる time ordering 演算子を表す。また、

$$\Psi_s(\mathbf{r}, \tau) = e^{\tau H} \Psi_s(\mathbf{r}, 0) e^{-\tau H} \quad (53)$$

と定義する。温度 Green 関数 $g_{ss'}(\mathbf{r}, \mathbf{r}', \tau)$ を τ で微分して上述の有効 Hamiltonian と場の演算子の交換関係 (式 (8)) を用いると、運動方程式は

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \tau} g_{ss'}(\mathbf{r}, \mathbf{r}', \tau) &= -\delta(\tau) \delta_{ss'} \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \\ &\quad - \int d^3 \mathbf{r}_1 \sum_{s'''} \tilde{H}_{ss'''}(\mathbf{r}, \mathbf{r}_1) g_{s'''}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}', \tau) \end{aligned} \quad (54)$$

と書ける。この運動方程式に

$$g_{ss'}(\mathbf{r}, \mathbf{r}', \tau) = T \sum_{\omega_n} g_{ss'}(\mathbf{r}, \mathbf{r}', \omega_n) e^{-i\omega_n \tau} \quad (55)$$

$$\delta(\tau) = T \sum_{\omega_n} e^{-i\omega_n \tau} \quad (56)$$

を代入する。但し、松原振動数は、Fermion の場合、 $\omega_n = (2n+1)\pi T$ ($n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$) である。

結果、

$$-i\omega_n g_{ss'}(\mathbf{r}, \mathbf{r}', \omega_n) = -\delta_{ss'} \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}') - \int d^3 \mathbf{r}_1 \sum_{s'''} \tilde{H}_{ss'''}(\mathbf{r}, \mathbf{r}_1) g_{s'''}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}', \omega_n) \quad (57)$$

を得る。この温度 Green 関数 $\mathbf{g}(\mathbf{r}, \mathbf{r}', \tau)$ は 4×4 行列であり、これを 2×2 行列に分けて、

$$\mathbf{g}(\mathbf{r}, \mathbf{r}', \tau) = \begin{pmatrix} G_{\alpha\beta}(\mathbf{r}, \mathbf{r}', \tau) & F_{\alpha\beta}(\mathbf{r}, \mathbf{r}', \tau) \\ \tilde{F}_{\alpha\beta}(\mathbf{r}, \mathbf{r}', \tau) & \tilde{G}_{\alpha\beta}(\mathbf{r}, \mathbf{r}', \tau) \end{pmatrix} \quad (58)$$

を定義する。それぞれの行列の成分は、

$$G_{\alpha\beta}(\mathbf{r}, \mathbf{r}', \tau) = -\langle T_\tau \psi_\alpha(\mathbf{r}, \tau) \psi_\beta^\dagger(\mathbf{r}', 0) \rangle \quad (59)$$

$$\tilde{G}_{\alpha\beta}(\mathbf{r}, \mathbf{r}', \tau) = -\langle T_\tau \psi_\alpha^\dagger(\mathbf{r}, \tau) \psi_\beta(\mathbf{r}', 0) \rangle \quad (60)$$

$$F_{\alpha\beta}(\mathbf{r}, \mathbf{r}', \tau) = -\langle T_\tau \psi_\alpha(\mathbf{r}, \tau) \psi_\beta(\mathbf{r}', 0) \rangle \quad (61)$$

$$\tilde{F}_{\alpha\beta}(\mathbf{r}, \mathbf{r}', \tau) = -\langle T_\tau \psi_\alpha^\dagger(\mathbf{r}, \tau) \psi_\beta^\dagger(\mathbf{r}', 0) \rangle \quad (62)$$

で与えられる。 $F_{\alpha\beta}$ は $\tau = 0$ において、

$$F_{\alpha\beta}(\mathbf{r}, \mathbf{r}', 0) = -\langle \psi_\alpha(\mathbf{r}) \psi_\beta(\mathbf{r}') \rangle \quad (63)$$

$$\tilde{F}_{\alpha\beta}(\mathbf{r}, \mathbf{r}', 0) = -\langle \psi_\alpha^\dagger(\mathbf{r}) \psi_\beta^\dagger(\mathbf{r}') \rangle \quad (64)$$

となる。また、

$$F_{\alpha\beta}(\mathbf{r}, \mathbf{r}', 0) = \tilde{F}_{\beta\alpha}^*(\mathbf{r}', \mathbf{r}, 0) \quad (65)$$

の関係があるので、秩序パラメータは

$$\begin{aligned}
\Delta_{\alpha\beta}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') &= V(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \langle \psi_{\beta}(\mathbf{r}') \psi_{\alpha}(\mathbf{r}) \rangle \\
&= V(\mathbf{r} - \mathbf{r}') F_{\alpha\beta}(\mathbf{r}, \mathbf{r}', 0) \\
&= V(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \tilde{F}_{\beta\alpha}^*(\mathbf{r}', \mathbf{r}, 0)
\end{aligned} \tag{66}$$

と書き表すことができる。

式(7)の行列を用いると Green 関数の運動方程式は、

$$\begin{aligned}
[i\omega_n - \frac{1}{2m}(\mathbf{p} - \frac{e}{c}\mathbf{A})^2 + \mu + \frac{1}{2}(\sigma_3)_{\alpha\alpha}\omega_L]G_{\alpha\beta}(\mathbf{r}, \mathbf{r}', \omega_n) \\
- \sum_{\gamma} \int d^3\mathbf{r}_1 \Delta_{\alpha\gamma}(\mathbf{r}, \mathbf{r}_1) \tilde{F}_{\gamma\beta}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}', \omega_n) = \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}')\delta_{\alpha\beta}
\end{aligned} \tag{67}$$

$$\begin{aligned}
[-i\omega_n - \frac{1}{2m}(\mathbf{p} + \frac{e}{c}\mathbf{A})^2 + \mu + \frac{1}{2}(\sigma_3)_{\alpha\alpha}\omega_L]\tilde{F}_{\alpha\beta}(\mathbf{r}, \mathbf{r}', \omega_n) \\
+ \sum_{\gamma} \int d^3\mathbf{r}_1 \Delta_{\alpha\gamma}^{\dagger}(\mathbf{r}, \mathbf{r}_1) G_{\gamma\beta}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}', \omega_n) = 0
\end{aligned} \tag{68}$$

と書かれる。

自由粒子系の場合、Green 関数の運動方程式は

$$[i\omega_n - \frac{1}{2m}(\mathbf{p} - \frac{e}{c}\mathbf{A})^2 + \mu + \frac{1}{2}(\sigma_3)_{\alpha\alpha}\omega_L]G_{\alpha\beta}^0(\mathbf{r}, \mathbf{r}', \omega_n) = \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}')\delta_{\alpha\beta} \tag{69}$$

となる。自由粒子系の Green 関数の解を使って上述の方程式を解くことができる。解は

$$\begin{aligned}
G_{\alpha\beta}(\mathbf{r}, \mathbf{r}', \omega_n) &= G_{\alpha\beta}^0(\mathbf{r}, \mathbf{r}', \omega_n)\delta_{\alpha\beta} \\
&+ \sum_{\gamma} \int d^3\mathbf{r}_2 d^3\mathbf{r}_1 G_{\alpha\alpha}^0(\mathbf{r}, \mathbf{r}_2, \omega_n) \Delta_{\alpha\gamma}(\mathbf{r}_2, \mathbf{r}_1) \tilde{F}_{\gamma\beta}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}', \omega_n)
\end{aligned} \tag{70}$$

$$\tilde{F}_{\alpha\beta}(\mathbf{r}, \mathbf{r}', \omega_n) = - \sum_{\gamma} \int d^3\mathbf{r}_2 d^3\mathbf{r}_1 G_{\alpha\alpha}^0(\mathbf{r}, \mathbf{r}_2, -\omega_n) \Delta_{\alpha\gamma}^{\dagger}(\mathbf{r}_2, \mathbf{r}_1) G_{\gamma\beta}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}', \omega_n) \tag{71}$$

と与えられる。これが解であることは代入して直接確認することができる。

以上の結果から、ギャップ方程式は

$$\begin{aligned}
\Delta_{\alpha\beta}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') &= -V(\mathbf{r} - \mathbf{r}') T \sum_{\omega_n} \sum_{\gamma} \int d^3\mathbf{r}_2 d^3\mathbf{r}_1 G_{\beta\beta}^0(\mathbf{r}', \mathbf{r}_2, \omega_n) \Delta_{\gamma\beta}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) \\
&\times G_{\alpha\gamma}(\mathbf{r}, \mathbf{r}_1, -\omega_n)
\end{aligned} \tag{72}$$

となる。磁場がない場合には2.2節で導出したギャップ方程式と一致することが Fourier 変換することによって確かめられる(補遺 C)。

2.5. 線形ギャップ方程式

常伝導状態と超伝導状態の間の二次転移線のみを扱う場合には、Scharnberg と Klemm[17] によって定式化された線形ギャップ方程式を用いるのが便利である [22][23]。この場合、磁場は一様であるとして取り扱える。

線形ギャップ方程式は式 (72) から

$$\begin{aligned} \Delta(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = & -V(\mathbf{r} - \mathbf{r}')T \sum_{\omega_n} \int d^3\mathbf{r}_2 d^3\mathbf{r}_1 \bar{G}_{\uparrow\uparrow}^0(\mathbf{r}', \mathbf{r}_2, \omega_n) \bar{G}_{\uparrow\uparrow}^0(\mathbf{r}, \mathbf{r}_1, -\omega_n) \\ & \times \exp\left[-\frac{e}{c}i \int_{\mathbf{r}'}^{\mathbf{r}_2} d\ell \cdot \mathbf{A}(\ell)\right] \exp\left[-\frac{e}{c}i \int_{\mathbf{r}}^{\mathbf{r}_1} d\ell \cdot \mathbf{A}(\ell)\right] \Delta(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) \end{aligned} \quad (73)$$

と与えられる。以下の議論では上向きスピンと下向きスピンの電子対凝縮を起こす場合を考え、秩序パラメータのスピン変数を省略する。equal-spin 状態の議論では、線形ギャップ方程式に現れる二つの Green 関数のスピン変数が同じになる。

相互作用 $V(\mathbf{r} - \mathbf{r}')$ の働く距離がコヒーレンス長に比べて十分に短い場合を考える。Green 関数の range はコヒーレンス長である。また、磁場がない場合の自由粒子系の Green 関数は二つの場所の差のみの関数となる。

磁場の準古典的な取り扱いとして、有用な方法が Helfand と Werthamer [14][15][16] によって定式化されている。この方法で、線形ギャップ方程式を書き換えると上部臨界磁場の決定が容易になる。

磁場中の自由粒子系の Green 関数を

$$G_{\alpha\beta}^0(\mathbf{r}, \mathbf{r}', \omega_n) = \bar{G}_{\alpha\beta}^0(\mathbf{r}, \mathbf{r}', \omega_n) \exp\left[-i\frac{e}{c} \int_{\mathbf{r}}^{\mathbf{r}'} d\ell \cdot \mathbf{A}(\ell)\right] \quad (74)$$

と近似する。但し、積分は \mathbf{r} から \mathbf{r}' までの直線上で実行する。 $\bar{G}_{\alpha\beta}^0$ は運動方程式

$$\left[i\omega_n - \frac{1}{2m} \left(\frac{1}{i}\nabla_r\right)^2 + \mu + \frac{1}{2}(\sigma_3)_{\alpha\alpha}\omega_L\right] \bar{G}_{\alpha\beta}^0(\mathbf{r}, \mathbf{r}', \omega_n) = \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}')\delta_{\alpha\beta} \quad (75)$$

を満たす。この近似は Landau 準位の量子化 eH/mc を無視する範囲で正しい (補遺 D)。

また、式 (74) の Green 関数のうち、軌道磁性の項

$$\exp\left[-i\frac{e}{c} \int_{\mathbf{r}}^{\mathbf{r}'} d\ell \cdot \mathbf{A}(\ell)\right]$$

は、恒等式

$$\begin{aligned} & \exp\left[-\frac{2ie}{c} \int_{\mathbf{r}}^{\mathbf{r}'} d\ell \cdot \mathbf{A}(\ell)\right] \psi(\mathbf{r}') \\ & = \exp\left[i(\mathbf{r}' - \mathbf{r}) \cdot \left(\frac{\nabla_{\mathbf{R}}}{i} - \frac{2e}{c}\mathbf{A}(\mathbf{R})\right)\right] \psi(\mathbf{R}) \Big|_{\mathbf{R}=\mathbf{r}} \end{aligned} \quad (76)$$

を満たす [14][15][16](補遺 E)。ここで、 $\psi(\mathbf{r})$ は任意の関数である。

この恒等式を使って、線形ギャップ方程式を

$$\begin{aligned} \Delta(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = & -V(\mathbf{r} - \mathbf{r}')T \sum_{\omega_n} \int d^3\mathbf{r}_2 d^3\mathbf{r}_1 \bar{G}_{\uparrow\uparrow}^0(\mathbf{r}' - \mathbf{r}_2, \omega_n) \bar{G}_{\uparrow\uparrow}^0(\mathbf{r} - \mathbf{r}_1, -\omega_n) \\ & \times \exp[i\boldsymbol{\rho} \cdot \vec{\Pi}(\mathbf{r})] \Delta(\mathbf{r}, \mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1) \end{aligned} \quad (77)$$

と書き換えることができる。ここで、

$$\begin{aligned}
 \rho &= \mathbf{r}_1 - \mathbf{r} \\
 \Pi_x &= \frac{1}{i} \frac{\partial}{\partial x} \\
 \Pi_y &= \frac{1}{i} \frac{\partial}{\partial y} - \frac{2e}{c} Hx \\
 \Pi_z &= \frac{1}{i} \frac{\partial}{\partial z} \\
 \mathbf{A} &= (0, Hx, 0)
 \end{aligned} \tag{78}$$

である。なお、磁場を z 軸に平行にかけている場合を考えている。

nonuniform な状態の秩序パラメータを

$$\Delta(\mathbf{r}, \hat{\mathbf{k}}) = \Delta(\mathbf{r}, \hat{\mathbf{k}}, q) e^{i\mathbf{q}\cdot\mathbf{r}} \tag{79}$$

と表す。Gruenberg と Gunther[18] は s 波超伝導の FF 状態について議論する際に $\mathbf{q} = (0, 0, q)$ と選んだ。 \mathbf{q} を z 軸に平行に選び、秩序パラメータを線形ギャップ方程式に代入し、さらに軌道磁性の効果を含む指数関数型の演算子を展開して各項において $\pi T/E_F (\ll 1)$ のオーダーを無視する近似を行う。線形ギャップ方程式を相対座標 $\mathbf{r} - \mathbf{r}'$ に関して Fourier 変換すると、

$$\begin{aligned}
 \Delta(\mathbf{r}, \hat{\mathbf{k}}, q) &= - \sum_{\mathbf{k}'} V(\hat{\mathbf{k}} \cdot \hat{\mathbf{k}}') T \sum_{\omega_n = -\omega_c}^{\omega_c} \bar{G}_{11}^0(\mathbf{k}', \omega_n) \\
 &\times \sum_N \left[\frac{(\sum_{i=x,y} (\mathbf{v}_F(\mathbf{k}'))_i \Pi_i)^N}{(-\frac{\mathbf{k}'^2}{2m} + \mu + v_F \hat{k}'_z q - \frac{1}{2}\omega_L - i\omega_n)^{N+1}} \right] \Delta(\mathbf{r}, \hat{\mathbf{k}}', q)
 \end{aligned}$$

となる。但し、 $qk'_z/m \rightarrow qv_F \hat{k}'_z$ と近似した ($q \ll mv_F$)。 v_F は Fermi 速度を表す。以下の議論では $qv_F = Q$ とおく。

$\sum_{\mathbf{k}'}$ をエネルギー積分と角度積分に書き換えて、

$$\sum_{\mathbf{k}'} \rightarrow N(0) \int \frac{d\Omega_{\mathbf{k}'}}{4\pi} \int d\xi_{\mathbf{k}'}$$

と書く。 $N(0)$ は Fermi 面上での状態密度である。角度積分は全 Fermi 面上で行う。

エネルギー積分を実行すると、線形ギャップ方程式は

$$\begin{aligned}
 \Delta(\mathbf{r}, \hat{\mathbf{k}}, q) &= -N(0) \int \frac{d\Omega_{\mathbf{k}'}}{4\pi} V(\hat{\mathbf{k}} \cdot \hat{\mathbf{k}}') \pi T \sum_{\omega_n = -\omega_c}^{\omega_c} \int_0^\infty dt \exp[-(\frac{\omega_L - Q\hat{k}'_z}{2i} \text{sgn}(\omega_n) + |\omega_n|)t] \\
 &\times \exp[\frac{\text{sgn}(\omega_n)}{2i} t (v_F \sum_{i=x,y} \hat{k}'_i \Pi_i)] \Delta(\mathbf{r}, \hat{\mathbf{k}}', q)
 \end{aligned} \tag{80}$$

と書ける (補遺 G)。 t は式変形の際にあらわれた積分変数で物理的な意味はない。

2.6. Ginzburg-Landau 方程式

uniform な状態の線形ギャップ方程式は $Q = 0$ とおいて得られ、

$$\begin{aligned} \Delta(\mathbf{r}) = & N(0) \int \frac{d\Omega \mathbf{k}'}{4\pi} g_0 \pi T \sum_{\omega_n = -\omega_c}^{\omega_c} \int_0^\infty dt \exp[-(\frac{\omega_L}{2i} \text{sgn}(\omega_n) + |\omega_n|)t] \\ & \times \exp[\frac{\text{sgn}(\omega_n)}{2i} t (v_F \sum_{i=x,y} \hat{k}'_i \Pi_i)] \Delta(\mathbf{r}) \end{aligned} \quad (81)$$

となる。ここでは、s 波成分単独の場合について取り扱うので、相互作用は

$$V(\hat{\mathbf{k}} \cdot \hat{\mathbf{k}}') = -g_0$$

とおいた。また、秩序パラメータに $\hat{\mathbf{k}}$ 依存性がないのでこれを省略する。

転移温度近傍では上部臨界磁場が小さい。軌道磁性は臨界磁場について一次の効果を与えるが、Pauli 常磁性は二次の効果となる。従って、転移温度近傍の上部臨界磁場は軌道磁性の効果によって定まる。軌道磁性の効果を含む指数関数型の演算子を Π について二次まで展開すると

$$\begin{aligned} \Delta(\mathbf{r}) = & N(0) \int \frac{d\Omega \mathbf{k}'}{4\pi} g_0 \pi T \sum_{\omega_n = -\omega_c}^{\omega_c} \int_0^\infty dt \exp[-|\omega_n|t] \\ & \times (1 - \frac{1}{8} v_F^2 t^2 (k_x'^2 \Pi_x^2 + k_y'^2 \Pi_y^2)) \Delta(\mathbf{r}) \\ = & g_0 N(0) 2\pi T \sum_{\omega_n > 0}^{\omega_c} \int_0^\infty dt \exp[-|\omega_n|t] (1 - \frac{1}{24} v_F^2 t^2 (\Pi_x^2 + \Pi_y^2)) \Delta(\mathbf{r}) \end{aligned} \quad (82)$$

となる。ここで、カットオフ ω_c は

$$\begin{aligned} \frac{1}{g_0 N(0)} = & \ln \frac{2\gamma \epsilon_c}{\pi T_{c0}} \\ = & 2\pi T_{c0} \sum_{\omega_n > 0}^{\omega_c} \int_0^\infty dt e^{-|\omega_n|t} \\ = & 2\pi T_{c0} \sum_{\omega_n > 0}^{\omega_c} \frac{1}{\omega_n} \end{aligned} \quad (83)$$

と定義する。また、後の章において

$$\frac{1}{g_0 N(0)} = \pi T_{c0} \int_{t_c}^\infty dt \sum_{\omega_n = -\infty}^\infty e^{-|\omega_n|t} \quad (= \pi T_{c0} \int_{t_c}^\infty dt \frac{1}{\sinh(\pi T_{c0} t)}) \quad (84)$$

を定義して、カットオフを扱う。 $T_{c0} t_c \ll 1$ の場合

$$\frac{1}{g_0 N(0)} \simeq \ln \frac{2}{\pi T_{c0} t_c} \quad (t_c = \frac{1}{\gamma \epsilon_c})$$

となり、 T_{c0} は s 波超伝導の転移温度を表す。

さて、この関係を用いて式 (82) を

$$(\frac{1}{g_0 N(0)} - 2\pi T \sum_{\omega_n > 0}^{\omega_c} \frac{1}{\omega_n}) \Delta(\mathbf{r}) = -\pi T \int_0^\infty dt \frac{1}{\sinh(\pi T t)} (\frac{1}{24} v_F^2 t^2 (\Pi_x^2 + \Pi_y^2)) \Delta(\mathbf{r})$$

と書き換える。\$t\$ 積分を実行すると、Ginzburg-Landau(GL) 方程式

$$-\frac{1}{4m}(\Pi_x^2 + \Pi_y^2)\Delta(\mathbf{r}) = a(T)\Delta(\mathbf{r}) \quad (85)$$

$$a(T) = \frac{1}{4m} \frac{48}{7\zeta(3)} \frac{(\pi T_{c0})^2}{v_F^2} \frac{T_{c0} - T}{T_{c0}} \quad (86)$$

が得られる。

つぎに、上部臨界磁場の表式を求めるために、\$\Delta(\mathbf{r}) = f(x)e^{-iky}\$ として式(85)に代入すると

$$-\frac{1}{4m} \frac{d^2 f(x)}{dx^2} + m\omega_H^2 (x - x_0)^2 f(x) = a(T)f(x) \quad (87)$$

$$x_0 = \frac{ck}{2eH}, \quad \omega_H = \frac{|e|H}{mc}$$

となる。

この方程式は調和振動子の Schrödinger 方程式と同じ形をしているので、固有値と温度 \$T\$ の関係は

$$\omega_H \left(\frac{1}{2} + n \right) = a(T) \quad (n = 0, 1, 2 \dots) \quad (88)$$

と与えられ、ある温度 \$T\$ で最大の磁場を与えるのは \$n = 0\$ の場合であることがわかる。

従って、上部臨界磁場は

$$H_{c2} = \frac{2mca(T)}{|e|} \quad (89)$$

と表され、対応する \$\Delta(\mathbf{r})\$ は調和振動子の基底状態の固有関数

$$\psi_0(x, y) = \exp\left[\frac{2|e|H}{c}(-ix_0y - \frac{1}{2}(x - x_0)^2)\right] \quad (90)$$

となる [24][25]。この解は Abrikosov によって示された。

さて、GL 方程式

$$-\frac{1}{4m}(\Pi_x^2 + \Pi_y^2)\Delta(\mathbf{r}) = a(T)\Delta(\mathbf{r})$$

は調和振動子の Schrödinger 方程式と同じであるから、調和振動子の昇(降)演算子を用いて演算子 \$\Pi\$ を書き換えることができる。

$$\Pi_x \psi_0(x, y) = i\Pi_y \psi_0(x, y) \quad (91)$$

の関係から

$$\Pi_- = \frac{\Pi_x - i\Pi_y}{2} \quad (92)$$

$$\Pi_+ = \frac{\Pi_x + i\Pi_y}{2} \quad (93)$$

を定義すると、

$$\Pi_- \psi_0(x, y) = 0 \quad (94)$$

$$[\Pi_-, \Pi_+] = \frac{e}{c}H \quad (95)$$

の関係が与えられる。従って、昇(降)演算子は

$$a^\dagger = \left(\frac{\Pi_x + i\Pi_y}{2} \right) / \sqrt{\frac{e}{c}H} \quad (96)$$

$$a = \left(\frac{\Pi_x - i\Pi_y}{2} \right) / \sqrt{\frac{e}{c}H} \quad (97)$$

と定義される。

昇(降)演算子 $a^\dagger(a)$ を用いて線形ギャップ方程式(式(80))を書き換えると、軌道磁性の効果を含む演算子は

$$i \sum_{i=x,y} \hat{k}'_i \Pi_i = (i\hat{k}'_x - \hat{k}'_y) \Pi_+ + (i\hat{k}'_x + \hat{k}'_y) \Pi_-$$

となるので、線形ギャップ方程式は

$$\begin{aligned} & \Delta(\mathbf{r}, \hat{\mathbf{k}}, q) \\ &= -N(0)\pi T \sum_{\omega_n = -\omega_c}^{\omega_c} \int \frac{d\Omega_{\mathbf{k}'}}{4\pi} \int_0^\infty dt V(\hat{\mathbf{k}} \cdot \hat{\mathbf{k}}') \exp\left[-\left(\frac{\omega_L - Q\hat{k}'_z}{2i} \text{sgn}(\omega_n) + |\omega_n|\right)t\right] \\ & \quad \times e^{-\frac{1}{2}\alpha^2 |Y_{1,1}(\hat{\mathbf{k}}')|^2} e^{-i\alpha Y_{1,-1}(\hat{\mathbf{k}}')a^\dagger} e^{i\alpha Y_{1,1}(\hat{\mathbf{k}}')a} \Delta(\mathbf{r}, \hat{\mathbf{k}}', q) \end{aligned} \quad (98)$$

と得られる。但し、

$$\alpha = \text{sgn}(\omega_n) t v_F \sqrt{\frac{2\pi}{3}} \sqrt{\frac{|e|H}{c}} \quad (99)$$

と定義した。

ここで、指数形演算子の定理

$$e^{A+B} = e^A e^B e^{-C/2}$$

の関係を用いて、線形ギャップ方程式の軌道磁性の効果を含む指数関数型の演算子を書き換えた。 A, B, C には $C = [A, B]$ の関係があり、 C は A, B と可換な交換子である。

2.7. 線形ギャップ方程式の解

後の章で混成状態の上部臨界磁場を扱う際に、最も大きな臨界磁場を与える秩序パラメータの形を探さなければならない。この節では、相互作用の部分波成分がただ一つの場合の解の探し方について述べる。

2.7.1. s波超伝導の場合

s波成分単独の場合の相互作用は

$$V(\hat{\mathbf{k}} \cdot \hat{\mathbf{k}}') = -g_0$$

と書け、線形ギャップ方程式は

$$\begin{aligned} \Delta(\mathbf{r}, \hat{\mathbf{k}}) = & N(0)\pi T \sum_{\omega_n=-\omega_c}^{\omega_c} \int \frac{d\Omega_{\mathbf{k}'}}{4\pi} \int_0^\infty dt g_0 \exp[-(\frac{\omega_L}{2i} \text{sgn}(\omega_n) + |\omega_n|)t] \\ & \times e^{-\frac{1}{2}\alpha^2 |Y_{1,1}(\hat{\mathbf{k}}')|^2} e^{-i\alpha Y_{1,-1}(\hat{\mathbf{k}}')a^\dagger} e^{i\alpha Y_{1,1}(\hat{\mathbf{k}}')a} \Delta(\mathbf{r}, \hat{\mathbf{k}}') \end{aligned} \quad (100)$$

となる。線形ギャップ方程式中の軌道磁性の効果を含む指数関数型の演算子

$$e^{-i\alpha Y_{1,-1}(\hat{\mathbf{k}}')a^\dagger}, e^{i\alpha Y_{1,1}(\hat{\mathbf{k}}')a}$$

を a, a^\dagger について展開して、

$$\begin{aligned} \Delta(\mathbf{r}) = & N(0)\pi T \sum_{\omega_n=-\omega_c}^{\omega_c} \int \frac{d\Omega_{\mathbf{k}'}}{4\pi} \int_0^\infty dt g_0 \exp[-(\frac{\omega_L}{2i} \text{sgn}(\omega_n) + |\omega_n|)t] e^{-\frac{1}{2}\alpha^2 |Y_{1,1}(\hat{\mathbf{k}}')|^2} \\ & \times \sum_{N=0}^{\infty} (-1)^N \left(\frac{1}{N!}\right)^2 \alpha^{2N} |Y_{1,1}(\hat{\mathbf{k}}')|^{2N} (a^\dagger)^N a^N \Delta(\mathbf{r}) \end{aligned} \quad (101)$$

を得る。従って、解は

$$\Delta(\mathbf{r}) = S_N \frac{(a^\dagger)^N}{\sqrt{N!}} \psi_0(x, y) \quad (N = 0, 1, 2, \dots) \quad (102)$$

ととればよいことがわかる。 S_N は振幅を表す。この解のうち、低温側から T_{c0} 近傍にのぼしたとき GL 方程式の解につながる解は、 $N = 0$ の場合である。従って、全温度領域で上部臨界磁場を決める線形ギャップ方程式は

$$\begin{aligned} \Delta_s(\mathbf{r}) = & N(0)\pi T \sum_{\omega_n=-\omega_c}^{\omega_c} \int \frac{d\Omega_{\mathbf{k}'}}{4\pi} \int_0^\infty dt g_0 \exp[-(\frac{\omega_L}{2i} \text{sgn}(\omega_n) + |\omega_n|)t] \\ & \times e^{-\frac{1}{2}\alpha^2 |Y_{1,1}(\hat{\mathbf{k}}')|^2} \Delta_s(\mathbf{r}) \end{aligned} \quad (103)$$

と書ける。これが、Helfand と Werthamer [14][15][16] によって導かれた結果である。但し、

$$\Delta_s(\mathbf{r}) = S_0 \psi_0(x, y)$$

と定義した。

また、Pauli 常磁性のみを考慮する場合、線形ギャップ方程式は

$$\begin{aligned} \Delta_s = & N(0)\pi T \sum_{\omega_n=-\omega_c}^{\omega_c} \int_0^\infty dt g_0 \exp[-(\frac{\omega_L}{2i} \text{sgn}(\omega_n) + |\omega_n|)t] \Delta_s(\mathbf{r}) \\ = & g_0 N(0)\pi T \sum_{\omega_n>0}^{\omega_c} \frac{\omega_n}{\omega_n^2 + \omega_L^2} \Delta_s \end{aligned} \quad (104)$$

と書ける。ここで、秩序パラメータは場所によらない。

2.7.2. p 波超伝導の場合

p 波成分単独の場合、相互作用は

$$\begin{aligned} V(\hat{\mathbf{k}} \cdot \hat{\mathbf{k}}') &= -3g_1(\hat{\mathbf{k}} \cdot \hat{\mathbf{k}}') \\ &= -4\pi g_1 \sum_m Y_{1,m}(\hat{\mathbf{k}}) Y_{1,m}^*(\hat{\mathbf{k}}') \end{aligned}$$

と書け、線形ギャップ方程式は

$$\begin{aligned} \Delta_p(\mathbf{r}, \hat{\mathbf{k}}) &= N(0)\pi T \sum_{\omega_n=-\omega_c}^{\omega_c} \int \frac{d\Omega \mathbf{k}'}{4\pi} \int_0^\infty dt 4\pi g_1 \sum_m Y_{1,m}(\hat{\mathbf{k}}) Y_{1,m}^*(\hat{\mathbf{k}}') \\ &\quad \times \exp\left[-\left(\frac{\omega_L}{2i} \operatorname{sgn}(\omega_n) + |\omega_n|\right)t\right] e^{-\frac{1}{2}\alpha^2 |Y_{1,1}(\hat{\mathbf{k}}')|^2} e^{-i\alpha Y_{1,-1}(\hat{\mathbf{k}}')a^\dagger} e^{i\alpha Y_{1,1}(\hat{\mathbf{k}}')a} \Delta_p(\mathbf{r}, \hat{\mathbf{k}}') \quad (105) \end{aligned}$$

となる。s 波超伝導の場合と同様に、線形ギャップ方程式中の軌道磁性の効果を含む指数関数型の演算子

$$e^{-i\alpha Y_{1,-1}(\hat{\mathbf{k}}')a^\dagger}, e^{i\alpha Y_{1,1}(\hat{\mathbf{k}}')a}$$

を展開して、

$$\begin{aligned} \Delta_p(\mathbf{r}, \hat{\mathbf{k}}) &= N(0)\pi T \sum_{\omega_n=-\omega_c}^{\omega_c} \int \frac{d\Omega \mathbf{k}'}{4\pi} \int_0^\infty dt 4\pi g_1 \sum_m Y_{1,m}(\hat{\mathbf{k}}) Y_{1,m}^*(\hat{\mathbf{k}}') \\ &\quad \times \exp\left[-\left(\frac{\omega_L}{2i} \operatorname{sgn}(\omega_n) + |\omega_n|\right)t\right] e^{-\frac{1}{2}\alpha^2 |Y_{1,1}(\hat{\mathbf{k}}')|^2} \\ &\quad \times \sum_{N,N'} \frac{1}{N!N'!} (-i\alpha Y_{1,-1}(\hat{\mathbf{k}}'))^N (i\alpha Y_{1,1}(\hat{\mathbf{k}}'))^{N'} (a^\dagger)^N a^{N'} \Delta_p(\mathbf{r}, \hat{\mathbf{k}}') \quad (106) \end{aligned}$$

となる。この線形ギャップ方程式の固有関数は一般に

$$\Delta_{pm}(\mathbf{r}, \hat{\mathbf{k}}) = \sqrt{4\pi} Y_{1,m}(\hat{\mathbf{k}}) C_{mN} \frac{(a^\dagger)^N}{\sqrt{N!}} \psi_0(x, y) \quad (m = -1, 0) \quad (107)$$

$$\Delta_{p1}(\mathbf{r}, \hat{\mathbf{k}}) = \sqrt{4\pi} Y_{1,1}(\hat{\mathbf{k}}) C_{1N} \frac{(a^\dagger)^N}{\sqrt{N!}} \psi_0(x, y) + \sqrt{4\pi} Y_{1,-1}(\hat{\mathbf{k}}) C_{-1N+2} \frac{(a^\dagger)^{N+2}}{\sqrt{(N+2)!}} \psi_0(x, y) \quad (108)$$

と二つに分類できる [17]。\$C_{mN}\$ は振幅である。上部臨界磁場を決める固有関数は s 波超伝導と同様に \$N = 0\$ の場合である。

polar 状態の場合、上部臨界磁場を与える線形ギャップ方程式は

$$\begin{aligned} \Delta_{p0}(\mathbf{r}) &= N(0)\pi T \sum_{\omega_n=-\omega_c}^{\omega_c} \int d\Omega \mathbf{k}' \int_0^\infty dt g_1 |Y_{1,0}(\hat{\mathbf{k}}')|^2 \exp\left[-\left(\frac{\omega_L}{2i} \operatorname{sgn}(\omega_n) + |\omega_n|\right)t\right] \\ &\quad \times e^{-\frac{1}{2}\alpha^2 |Y_{1,1}(\hat{\mathbf{k}}')|^2} \Delta_{p0}(\mathbf{r}) \quad (109) \end{aligned}$$

と書け、秩序パラメータは

$$\Delta_{p0}(\mathbf{r}) = C_{00} \psi_0(x, y)$$

である。

ここで求めた p 波の線形ギャップ方程式は上向きスピンの持つ電子と下向きスピンの持つ電子が対凝縮した状態である。equal-spin 状態の場合、磁場をかけると Zeeman エネルギーを得るようにスピンの向きは逆転するが、Cooper 対は破壊されない。このため、Pauli 常磁性は上部臨界磁場に影響しない。equal-spin 状態の場合、線形ギャップ方程式は上述の線形ギャップ方程式から ω_L を消去すればよい。

なお、上部臨界磁場を与える混成状態の秩序パラメータを決める際にも、線形ギャップ方程式中の軌道磁性の効果を含む指数関数型の演算子を展開して、角度積分が残る項を探すことになる。

第3章 uniform な状態における秩序パラメータの s 波成分と p 波成分の混成系

相互作用の部分波成分が混在した系として、最も簡単なモデルは s 波成分と p 波成分の混在系である。まず、この系の磁場中の uniform な状態 ($Q = 0$) について議論する。

3.1. 上部臨界磁場への Pauli 常磁性の効果

スピン一重項超伝導の場合、対をつくる二つの電子のスピンが反平行に合成されているので、対凝縮のエネルギーとスピン-磁場の相互作用によるエネルギーとの損得によって上部臨界磁場が決まる [25][26][27]。磁場 H の下での常伝導状態ではスピン分極によって単位体積あたり $N(0)(g\mu_B H)^2/4$ のエネルギーを得する。一方、超伝導状態では絶対零度における対凝縮によるエネルギーの得は s 波超伝導の場合、 $N(0)\Delta(0)^2/2$ である。磁場が小さいときには凝縮対を壊すことによる損失の方が大きい。しかし、強磁場 H を加えると常伝導状態では $N(0)(g\mu_B H)^2/4$ のエネルギーが下がり、これと対凝縮エネルギーが等しくなる時超伝導状態から常伝導状態への転移が起こる。絶対零度での臨界磁場は $H_p = \sqrt{2}\Delta(0)/g\mu_B$ である。この場合、秩序パラメータは有限の値から不連続にゼロに変わるので転移は一次転移となる。

Pauli 常磁性の効果によって上部臨界磁場が低くなることを実際にみるために、相図を描く。ここでは常伝導状態と超伝導状態の間の二次転移線のみを扱い、Pauli 常磁性によって超伝導状態が抑えられることを見る。図 3.1 は、 $dH/dT|_{T=T_c} = -3.75 \text{ Tesla/K}$ (UPd₂Al₃ の c 軸に平行に磁場をかけた場合の値) とした場合の s 波超伝導の温度-磁場相図である。この物質の転移温度は、 $T_c = 1.8 \text{ K}$ である。破線は軌道磁性の効果のみを考慮した場合の二次転移線を示す。点線は Pauli 常磁性の効果のみを考慮した場合の二次転移線を示す。実線は両方とも考慮した場合の二次転移線である。相図からわかるように転移温度近傍では軌道磁性による効果が支配的であるが、低温領域では Pauli 常磁性による効果が支配的になっている。従って、低温領域で、Pauli 常磁性の効果が原因で常伝導状態に転移することがわかる。

これに対して、p 波超伝導状態はスピン三重項状態であり、equal-spin 状態と呼ばれる上向きスピン同志、あるいは下向きスピン同志の対凝縮が可能である。磁場中の equal-spin 状態では下向きスピン同志の対が上向きスピン同志の対に転化することによって、対破壊することなしにスピン分極を起こすことが可能である。従って、スピン一重項超伝導の場合とは異なり、equal-spin 状態の上部臨界磁場は軌道磁性の効果のみによって決まる。それに対応して、Pauli 常磁性によって Cooper 対は破壊されない [28](補遺 G)。低温領域において、equal-spin 状態の上部臨界磁場はスピンが反平行に合成されている超伝導状態の上部臨界磁場に比べて一般に高い。

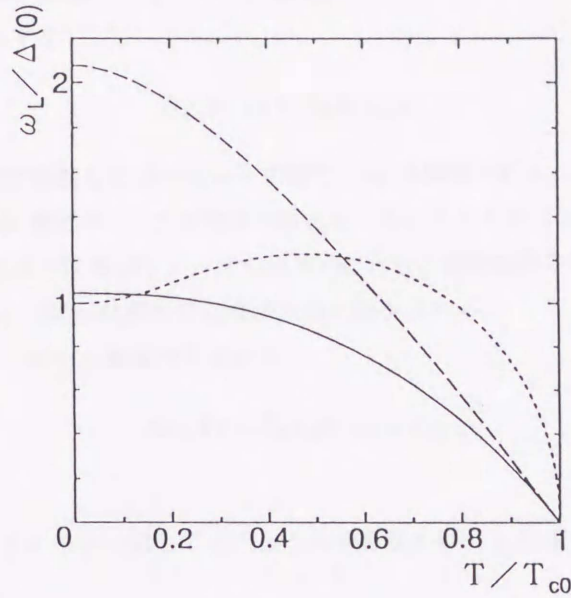


図 3.1 uniform な状態の相図 (Pauli 常磁性の効果)

縦軸は 磁場がないときの s 波超伝導の絶対零度のエネルギーギャップ $\Delta(0)$ で Larmor 振動数 ω_L をスケールした。横軸は温度 T を s 波超伝導の転移温度 T_{c0} でスケールした。破線は軌道磁性の効果のみを考慮した場合の二次転移線を示す。点線は Zeeman エネルギーのみを考慮した場合の二次転移線を示す。実線は二つとも考慮した場合の二次転移線を示す。s 波超伝導場合で、 $dH/dT|_{T=T_c} = -3.75 \text{ Tesla/K}$ 。

3.2. s-p 混成系の秩序パラメータ

uniform な状態の線形ギャップ方程式は 2 章 2.6 節の式 (98) から導かれ、

$$\Delta(\mathbf{r}, \hat{\mathbf{k}}) = -N(0)\pi T \sum_{\omega_n = -\omega_c}^{\omega_c} \int d\frac{\Omega \mathbf{k}'}{4\pi} \int_0^\infty dt V(\hat{\mathbf{k}} \cdot \hat{\mathbf{k}}') \exp[-(\frac{\omega_L}{2i} \text{sgn}(\omega_n) + |\omega_n|)t] \\ \times e^{-\frac{1}{2}\alpha^2 |Y_{1,1}(\hat{\mathbf{k}}')|^2} e^{-i\alpha Y_{1,-1}(\hat{\mathbf{k}}')a^\dagger} e^{i\alpha Y_{1,1}(\hat{\mathbf{k}}')a} \Delta(\mathbf{r}, \hat{\mathbf{k}}') \quad (110)$$

である。s 波成分と p 波成分を含む相互作用 $V(\mathbf{k} \cdot \mathbf{k}')$ を

$$V(\hat{\mathbf{k}} \cdot \hat{\mathbf{k}}') = -g_0 - 3g_1 \hat{\mathbf{k}} \cdot \hat{\mathbf{k}}' \quad (111)$$

ととる。第一項、第二項はそれぞれ s 波相互作用と p 波相互作用を表す。第二項を球面調和関数で展開すると、

$$3g_1 \hat{\mathbf{k}} \cdot \hat{\mathbf{k}}' = 4\pi g_1 \sum_m Y_{1,m}(\hat{\mathbf{k}}) Y_{1,m}^*(\hat{\mathbf{k}}') \quad (112)$$

と書ける。ここで、s 波の引力相互作用が p 波成分よりも大きい場合 ($g_0 > g_1$) を考えると、この場合は 2 章 2.3 節で議論したように、磁場がなければ s-p 混成状態は生じない。

s 波成分の秩序パラメータを

$$\Delta_{S_0}(x, y) = S_0 \psi_0(x, y)$$

とおく。 $\psi_0(x, y)$ は 2.6 節で議論した Abrikosov の解で、 S_0 は振幅である。この解が全温度領域で s 波超伝導の上部臨界磁場を与える 線形ギャップ方程式の解となっていることが Helfand と Werthamer [14][15][16] によって示された。s 波成分の秩序パラメータを出発点にとり、軌道磁性の効果を含む指数関数型の演算子を作用させて、調和振動子の励起状態を含む混成状態の解を求める。

混成状態の秩序パラメータを p 波成分を含めて

$$\Delta(\mathbf{r}, \hat{\mathbf{k}}) = S_0 \psi_0(x, y) + \Delta_p$$

と書く。

この s 波成分の秩序パラメータに対してどのような対称性を持つ p 波成分の秩序パラメータが混成してくるかを調べるために

$$\begin{aligned} \Delta_p \longleftarrow & N(0)\pi T \sum_{\omega_n = -\omega_c}^{\omega_c} \int \frac{d\Omega_{\mathbf{k}'}}{4\pi} \int_0^\infty dt g_1 4\pi \sum_m Y_{1,m}(\hat{\mathbf{k}}) Y_{1,m}^*(\hat{\mathbf{k}}') \\ & \times \exp[-(\frac{\omega_L}{2i} \text{sgn}(\omega_n) + |\omega_n|)t] \exp[-\frac{1}{2}\alpha^2 |Y(\hat{\mathbf{k}}')|^2] \\ & \times \exp[-i\alpha Y_{1,-1}(\hat{\mathbf{k}}')a^\dagger] \exp[i\alpha Y_{1,1}(\hat{\mathbf{k}}')a] S_0 \psi(x, y) \end{aligned}$$

の場合について考察する。この式は 線形ギャップ方程式 (式 (110)) の一部分をとりだした式で、秩序パラメータの s 波成分に対して p 波成分の秩序パラメータがどう生じてくるかを示している。上式中の軌道磁性の効果を含む指数関数型の演算子

$$\begin{aligned} & \exp[-i\alpha Y_{1,-1}(\hat{\mathbf{k}}')a^\dagger] \\ & \exp[i\alpha Y_{1,1}(\hat{\mathbf{k}}')a] \end{aligned}$$

をそれぞれ a, a^\dagger について展開して、

$$(a)^n \psi_0(x, y) = 0 \quad (n = 1, 2, 3, \dots) \quad (113)$$

の関係をを用い、残った展開項について、角度積分に注目する。

$$\int \frac{d\Omega_{\mathbf{k}'}}{4\pi} Y_{1,m}^*(\hat{\mathbf{k}}') (Y_{1,-1}(\hat{\mathbf{k}}'))^n \quad (114)$$

の角度積分を実行して、展開項のうちゼロにならない項のみを考慮すると

$$\begin{aligned} \Delta_p \longleftarrow & g_1 N(0)\pi T Y_{1,-1}(\hat{\mathbf{k}}) \sum_{\omega_n = -\omega_c}^{\omega_c} \int d\Omega_{\mathbf{k}'} \int_0^\infty dt Y_{1,-1}^*(\hat{\mathbf{k}}') \exp[-(\frac{\omega_L}{2i} \text{sgn}(\omega_n) + |\omega_n|)t] \\ & \times e^{-\frac{1}{2}\alpha^2 |Y_{1,1}(\hat{\mathbf{k}}')|^2} (-i\alpha Y_{1,-1}(\hat{\mathbf{k}}')) S_0 a^\dagger \psi_0(x, y) \end{aligned} \quad (115)$$

となる。すなわち、p 波成分の秩序パラメータとしては ABM 状態が混成していることがわかる。

従って、この混成系の秩序パラメータは

$$\Delta(x, y, \mathbf{k}) = S_0 \psi(x, y) + \sqrt{4\pi} P_{-1} Y_{1,-1}(\mathbf{k}) \psi_1(x, y) \quad (116)$$

ととればよいことがわかる。 P_{-1} は ABM 状態の振幅である。但し、

$$\psi_1(x, y) = a^\dagger \psi_0(x, y) \quad (117)$$

である。

つぎに、秩序パラメータ (式 (116)) を線形ギャップ方程式 (式 (110))

$$\begin{aligned} \Delta(x, y, \hat{\mathbf{k}}) &= -N(0)\pi T \sum_{\omega_n = -\omega_c}^{\omega_c} \int d\Omega_{\mathbf{k}'} \int_0^\infty dt V(\hat{\mathbf{k}} \cdot \hat{\mathbf{k}}') \exp[-(\frac{\omega_L}{2i} \text{sgn}(\omega_n) + |\omega_n|)t] \\ &\quad \times e^{-\frac{1}{2}\alpha^2 |Y_{1,1}(\hat{\mathbf{k}}')|^2} e^{-i\alpha Y_{1,-1}(\hat{\mathbf{k}}') a^\dagger} e^{i\alpha Y_{1,1}(\hat{\mathbf{k}}') a} \Delta(x, y, \hat{\mathbf{k}}') \end{aligned}$$

に代入して、振幅 S_0 、 P_{-1} に関する行列方程式

$$\begin{pmatrix} D_{11} & D_{12} \\ D_{21} & D_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} S_0 \\ P_{-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (118)$$

を導く。行列 \mathbf{D} の各成分は、

$$D_{11} = \frac{1}{g_0 N(0)} - \pi T \int \frac{d\Omega_{\mathbf{k}'}}{4\pi} \int_{t_c}^\infty dt C(\hat{\mathbf{k}}_z, t) \quad (119)$$

$$\begin{aligned} D_{22} &= G + \frac{1}{g_0 N(0)} \\ &\quad - \pi T \int \frac{d\Omega_{\mathbf{k}'}}{4\pi} \int_{t_c}^\infty dt |Y_{1,-1}(\hat{\mathbf{k}}')|^2 (1 - |\alpha|^2 |Y_{1,1}(\hat{\mathbf{k}}')|^2) C(\hat{\mathbf{k}}_z, t) \end{aligned} \quad (120)$$

$$D_{12} = -\pi T \int \frac{d\Omega_{\mathbf{k}'}}{4\pi} \int_0^\infty dt |Y_{1,-1}(\hat{\mathbf{k}}')|^2 \frac{|\alpha|}{\sqrt{4\pi}} S(\hat{\mathbf{k}}_z, t) \quad (121)$$

$$D_{21} = D_{12} \quad (122)$$

で与えられる。ここで、

$$G = \frac{1}{g_1 N(0)} - \frac{1}{g_0 N(0)} \quad (123)$$

$$C(\hat{\mathbf{k}}_z, t) = \cos(\frac{\omega_L}{2}t) B(t) \exp[-\frac{1}{2} |\alpha|^2 |Y_{11}(\hat{\mathbf{k}})|^2] \quad (124)$$

$$S(\hat{\mathbf{k}}_z, t) = \sin(\frac{\omega_L}{2}t) B(t) \exp[-\frac{1}{2} |\alpha|^2 |Y_{11}(\hat{\mathbf{k}})|^2] \quad (125)$$

$$B(t) = 1/\sinh(\pi T t) \quad (126)$$

$$|\alpha| = t v_F \sqrt{\frac{2\pi}{3}} \sqrt{\frac{|e| H}{c}} \quad (127)$$

と定義した。

s-p 混成効果は行列成分 $D_{12}(D_{21})$ によって記述される。この行列成分は軌道磁性の効果 $|\alpha|$ と Zeeman エネルギー $\omega_L/2$ の両方を考慮する場合のみに有限の値を持つ。上部臨界磁場は

$$\det \mathbf{D} = 0$$

を解くことによって得られる。

転移温度近傍の上部臨界磁場は s 波超伝導体の軌道磁性による臨界磁場 H_{c2} で与えられる。前節で示したように、転移温度近傍では Pauli 常磁性の効果は小さい。det \mathbf{D} において軌道磁性は磁場について一次の効果を与えるのに対して、Pauli 常磁性の方は二次の効果しか与えない。転移温度近傍では、s-p 混成による効果も小さく無視することができる。 T_{c0} 近傍において、行列 \mathbf{D} の非対角成分 D_{12} を磁場について最低次まで展開すると

$$D_{12} = \frac{7}{2\sqrt{4\pi}} \frac{v_F \zeta(3)}{(\pi T_{c0})^2} \sqrt{\frac{|e| H \omega_L}{c}} \frac{1}{2}$$

となる。 $\zeta(3)$ は Riemann の zeta 関数である。従って、s-p 混成項からの det \mathbf{D} への寄与は磁場について三次の効果を与える。

従って、転移温度近傍の上部臨界磁場は 2 章 2.6 節の GL 理論で求めた s 波超伝導体の

$$H_{c2} = \frac{24\pi^2}{7\xi(3)} \frac{1}{v_F^2} \frac{c}{|e|} T_{c0}(T_{c0} - T)$$

で与えられる。この節で以下に示す相図では転移温度近傍の上部臨界磁場が UPd₂Al₃の実験値

$$\left. \frac{dH_{c2}}{dT} \right|_{T=T_c} = -3.75(\text{Tesla}/\text{K})$$

に合うように必要なパラメータを定めている。

図 3.2 は混成状態の温度-磁場相図である。縦軸は Larmor 振動数 ω_L を s 波相互作用のみの場合における磁場がないときの絶対零度のギャップ $\Delta(0)$ でスケールした。一方、横軸は温度 T を転移温度 T_{c0} でスケールした。実線は混成状態の上部臨界磁場の二次転移線を示す。但し、 $G = \infty$ は s 波成分のみの場合の結果である。

図 3.2 からわかるように、p 波成分が引力相互作用の場合には混成状態の上部臨界磁場は s 波相互作用のみの場合に比べ、高いことがわかる。p 波成分が斥力相互作用の場合には s 波成分のみの場合に比べて上部臨界磁場が低くなる ($G = -5$)。これは斥力相互作用によってできる Cooper 対がエネルギー的に損であるために超伝導状態が抑制されることを意味する。

三重項超伝導には上向きスピン(下向きスピン)を持つ電子と 上向きスピン(下向きスピン)を持つ電子が対凝縮した、いわゆる equal-spin 状態が存在する。equal-spin 状態に磁場をかけると Zeeman エネルギーを得るように Cooper 対のスピンの向きが逆転するが、これによる凝縮エネルギーの損失はない。従って、三重項超伝導では上部臨界磁場は軌道磁性によってのみ決まり、高い上部臨界磁場を持つことができる。p 波超伝導の場合、Scharnberg と Klemm[17] によって equal-spin 状態のうち polar 状態が最も高い上部臨界磁場を持つことが指摘された。点線は各 G の値に対する p 波超伝導の equal-spin 状態の polar 状態の上部臨界磁場を示す。

G が小さい値の場合 (s 波相互作用と p 波相互作用の大きさが十分に近い場合) 混成状態の二次転移線より p 波成分のみによる超伝導 (equal-spin 状態) の二次転移線が高くなる。このような温度領域では equal-spin 状態が実現するため、混成状態は実現しない。

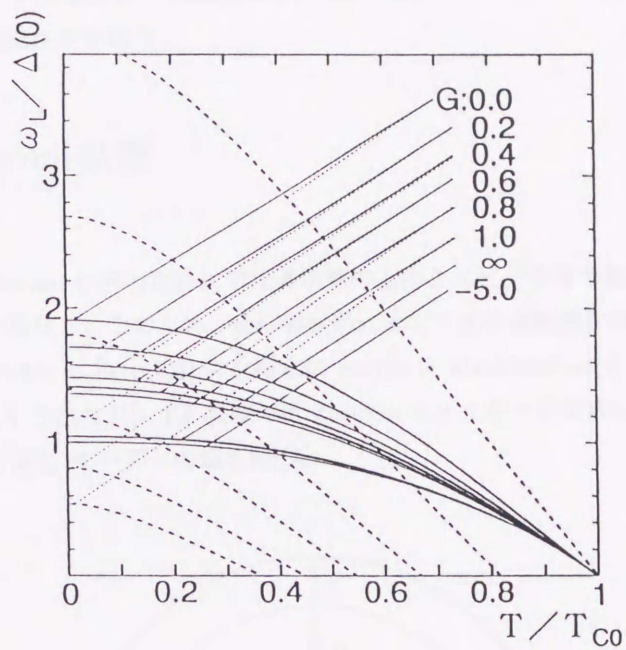


図 3.2 uniform な s-p 混成状態の相図

縦軸は $\omega_L / \Delta(0)$ で、横軸は T / T_{c0} である。実線は混成状態の上部臨界磁場二次転移線を示す。但し、 $G = \infty$ は s 波成分のみの場合の結果である。点線は各 G の値に対する p 波超伝導の equal-spin 状態の polar 状態の二次転移線を示す。

第4章 nonuniform な状態における秩序パラメータの s 波成分と p 波成分の混成系

この章では Fulde-Ferrell 状態における混成効果について議論する。モデルとしては前章で扱った s 波相互作用と p 波相互作用の混在系を扱う。

4.1. Fulde-Ferrell 状態

強磁場下において、Zeeman 分裂のために常伝導状態の上向きスピンを持つ電子と下向きスピンを持つ電子とでは Fermi 運動量が異なる。このため、超伝導状態において重心運動量が有限の値 q を持つ電子対凝縮が起こり得る (図 4.1)。Fulde と Ferrell[3] また独立に Larkin と Ovchinnikov[4] によってこのような状態が存在することが理論的に示された [5]。FF 状態では Zeeman エネルギーが重要な役割をしており、 $Q = qv_F$ は Zeeman エネルギーと同じ オーダーの値を持つ。

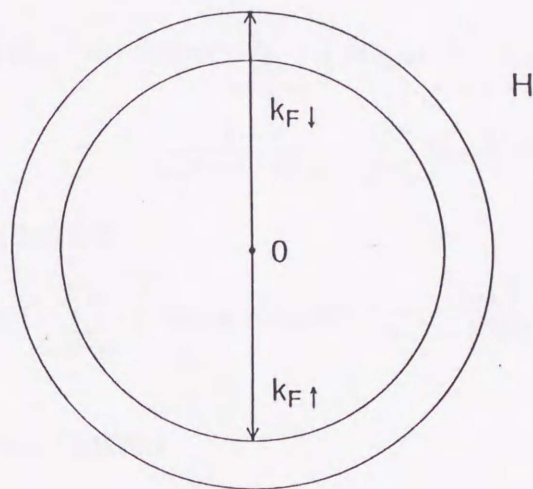


図 4.1 磁場下における up-spin の電子と down-spin の電子の Fermi 面

Pauli 常磁性のみを考慮する場合、秩序パラメータの形を $\Delta(\hat{\mathbf{k}}, q)e^{iqz}$ とおくと、線形ギャップ方程式 (98) は

$$\begin{aligned} \Delta(\hat{\mathbf{k}}, q) = & -N(0)\pi T \sum_{\omega_n = -\omega_c}^{\omega_c} \int \frac{d\Omega_{\mathbf{k}'}}{4\pi} \int_0^\infty dt V(\hat{\mathbf{k}} \cdot \hat{\mathbf{k}}') \\ & \times \exp\left[-\left(\frac{\omega_L - Q\hat{k}'_z}{2i} \operatorname{sgn}(\omega_n) + |\omega_n|\right)t\right] \Delta(\hat{\mathbf{k}}', q) \end{aligned} \quad (128)$$

と書ける。t 積分を実行して

$$\Delta(\hat{\mathbf{k}}, q) = -N(0)\pi T \sum_{\omega_n = -\omega_c}^{\omega_c} \int \frac{d\Omega_{\mathbf{k}'}}{4\pi} V(\hat{\mathbf{k}} \cdot \hat{\mathbf{k}}') \frac{|\omega_n|}{\omega_n^2 + K^2(Q, \omega_L)} \Delta(\hat{\mathbf{k}}', q) \quad (129)$$

を得る。但し、

$$K(Q, \omega_L) = \frac{Q\hat{\mathbf{k}}'_z - \omega_L}{2} \quad (130)$$

$$Q = v_F q$$

と定義した。FF 状態は上向きスピンを持つ電子と下向きスピンを持つ電子が重心運動量が有限の値を持つ電子対凝縮を起こした状態であるので、三重項超伝導の equal-spin 状態では実現しない。一重項超伝導に議論を限った場合、相互作用は

$$V(\hat{\mathbf{k}} \cdot \hat{\mathbf{k}}') = -4\pi g_\ell \sum_{m=-\ell}^{\ell} Y_{\ell, m}(\hat{\mathbf{k}}) Y_{\ell, m}^*(\hat{\mathbf{k}}') \quad (\ell = 2n, n = 0, 1, \dots) \quad (131)$$

であり、秩序パラメータは一般に

$$\Delta(\hat{\mathbf{k}}, q) = \sum_{m=-\ell}^{\ell} Y_{\ell, m}(\hat{\mathbf{k}}) \Delta_m \quad (132)$$

と書ける。線形ギャップ方程式(式(129))に代入すると

$$\sum_{m=-\ell}^{\ell} Y_{\ell, m}(\hat{\mathbf{k}}) \Delta_m = N(0)\pi T \sum_{\omega_n = -\omega_c}^{\omega_c} \int d\Omega_{\mathbf{k}'} g_\ell \sum_{m=-\ell}^{\ell} Y_{\ell, m}(\hat{\mathbf{k}}) Y_{\ell, m}^*(\hat{\mathbf{k}}')$$

$$\times \frac{|\omega_n|}{\omega_n^2 + K^2(Q, \omega_L)} \sum_{m=-\ell}^{\ell} Y_{\ell, m}(\hat{\mathbf{k}}') \Delta_m \quad (133)$$

となる。結局、それぞれの m に対して

$$\Delta_m = N(0)\pi T \sum_{\omega_n = -\omega_c}^{\omega_c} \int d\Omega_{\mathbf{k}'} g_\ell |Y_{\ell, m}(\hat{\mathbf{k}}')|^2 \frac{|\omega_n|}{\omega_n^2 + K^2(Q, \omega_L)} \Delta_m \quad (134)$$

を得る。

s 波超伝導の場合、線形ギャップ方程式は

$$\frac{1}{g_0 N(0)} \Delta_0 = 2\pi T \sum_{\omega_n > 0}^{\omega_c} \int d\Omega_{\mathbf{k}} \frac{\omega_n}{\omega_n^2 + K^2(Q, \omega_L)} \Delta_0 \quad (135)$$

となる。臨界磁場を求めるには、線形ギャップ方程式を

$$D(T, H, Q) \Delta_0 = 0$$

と書き換え、秩序パラメータの係数 D がゼロになる場所を探せばよい。まず、uniform な状態 ($Q = 0$) の場合、温度をとめて磁場の値を十分に大きなところから下げてきて D がはじめてゼロになる値を探す。このときの磁場の値がその温度での臨界磁場である。FF 状態の場合、温度と磁場をとめて、 Q について極小値を探す。つぎに、磁場を下げてきて D の最小値が初めてゼロになる場所を探す。ゼロになったところ

がその温度での臨界磁場と Q の値となる。図 4.2 は Pauli 常磁性のみを考慮している場合の温度—磁場相図である (s 波超伝導)。破線は $Q = 0$ における二次転移線を示す。実線は FF 状態の二次転移線を示す。実線が破線に接する点は FF 状態の上限温度 $T^* = 0.56T_{c0}$ であり、FF 状態は三重臨界点 T^*/T_{c0} 以下の低温領域にしか存在しないことがわかる [5]。

一般の部分波 l の場合について D を Q について二次まで展開すると、

$$D = \frac{1}{g_l N(0)} - 2\pi T \sum_{\omega_n > 0}^{\omega_c} \frac{\omega_n}{\omega_n^2 + (\frac{\omega_L}{2})^2} - \left(\frac{Q}{2}\right)^2 \int d\Omega_{\mathbf{k}} |Y_{l,m}(\hat{\mathbf{k}})|^2 k_z^2 \times 2\pi T \sum_{\omega_n > 0}^{\omega_c} \left[\frac{\omega_n}{(\omega_n^2 + (\frac{\omega_L}{2})^2)^2} \left(-1 + \frac{\omega_L^2}{\omega_n^2 + (\frac{\omega_L}{2})^2}\right) \right] \quad (136)$$

が得られる。三重臨界点 T^*/T_c は、破線上に沿って温度を上げていくとき、 D の Q について二次の項の係数が負から正に変わる温度である。 T^*/T_c 近傍において Q の値は十分に小さく D を Q について展開して FF 状態を調べることができる。FF 状態は Q の向きについて縮退があるので、 Q の偶数項のみで展開できる。 Q^2 の係数が負で、 Q^4 の係数が正の値のときに FF 状態が実現する。上式 (136) からわかるように二次の係数の符号に関する限り、三重臨界点 T^*/T_c は秩序パラメータの対称性によらない。Pauli 常磁性のみを考慮している場合、FF 状態の上限温度は $T^* = 0.56T_c$ である。

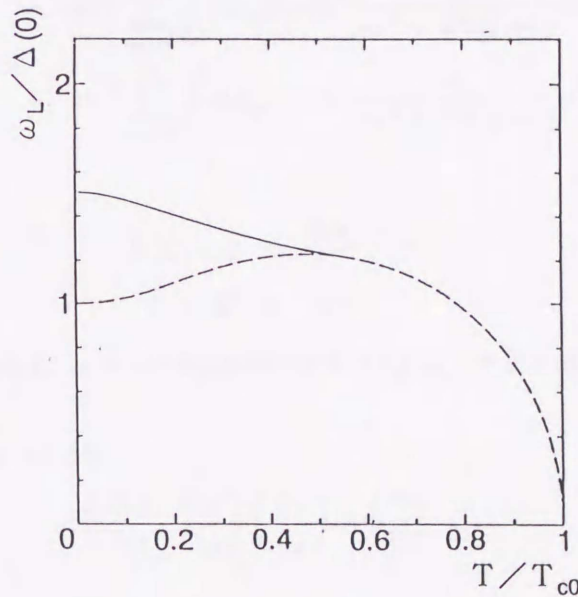


図 4.2 s 波超伝導の FF 相図 (Pauli 常磁性のみ考慮)

縦軸は $\omega_L/\Delta(0)$ で、横軸は T/T_{c0} である。破線は $Q = 0$ における二次転移線を示す。実線は FF 状態の二次転移線を示す。

4.2. Pauli 常磁性のみを考慮した混成系の Fulde-Ferrell 状態

この節では Pauli 常磁性のみを考慮して、FF 状態の秩序パラメータの混成の特徴について考察する。相互作用のうち s 波成分と p 波成分が混在する系と、相互作用のうち s 波成分と d 波成分が混在する系について扱い、二つの場合を比較する [29]。

まず、s-p 混成の場合を考え、相互作用を

$$V(\hat{\mathbf{k}} \cdot \hat{\mathbf{k}}') = -g_0 - 3g_1 \hat{\mathbf{k}} \cdot \hat{\mathbf{k}}'$$

とおく。線形ギャップ方程式 (式 (129)) から秩序パラメータは、s 波成分と p 波成分の混成の場合

$$\Delta(\hat{\mathbf{k}})e^{iqz} = \Delta_s e^{iqz} + \sqrt{4\pi} Y_{1,0}(\hat{\mathbf{k}}) \Delta_p e^{iqz} \quad (137)$$

ととればよい。右辺の第一項は s 波成分であり、第二項は p 波成分で polar 状態の形を持つ。

線形ギャップ方程式は

$$\begin{aligned} \frac{1}{g_0 N(0)} \Delta_s &= 2\pi T \sum_{\omega_n > 0}^{\omega_c} \int \frac{d\Omega_{\mathbf{k}'}}{4\pi} \frac{\omega_n}{\omega_n^2 + K^2(Q, \omega_L)} \Delta_s \\ &+ 2\pi T \sum_{\omega_n > 0}^{\omega_c} \int \frac{d\Omega_{\mathbf{k}'}}{4\pi} \frac{\omega_n}{\omega_n^2 + K^2(Q, \omega_L)} \sqrt{4\pi} Y_{1,0}(\hat{\mathbf{k}}') \Delta_p \end{aligned} \quad (138)$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{g_1 N(0)} \sqrt{4\pi} \Delta_p &= 2\pi T \sum_{\omega_n > 0}^{\omega_c} \int d\Omega_{\mathbf{k}'} Y_{1,0}(\hat{\mathbf{k}}') \frac{\omega_n}{\omega_n^2 + K^2(Q, \omega_L)} \Delta_s \\ &+ 2\pi T \sum_{\omega_n > 0}^{\omega_c} \int d\Omega_{\mathbf{k}'} Y_{1,0}(\hat{\mathbf{k}}') \frac{\omega_n}{\omega_n^2 + K^2(Q, \omega_L)} \sqrt{4\pi} Y_{1,0}(\hat{\mathbf{k}}') \Delta_p \end{aligned} \quad (139)$$

となる。但し、

$$\begin{aligned} K(Q, \omega_L) &= \frac{Q \hat{\mathbf{k}}'_z - \omega_L}{2} \\ Q &= v_F q \end{aligned}$$

である。s-p 混成が生じる理由は、 ω_L と q が共に有限のとき $K(Q, \omega_L)$ が $\hat{\mathbf{k}}'_z$ に関して定まった偶奇性を持たないからである。

前章と同様に行列方程式をつくると、

$$\begin{pmatrix} D_{11} & D_{12} \\ D_{21} & D_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Delta_s \\ \Delta_p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (140)$$

となり、行列 \mathbf{D} の各成分は

$$D_{11} = \frac{1}{g_0 N(0)} - 2\pi T \sum_{\omega_n > 0}^{\omega_c} \int \frac{d\Omega_{\mathbf{k}}}{4\pi} \frac{\omega_n}{\omega_n^2 + K^2(Q, \omega_L)} \quad (141)$$

$$D_{22} = \frac{1}{g_0 N(0)} + G - 2\pi T \sum_{\omega_n > 0}^{\omega_c} \int d\Omega_{\mathbf{k}} |Y_{1,0}(\mathbf{k})|^2 \frac{\omega_n}{\omega_n^2 + K^2(Q, \omega_L)} \quad (142)$$

$$D_{12} = -2\pi T \sum_{\omega_n > 0}^{\omega_c} \int \frac{d\Omega_{\mathbf{k}}}{4\pi} \sqrt{4\pi} Y_{1,0}(\mathbf{k}) \frac{\omega_n}{\omega_n^2 + K^2(Q, \omega_L)} \quad (143)$$

$$D_{21} = D_{12} \quad (144)$$

で与えられる。ここで、 $G = 1/g_1 N(0) - 1/g_0 N(0)$ である。s 波成分と d 波成分の混成系の場合、上述の行列 D に相当する行列は 行列の $Y_{1,0}$ を $Y_{2,0}$ に置き換えて得られる。

臨界磁場は

$$\det D = 0$$

から決まる。臨界磁場を求めるには、前節と同様の方法を用いる。すなわち、与えられた温度と磁場に対して $\det D$ を最小にする Q を探す。つぎに、温度を止めて磁場を十分に大きいところから下げて来て、初めて $\det D$ がゼロになる磁場を探す。

図 4.3 は秩序パラメータの s 波成分と p 波成分の混成系の FF 状態の温度-磁場相図である。縦軸は Larmor 振動数 ω_L を s 波相互作用のみの場合における磁場がないときの絶対零度のギャップ $\Delta(0)$ でスケールしている。横軸は温度 T を転移温度 T_{c0} でスケールしている。 G は前章で導入した s 波相互作用と p 波相互作用の大きさの差を表す変数である。実線は混成系の FF 状態の二次転移線を示す。破線は s 波成分のみの場合における uniform な状態 ($Q = 0$) の二次転移線を示す。 G を小さくすると (p 波相互作用の大きさを s 波相互作用の大きさに近づける) 三重臨界点 T^*/T_{c0} が高温側に移ることがわかる。また、磁場に対して FF 状態の存在する領域も広がる。 $G = \infty$ は s 波成分のみの場合の FF 状態の二次転移線を示す。

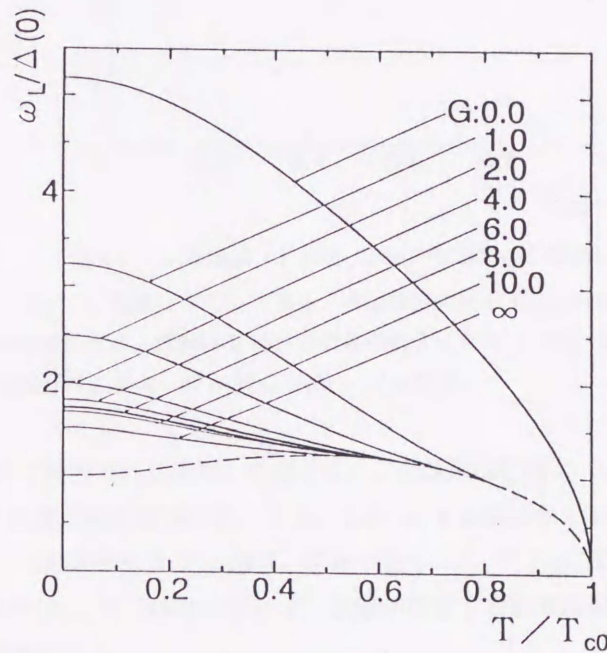


図 4.3 s-p 混成 FF 相図 (Pauli 常磁性のみ考慮)

縦軸は $\omega_L / \Delta(0)$ で、横軸は T / T_{c0} である。実線は混成系の nonuniform な状態 (FF 状態) の二次転移線を示す。破線は s 波成分のみの場合における uniform な状態 ($Q = 0$) の二次転移線を示す。また、 $G = 1/g_1 N(0) - 1/g_0 N(0) (= \ln T_{c0} / T_{c1})$ 。

図 4.4 は秩序パラメータの s 波成分と d 波成分 ($Y_{2,0}$) の混成系の FF 状態の温度-磁場相図である。 G はこの場合 s 波相互作用と d 波相互作用の大きさの差を表わす変数で

$$G = \frac{1}{g_2 N(0)} - \frac{1}{g_0 N(0)} \quad (145)$$

である。

実線は混成系の FF 状態の二次転移線を示す。破線は s 波成分のみの場合における uniform な状態 ($Q = 0$) の二次転移線を示す。G を小さくすると (d 波相互作用の大きさを s 波相互作用の大きさに近づける) 磁場に対して FF 状態の存在する領域は広がる。しかし、三重臨界点 T^*/T_{c0} の値は s 波成分単独の場合と変わらない。 $G = \infty$ は s 波成分のみの場合の FF 状態の二次転移線である。

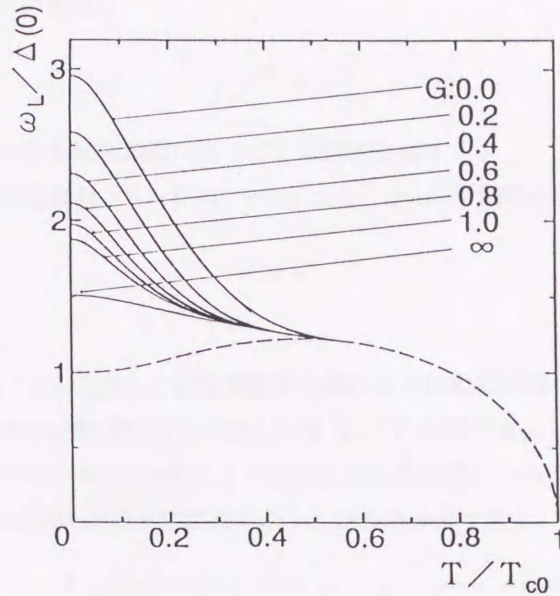


図 4.4 s-d 混成 FF 相図 (Pauli 常磁性のみ考慮)

縦軸は $\omega_L / \Delta(0)$ で、横軸は T / T_{c0} である。実線は混成系の nonuniform な状態 (FF 状態) の二次転移線を示す。破線は s 波成分のみの場合における uniform な状態 ($Q = 0$) の二次転移線を示す。また、 $G = 1/g_2 N(0) - 1/g_0 N(0)$ 。

s-p 混成系、s-d 混成系の両方で混成効果が存在する。この効果は行列 D の非対角成分 $D_{12}(D_{21})$ が有限の値のときに現れ、FF 状態の臨界磁場が高くなる。しかし、s-p 混成系と s-d 混成系では三重臨界点に違いがある。前者の場合、三重臨界点は G に依る。 G が小さく、 T_{c1} が T_{c0} に近いとき FF 状態は転移温度近傍にまで存在する。これに対して、後者の場合 FF 状態が存在する温度は混成効果によらず、三重臨界点 $T^*/T_{c0} = 0.56$ 以下の温度である。

この事情を詳しく検討するために、行列 D の混成成分 $D_{12} = D_{21}$ を Q について二次まで展開する。s 波成分と p 波成分の混成系の場合

$$D_{12} = D_{21} = 2\pi T \sum_{\omega_n > 0}^{\omega_c} \frac{1}{6} \left[\frac{\omega_n \omega_L}{(\omega_n^2 + (\frac{\omega_L}{2})^2)^2} \right] Q \quad (146)$$

であり、 Q に関して一次の項を含む。それに対して、s 波成分と d 波成分の混成系の場合

$$D_{12} = D_{21} = 2\pi T \sum_{\omega_n > 0}^{\omega_c} \frac{\sqrt{5}}{30} \frac{\omega_n}{(\omega_n^2 + (\frac{\omega_L}{2})^2)^2} \left[1 - \frac{\omega_L^2}{\omega_n^2 + (\frac{\omega_L}{2})^2} \right] Q^2 \quad (147)$$

となり、 Q については二次の項から始まる。一般に、偶奇性が異なる秩序パラメータの混成系の場合 (s-p 混成)、一次の項を含むが、偶奇性が同じ秩序パラメータの混成系の場合 (s-d 混成) は、一次の項を含まない。 $\det \mathbf{D}$ において前者の場合、非対角成分は Q^2 の係数に負の寄与を与え、後者の場合非対角成分は Q^2 の係数にまったく寄与しない。三重臨界点 T^*/T_{c0} は uniform な状態の二次転移線上で $\det \mathbf{D}$ の Q^2 の係数が符号を変える点である。従って、前者と後者では明らかに三重臨界点に違いがあらわれる。

図 4.5 は秩序パラメータの s 波成分と p 波成分の混成状態における三重臨界点と G の関係を示す。従来の理論では、 $T^*/T_{c0} = 0.56$ であるが、これと比較して s-p 混成系の FF 状態の上限温度は十分に高くなる。 T_{c0} 近傍での三重臨界点と G の関係は

$$\frac{T^* - T_{c0}}{T_{c0}} = -\frac{G}{4} \quad (148)$$

で与えられる [29]。 $G = 0$ のとき転移温度にまで FF 状態が存在する。

UPd₂Al₃の強磁場相の上限温度は $T^* = 0.8T_c$ であるから、Pauli 常磁性のみ考慮した場合 G は

$$G \simeq 1$$

ととればよいことになる。

3 章 3.1 節で述べたように T_{c0} 近傍で上部臨界磁場を決めるのは軌道磁性であり、Pauli 常磁性は重要でない。従って、この温度領域では軌道磁性も考慮した場合、FF 状態が実現しない可能性がある。また、軌道磁性の効果によって FF 状態が抑えられることが従来の理論的結果からわかっている [6][7][18]。UPd₂Al₃ の強磁場相を説明するためには軌道磁性も考慮することが当然必要である。

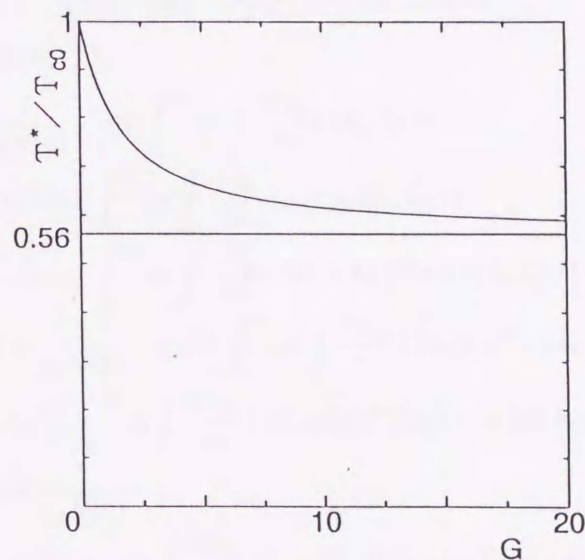


図 4.5 s-p 混成 FF 状態における三重臨界点 T^*/T_{c0} と G の関係

4.3. s-p 混成系の Fulde-Ferrell 状態への軌道磁性の効果

この節では軌道磁性の効果も考慮した場合について議論する。相互作用を

$$V(\hat{\mathbf{k}} \cdot \hat{\mathbf{k}}') = -g_0 - 3g_1 \hat{\mathbf{k}} \cdot \hat{\mathbf{k}}' \quad (149)$$

ととり、 $g_0 > g_1$ の場合について議論する。秩序パラメータは

$$\begin{aligned} \Delta(x, y, \mathbf{k}, q)e^{iqz} &= S_0 \psi_0(x, y)e^{iqz} \\ &+ \sqrt{4\pi} P_0 Y_{1,0}(\mathbf{k}) \psi_0(x, y)e^{iqz} + \sqrt{4\pi} P_{-1} Y_{1,-1}(\mathbf{k}) \psi_1(x, y)e^{iqz} \end{aligned} \quad (150)$$

と書くことができる。但し、

$$\psi_1(x, y) = a^\dagger \psi_0(x, y) \quad (151)$$

と定義する。この秩序パラメータの形は前章と同じ方法で導出した。第一項は s 波成分の秩序パラメータである。第二項、第三項は p 波成分の秩序パラメータである。第二項は polar 状態の形を持ち、第三項は ABM 状態の形を持つ。 S_0, P_0, P_{-1} は振幅である。この秩序パラメータを線形ギャップ方程式 (式 (98)) に代入して、行列方程式

$$\begin{pmatrix} D_{11} & D_{12} & D_{13} \\ D_{21} & D_{22} & D_{23} \\ D_{31} & D_{32} & D_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} S_0 \\ P_0 \\ P_{-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (152)$$

をつくる。行列 \mathbf{D} の各成分は

$$D_{11} = \frac{1}{g_0 N(0)} - \pi T \int_{t_c}^{\infty} dt \int \frac{d\Omega \mathbf{k}}{4\pi} C(\hat{k}_z, Q, t) \quad (153)$$

$$D_{12} = -\sqrt{4\pi} \pi T \int_0^{\infty} dt \int \frac{d\Omega \mathbf{k}}{4\pi} Y_{10}(\hat{\mathbf{k}}) C(\hat{k}_z, Q, t) \quad (154)$$

$$D_{13} = -\sqrt{4\pi} \pi T \int_0^{\infty} dt \int \frac{d\Omega \mathbf{k}}{4\pi} |Y_{1-1}(\hat{\mathbf{k}})|^2 |\alpha| S(\hat{k}_z, Q, t) \quad (155)$$

$$D_{22} = G + \frac{1}{g_0 N(0)} - 4\pi^2 T \int_{t_c}^{\infty} dt \int \frac{d\Omega \mathbf{k}}{4\pi} |Y_{10}(\hat{\mathbf{k}})|^2 C(\hat{k}_z, Q, t) \quad (156)$$

$$D_{23} = -4\pi^2 T \int_0^{\infty} dt \int \frac{d\Omega \mathbf{k}}{4\pi} |Y_{1-1}(\hat{\mathbf{k}})|^2 Y_{10}(\hat{\mathbf{k}}) |\alpha| S(\hat{k}_z, Q, t) \quad (157)$$

$$\begin{aligned} D_{33} &= G + \frac{1}{g_0 N(0)} \\ &- 4\pi^2 T \int_{t_c}^{\infty} dt \int \frac{d\Omega \mathbf{k}}{4\pi} |Y_{1-1}(\hat{\mathbf{k}})|^2 (1 - |\alpha|^2 |Y_{11}(\hat{\mathbf{k}})|^2) C(\hat{k}_z, Q, t) \end{aligned} \quad (158)$$

$$D_{21} = D_{12}, \quad D_{31} = D_{13}, \quad D_{32} = D_{23} \quad (159)$$

で与えられる。但し、

$$C(\hat{k}_z, Q, t) = \cos\left(\frac{\omega_L - \hat{k}_z Q}{2} t\right) B(t) \exp\left[-\frac{1}{2} |\alpha|^2 |Y_{11}(\hat{\mathbf{k}})|^2 t\right]$$

$$S(\hat{k}_z, Q, t) = \sin\left(\frac{\omega_L - \hat{k}_z Q}{2} t\right) B(t) \exp\left[-\frac{1}{2} |\alpha|^2 |Y_{11}(\hat{\mathbf{k}})|^2 t\right]$$

$$\begin{aligned}
B(t) &= 1/\sinh(\pi Tt) \\
|\alpha| &= tv_F \sqrt{\frac{2\pi}{3}} \sqrt{\frac{|e|H}{c}} \\
Q &= v_F q
\end{aligned}$$

と定義した。また、 G は s 波相互作用と p 波相互作用の大きさの差を表す変数

$$G = \frac{1}{g_1 N(0)} - \frac{1}{g_0 N(0)} \quad (160)$$

である。

秩序パラメータの成分間の混成の機構について考察する。s 波成分の秩序パラメータと polar 的な秩序パラメータの混成は行列成分 $D_{12}(D_{21})$ によって示されている。この行列成分は前節で示したように重心運動量 q が有限の値を持ち、かつ Zeeman エネルギー $\omega_L/2$ も有限の値を持つ場合のみにゼロでない値を持つ。s 波成分の秩序パラメータと ABM 的な秩序パラメータの混成は行列成分 $D_{13}(D_{31})$ によって記述される。この行列成分は前章で示したように軌道磁性の効果 $|\alpha|$ と Zeeman エネルギー $\omega_L/2$ の両方を考慮する場合のみに有限の値を持つ。p 波成分の polar 的な秩序パラメータと ABM 的な秩序パラメータの混成は行列成分 $D_{23}(D_{32})$ によって示されている。この行列成分は重心運動量 q が有限の値を持ち、かつ軌道磁性の効果 $|\alpha|$ を考慮する場合のみに有限の値を持つ。上部臨界磁場は前節と同様に $\det \mathbf{D} = 0$ から決まる。

FF 状態は Pauli 常磁性によって実現している。従って、FF 状態が存在するためには、軌道磁性による上部臨界磁場 H_{c2} が十分に大きい必要がある。Gruenberg と Gunther[18] は、軌道磁性の効果を検討したときの s 波超伝導体での $T = 0$ における FF 状態の出現条件を求めた。彼らは絶対零度でのスピン臨界磁場 H_p と軌道磁性による臨界磁場 H_{c2} を用いてパラメータ $\alpha_0 = \sqrt{2}H_{c2}/H_p$ を定義し、 $\alpha_0 \geq 1.8$ のときに $T = 0$ で FF 状態が存在することを示した。本論文では軌道磁性の効果の目安を与える量として、転移温度近傍での H_{c2} の温度勾配

$$\frac{dH_{c2}}{dT} \Big|_{T=T_{c0}} = -\frac{24\pi^2}{7\zeta(3)} \frac{1}{v_F^2} \frac{c}{|e|} T_{c0}$$

を無次元化して物質定数 M を

$$g\mu_B \frac{dH_{c0}}{dT} \Big|_{T=T_{c0}} = -\frac{24\pi^2}{7\zeta(3)} \frac{1}{M^2} \quad (M = v_F \sqrt{\frac{|e|}{c}} \sqrt{\frac{1}{g\mu_B T_{c0}}}) \quad (161)$$

で導入する。 M が大きいほど H_{c2} は小さく、上部臨界磁場は軌道磁性の効果によってより強く支配される。UPd₂Al₃ が s 波超伝導体としたとき、Gruenberg-Gunther の臨界値 $\alpha_0 = 1.8$ は $M = 2.52$ に対応している。

前節で示したように、FF 状態は s-p 混成効果によって増強されるので、混成のある場合は H_{c2} が小さいすなわち M が大きいときも FF 状態が出現することが期待される。そこで、 $T = 0$ において FF 状態が出現するための G と M の関係を調べた結果を図 4.6 に示す。

具体的にはつぎのような計算を行った。すなわち、FF 状態の上限温度 T^* が $T^* = 0$ であるときの M と G の関係を求める。 T^* は s-p 混成系の常伝導状態と uniform($Q = 0$) な超伝導状態の間の二次転移線上で、 $\det D$ を Q で展開したとき、 Q^2 の項の係数がゼロになる温度である。図 4.6 の実線が $T^* = 0$ となる M と G の関係を表し、斜線部の領域では FF 状態が $T = 0$ で出現する。予想どおり、s-p 混成があつて $G > 0$ であれば、 M が Gruenberg-Gunther の臨界値 $M = 2.52$ より大きくても FF 状態が出現する。 H_{c2} が大きく $M < 2.52$ である場合は、 $G < 0$ すなわち p 波相互作用が斥力の場合も FF 状態の出現が可能である。

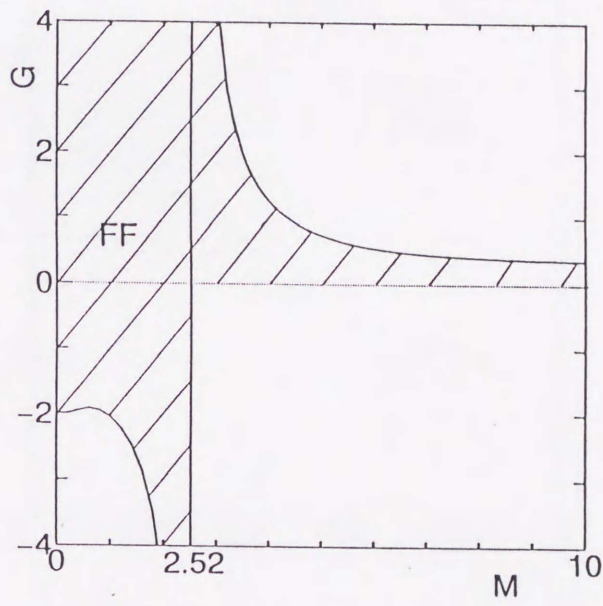


図 4.6 M - G 平面で $T = 0K$ において FF 状態が出現する領域
 斜線部で FF 状態が出現する。 M および G の定義は本文を参照

つぎに、 M の値が $M = 2.0$ と $M = 4.0$ の場合についていくつかの G の値における混成系の FF 状態の温度-磁場相図を示す。 $M = 2.0$ の場合の相図は図 4.7a, 図 4.7b, 図 4.7c, 図 4.7d であり、 $M = 4.0$ の場合の相図は図 4.8a, 図 4.8b, 図 4.8c, 図 4.8d である。縦軸は Larmor 振動数 ω_L を s 波相互作用のみの場合における磁場がないときの絶対零度の $\Delta(0)$ でスケールしている。横軸は温度 T を転移温度 T_{c0} でスケールしている。s-p 混成系の FF 状態 (nonuniform な状態) の二次転移線を実線で示す。破線は前章で示した混成系の uniform な状態 ($Q = 0$) の二次転移線を示す。 G を大きくすると FF 状態は低温領域にしか存在しなくなるが物質定数 $M = 2.0$ では、s 波単独の場合 ($G = \infty$) においても FF 状態が存在する (図 4.7d)。これと比較して $M = 4.0$ の場合 (図 4.8)、 G を大きくしていくと FF 状態が消える。

UPd₂Al₃ の場合、物質定数は $M = 2.36$ で、s 波単独のときの臨界値 2.52 よりも小さく FF 状態は実現しやすい。次節において、s-p 混成モデルと UPd₂Al₃ とを比較する。

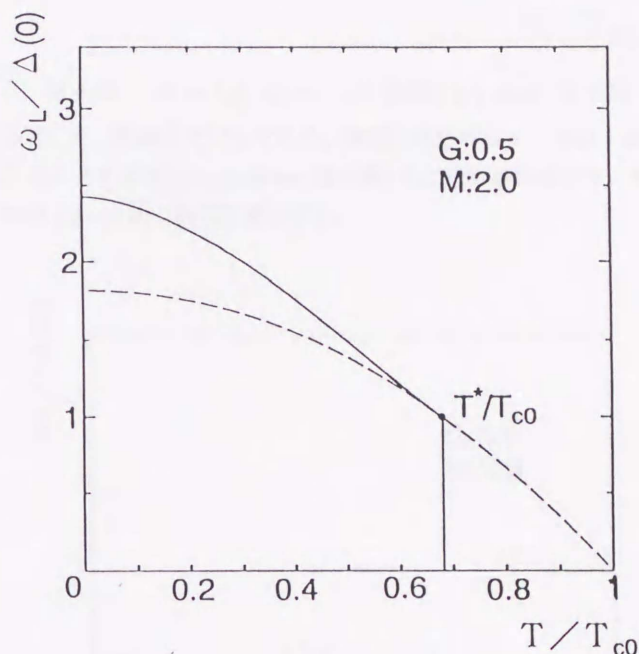


図 4.7a $M = 2.0$ 、 $G = 0.5$ の場合の s-p 混成 FF 相図

縦軸は $\omega_L / \Delta(0)$ で、横軸は T / T_{c0} である。実線は秩序パラメータの s 波成分と p 波成分が混成した系の FF 状態 (nonuniform な状態) の二次転移線を示す。破線は混成系の uniform な状態 ($Q=0$) の二次転移線を示す。

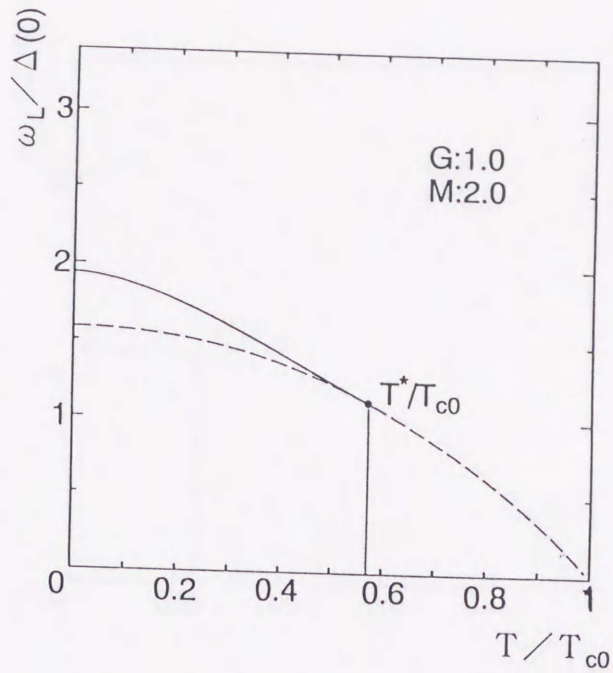


図 4.7b $M = 2.0$ 、 $G = 1.0$ の場合の s-p 混成 FF 相図

縦軸は $\omega_L/\Delta(0)$ で、横軸は T/T_{c0} である。実線は秩序パラメータの s 波成分と p 波成分が混成した系の FF 状態 (nonuniform な状態) の二次転移線を示す。破線は混成系の uniform な状態 ($Q=0$) の二次転移線を示す。

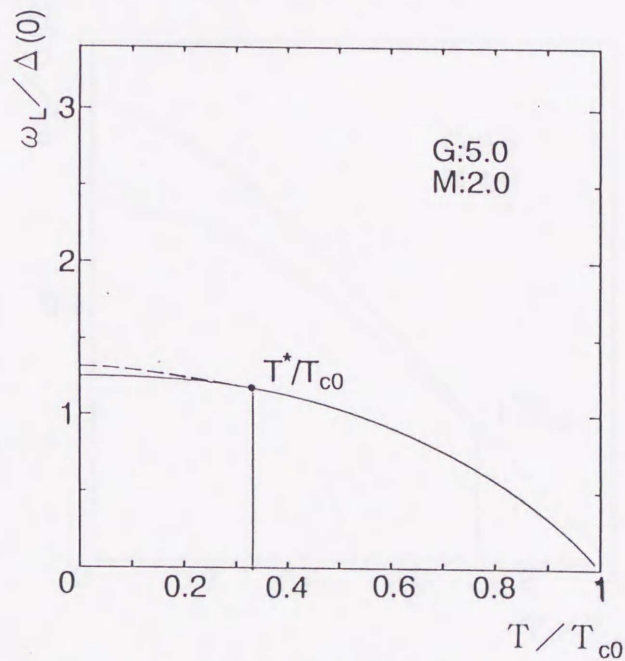


図 4.7c $M = 2.0$ 、 $G = 5.0$ の場合の s-p 混成 FF 相図

縦軸は $\omega_L/\Delta(0)$ で、横軸は T/T_{c0} である。実線は秩序パラメータの s 波成分と p 波成分が混成した系の FF 状態 (nonuniform な状態) の二次転移線を示す。破線は混成系の uniform な状態 ($Q=0$) の二次転移線を示す。

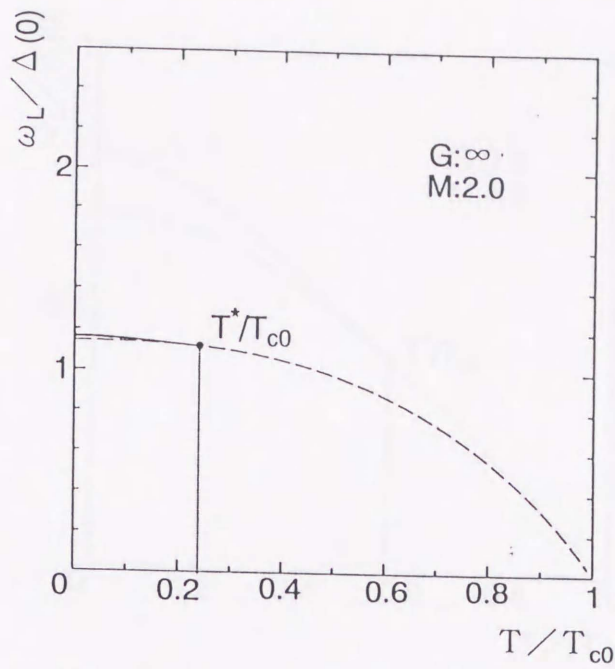


図 4.7d $M = 2.0$ 、 $G = \infty$ の場合の FF 相図

縦軸は $\omega_L/\Delta(0)$ で、横軸は T/T_{c0} である。実線は秩序パラメータの s 波成分の FF 状態 (nonuniform な状態) の二次転移線を示す。破線は uniform な状態 ($Q=0$) の二次転移線を示す。

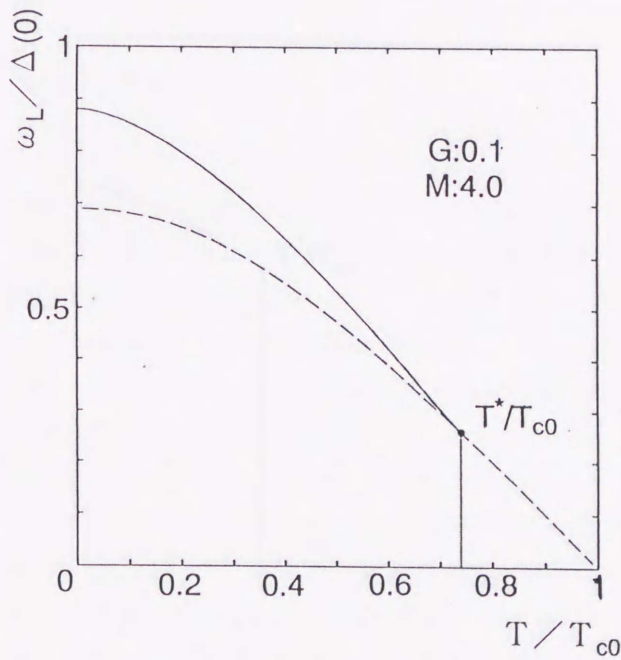


図 4.8a $M = 4.0$ 、 $G = 0.1$ の場合の s-p 混成 FF 相図

縦軸は $\omega_L/\Delta(0)$ で、横軸は T/T_{c0} である。実線は秩序パラメータの s 波成分と p 波成分が混成した系の FF 状態 (nonuniform な状態) の二次転移線を示す。破線は混成系の uniform な状態 ($Q=0$) の二次転移線を示す。

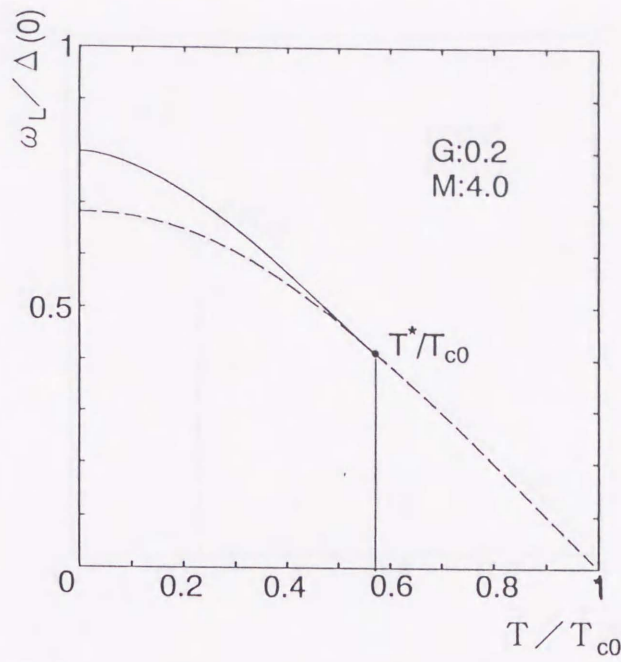


図 4.8b $M = 4.0$ 、 $G = 0.2$ の場合の s-p 混成 FF 相図

縦軸は $\omega_L/\Delta(0)$ で、横軸は T/T_{c0} である。実線は秩序パラメータの s 波成分と p 波成分が混成した系の FF 状態 (nonuniform な状態) の二次転移線を示す。破線は混成系の uniform な状態 ($Q=0$) の二次転移線を示す。

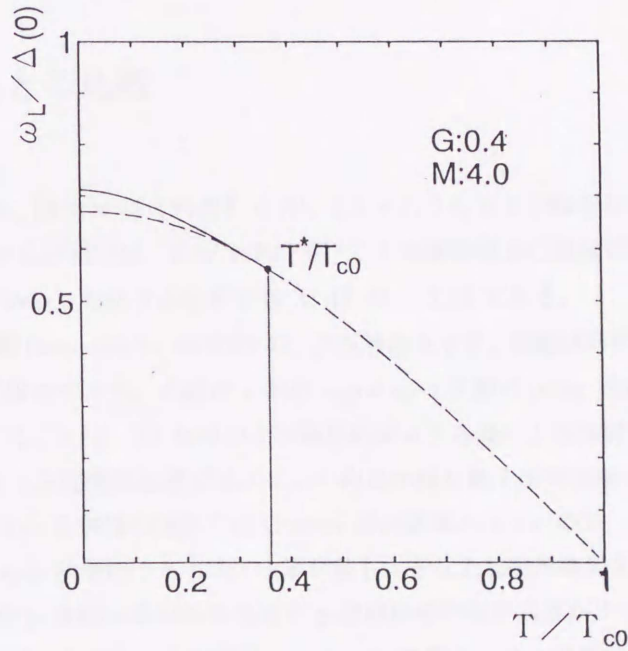


図 4.8c $M = 4.0$ 、 $G = 0.4$ の場合の s-p 混成 FF 相図

縦軸は $\omega_L/\Delta(0)$ で、横軸は T/T_{c0} である。実線は秩序パラメータの s 波成分と p 波成分が混成した系の FF 状態 (nonuniform な状態) の二次転移線を示す。破線は混成系の uniform な状態 ($Q=0$) の二次転移線を示す。

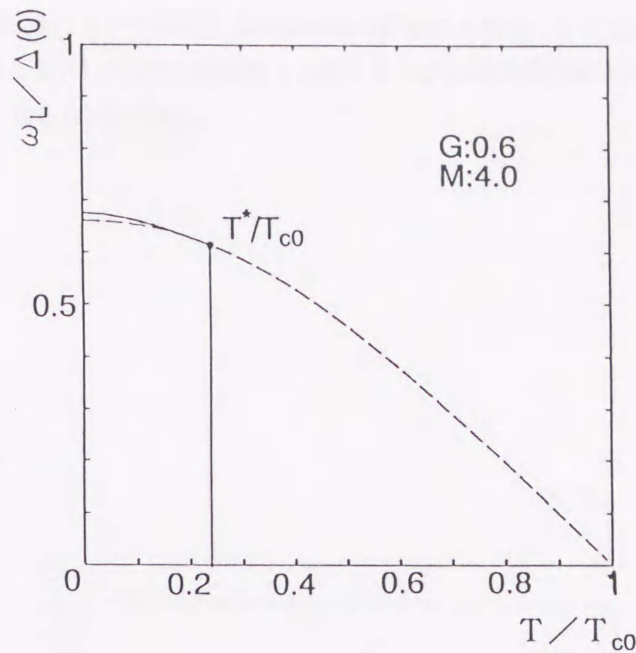


図 4.8d $M = 4.0$ 、 $G = 0.6$ の場合の s-p 混成 FF 相図

縦軸は $\omega_L/\Delta(0)$ で、横軸は T/T_{c0} である。実線は秩序パラメータの s 波成分と p 波成分が混成した系の FF 状態 (nonuniform な状態) の二次転移線を示す。破線は混成系の uniform な状態 ($Q=0$) の二次転移線を示す。

4.4. UPd₂Al₃との比較

図 4.9a, 図 4.9b, 図 4.9c, 図 4.9d はそれぞれ G が、0.2, 0.4, 0.6, 0.8 の場合の s-p 混成系の FF 状態の温度-磁場相図である。これらの図では、転移温度における上部臨界磁場の温度勾配を UPd₂Al₃ の $\mathbf{H} \parallel \mathbf{c}$ の場合の実験値と合わせてある。対応する物質定数 M は $M = 2.36$ である。

実線は混成系の FF 状態 (nonuniform な状態) の二次転移線を示す。破線は前章で示した混成系の uniform な状態 ($Q = 0$) の二次転移線を示す。点線は p 波の equal-spin 状態の polar 状態の二次転移線を示す。

G が小さい場合注意することは、FF 状態の上部臨界磁場よりも高い上部臨界磁場を与える他の状態が存在しないかどうかである。三重項超伝導ではスピンの向きが同じ電子が対凝縮した equal-spin 状態が存在している。この状態は Pauli 常磁性の効果では Cooper 対が破壊されないので、低温領域で高い上部臨界磁場を持つ。p 波の equal-spin 状態のうち polar 状態が最も大きな上部臨界磁場を持つ [17]。図からわかるように G が小さな値の場合 (s 波超伝導の転移温度と p 波超伝導の転移温度が十分に近い場合) 混成系の FF 状態は高温にまで存在する。しかし、この場合 equal-spin 状態の polar 状態の上部臨界磁場が FF 状態の上部臨界磁場より高くなる。低温領域に FF 状態が存在するためには equal-spin 状態を抑える何らかの機構が存在する必要がある。

UPd₂Al₃の場合、超伝導相と反強磁性相が共存している [30]–[35]。equal-spin 状態はスピンの磁気モーメントが ± 1 に合成されている。一方、FF 状態はスピンの磁気モーメントは 0 に合成されている。このため

に、equal-spin 状態が反磁性によって振動する内部磁場の影響をより強くうけて抑えられる可能性が考えられる。Gloos らが見つけた UPd_2Al_3 の強磁場相と比較するために反強磁性相と超伝導相の共存について調べるのが今後の課題となる [36][37][38]。

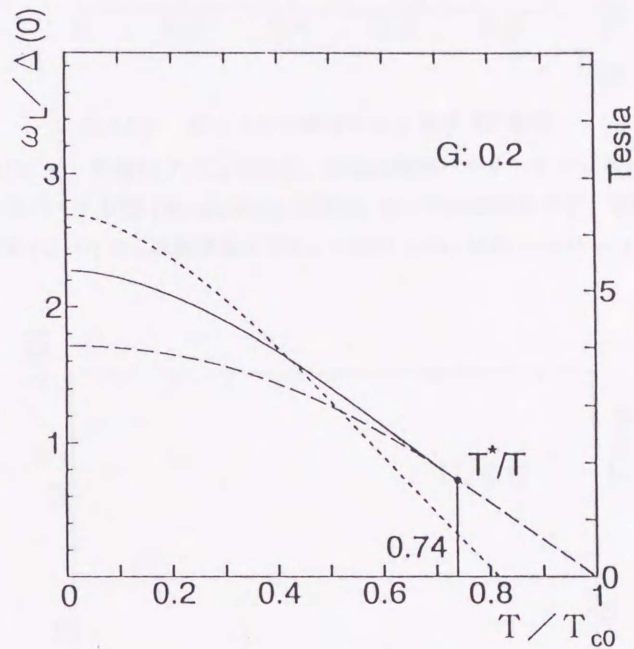


図 4.9a $G = 0.2$ の場合の s-p 混成 FF 相図

縦軸は $\omega_L / \Delta(0)$ で、横軸は T / T_{c0} である。実線は秩序パラメータの s 波成分と p 波成分が混成した系の FF 状態 (nonuniform な状態) の二次転移線を示す。破線は混成系の uniform な状態 ($Q=0$) の二次転移線を示す。点線は equal-spin 状態の polar 状態の二次転移線を示す。

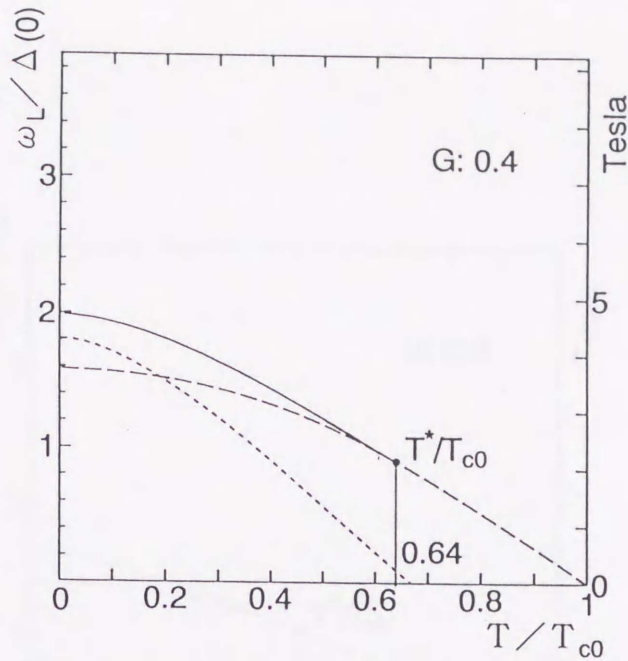


図 4.9b $G = 0.4$ の場合の s-p 混成 FF 相図

縦軸は $\omega_L/\Delta(0)$ で、横軸は T/T_{c0} である。実線は秩序パラメータの s 波成分と p 波成分が混成した系の FF 状態 (nonuniform な状態) の二次転移線を示す。破線は混成系の uniform な状態 ($Q=0$) の二次転移線を示す。点線は polar 状態 (equal-spin 状態) の二次転移線を示す。

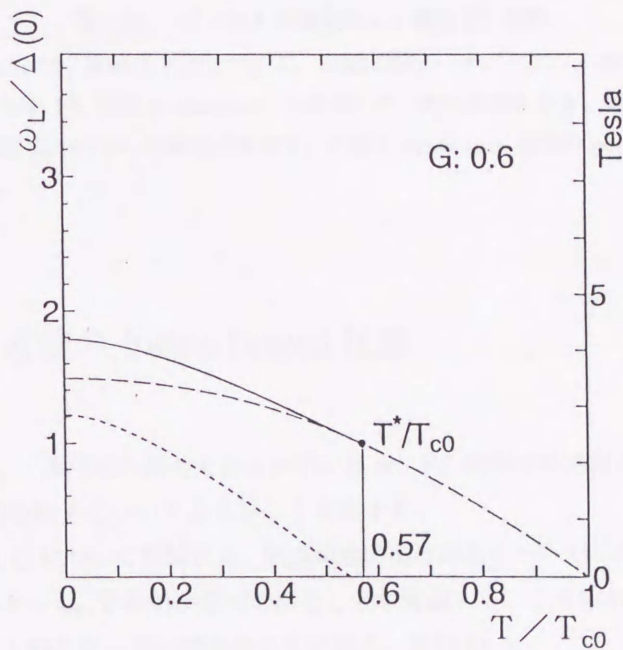


図 4.9c $G = 0.6$ の場合の s-p 混成 FF 相図

縦軸は $\omega_L/\Delta(0)$ で、横軸は T/T_{c0} である。実線は秩序パラメータの s 波成分と p 波成分が混成した系の FF 状態 (nonuniform な状態) の二次転移線を示す。破線は混成系の uniform な状態 ($Q=0$) の二次転移線を示す。点線は equal-spin 状態の polar 状態の二次転移線を示す。

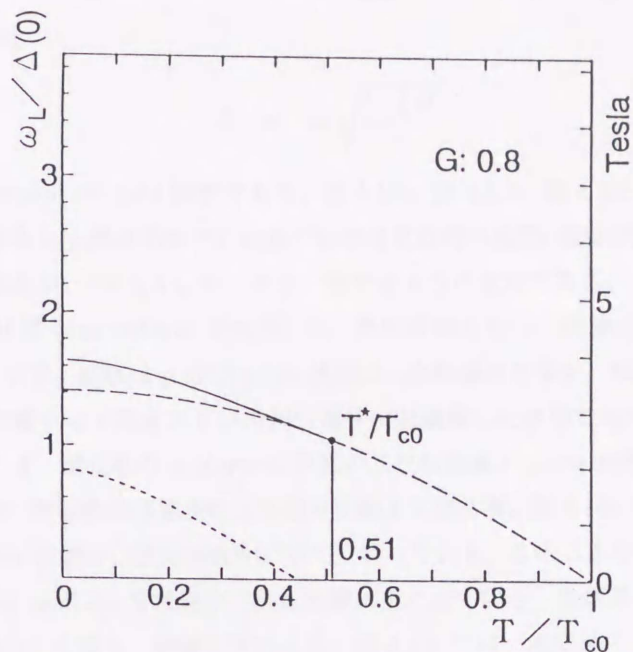


図 4.9d $G = 0.8$ の場合の s-p 混成 FF 相図

縦軸は $\omega_L/\Delta(0)$ で、横軸は T/T_{c0} である。実線は秩序パラメータの s 波成分と p 波成分が混成した系の FF 状態 (nonuniform な状態) の二次転移線を示す。破線は混成系の uniform な状態 ($Q=0$) の二次転移線を示す。点線は equal-spin 状態の polar 状態の二次転移線を示す。

4.5. 転移温度近傍の Fulde-Ferrell 状態

p 波相互作用の大きさと s 波相互作用の大きさが近い場合、FF 状態は転移温度近傍の高い温度にまで存在する。そこで、 T_{c0} 近傍の様子についてより詳しく考察する。

上述の行列 \mathbf{D} を磁場と Q について展開する。軌道磁性の項は磁場について一次まで展開する。但し、FF 状態では Zeeman エネルギー $\omega_L/2$ の項が重要であることを考慮して、この項の最低次を残して展開する。 Q は Zeeman エネルギーと同じオーダーであるとして扱う。行列 \mathbf{D} は

$$\mathbf{D} = \hat{\mathbf{G}} + \ln \frac{T}{T_{c0}} + \frac{7}{4} \frac{\zeta(3)}{(\pi T_{c0})^2} \hat{\mathbf{D}} \quad (162)$$

$$\hat{\mathbf{G}} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & G & 0 \\ 0 & 0 & G \end{pmatrix} \quad (163)$$

$$\hat{D} = \begin{pmatrix} \frac{1}{6}\beta^2 + \frac{1}{4}\omega_L^2 + \frac{1}{12}Q^2 & -\frac{\sqrt{3}}{6}\omega_L Q & \frac{\sqrt{6}}{6}\beta\omega_L \\ -\frac{\sqrt{3}}{6}\omega_L Q & \frac{1}{10}\beta^2 + \frac{1}{4}\omega_L^2 + \frac{3}{20}Q^2 & -\frac{\sqrt{6}}{10}\beta Q \\ \frac{\sqrt{6}}{6}\beta\omega_L & -\frac{\sqrt{6}}{10}\beta Q & \frac{1}{5}\beta^2 + \frac{1}{4}\omega_L^2 + \frac{1}{20}Q^2 \end{pmatrix} \quad (164)$$

と展開できる。但し、 β は

$$\beta = v_F \sqrt{\frac{|e|H}{c}}$$

と定義され、 $\zeta(3)$ は Riemann の zeta 関数である。図 4.10a, 図 4.10b, 図 4.10c は G がそれぞれ 0.02218, 0.018, 0.01 の場合における s-p 混成系の FF 状態の転移温度近傍の温度-磁場相図である。図では転移温度付近の上部臨界磁場の傾きが、UPd₂Al₃ のものと一致するように定めてある。

実線は混成系の FF 状態 (nonuniform な状態) の二次転移線を示し、点線は混成系の uniform な状態 ($Q = 0$) の二次転移線を示す。破線は p 波の polar 状態の二次転移線を示す。但し、ここで述べる polar 状態は上向きスピンを持つ電子と下向きスピンを持つ電子が対凝縮した状態であり、前節の equal-spin 状態とは異なる。図 4.10a では、混成系の uniform な状態の二次転移線と polar 状態の二次転移線が接している。混成系の FF 状態の二次転移線は接点の上を通り破線上で消える。図 4.10b では、混成系の uniform な状態の二次転移線と polar 状態の二次転移線が二点で交わっている。この二点の間の温度領域で polar 状態の二次転移線は混成系の uniform な状態の二次転移線の上に出ている。混成系の FF 状態の二次転移線は polar 状態の二次転移線の上を通り、破線上で消える。図 4.10c では、混成系の uniform な状態の二次転移線と polar 状態の二次転移線が二点で交わっている。混成系の FF 状態の二次転移線は polar 状態の二次転移線上で消え、高温側の交点で再び現れる。図 4.10d は、図 4.10c の高温側の交点の付近を拡大したものである。

転移温度から温度を下げていくと順に uniform な s-p 混成状態、FF 状態、polar 状態 ($S_z = 0$)、FF 状態が上部臨界磁場の直下に現れてくる。

FF 状態は Pauli 常磁性によって実現するため、従来、低温側にしか存在しないと考えられていた。Pauli 常磁性のみ考慮した場合、 $T^*/T_c = 0.56$ 以下の温度にしか存在しない。また、軌道磁性も考慮するとさらに低温にしか存在しないことが従来の理論的結論であった。しかし、混成効果を考えると FF 状態が転移温度近傍まで存在することがわかる。混成効果の結果、 T_{c0} 近傍でも nonuniform な状態が存在する理由はずつぎのように考えられる。 T_{c0} 近傍において式 (162) の行列 \hat{D} の対角成分では軌道磁性の効果が支配的である。polar 状態の H_{c2} 立ち上がりの勾配が大きいため、p 波の転移温度 T_{c1} が T_{c0} に近いときは s 波状態の H_{c2} と polar 状態の H_{c2} が縮退している。図 4.10a,b,c の破線と点線がその様子を示している。混成項があれば縮退がとけてより高い上部臨界磁場が出現する。今、混成項は ω_L, Q, β に比例しているが、自発的に Q が有限になることによってより高い上部臨界磁場を実現するのである。

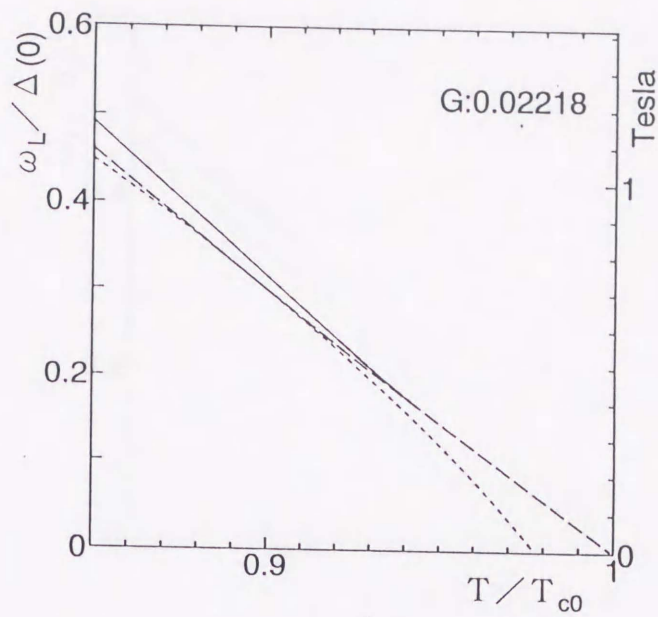


図 4.10a $G = 0.02218$ の場合の s-p 混成 FF 相図

縦軸は $\omega_L / \Delta(0)$ で、横軸は T / T_{c0} である。実線は秩序パラメータの s 波成分と p 波成分が混成した系の FF 状態 (nonuniform な状態) の二次転移線を示す。破線は混成系の uniform な状態 ($Q=0$) の二次転移線を示す。点線は polar 状態の二次転移線を示す (up-spin の電子と down-spin の電子が対凝縮した状態)。

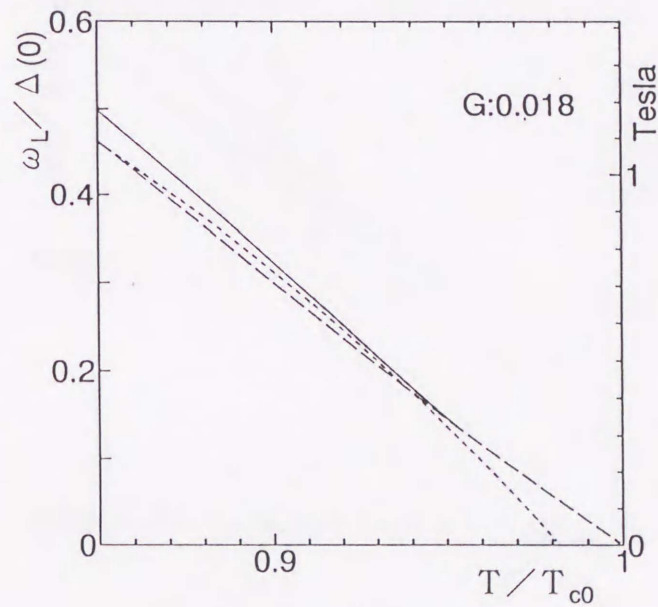


図 4.10b $G = 0.018$ の場合の s-p 混成 FF 相図

縦軸は $\omega_L / \Delta(0)$ で、横軸は T / T_{c0} である。実線は秩序パラメータの s 波成分と p 波成分が混成した系の FF 状態 (nonuniform な状態) の二次転移線を示す。破線は混成系の uniform な状態 ($Q=0$) の二次転移線を示す。点線は polar 状態の二次転移線を示す (up-spin の電子と down-spin の電子が対凝縮した状態)。

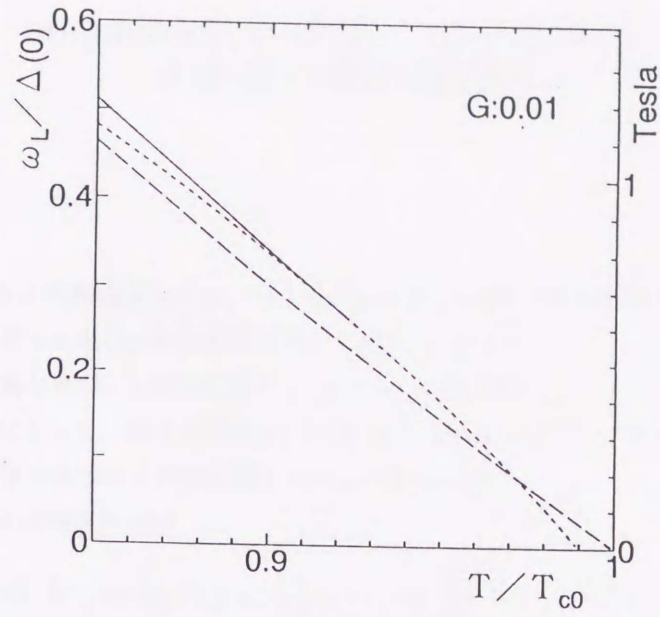


図 4.10c $G = 0.01$ の場合の s-p 混成 FF 相図

縦軸は $\omega_L / \Delta(0)$ で、横軸は T / T_{c0} である。実線は秩序パラメータの s 波成分と p 波成分が混成した系の FF 状態 (nonuniform な状態) の二次転移線を示す。破線は混成系の uniform な状態 ($Q=0$) の二次転移線を示す。点線は polar 状態の二次転移線を示す (up-spin の電子と down-spin の電子が対凝縮した状態)。

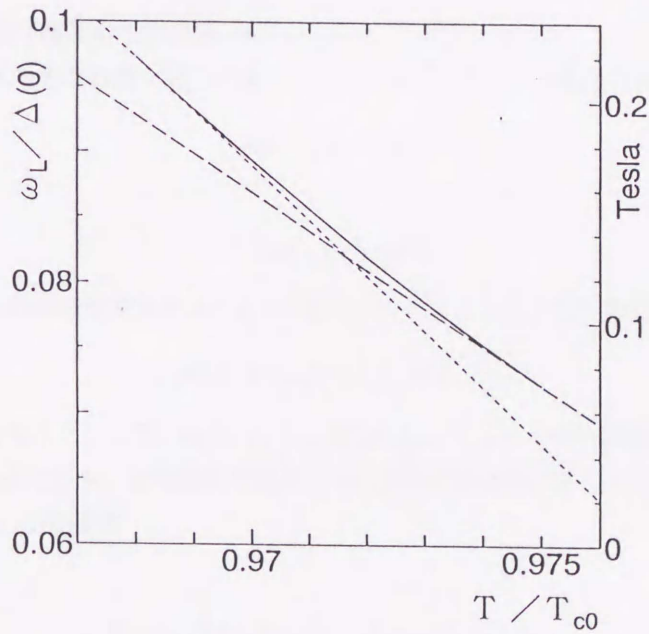


図 4.10d 図 4.10c の高温側の破線と点線の交点周辺の拡大図

第5章 nonuniform な状態における秩序パラメータの d 波成分間の混成系

この章では $L = 2$ の d 波超伝導体においても異なる L_z 成分の間の混成効果によって、秩序パラメータが空間的に波打っている nonuniform な状態が存在し得ることを示す。

前章で s-p 混成系を論じた際、p 波の状態で $L_z = 0$ の polar 状態と $L_z = -1$ の ABM 状態との間に混成のあることが明らかになった。混成の原因は、軌道磁性と有限な q の結果 z 軸に関する鏡映対称性が破れていることである。同様の事情は d 波超伝導でも起こり得る [39]。

球対称な系の場合、d 波相互作用は

$$V(\hat{\mathbf{k}} \cdot \hat{\mathbf{k}}') = -5g_2 P_2(\cos(\gamma_{\mathbf{k}, \mathbf{k}'})) = -g_2 \sum_{m=-2}^{m=2} 4\pi Y_{2,m}(\hat{\mathbf{k}}) Y_{2,m}^*(\hat{\mathbf{k}}') \quad (165)$$

と書ける。しかし、 UPd_2Al_3 のような結晶の場合、一般的に球対称ではなく結晶場の対称性を反映して相互作用の各成分の大きさが異なる。d 波成分に属する L_z の異なる成分についても各成分の大きさが異なると考えられる [8][9][10]。そこで、d 波相互作用を

$$- \sum_{m=-2}^{m=2} 4\pi g_{2|m|} Y_{2,m}(\hat{\mathbf{k}}) Y_{2,m}^*(\hat{\mathbf{k}}') \quad (166)$$

と書く。| m | の絶対値は結晶の空間反転対称性を考慮した結果である。

ここでは、 $L_z = \pm 2$ の相互作用が最も大きく、 $L_z = 0$ の相互作用が無視できるようなモデル、すなわち

$$g_{22} \geq g_{21} \gg g_{20} \simeq 0$$

の場合を仮定し

$$\Delta(x, y, \hat{\mathbf{k}}, q) e^{iqz}$$

の形の秩序パラメータの可能性を考える。 g_{22} が最も大きいとしたので、転移温度近傍の GL 領域では

$$\Delta(x, y, \hat{\mathbf{k}}, q) = Y_{2,2}(\hat{\mathbf{k}}) \psi_0(x, y)$$

の状態が実現するであろう。ここで、 $\psi_0(x, y)$ は、Abrikosov が与えた調和振動子の基底状態の形の関数である。この状態を出発点にとり、軌道磁性の効果を含む指数関数型の演算子を作用させると、調和振動子の励起状態を含む異なる L_z の状態

$$Y_{2,2-m}(\hat{\mathbf{k}}) \psi_m(x, y) \quad (m = 1, 2, 3, 4) \quad (167)$$

が現れてくる。そこで、GL 領域の解につながり、かつ波数 q で z 方向に波打っている形の d 波の秩序パラメータは

$$\begin{aligned} \Delta(x, y, \hat{\mathbf{k}}, q) e^{iqz} &= D_2 Y_{2,2}(\hat{\mathbf{k}}) \psi_0(x, y) e^{iqz} + D_1 Y_{2,1}(\hat{\mathbf{k}}) \psi_1(x, y) e^{iqz} \\ &+ D_{-1} Y_{2,-1}(\hat{\mathbf{k}}) \psi_3(x, y) e^{iqz} + D_{-2} Y_{2,-2}(\hat{\mathbf{k}}) \psi_4(x, y) e^{iqz} \end{aligned} \quad (168)$$

と選ぶことができる。但し、

$$\psi_m = \frac{(a^\dagger)^m}{\sqrt{m!}} \psi_0(x, y) \quad (169)$$

であり、 D_2, D_{-2}, D_1, D_{-1} は振幅を表す。

この秩序パラメータを線形ギャップ方程式(式(98))に代入して、行列方程式

$$\begin{pmatrix} D_{11} & D_{12} & D_{13} & D_{14} \\ D_{21} & D_{22} & D_{23} & D_{24} \\ D_{31} & D_{32} & D_{33} & D_{34} \\ D_{41} & D_{42} & D_{43} & D_{44} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} D_2 \\ D_1 \\ D_{-1} \\ D_{-2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (170)$$

を得る。行列 \mathbf{D} の各成分は、

$$D_{11} = \frac{1}{g_{22}N(0)} - \pi T \int_{t_c}^{\infty} dt \int d\Omega_{\mathbf{k}} |Y_{2,2}(\hat{\mathbf{k}})|^2 C(\hat{k}_z, Q, t) \quad (171)$$

$$D_{12} = \pi T \int_0^{\infty} dt \int d\Omega_{\mathbf{k}} Y_{2,2}^*(\hat{\mathbf{k}}) Y_{2,1}(\hat{\mathbf{k}}) Y_{1,1}(\hat{\mathbf{k}}) |\alpha| S(\hat{k}_z, Q, t) \quad (172)$$

$$D_{13} = -\pi T \int_0^{\infty} dt \int d\Omega_{\mathbf{k}} Y_{2,2}^*(\hat{\mathbf{k}}) Y_{2,-1}(\hat{\mathbf{k}}) Y_{1,1}^3(\hat{\mathbf{k}}) \frac{|\alpha|^3}{\sqrt{3!}} S(\hat{k}_z, Q, t) \quad (173)$$

$$D_{14} = -\pi T \int_0^{\infty} dt \int d\Omega_{\mathbf{k}} Y_{2,2}^*(\hat{\mathbf{k}}) Y_{2,-2}(\hat{\mathbf{k}}) Y_{1,1}^4(\hat{\mathbf{k}}) \frac{|\alpha|^4}{\sqrt{4!}} C(\hat{k}_z, Q, t) \quad (174)$$

$$D_{22} = G' + \frac{1}{g_{22}N(0)} - \pi T \int_{t_c}^{\infty} dt \int d\Omega_{\mathbf{k}} |Y_{2,1}(\hat{\mathbf{k}})|^2 (1 - |\alpha|^2 |Y_{1,1}(\hat{\mathbf{k}})|^2) C(\hat{k}_z, Q, t) \quad (175)$$

$$D_{23} = \pi T \int_0^{\infty} dt \int d\Omega_{\mathbf{k}} Y_{2,1}^*(\hat{\mathbf{k}}) Y_{2,-1}(\hat{\mathbf{k}}) Y_{1,1}^2(\hat{\mathbf{k}}) \sqrt{3!} |\alpha|^2 \left(\frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} |\alpha|^2 |Y_{1,1}(\hat{\mathbf{k}})|^2 \right) \times C(\hat{k}_z, Q, t) \quad (176)$$

$$D_{24} = -\pi T \int_0^{\infty} dt \int d\Omega_{\mathbf{k}} Y_{2,1}^*(\hat{\mathbf{k}}) Y_{2,-2}(\hat{\mathbf{k}}) Y_{1,1}^3(\hat{\mathbf{k}}) \sqrt{4!} |\alpha|^3 \times \left(\frac{1}{3!} - \frac{1}{4!} |\alpha|^2 |Y_{1,1}(\hat{\mathbf{k}})|^2 \right) S(\hat{k}_z, Q, t) \quad (177)$$

$$D_{33} = G' + \frac{1}{g_{22}N(0)} - \pi T \int_{t_c}^{\infty} dt \int d\Omega_{\mathbf{k}} |Y_{2,-1}(\hat{\mathbf{k}})|^2 (1 - 3|\alpha|^2 |Y_{1,1}(\hat{\mathbf{k}})|^2 + \frac{3}{2} |\alpha|^4 |Y_{1,1}(\hat{\mathbf{k}})|^4 - \frac{1}{6} |\alpha|^6 |Y_{1,1}(\hat{\mathbf{k}})|^6) C(\hat{k}_z, Q, t) \quad (178)$$

$$D_{34} = \pi T \int_0^{\infty} dt \int d\Omega_{\mathbf{k}} Y_{2,-1}^*(\hat{\mathbf{k}}) Y_{2,-2}(\hat{\mathbf{k}}) Y_{1,1}(\hat{\mathbf{k}}) 2|\alpha| \left(1 - \frac{3}{2} |\alpha|^2 |Y_{1,1}(\hat{\mathbf{k}})|^2 + \frac{1}{2} |\alpha|^4 |Y_{1,1}(\hat{\mathbf{k}})|^4 - \frac{1}{4!} |\alpha|^6 |Y_{1,1}(\hat{\mathbf{k}})|^6 \right) S(\hat{k}_z, Q, t) \quad (179)$$

$$D_{44} = \frac{1}{g_{22}N(0)} - \pi T \int_{t_c}^{\infty} dt \int d\Omega_{\mathbf{k}} |Y_{2,-2}(\hat{\mathbf{k}})|^2 (1 - 4|\alpha|^2 |Y_{1,1}(\hat{\mathbf{k}})|^2 + 3|\alpha|^4 |Y_{1,1}(\hat{\mathbf{k}})|^4 - \frac{2}{3} |\alpha|^6 |Y_{1,1}(\hat{\mathbf{k}})|^6 + \frac{1}{4!} |\alpha|^8 |Y_{1,1}(\hat{\mathbf{k}})|^8) C(\hat{k}_z, Q, t) \quad (180)$$

$$D_{ij} = D_{ji} \quad (181)$$

で与えられる。但し、

$$\begin{aligned}
 C(\hat{k}_z, Q, t) &= \cos\left(\frac{\omega_L - \hat{k}_z Q}{2}t\right)B(t)\exp\left[-\frac{1}{2}|\alpha|^2|Y_{11}(\hat{\mathbf{k}})|^2\right] \\
 S(\hat{k}_z, Q, t) &= \sin\left(\frac{\omega_L - \hat{k}_z Q}{2}t\right)B(t)\exp\left[-\frac{1}{2}|\alpha|^2|Y_{11}(\hat{\mathbf{k}})|^2\right] \\
 B(t) &= 1/\sinh(\pi Tt) \\
 |\alpha| &= tv_F\sqrt{\frac{2\pi}{3}}\sqrt{\frac{|e|H}{c}} \\
 Q &= v_F q
 \end{aligned}$$

と定義した。また、相互作用の成分の大きさの差を表わす変数として

$$G' = \frac{1}{g_{21}N(0)} - \frac{1}{g_{22}N(0)} \quad (182)$$

を導入した。特に、 $g_{21} > 0$ の場合は

$$G' = \ln \frac{T_{c22}}{T_{c21}} \quad (183)$$

と書き換えられる。 T_{c22} は $Y_{2,2}$ の対称性を持つ超伝導状態の転移温度であり、 T_{c21} は $Y_{2,1}$ の対称性を持つ超伝導状態の転移温度である。

上部臨界磁場は

$$\det \mathbf{D} = 0$$

を解くことによって得られる。行列 \mathbf{D} における、秩序パラメータの各成分の間の混成について考察する。 $Y_{2,2}, Y_{2,-2}$ の対称性を持つ秩序パラメータの成分と $Y_{2,1}, Y_{2,-1}$ の対称性を持つ秩序パラメータの成分の間の混成は行列成分 $D_{12}, (D_{21}), D_{13}, (D_{31}), D_{43}, (D_{34}), D_{42}, (D_{24})$ によって示される。これら行列成分は重心運動量 q が有限の値を持ち、かつ軌道磁性の効果を考慮する場合のみに有限の値を持つ。従って、混成状態はこの二つの要因によって実現する。

前章で示した s-p 混成 FF 状態は重心運動量 q と Zeeman エネルギー $\omega_L/2$ が有限の値を持ったときに実現していたが、秩序パラメータの $Y_{2,2}(Y_{2,-2})$ 成分と $Y_{2,1}(Y_{2,-1})$ 成分の混成には Zeeman エネルギー $\omega_L/2$ が関与していない。従って、ここで扱う d 波超伝導の nonuniform な状態は従来の FF 状態とは異なる性格を持つ。FF 状態において $Q(=v_F q)$ は Zeeman エネルギーと同じオーダーの値を持つが、d 波超伝導の nonuniform な状態では軌道磁性の効果が重要であり、 Q は $v_F\sqrt{\frac{e}{c}H}$ のオーダーの値を持つ。

このことは、Pauli 磁性が効かない転移温度近傍での混成状態を調べることによって、より明確になる。転移温度近傍の様子について調べるために、行列 \mathbf{D} を磁場について一次まで展開する。行列 \mathbf{D} は

$$\mathbf{D} = \hat{\mathbf{G}} + \ln \frac{T}{T_{c22}} + \frac{1}{4} \frac{\zeta(3)}{(\pi T_{c22})^2} \hat{\mathbf{D}} \quad (184)$$

$$\hat{\mathbf{G}} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & G' & 0 & 0 \\ 0 & 0 & G' & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (185)$$

$$\hat{D} = \begin{pmatrix} \frac{3}{2}\beta^2 + \frac{1}{4}Q^2 & \beta Q & 0 & 0 \\ \beta Q & 3\beta^2 + \frac{3}{4}Q^2 & -\sqrt{6}\beta^2 & 0 \\ 0 & -\sqrt{6}\beta^2 & 7\beta^2 + \frac{3}{4}Q^2 & -2\beta Q \\ 0 & 0 & -2\beta Q & \frac{27}{2}\beta^2 + \frac{1}{4}Q^2 \end{pmatrix} \quad (186)$$

となる。但し、

$$\beta = v_F \sqrt{\frac{|e|H}{c}}$$

と定義した。 $\zeta(3)$ は Riemann の zeta 関数である。

この結果を用いて、転移温度近傍の上部臨界磁場を考察する。まず与えられた温度に対して、 D の行列式が最小になる Q を求める。つぎに、磁場の値を十分に大きいところから下げてきて、行列式が初めてゼロになる磁場を探す。その値が与えられた温度での上部臨界磁場を与える。 $Q \neq 0$ の状態が実現するためには、行列式を Q で展開したとき Q^2 の係数が負でなければならない。上の行列成分の中で、混成効果を表す非対角成分 D_{12} 等が Q の 1 次に比例していることから、これらの混成項は行列式の Q^2 項に負の寄与を与える。従って、 $Q \neq 0$ の状態が実現していることが期待される。 $G = 0.0, 0.1, 0.2$ の場合の結果を図 5.1 に示す、破線は $Q = 0$ の uniform な状態の場合であり、秩序パラメータが

$$\Delta(x, y, \hat{k}) = D_2 Y_{2,2}(\hat{k}) \psi_0(x, y) + D_{-2} Y_{2,-2}(\hat{k}) \psi_4(x, y) \quad (187)$$

の場合の上部臨界磁場を示す。

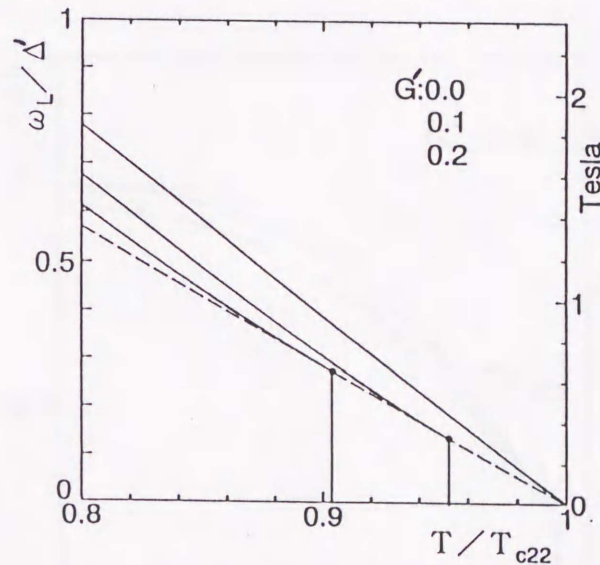


図 5.1 d 波の nonuniform な状態の転移温度近傍の相図

$G = 0.0, 0.1, 0.2$ の場合。縦軸は ω_L/Δ' で、横軸は T/T_{c22} である。なお $\Delta' = \pi T_{c22}/\gamma$ である。実線は nonuniform な状態の二次転移線を示す。破線は uniform な状態 ($Q=0$) の秩序パラメータが $Y_{2,2}\psi_0 + Y_{2,-2}\psi_4$ の対称性をしている場合の二次転移線を示す。

図から明らかなように、 $Q \neq 0$ の状態が高い上部臨界磁場を与え、nonuniform な状態が実現している。三重臨界点 T^*/T_{c22} は、パラメータ G' で決まり、

$$\frac{T^* - T_{c22}}{T_{c22}} = -\frac{9 + \sqrt{792}}{79} G' \simeq -0.470 G' \quad (188)$$

で与えられる [39]。Q の値は、 β によって決まり、この nonuniform な状態は、軌道磁性から来るものであり、FF 状態とは異なった全く新しいタイプの状態であることを示している。ここで、図は転移温度付近の上部臨界磁場の傾きを UPd_2Al_3 の傾きと一致するように定めてある。縦軸は Larmor 振動数 $\omega_L = g\mu_B H$ を $\Delta' = \pi T_{c22}/\gamma$ でスケールしている。ln γ は Euler の定数 (= 0.577...) である。横軸は温度 T を $Y_{2,2}$ の対称性を持つ超伝導状態の転移温度 T_{c22} でスケールしている。

つぎに、同様の計算を全温度領域で行った結果を示す。図 5.2a, 図 5.2b, 図 5.2c, 図 5.2d, はそれぞれ G' が 0.1, 0.2, 0.3, 0.4 の場合の相図である。ここで、実線は nonuniform な状態の上部臨界磁場であり、破線は uniform な状態の場合の結果である。また、この nonuniform な状態が軌道磁性のみで起こっていることを示すために、線形ギャップ方程式において Pauli 常磁性項を落として計算した結果を図 5.3 に示す。これらの図では、転移温度での上部臨界磁場の傾きを UPd_2Al_3 の $H \parallel c$ の実験値に合わせてある。対応して、縦軸の右側に外部磁場の絶対値を目盛っている。

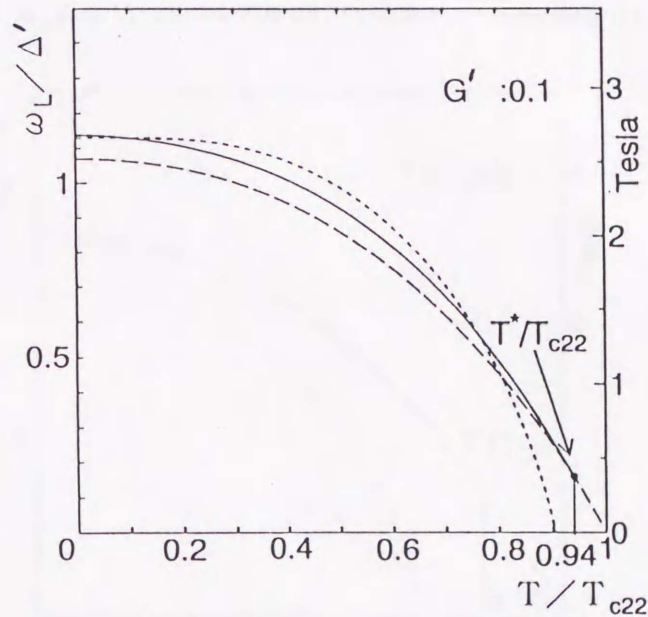


図 5.2a $G = 0.1$ の場合の d 波不均一状態状態の相図

縦軸は ω_L/Δ' で、横軸は T/T_{c22} である。なお $\Delta' = \pi T_{c22}/\gamma$ である。実線は nonuniform な状態の二次転移線を示す。破線は uniform な状態 ($Q=0$) の秩序パラメータが $Y_{2,2}\psi_0 + Y_{2,-2}\psi_4$ の対称性をもつ場合の二次転移線を示す。点線は uniform な状態 ($Q=0$) の秩序パラメータが $Y_{2,1}\psi_0 + Y_{2,-1}\psi_2$ の対称性をしている場合の二次転移線を示す。

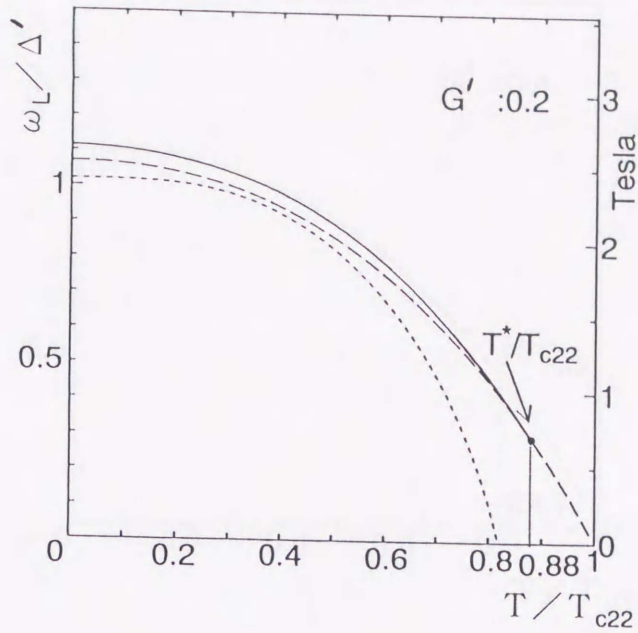


図 5.2b $G' = 0.2$ の場合の d 波不均一状態の相図

縦軸は ω_L/Δ' で、横軸は T/T_{c22} である。なお $\Delta' = \pi T_{c22}/\gamma$ である。実線は nonuniform な状態の二次転移線を示す。破線は uniform な状態 ($Q=0$) の秩序パラメータが $Y_{2,2}\psi_0 + Y_{2,-2}\psi_4$ の対称性をしている場合の二次転移線を示す。点線は uniform な状態 ($Q=0$) の秩序パラメータが $Y_{2,1}\psi_0 + Y_{2,-1}\psi_2$ の対称性をしている場合の二次転移線を示す。

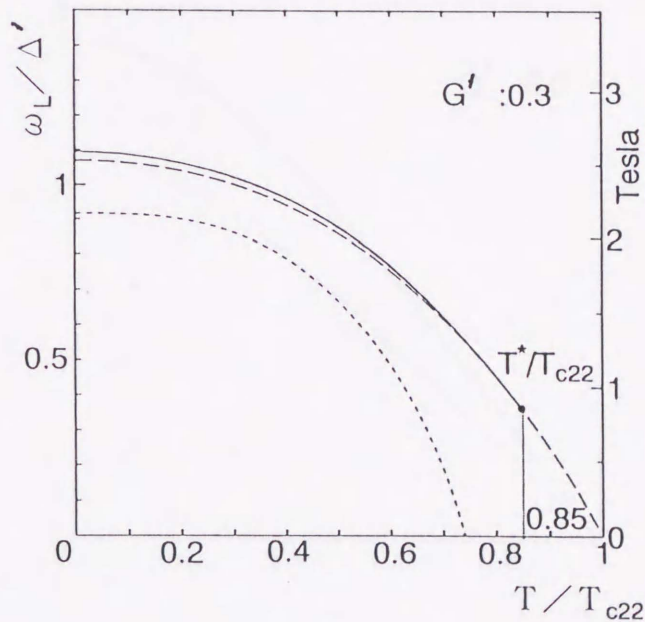


図 5.2c $G' = 0.3$ の場合の d 波不均一状態の相図

縦軸は ω_L/Δ' で、横軸は T/T_{c22} である。なお $\Delta' = \pi T_{c22}/\gamma$ である。実線は nonuniform な状態の二次転移線を示す。破線は uniform な状態 ($Q=0$) の秩序パラメータが $Y_{2,2}\psi_0 + Y_{2,-2}\psi_4$ の対称性をしている場合の二次転移線を示す。点線は uniform な状態 ($Q=0$) の秩序パラメータが $Y_{2,1}\psi_0 + Y_{2,-1}\psi_2$ の対称性をしている場合の二次転移線を示す。

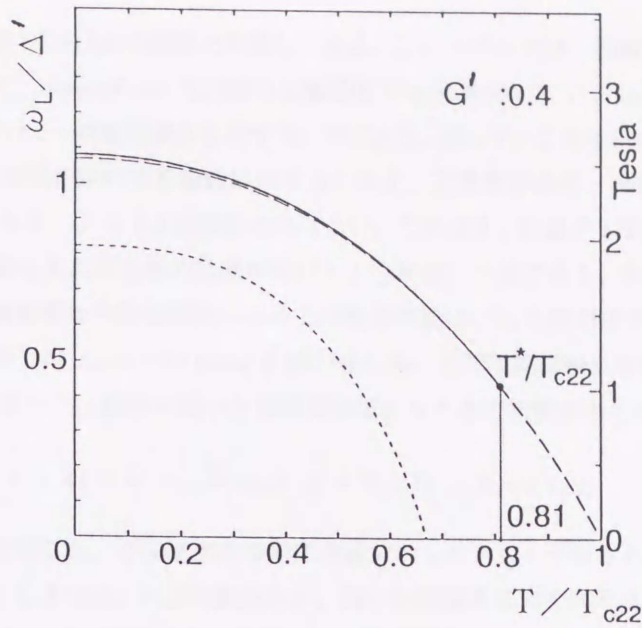


図 5.2d $G' = 0.4$ の場合の d 波不均一状態の相図

縦軸は ω_L/Δ' で、横軸は T/T_{c22} である。なお $\Delta' = \pi T_{c22}/\gamma$ である。実線は nonuniform な状態の二次転移線を示す。破線は uniform な状態 ($Q=0$) の秩序パラメータが $Y_{2,2}\psi_0 + Y_{2,-2}\psi_4$ の対称性をしている場合の二次転移線を示す。点線は uniform な状態 ($Q=0$) の秩序パラメータが $Y_{2,1}\psi_0 + Y_{2,-1}\psi_2$ の対称性をしている場合の二次転移線を示す。

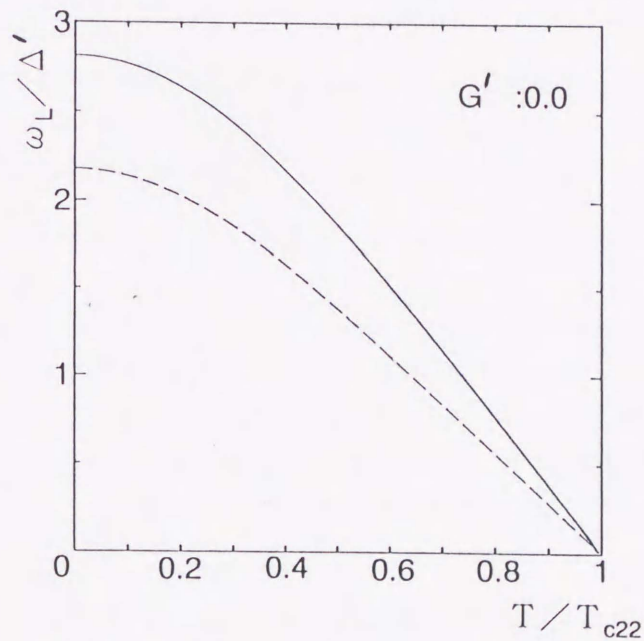


図 5.3 Zeeman エネルギーを無視したときの $G' = 0$ の場合の d 波不均一状態の相図
縦軸は ω_L/Δ' で、横軸は T/T_{c22} である。なお $\Delta' = \pi T_{c22}/\gamma$ である。実線は nonuniform な状態の二次転移線を示す。破線は秩序パラメータが $Y_{2,2}\psi_0 + Y_{2,-2}\psi_4$ の対称性をしている場合の uniform な状態の二次転移線を示す。

この結果を、Gloos らの UPd_2Al_3 の実験と比較してみる。このモデルでは、弱磁場極限で実現する状態は $Y_{2,2}(\hat{\mathbf{k}})$ 状態である。従って、nonuniform な状態の上限温度 T^* から出発して $T = 0\text{K}$ に至る、nonuniform な状態と $Y_{2,2}(\hat{\mathbf{k}})$ 状態とを分ける一次転移線が存在するはずである。従って、このモデルが Gloos らの UPd_2Al_3 における $\mathbf{H} \parallel \mathbf{c}$ のときの相図を説明する可能性は十分にある。三重臨界点を、実験結果に合わせるためには、図 5.2d に見られるように、 $G' = 0.4$ 程度にとればよい。このとき、注意する事は、我々のモデルの範囲内でより高い上部臨界磁場をあたえる他の状態がないかどうかという点である。Scharnberg と Klemm[17] が示したように、異方的超伝導体の軌道磁性による上部臨界磁場は、 L_z の絶対値が小さいほど大きくなる。実際、前章でも p 波のうちでは $L_z = 0$ の polar 状態が最も高い上部臨界磁場を与えることを指摘した。今の d 波のモデルでも、単独の $Y_{2,1}$ 状態が高い上部臨界磁場を与える可能性があるので、秩序パラメータを

$$\Delta(x, y, \hat{\mathbf{k}}) = D_1 Y_{2,1}(\hat{\mathbf{k}}) \psi_0(x, y) + D_{-1} Y_{2,-1}(\hat{\mathbf{k}}) \psi_2(x, y) \quad (189)$$

ととり、上部臨界磁場を計算した。その結果を各図に点線で示してある。予想されるように、 G' が小さく、 $Y_{2,1}$ 状態の転移温度が高いときには、 $Y_{2,1}$ 状態の方が、高い上部臨界磁場を与えることがある (図 5.2a 参照)。しかし、図 5.2d の場合は、単独の $Y_{2,1}$ 状態の上部臨界磁場は nonuniform な状態のものに比べ十分小さく、単独の $Y_{2,1}$ 状態が現れることはない。

このように、このモデルは Gloos らの UPd_2Al_3 における $\mathbf{H} \parallel \mathbf{c}$ のときの相図を説明することができる。しかし、確定的な結論を出すためには、 $\mathbf{H} \perp \mathbf{c}$ の配置に対応する計算が必要である。また、新しい nonuniform な状態の物理的性質の解明、一次転移線の計算等が今後の重要な課題になる。 UPd_2Al_3 が d 波超伝導体であるという報告も一部にはあるが [40]、もしこのモデルが UPd_2Al_3 において実現しているならば極めて興味深い。

第6章 まとめ

本論文では、磁場中の超伝導体における秩序パラメータの混成効果について特に上部臨界磁場を中心に理論的研究を行った。

磁場をかけると系の対称性が制限されることから、秩序パラメータが混成した状態が実現しやすくなる。強磁場下には Fulde-Ferrell (FF) 状態と呼ばれる、秩序パラメータが空間的に波打っている不均一な状態 (nonuniform な状態) が存在することが理論的に示されている。この状態は最近 Gloos らによって発見された UPd_2Al_3 の強磁場相との関連から特に興味を持たれている。また、 UPd_2Al_3 と類似した強磁場相が CeRu_2 に存在することが五嶋ら [41] によって発見されている。しかし、実験的に発見された強磁場相は高温領域にまで存在し、 UPd_2Al_3 の強磁場相の場合、三重臨界点は $T^*/T_c = 0.8$ である。従来の理論的予想では FF 状態は低温領域にしか存在しない。この強磁場相が FF 状態であるならば、高温領域にまで存在するための機構が必要である。本論文では、秩序パラメータの混成効果を考慮することによって超伝導転移温度近傍にまで FF 状態が実現することを示した。また、ある種の d 波超伝導体において FF 状態とは異なる新しい不均一な状態が存在することを見つけた。この状態は上部臨界磁場付近に存在し、広い温度領域に存在している。

本論文で得られた結果は以下のように整理される。

1. s-p 混成系の uniform な状態

s 波相互作用が単独の場合と比較して p 波成分が混在している場合は、p 波相互作用が引力相互作用のとき上部臨界磁場が高くなる。p 波相互作用が斥力相互作用の場合、上部臨界磁場は低くなる。これは斥力相互作用によってできる超伝導の p 波成分がエネルギー的に損であるために、超伝導状態が抑制されると考えられる。

2. s-p 混成系の FF 状態

Pauli 常磁性のみ効果を考慮する場合、相互作用の部分波成分単独の系では FF 状態が実現する温度領域は $T/T_c < 0.56$ で、三重臨界点は秩序パラメータの対称性によらない。しかし、偶奇性が異なる秩序パラメータの混成状態の場合、FF 状態が高温領域にまで存在する。偶奇性が同じ組み合わせの場合、単独の秩序パラメータの場合の三重臨界点と変わらない。軌道磁性も考慮する場合も同様に、偶奇性の異なる秩序パラメータの混成状態では FF 状態が高温領域にまで存在する。

3. d 波成分の混成系の nonuniform な状態

軌道磁性の効果が重要な役割をして nonuniform な状態が実現する。この状態は高温領域にまで存在する。nonuniform な状態であるが、Pauli 常磁性を考慮しない場合においても実現する。従って、この状態は FF 状態とは異なる新しい状態である。

4. UPd₂Al₃の強磁場相について

UPd₂Al₃の強磁場相は $T^*/T_c = 0.8$ まで存在している。本論文では、混成効果を考えることによって nonuniform な状態が高温領域にまで存在することを示した。強磁場相が nonuniform な状態であるなら、混成効果によると考えられ、Gloos らの相図が説明できる。

今後の課題

1. 本論文では常伝導状態と超伝導状態の間の転移を不安定性の議論を中心に扱った。相互作用の部分波成分がただ一つの場合の超伝導において、FF 状態と uniform な状態の間の転移は一次転移である。混成状態における FF 状態と uniform な状態の間の転移について調べる。
2. nonuniform な状態として FF 状態以外に Larkin と Ovchinnikov(LO) によって提案された状態がある。FF 状態の秩序パラメータは $e^{i\mathbf{q}\cdot\mathbf{r}}$ で空間的に波打っているのに対して、LO 状態の秩序パラメータは $\cos(\mathbf{q}\cdot\mathbf{r})$ で空間的に波打っている。Pauli 常磁性のみを考慮している場合、この二つの状態の二次転移線は同じ線上に乗り両者は縮退している。しかし、転移線の下では LO 状態の方がエネルギー的に有利になる。軌道磁性も考慮した場合の LO 状態と uniform な状態の間の一次転移線を、特に混成状態の場合について調べる。
3. FF 状態では重心運動量が有限の値を持つ電子対凝縮が起こっているため、超伝導電流の流れが存在する。しかし、これを打ち消す向きに準粒子の流れが存在して平衡状態では電流が流れていない。d 波超伝導の新しい型の nonuniform な状態において、超伝導電流を打ち消す流れが存在するか調べる。
4. FF 状態と uniform な状態の間の転移において、Pauli 帯磁率にとびが存在する [42]。d 波超伝導の新しい型の nonuniform な状態において、uniform な状態の状態との転移で Pauli 帯磁率にとびが存在するか調べる。また、新しい型の nonuniform な状態を特徴づける物理的性質について調べる。
5. 本論文では磁場を $\mathbf{H} \parallel \mathbf{z}$ の場合について調べた。d 波超伝導の新しい型の nonuniform な状態が、 $\mathbf{H} \perp \mathbf{z}$ の場合にも実現するかどうか調べる。なお、本論文では $Y_{\ell,m}$ の量子化軸を \mathbf{z} 軸に平行にとっている。

以上、今後の課題として残る。

補遺 A 有効 Hamiltonian と場の演算子の交換関係

南部スピノールを

$$\Psi(\mathbf{r}) = \begin{pmatrix} \psi_{\uparrow}(\mathbf{r}) \\ \psi_{\downarrow}(\mathbf{r}) \\ \psi_{\uparrow}^{\dagger}(\mathbf{r}) \\ \psi_{\downarrow}^{\dagger}(\mathbf{r}) \end{pmatrix}$$

と定義する。 $\psi^{\dagger}(\psi)$ は、電子の生成(消滅)演算子であり、 $\uparrow(\downarrow)$ はスピン変数を示す。

南部スピノールを用いて場の演算子 $\psi_{\alpha}(\mathbf{r})$ の反交換関係を書き表すと

$$\begin{aligned} \{\Psi_s^{\dagger}(\mathbf{r}), \Psi_{s'}(\mathbf{r}')\} &= \delta_{s,s'} \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \\ \{\Psi_s(\mathbf{r}), \Psi_{s'}(\mathbf{r}')\} &= \Upsilon_{ss'} \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \end{aligned}$$

$$\Upsilon \equiv \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

となる。 $\Psi_s(\mathbf{r})$ と有効 Hamiltonian の交換関係は

$$\begin{aligned} [\Psi_s(\mathbf{r}), H_{\text{eff}}] &= \frac{1}{2} \int d^3\mathbf{r}' d^3\mathbf{r}'' \sum_{s',s''} \{\Psi_s(\mathbf{r}), \Psi_{s'}^{\dagger}(\mathbf{r}')\} \tilde{H}_{s's''}(\mathbf{r}', \mathbf{r}'') \Psi_{s''}(\mathbf{r}'') \\ &\quad - \frac{1}{2} \int d^3\mathbf{r}' d^3\mathbf{r}'' \sum_{s',s''} \Psi_{s'}(\mathbf{r}')^{\dagger} \tilde{H}_{s's''}(\mathbf{r}', \mathbf{r}'') \{\Psi_s(\mathbf{r}), \Psi_{s''}(\mathbf{r}'')\} \end{aligned}$$

であり、上述の反交換関係から

$$[\Psi_s(\mathbf{r}), H_{\text{eff}}] = \frac{1}{2} \int d^3\mathbf{r}'' \sum_{s''} \tilde{H}_{ss''}(\mathbf{r}, \mathbf{r}'') \Psi_{s''}(\mathbf{r}'') - \frac{1}{2} \int d^3\mathbf{r}' \sum_{s',s''} \Psi_{s'}(\mathbf{r}')^{\dagger} \tilde{H}_{s's''}(\mathbf{r}', \mathbf{r}) \Upsilon_{ss''}$$

となる。ただし、

$$\begin{aligned} \tilde{H}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') &= \begin{pmatrix} \xi_{\mathbf{p}\uparrow}^+ \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}') & 0 & \Delta_{\uparrow\uparrow}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') & \Delta_{\uparrow\downarrow}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \\ 0 & \xi_{\mathbf{p}\downarrow}^+ \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}') & \Delta_{\downarrow\uparrow}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') & \Delta_{\downarrow\downarrow}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \\ \Delta_{\uparrow\uparrow}^{\dagger}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') & \Delta_{\uparrow\downarrow}^{\dagger}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') & -\xi_{\mathbf{p}\uparrow}^- \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}') & 0 \\ \Delta_{\downarrow\uparrow}^{\dagger}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') & \Delta_{\downarrow\downarrow}^{\dagger}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') & 0 & -\xi_{\mathbf{p}\downarrow}^- \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \end{pmatrix} \\ \xi_{\mathbf{p}\alpha}^+ &= \frac{1}{2m} \left(\frac{1}{i} \nabla_r - \frac{e}{c} \mathbf{A} \right)^2 - \mu - \frac{1}{2} (\sigma_3)_{\alpha\alpha} \omega_L \\ \xi_{\mathbf{p}\alpha}^- &= \frac{1}{2m} \left(\frac{1}{i} \nabla_r + \frac{e}{c} \mathbf{A} \right)^2 - \mu - \frac{1}{2} (\sigma_3)_{\alpha\alpha} \omega_L \end{aligned}$$

である。 σ_3 は Pauli 行列である。 μ は化学ポテンシャルを表し、 $\omega_L = g\mu_B H$ は電子の Larmor 振動数を表す。 \mathbf{A} はベクトルポテンシャルを表す。

$[\Psi_s(\mathbf{r}), H_{\text{eff}}]$ の第二項は、つぎの恒等式

$$\Upsilon^2 = 1$$

$$\Psi^\dagger \Upsilon = {}^T \Psi$$

$$\tilde{H}_{ss'}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = - \sum_{s'', s'''} \Upsilon_{s' s'''} \tilde{H}_{s'' s'''}(\mathbf{r}', \mathbf{r}) \Upsilon_{s'' s}$$

を用いると

$$\begin{aligned} \sum_{s', s''} \Psi_{s'}(\mathbf{r}')^\dagger \tilde{H}_{s' s''}(\mathbf{r}', \mathbf{r}) \Upsilon_{s s''} &= \sum_{s', s'', s'''} \Psi_{s'}(\mathbf{r}') \Upsilon_{s' s'''} \tilde{H}_{s'' s'''}(\mathbf{r}', \mathbf{r}) \Upsilon_{s s''} \\ &= - \sum_{s'} \tilde{H}_{s s'}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \Psi_{s'}(\mathbf{r}') \end{aligned}$$

と書き換えることができる。従って、 $\Psi_s(\mathbf{r})$ と有効 Hamiltonian の交換関係は

$$[\Psi_s(\mathbf{r}), H_{\text{eff}}] = \int d^3 \mathbf{r}' \sum_{s'} \tilde{H}_{s s'}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \Psi_{s'}(\mathbf{r}')$$

となる。

補遺 B \mathcal{F} の書き換え

$$\mathcal{F} = -\frac{1}{2} \sum_{\alpha, \beta} \sum_{\mathbf{k}} \sum_{\mathbf{k}'} V(\hat{\mathbf{k}} \cdot \hat{\mathbf{k}}') \langle C_{-\mathbf{k}\beta} C_{\mathbf{k}\alpha} \rangle \langle C_{\mathbf{k}'\alpha}^\dagger C_{-\mathbf{k}'\beta}^\dagger \rangle + \sum_{\mathbf{k}} \xi_{\mathbf{k}}$$

の第一項を秩序パラメータを用いて書き換える。

相互作用の一つの部分波成分

$$\begin{aligned} V_{\ell}(\hat{\mathbf{k}} \cdot \hat{\mathbf{k}}') &= -(2\ell + 1)g_{\ell} P_{\ell}(\cos(\gamma_{\mathbf{k}, \mathbf{k}'})) \\ &= -g_{\ell} 4\pi \sum_{m=-\ell}^{\ell} Y_{\ell, m}(\hat{\mathbf{k}}) Y_{\ell, m}^*(\hat{\mathbf{k}}') \end{aligned}$$

によって実現する超伝導状態の秩序パラメータは、一般に

$$\begin{aligned} \Delta_{\ell\alpha\beta}(\hat{\mathbf{k}}) &= \sqrt{4\pi} \sum_{m=-\ell}^{\ell} Y_{\ell, m}(\hat{\mathbf{k}}) A_{\alpha\beta}^{\ell m} \Delta(T) \\ \Delta_{\ell\beta\alpha}^{\dagger}(\hat{\mathbf{k}}) &= \sqrt{4\pi} \sum_{m=-\ell}^{\ell} Y_{\ell, m}^*(\hat{\mathbf{k}}) (A_{\alpha\beta}^{\ell m})^* \Delta(T) \end{aligned}$$

と展開できる。 $A_{\alpha\beta}^{\ell, m}$ は秩序パラメータの各成分の振幅を表す。 $\text{tr} \hat{\Delta} \hat{\Delta}^{\dagger}$ の角度平均は

$$\int \frac{d\Omega_{\mathbf{k}}}{4\pi} \sum_{\alpha, \beta} \Delta_{\ell\alpha\beta}(\hat{\mathbf{k}}) \Delta_{\ell\beta\alpha}^{\dagger}(\hat{\mathbf{k}}) = \sum_{m, \alpha, \beta} |A_{\alpha\beta}^{\ell m}|^2 \Delta^2(T)$$

である。

一方、上述の $\Delta_{\ell\alpha\beta}(\hat{\mathbf{k}})$ を秩序パラメータの定義

$$\Delta_{\ell\alpha\beta}(\hat{\mathbf{k}}) = \sum_{\mathbf{k}'} 4\pi g_{\ell} \sum_m Y_{\ell, m}(\hat{\mathbf{k}}) Y_{\ell, m}^*(\hat{\mathbf{k}}') \langle C_{-\mathbf{k}'\beta} C_{\mathbf{k}'\alpha} \rangle$$

に代入して

$$A_{\alpha\beta}^{\ell m} \Delta(T) = \sum_{\mathbf{k}} \sqrt{4\pi} g_{\ell} Y_{\ell m}^*(\hat{\mathbf{k}}) \langle C_{-\mathbf{k}\beta} C_{\mathbf{k}\alpha} \rangle$$

を得る。 \mathcal{F} の第一項は

$$(\text{第一項}) = \frac{1}{2} \sum_{\ell, m} \sum_{\alpha, \beta} \frac{1}{g_{\ell}} A_{\alpha\beta}^{\ell m} (A_{\alpha\beta}^{\ell m})^* \Delta(T)^2$$

と書け、結局 \mathcal{F} は

$$\mathcal{F} = \frac{1}{2} \sum_{\ell} \frac{1}{g_{\ell}} \int \frac{d\Omega_{\mathbf{k}}}{4\pi} \sum_{\alpha, \beta} \Delta_{\ell\alpha\beta}(\hat{\mathbf{k}}) \Delta_{\ell\beta\alpha}^{\dagger}(\hat{\mathbf{k}}) + \sum_{\mathbf{k}} \xi_{\mathbf{k}}$$

と書き換えることができる。

補遺 C 磁場がない場合のギャップ方程式

ギャップ方程式は

$$\begin{aligned}\Delta_{\alpha\beta}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') &= V(\mathbf{r} - \mathbf{r}')(\tilde{F}_{\beta\alpha}(\mathbf{r}', \mathbf{r}, 0))^* \\ &= -V(\mathbf{r} - \mathbf{r}')T \sum_{\omega_n} \sum_{\gamma} \int d^3\mathbf{r}_2 d^3\mathbf{r}_1 G_{\beta\beta}^0(\mathbf{r}', \mathbf{r}_2, \omega_n) \Delta_{\gamma\beta}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) \\ &\quad \times G_{\alpha\gamma}(\mathbf{r}, \mathbf{r}_1, -\omega_n)\end{aligned}$$

であり、Green 関数の運動方程式は

$$\begin{aligned}[i\omega_n - \frac{1}{2m}(\frac{1}{i}\nabla_r - \frac{e}{c}\mathbf{A})^2 + \mu + \frac{1}{2}(\sigma_3)_{\alpha\alpha}\omega_L]G_{\alpha\beta}(\mathbf{r}, \mathbf{r}', \omega_n) \\ - \sum_{\gamma} \int d^3\mathbf{r}_1 \Delta_{\alpha\gamma}(\mathbf{r}, \mathbf{r}_1) \tilde{F}_{\gamma\beta}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}', \omega_n) = \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}')\delta_{\alpha\beta} \\ [-i\omega_n - \frac{1}{2m}(\frac{1}{i}\nabla_r + \frac{e}{c}\mathbf{A})^2 + \mu + \frac{1}{2}(\sigma_3)_{\alpha\alpha}\omega_L]\tilde{F}_{\alpha\beta}(\mathbf{r}, \mathbf{r}', \omega_n) \\ + \sum_{\gamma} \int d^3\mathbf{r}_1 \Delta_{\alpha\gamma}^\dagger(\mathbf{r}, \mathbf{r}_1) G_{\gamma\beta}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}', \omega_n) = 0\end{aligned}$$

と書ける。

自由粒子系の場合、Green 関数の運動方程式は

$$[i\omega_n - \frac{1}{2m}(\frac{1}{i}\nabla_r - \frac{e}{c}\mathbf{A})^2 + \mu + \frac{1}{2}(\sigma_3)_{\alpha\alpha}\omega_L]G_{\alpha\beta}^0(\mathbf{r}, \mathbf{r}', \omega_n) = \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}')\delta_{\alpha\beta}$$

である。

磁場がない場合、秩序パラメータと Green 関数の場所依存性は二点間の差の関数である。ギャップ方程式は容易に Fourier 変換することができ、

$$\Delta_{\alpha\beta}(\mathbf{k}) = -T \sum_{\omega_n} \sum_{\gamma} \sum_{\mathbf{k}'} V(\hat{\mathbf{k}} \cdot \hat{\mathbf{k}}') G_{\beta\beta}^0(\mathbf{k}', \omega_n) \Delta_{\gamma\beta}(\mathbf{k}') G_{\alpha\gamma}(\mathbf{k}', -\omega_n)$$

と書き換えることができる。 G^0 は自由粒子の Green 関数を表す。

磁場がないときの Green 関数の運動方程式は、

$$\begin{aligned}[i\omega_n - \frac{1}{2m}(\frac{1}{i}\nabla_r)^2 + \mu]G_{\alpha\beta}(\mathbf{r} - \mathbf{r}', \omega_n) \\ - \sum_{\gamma} \int d^3\mathbf{r}_1 \Delta_{\alpha\gamma}(\mathbf{r} - \mathbf{r}_1) \tilde{F}_{\gamma\beta}(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}', \omega_n) = \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}')\delta_{\alpha\beta} \\ [-i\omega_n - \frac{1}{2m}(\frac{1}{i}\nabla_r)^2 + \mu]\tilde{F}_{\alpha\beta}(\mathbf{r} - \mathbf{r}', \omega_n) \\ + \sum_{\gamma} \int d^3\mathbf{r}_1 \Delta_{\alpha\gamma}^\dagger(\mathbf{r} - \mathbf{r}_1) G_{\gamma\beta}(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}', \omega_n) = 0\end{aligned}$$

と書ける。この運動方程式は Fourier 変換して容易に解くことができ、解は

$$\begin{pmatrix} G_{\uparrow\uparrow}(\mathbf{k}, \omega_n) & G_{\uparrow\downarrow}(\mathbf{k}, \omega_n) \\ G_{\downarrow\uparrow}(\mathbf{k}, \omega_n) & G_{\downarrow\downarrow}(\mathbf{k}, \omega_n) \end{pmatrix} = \frac{1}{A} \frac{1}{i\omega_n - \xi_{\mathbf{k}}} \begin{pmatrix} 1 - \frac{\sum_{\gamma} \Delta_{1\gamma}(\mathbf{k}) \Delta_{\gamma 1}^\dagger(\mathbf{k})}{(i\omega_n - \xi_{\mathbf{k}})(i\omega_n + \xi_{\mathbf{k}})} & \frac{\sum_{\gamma} \Delta_{1\gamma}(\mathbf{k}) \Delta_{\gamma 1}^\dagger(\mathbf{k})}{(i\omega_n - \xi_{\mathbf{k}})(i\omega_n + \xi_{\mathbf{k}})} \\ \frac{\sum_{\gamma} \Delta_{1\gamma}(\mathbf{k}) \Delta_{\gamma 1}^\dagger(\mathbf{k})}{(i\omega_n - \xi_{\mathbf{k}})(i\omega_n + \xi_{\mathbf{k}})} & 1 - \frac{\sum_{\gamma} \Delta_{1\gamma}(\mathbf{k}) \Delta_{\gamma 1}^\dagger(\mathbf{k})}{(i\omega_n - \xi_{\mathbf{k}})(i\omega_n + \xi_{\mathbf{k}})} \end{pmatrix}$$

と解くことができる。但し、

$$\begin{aligned}
 A &= \left[1 - \frac{\sum_{\gamma} \Delta_{1\gamma}(\mathbf{k}) \Delta_{\gamma 1}^{\dagger}(\mathbf{k})}{(i\omega_n - \xi_{\mathbf{k}})(i\omega_n + \xi_{\mathbf{k}})} \right] \left[1 - \frac{\sum_{\gamma} \Delta_{1\gamma}(\mathbf{k}) \Delta_{\gamma 1}^{\dagger}(\mathbf{k})}{(i\omega_n - \xi_{\mathbf{k}})(i\omega_n + \xi_{\mathbf{k}})} \right] \\
 &\quad - \left[\frac{\sum_{\gamma} \Delta_{1\gamma}(\mathbf{k}) \Delta_{\gamma 1}^{\dagger}(\mathbf{k})}{(i\omega_n - \xi_{\mathbf{k}})(i\omega_n + \xi_{\mathbf{k}})} \right] \left[\frac{\sum_{\gamma} \Delta_{1\gamma}(\mathbf{k}) \Delta_{\gamma 1}^{\dagger}(\mathbf{k})}{(i\omega_n - \xi_{\mathbf{k}})(i\omega_n + \xi_{\mathbf{k}})} \right] \\
 G(\mathbf{k}, \omega_n) &= \int d^3(\mathbf{r} - \mathbf{r}') G(\mathbf{r} - \mathbf{r}', \omega_n) e^{i\mathbf{k} \cdot (\mathbf{r} - \mathbf{r}')} \\
 \Delta(\mathbf{k}) &= \int d^3(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \Delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}') e^{i\mathbf{k} \cdot (\mathbf{r} - \mathbf{r}')} \\
 V(\mathbf{k} - \mathbf{k}') &= \int d^3(\mathbf{r} - \mathbf{r}') V(\mathbf{r} - \mathbf{r}') e^{i(\mathbf{k} - \mathbf{k}') \cdot (\mathbf{r} - \mathbf{r}')} \quad (= V(\hat{\mathbf{k}} \cdot \hat{\mathbf{k}}')) \\
 \xi_{\mathbf{k}} &= \frac{1}{2m} \mathbf{k}^2 - \mu
 \end{aligned}$$

である。特に、秩序パラメータが

$$(\Delta(\hat{\mathbf{k}}) \Delta^{\dagger}(\hat{\mathbf{k}}))_{\alpha\beta} = \delta_{\alpha\beta} |\Delta(\hat{\mathbf{k}})|^2$$

の関係を満たすとき unitary 状態と呼ばれる。unitary 状態において Green 関数は

$$\begin{pmatrix} G_{11}(\mathbf{k}, \omega_n) & G_{1\downarrow}(\mathbf{k}, \omega_n) \\ G_{\downarrow 1}(\mathbf{k}, \omega_n) & G_{\downarrow\downarrow}(\mathbf{k}, \omega_n) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{i\omega_n + \xi_{\mathbf{k}}}{(i\omega_n - \xi_{\mathbf{k}})(i\omega_n + \xi_{\mathbf{k}}) - |\Delta(\mathbf{k})|^2} & 0 \\ 0 & \frac{i\omega_n + \xi_{\mathbf{k}}}{(i\omega_n - \xi_{\mathbf{k}})(i\omega_n + \xi_{\mathbf{k}}) - |\Delta(\mathbf{k})|^2} \end{pmatrix}$$

と書くことができる。結局、ギャップ方程式は

$$\Delta_{\alpha\beta}(\mathbf{k}) = -T \sum_{\omega_n} \sum_{\mathbf{k}'} V(\hat{\mathbf{k}} \cdot \hat{\mathbf{k}}') \frac{\Delta_{\alpha\beta}(\mathbf{k}')}{(E_{\mathbf{k}'} - i\omega_n)(E_{\mathbf{k}'} + i\omega_n)}$$

と書ける。但し、

$$E_{\mathbf{k}} = \sqrt{\xi_{\mathbf{k}} + |\Delta(\hat{\mathbf{k}})|^2}$$

は準粒子の励起エネルギーである。 \sum_{ω_n} を実行してギャップ方程式

$$\Delta_{\alpha\beta}(\hat{\mathbf{k}}) = - \sum_{\mathbf{k}'} V(\hat{\mathbf{k}} \cdot \hat{\mathbf{k}}') \frac{\Delta_{\alpha\beta}(\hat{\mathbf{k}}')}{2E_{\mathbf{k}'}} \tanh\left(\frac{E_{\mathbf{k}'}}{2T}\right)$$

を得る。

補遺 D 磁場の準古典的な取り扱い

上部臨界磁場を扱う際には、磁場の準古典的な取り扱いが便利である。

磁場中の自由粒子系の Green 関数を

$$G_{\alpha\beta}^0(\mathbf{r}, \mathbf{r}', \omega_n) = \bar{G}_{\alpha\beta}^0(\mathbf{r}, \mathbf{r}', \omega_n) \exp[-i\frac{e}{c} \int_{\mathbf{r}}^{\mathbf{r}'} d\ell \cdot \mathbf{A}(\ell)]$$

と書き換えて、Green 関数の運動方程式に代入する。但し、積分は \mathbf{r} から \mathbf{r}' までの直線上で実行する。運動方程式は

$$[i\omega_n - \frac{1}{2m} (\frac{1}{i}\nabla_r - \frac{e}{c}\mathbf{A})^2 + \mu + \frac{1}{2}(\sigma_3)_{\alpha\alpha}\omega_L] \bar{G}_{\alpha\beta}^0(\mathbf{r}, \mathbf{r}', \omega_n) \exp[-i\frac{e}{c} \int_{\mathbf{r}}^{\mathbf{r}'} d\ell \cdot \mathbf{A}(\ell)] = \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}')\delta_{\alpha\beta}$$

と書ける。

$\nabla_r \int_{\mathbf{r}}^{\mathbf{r}'} d\ell \cdot \mathbf{A}(\ell)$ の取扱いについて考察するために、Stokes の定理を用いて

$$\int d\mathbf{S} \cdot \text{rot}\mathbf{A}(\ell) = -\left\{ \int_{\mathbf{r}'}^{\mathbf{r}+\Delta\mathbf{r}} d\ell \cdot \mathbf{A}(\ell) - \int_{\mathbf{r}'}^{\mathbf{r}} d\ell \cdot \mathbf{A}(\ell) \right\} + \int_{\mathbf{r}}^{\mathbf{r}+\Delta\mathbf{r}} d\ell \cdot \mathbf{A}(\ell)$$

について考える (図 D)。

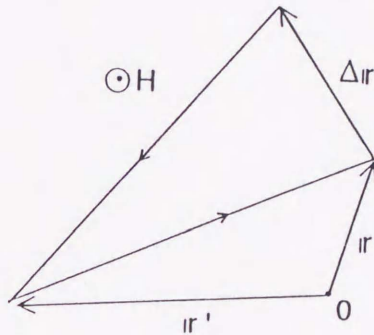


図 D

積分経路は \mathbf{r}' から \mathbf{r} までと、 \mathbf{r} から $\mathbf{r} + \Delta\mathbf{r}$ まで、 $\mathbf{r} + \Delta\mathbf{r}$ から \mathbf{r}' まで。

磁場 \mathbf{H} が一様するとき、面積分を実行すると

$$\begin{aligned} \int d\mathbf{S} \cdot \text{rot}\mathbf{A}(\ell) &= \int d\mathbf{S} \cdot \mathbf{H} \\ &= -\frac{1}{2}(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \times \mathbf{H} \cdot \Delta\mathbf{r} \end{aligned}$$

となる。

従って、 $|\Delta \mathbf{r}| \ll 1$ では

$$-\frac{1}{2}(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \times \mathbf{H} \cdot \Delta \mathbf{r} = -(\nabla_r \int_{\mathbf{r}'}^{\mathbf{r}} d\ell \cdot \mathbf{A}(\ell)) \cdot \Delta \mathbf{r} + \int_{\mathbf{r}}^{\mathbf{r}+\Delta \mathbf{r}} d\ell \cdot \mathbf{A}(\ell)$$

となる。結果、

$$-\nabla_r \int_{\mathbf{r}}^{\mathbf{r}'} d\ell \cdot \mathbf{A}(\ell) = \mathbf{A}(\mathbf{r}) + \frac{1}{2}(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \times \mathbf{H}$$

の関係を得る。

上述の関係を用いて $\bar{G}_{\alpha\beta}^0(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$ の運動方程式は、

$$[i\omega_n - \frac{1}{2m}(\frac{1}{i}\nabla_r + \frac{1}{2c}(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \times \mathbf{H})^2 + \mu + \frac{1}{2}(\sigma_3)_{\alpha\alpha}\omega_L] \bar{G}_{\alpha\beta}^0(\mathbf{r}, \mathbf{r}', \omega_n) = \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}')\delta_{\alpha\beta}$$

と書くことができる。

括弧 (...) の中の第一項と第二項はそれぞれ、 $\nabla_r/i \sim p_F$ であり、 $\frac{e}{2c} |\mathbf{r} - \mathbf{r}'| H \sim \frac{e}{2c} \xi H$ である。 $\xi (= v_F/\pi T)$ はコヒーレンス長で、 p_F , v_F はそれぞれ Fermi 運動量、Fermi 速度である。第一項と第二項を比較すると

$$p_F \gg \frac{e}{c} \frac{1}{2} \xi H$$

$$(T \gg \frac{eH}{mc})$$

となり、Landau 準位の量子化 eH/mc を無視する近似の範囲で第二項は省略できる。

補遺 E Helfand と Werthamer の方法

Helfand と Werthamer が s 波超伝導の上部臨界磁場を議論する際に定式化した軌道磁性の取り扱いについて述べる。

Green 関数を

$$G_{\alpha\beta}^0(\mathbf{r}, \mathbf{r}', \omega_n) = \bar{G}_{\alpha\beta}^0(\mathbf{r}, \mathbf{r}', \omega_n) \exp\left[-i\frac{e}{c} \int_{\mathbf{r}}^{\mathbf{r}'} d\boldsymbol{\ell} \cdot \mathbf{A}(\boldsymbol{\ell})\right]$$

と書き換えることができ (補遺 D)、Landau 準位の量子化を考慮しない近似の範囲で Green 関数 \bar{G}^0 の運動方程式は

$$\left[i\omega_n - \frac{1}{2m} \left(\frac{1}{i} \nabla_{\mathbf{r}}\right)^2 + \mu + \frac{1}{2} (\sigma_3)_{\alpha\alpha} \omega_L\right] \bar{G}_{\alpha\beta}^0(\mathbf{r}, \mathbf{r}', \omega_n) = \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \delta_{\alpha\beta}$$

と書くことができる。但し、積分は \mathbf{r} から \mathbf{r}' までの直線上で実行する。

Helfand と Werthamer は

$$\exp\left[-i\frac{2e}{c} \int_{\mathbf{r}}^{\mathbf{r}'} d\boldsymbol{\ell} \cdot \mathbf{A}(\boldsymbol{\ell})\right] \psi(\mathbf{r}')$$

について考察した。ここで、 $\psi(\mathbf{r}')$ は任意の関数とする。積分変数 $\boldsymbol{\ell}$ を

$$\boldsymbol{\ell} = \mathbf{r} + t(\mathbf{r}' - \mathbf{r}) \quad (t: 0 \rightarrow 1)$$

と変換する (図 E)。

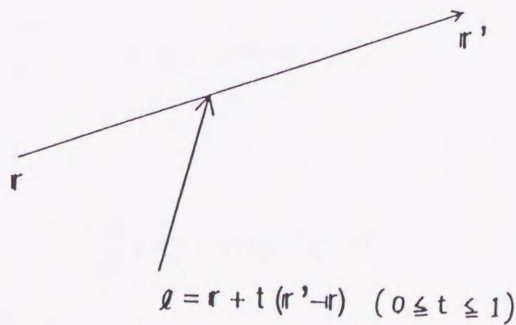


図 E 積分経路

結果、

$$\exp[-i\frac{2e}{c}\int_{\mathbf{r}}^{\mathbf{r}'} d\ell \cdot \mathbf{A}(\ell)]\psi(\mathbf{r}') = \exp[-\frac{2ie}{c}\int_0^1 dt(\mathbf{r}' - \mathbf{r}) \cdot \mathbf{A}(\mathbf{r} + t(\mathbf{r}' - \mathbf{r}))]\psi(\mathbf{r}')$$

を得る。

まず、

$$-\frac{2ie}{c}\int_0^1 dt(\mathbf{r}' - \mathbf{r}) \cdot \mathbf{A}(\mathbf{r} + t(\mathbf{r}' - \mathbf{r}))\psi(\mathbf{r})$$

について考える。

ベクトルポテンシャル $\mathbf{A}(\mathbf{r} + t(\mathbf{r}' - \mathbf{r}))$ を \mathbf{r} の周りで Taylor 展開して

$$\begin{aligned} &-\frac{2ie}{c}\int_0^1 dt(\mathbf{r}' - \mathbf{r}) \cdot \mathbf{A}(\mathbf{r} + t(\mathbf{r}' - \mathbf{r}))\psi(\mathbf{r}) \\ &= -\frac{2ie}{c}\int_0^1 dt(\mathbf{r}' - \mathbf{r}) \cdot \exp[t(\mathbf{r}' - \mathbf{r}) \cdot \nabla_{\mathbf{R}}]\mathbf{A}(\mathbf{R})|_{\mathbf{R}=\mathbf{r}}\psi(\mathbf{r}) \end{aligned}$$

と書き換える。 $e^{t(\mathbf{r}' - \mathbf{r}) \cdot \nabla_{\mathbf{R}}}$ は \mathbf{r} から、 $\mathbf{r} + t(\mathbf{r}' - \mathbf{r})$ に場所を移す演算子であるから、

$$\begin{aligned} &-\frac{2ie}{c}\int_0^1 dt(\mathbf{r}' - \mathbf{r}) \cdot \mathbf{A}(\mathbf{r} + t(\mathbf{r}' - \mathbf{r}))\psi(\mathbf{r}) \\ &= -\frac{2ie}{c}\int_0^1 dt(\mathbf{r}' - \mathbf{r}) \cdot \exp[t(\mathbf{r}' - \mathbf{r}) \cdot \nabla_{\mathbf{R}}]\mathbf{A}(\mathbf{R}) \\ &\quad \times \exp[-t(\mathbf{r}' - \mathbf{r}) \cdot \nabla_{\mathbf{R}}]\mathbf{A}(\mathbf{R})\psi(\mathbf{R})|_{\mathbf{R}=\mathbf{r}} \end{aligned}$$

と式変形できる。

つぎに、

$$\begin{aligned} P(\mathbf{R}) &= (\mathbf{r}' - \mathbf{r}) \cdot \nabla_{\mathbf{R}} \\ Q(\mathbf{R}) &= -\frac{2ie}{c}(\mathbf{r}' - \mathbf{r}) \cdot \mathbf{A}(\mathbf{R}) \end{aligned}$$

の二つの演算子を定義して、

$$V(t) = e^{t(P+Q)}e^{-tP}$$

について考察する。

$V(t)$ は微分方程式

$$\frac{d}{dt}V(t) = V(t)e^{tP}Qe^{-tP}$$

を満たしており、T 積を用いて

$$V(t) = T_t \exp\left[\int_0^t dt' e^{t'P}Qe^{-t'P}\right]$$

と書くことができる。 T_t はいわゆる time ordering 演算子である。 $e^{tP}Qe^{-tP}$ は $Q(\mathbf{R})$ を $Q(\mathbf{R} + t(\mathbf{r}' - \mathbf{r}))$ に移すことを意味しており、 t の異なる二つの演算子の交換関係は

$$[e^{tP}Qe^{-tP}, e^{t'P}Qe^{-t'P}] = 0$$

となる。従って、 T_t を省略でき、

$$V(t) = \exp\left[\int_0^t dt' e^{t'P} Q e^{-t'P}\right]$$

と書き換えられる。

ここで、 $V(t)$ の定義に戻って

$$e^{(P+Q)}\psi(\mathbf{R})|_{\mathbf{R}=\mathbf{r}} = V(1)e^P\psi(\mathbf{R})|_{\mathbf{R}=\mathbf{r}}$$

を具体的に書き表わすと、左辺は

$$e^{P+Q}\psi(\mathbf{R})|_{\mathbf{R}=\mathbf{r}} = \exp\left[(\mathbf{r}' - \mathbf{r}) \cdot \left(\nabla_{\mathbf{R}} - \frac{2ie}{c}\mathbf{A}(\mathbf{R})\right)\right]\psi(\mathbf{R})|_{\mathbf{R}=\mathbf{r}}$$

と書け、右辺は

$$\begin{aligned} V(1)e^P\psi(\mathbf{R})|_{\mathbf{R}=\mathbf{r}} &= \exp\left\{\int_0^1 dt \exp[t(\mathbf{r}' - \mathbf{r}) \cdot \nabla_{\mathbf{R}}] \left(-\frac{2ie}{c}\right)(\mathbf{r}' - \mathbf{r}) \cdot \mathbf{A}(\mathbf{R})\right. \\ &\quad \left. \times \exp[-t(\mathbf{r}' - \mathbf{r}) \cdot \nabla_{\mathbf{R}}]\right\}|_{\mathbf{R}=\mathbf{r}}\psi(\mathbf{r}') \\ &= \exp\left\{-\frac{2ie}{c} \int_0^1 dt (\mathbf{r}' - \mathbf{r}) \cdot \mathbf{A}(\mathbf{r} + t(\mathbf{r}' - \mathbf{r}))\right\}\psi(\mathbf{r}') \end{aligned}$$

となる。結果、恒等式

$$\begin{aligned} (\text{左辺}) &= \exp\left[i(\mathbf{r}' - \mathbf{r}) \cdot \left(\frac{\nabla_{\mathbf{R}}}{i} - \frac{2e}{c}\mathbf{A}(\mathbf{R})\right)\right]\psi(\mathbf{R})|_{\mathbf{R}=\mathbf{r}} \\ &= \exp\left[-\frac{2ie}{c} \int_{\mathbf{r}}^{\mathbf{r}'} d\ell \cdot \mathbf{A}(\ell)\right]\psi(\mathbf{r}') = (\text{右辺}) \end{aligned}$$

を得る。

補遺 F 磁場がある場合の線形ギャップ方程式

Scharnberg と Klemm によって定式化された方法について述べる。

線形ギャップ方程式は

$$\begin{aligned} \Delta(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = & -V(\mathbf{r} - \mathbf{r}')T \sum_{\omega_n} \int d^3\mathbf{r}_2 d^3\mathbf{r}_1 \bar{G}_{\uparrow\uparrow}^0(\mathbf{r}', \mathbf{r}_2, \omega_n) \bar{G}_{\uparrow\uparrow}^0(\mathbf{r}, \mathbf{r}_1, -\omega_n) \\ & \times \exp\left[-\frac{e}{c}i \int_{\mathbf{r}'}^{\mathbf{r}_2} d\boldsymbol{\ell} \cdot \mathbf{A}(\boldsymbol{\ell})\right] \exp\left[-\frac{e}{c}i \int_{\mathbf{r}}^{\mathbf{r}_1} d\boldsymbol{\ell} \cdot \mathbf{A}(\boldsymbol{\ell})\right] \Delta(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) \end{aligned}$$

と書くことができる。相互作用 $V(\mathbf{r} - \mathbf{r}')$ の働く距離はコヒーレンス長に比べて十分に短い。Green 関数の range はコヒーレンス長である。また、磁場がない場合の自由粒子系の Green 関数は二つの場所の差のみによる。従って、

$$\begin{aligned} \Delta(\mathbf{r}, \mathbf{r} - \mathbf{r}') = & -V(\mathbf{r} - \mathbf{r}')T \sum_{\omega_n} \int d^3\mathbf{r}_2 d^3\mathbf{r}_1 \bar{G}_{\uparrow\uparrow}^0(\mathbf{r}' - \mathbf{r}_2, \omega_n) \bar{G}_{\uparrow\uparrow}^0(\mathbf{r} - \mathbf{r}_1, -\omega_n) \\ & \times \exp\left[-\frac{2e}{c}i \int_{\mathbf{r}}^{\mathbf{r}_1} d\boldsymbol{\ell} \cdot \mathbf{A}(\boldsymbol{\ell})\right] \Delta(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1) \end{aligned}$$

と書くことができ (補遺 D)、

Helfand と Werthamer によって定式化された方法を用いると (補遺 E)、線形ギャップ方程式は

$$\begin{aligned} \Delta(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = & -V(\mathbf{r} - \mathbf{r}')T \sum_{\omega_n} \int d^3\mathbf{r}_2 d^3\mathbf{r}_1 \bar{G}_{\uparrow\uparrow}^0(\mathbf{r}' - \mathbf{r}_2, \omega_n) \bar{G}_{\uparrow\uparrow}^0(\mathbf{r} - \mathbf{r}_1, -\omega_n) \\ & \times \exp[i\boldsymbol{\rho} \cdot \bar{\Pi}(\mathbf{r})] \Delta(\mathbf{r}, \mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1) \end{aligned}$$

と書き換えられる。但し、

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\rho} &= \mathbf{r}_1 - \mathbf{r} \\ \Pi_x &= \frac{1}{i} \frac{\partial}{\partial x} \\ \Pi_y &= \frac{1}{i} \frac{\partial}{\partial y} - \frac{2e}{c} Hx \\ \Pi_z &= \frac{1}{i} \frac{\partial}{\partial z} \\ \mathbf{A} &= (0, Hx, 0) \end{aligned}$$

と定義する。磁場は z 軸に平行にかけている。相対座標 $\mathbf{r} - \mathbf{r}'$ で Fourier 変換すると、

$$\Delta(\mathbf{r}, \hat{\mathbf{k}}) = -T \sum_{\omega_n = -\omega_c}^{\omega_c} \sum_{\mathbf{k}'} V(\hat{\mathbf{k}} \cdot \hat{\mathbf{k}}') \bar{G}_{\uparrow\uparrow}^0(\mathbf{k}', \omega_n) \int d^3\rho e^{-i\mathbf{k}' \cdot \boldsymbol{\rho}} I(\boldsymbol{\rho}) \Delta(\mathbf{r}, \hat{\mathbf{k}}')$$

となる。但し、

$$I(\boldsymbol{\rho}) = \sum_{\mathbf{p}} \bar{G}_{\uparrow\uparrow}^0(\mathbf{p}, -\omega_n) e^{i\boldsymbol{\rho} \cdot \bar{\Pi}} e^{i\mathbf{p} \cdot \boldsymbol{\rho}}$$

と定義する。

つぎに、 $I(\rho)$ を書き換える。 $\sum_{\mathbf{p}}$ を \mathbf{p} 積分に換えて

$$I(\rho) = \int \frac{d^3\mathbf{p}}{(2\pi)^3} \bar{G}_{\uparrow\uparrow}^0(\mathbf{p}, -\omega_n) \sum_N \frac{1}{N!} (i\rho \cdot \vec{\Pi})^N e^{i\mathbf{p} \cdot \rho}$$

として、各 N の項について $i\rho$ を微分演算子 $\nabla_{\mathbf{p}}$ に置き換えて部分積分し、 \mathbf{p} 積分をまた $\sum_{\mathbf{p}}$ に戻す。すると、

$$I(\rho) = \sum_{\mathbf{p}} \sum_N \frac{1}{N!} [(-\nabla_{\mathbf{p}} \cdot \vec{\Pi})^N \bar{G}_{\uparrow\uparrow}^0(\mathbf{p}, -\omega_n)] e^{i\mathbf{p} \cdot \rho}$$

と書き換えることができる。

nonuniform な状態の秩序パラメータは

$$\Delta(\mathbf{r}, \hat{\mathbf{k}}) = \Delta(\mathbf{r}, \hat{\mathbf{k}}, q) e^{i\mathbf{q} \cdot \mathbf{r}}$$

である。Gruenberg と Gunther は s 波超伝導の FF 状態について議論する際に $\mathbf{q} = (0, 0, q)$ と選んだ。 q を z 軸に平行に選び、線形ギャップ方程式に代入すると、

$$\begin{aligned} \Delta(\mathbf{r}, \hat{\mathbf{k}}, q) &= -T \sum_{\omega_n = -\omega_c}^{\omega_c} \sum_{\mathbf{k}'} V(\hat{\mathbf{k}} \cdot \hat{\mathbf{k}}') \bar{G}_{\uparrow\uparrow}^0(\mathbf{k}', \omega_n) \int d^3\rho e^{-i\mathbf{k}' \cdot \rho} e^{iq\rho_z} \\ &\quad \times I(\rho) \Delta(\mathbf{r}, \hat{\mathbf{k}}') \end{aligned}$$

となる。但し、

$$I(\rho) = \sum_{\mathbf{p}} \sum_N \frac{1}{N!} \left[\sum_{i=x,y} (-\nabla_{\mathbf{p}_i} \Pi_i)^N \bar{G}_{\uparrow\uparrow}^0(\mathbf{p}, -\omega_n) \right] e^{i\mathbf{p} \cdot \rho}$$

と定義する。磁場は z 軸に平行にかかっており秩序パラメータの絶対値の場所依存性は x, y のみによると考えられる。 $\Delta(\mathbf{r}, \hat{\mathbf{k}})$ の z 依存性は位相のみであり、各 N の項の $(\Pi_z)^N$ は $\exp(iqz)$ のみに作用する。

括弧 $[\dots]$ の中の各 N の項について $\pi T/E_F (\ll 1)$ のオーダーを無視すれば、

$$I(\rho) = \sum_{\mathbf{p}} \sum_N \left[\left(\sum_{i=x,y} (\mathbf{v}_F(\mathbf{p}))_i \Pi_i \right)^N \frac{1}{(-\frac{\mathbf{p}^2}{2m} + \mu - \frac{1}{2}\omega_L - i\omega_n)^{N+1}} \right] e^{i\mathbf{p} \cdot \rho}$$

と書ける。 E_F は Fermi エネルギーである。 $\mathbf{v}_F(\mathbf{p})$ は $v_F \hat{\mathbf{p}}$ を表す ($\hat{\mathbf{p}} = \mathbf{p}/|\mathbf{p}|$)。自由粒子系の Green 関数は、

$$\bar{G}_{\alpha\alpha}^0(\mathbf{p}, \omega_n) = \frac{1}{i\omega_n - \frac{\mathbf{p}^2}{2m} + \mu + \frac{1}{2}(\sigma_3)_{\alpha\alpha}\omega_L}$$

である。

ρ 積分と $\sum_{\mathbf{p}}$ を実行すると、線形ギャップ方程式は

$$\begin{aligned} \Delta(\mathbf{r}, \hat{\mathbf{k}}, q) &= - \sum_{\mathbf{k}'} V(\hat{\mathbf{k}} \cdot \hat{\mathbf{k}}') T \sum_{\omega_n = -\omega_c}^{\omega_c} \bar{G}_{\uparrow\uparrow}^0(\mathbf{k}', \omega_n) \\ &\quad \times \sum_N \left[\frac{(\sum_{i=x,y} (\mathbf{v}_F(\mathbf{k}'))_i \Pi_i)^N}{(-\frac{\mathbf{k}'^2}{2m} + \mu + v_F k'_z q - \frac{1}{2}\omega_L - i\omega_n)^{N+1}} \right] \Delta(\mathbf{r}, \hat{\mathbf{k}}', q) \end{aligned}$$

と書くことができる。 $qk'_z/m \rightarrow qv_F k'_z$ と近似した ($q \ll mv_F$)。以下の議論では $qv_F = Q$ とおく。

$\sum_{\mathbf{k}'}$ をエネルギー積分と角度積分に書き換えて、

$$\sum_{\mathbf{k}'} \rightarrow N(0) \int \frac{d\Omega_{\mathbf{k}'}}{4\pi} \int d\xi_{\mathbf{k}'}$$

と書く。但し、 $N(0)$ は Fermi 面上での状態密度である。角度積分は全 Fermi 面上で行う。

エネルギー積分を実行すると、

$$\begin{aligned} \Delta(\mathbf{r}, \hat{\mathbf{k}}, q) &= -N(0) \int \frac{d\Omega_{\mathbf{k}'}}{4\pi} V(\hat{\mathbf{k}} \cdot \hat{\mathbf{k}}') \pi T \sum_{\omega_n = -\omega_c}^{\omega_c} \sum_N \left(\frac{\text{sgn}(\omega_n)}{2i} v_F \sum_{i=x,y} \hat{k}'_i \Pi_i \right)^N \\ &\quad \times \left\{ \frac{1}{\left(\frac{\omega_L - Q\hat{k}'_z}{2i} \text{sgn}(\omega_n) + |\omega_n| \right)^{N+1}} \right\} \Delta(\mathbf{r}, \hat{\mathbf{k}}', q) \end{aligned}$$

となる。ガンマ関数の定義から、関係式

$$\frac{1}{C^{N+1}} = \frac{1}{N!} \int_0^\infty dt t^N \exp(-Ct) \quad (C > 0)$$

をつくり、上式を書き換える。結果、線形ギャップ方程式は

$$\begin{aligned} \Delta(\mathbf{r}, \hat{\mathbf{k}}, q) &= -N(0) \int \frac{d\Omega_{\mathbf{k}'}}{4\pi} V(\hat{\mathbf{k}} \cdot \hat{\mathbf{k}}') \pi T \sum_{\omega_n = -\omega_c}^{\omega_c} \int_0^\infty dt \exp\left[-\left(\frac{\omega_L - Q\hat{k}'_z}{2i} \text{sgn}(\omega_n) + |\omega_n|\right)t\right] \\ &\quad \times \exp\left[\frac{\text{sgn}(\omega_n)}{2i} t (v_F \sum_{i=x,y} \hat{k}'_i \Pi_i)\right] \Delta(\mathbf{r}, \hat{\mathbf{k}}', q) \end{aligned}$$

となる。 $\text{sgn}(\omega_n)$ は $\omega_n > 0$ のとき $+1$ を、 $\omega_n < 0$ のとき -1 をとる。

補遺 G Pauli 常磁性

Pauli 常磁性のみを考えた場合の磁場中の超伝導の振る舞いは、一重項超伝導と三重項超伝導では異なる。強磁場下ではスピン分極した方が自由エネルギー的に有利であるので、一重項超伝導の場合は、超伝導が壊れて常伝導状態に転移する。一方、三重項超伝導の equal-spin 状態では対破壊をせずに分極することが可能であり、Pauli 常磁性のみでは常伝導に転移しない。

Pauli 帯磁率は一般に、

$$\chi = \frac{g\mu_B}{2} \int \frac{d^3\mathbf{k}}{(2\pi)^3} \frac{\partial}{\partial H} (n_{\mathbf{k}\uparrow} - n_{\mathbf{k}\downarrow})|_{H=0}$$

と書くことができる。ただし、 $n_{\mathbf{k}\alpha} = \langle C_{\mathbf{k}\alpha}^\dagger C_{\mathbf{k}\alpha} \rangle$ と定義される。 $n_{\mathbf{k},\alpha}$ は Green 関数から求められ、

$$n_{\mathbf{k}\alpha} = G(\mathbf{k}, \tau = -0) = T \sum_{\omega_n = -\infty}^{\infty} G_{\alpha\alpha}(\mathbf{k}, \omega_n) e^{i\omega_n \eta} \quad (\eta \rightarrow +0)$$

と表せる。

Pauli 常磁性のみを考慮した Green 関数の方程式は

$$\begin{aligned} [i\omega_n - \frac{1}{2m}(\frac{1}{i}\nabla_r)^2 + \mu + \frac{1}{2}(\sigma_3)_{\alpha\alpha}\omega_L]G_{\alpha\beta}(\mathbf{r} - \mathbf{r}', \omega_n) \\ - \sum_{\gamma} \int d^3\mathbf{r}_1 \Delta_{\alpha\gamma}(\mathbf{r} - \mathbf{r}_1) \tilde{F}_{\gamma\beta}(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}', \omega_n) = \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}')\delta_{\alpha\beta} \\ [-i\omega_n - \frac{1}{2m}(\frac{1}{i}\nabla_r)^2 + \mu + \frac{1}{2}(\sigma_3)_{\alpha\alpha}\omega_L] \tilde{F}_{\alpha\beta}(\mathbf{r} - \mathbf{r}', \omega_n) \\ + \sum_{\gamma} \int d^3\mathbf{r}_1 \Delta_{\alpha\gamma}^\dagger(\mathbf{r} - \mathbf{r}_1) G_{\gamma\beta}(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}', \omega_n) = 0 \end{aligned}$$

と書ける。

この方程式を Fourier 変換して $G_{\alpha\beta}$ について解くと、

$$\begin{aligned} G_{\alpha\beta}(\mathbf{k}, i\omega_n) &= \frac{1}{A_{11}A_{22} - A_{12}A_{21}} \begin{pmatrix} G_{11}^0(\mathbf{k}, i\omega_n)A_{11} & G_{11}^0(\mathbf{k}, i\omega_n)A_{12} \\ G_{11}^0(\mathbf{k}, i\omega_n)A_{21} & G_{11}^0(\mathbf{k}, i\omega_n)A_{22} \end{pmatrix} \\ A_{11} &= 1 + \sum_{\gamma} \Delta_{1\gamma}(\hat{\mathbf{k}})\Delta_{\gamma 1}^\dagger(\hat{\mathbf{k}})G_{11}^0(\mathbf{k}, i\omega_n)G_{\gamma\gamma}^0(\mathbf{k}, -i\omega_n) \\ A_{22} &= 1 + \sum_{\gamma} \Delta_{1\gamma}(\hat{\mathbf{k}})\Delta_{\gamma 1}^\dagger(\hat{\mathbf{k}})G_{11}^0(\mathbf{k}, i\omega_n)G_{\gamma\gamma}^0(\mathbf{k}, -i\omega_n) \\ A_{12} &= -\sum_{\gamma} \Delta_{1\gamma}(\mathbf{k})\Delta_{\gamma 1}^\dagger(\hat{\mathbf{k}})G_{11}^0(\mathbf{k}, i\omega_n)G_{\gamma\gamma}^0(\mathbf{k}, -i\omega_n) \\ A_{21} &= -\sum_{\gamma} \Delta_{1\gamma}(\mathbf{k})\Delta_{\gamma 1}^\dagger(\hat{\mathbf{k}})G_{11}^0(\mathbf{k}, i\omega_n)G_{\gamma\gamma}^0(\mathbf{k}, -i\omega_n) \\ G_{\alpha\alpha}^0(\mathbf{k}, i\omega_n) &= \frac{1}{i\omega_n - \xi_{\mathbf{k}\alpha}} \\ \xi_{\mathbf{k}\alpha} &= \xi_{\mathbf{k}} - \frac{1}{2}(\sigma_3)_{\alpha\alpha}\omega_L \end{aligned}$$

となる。

1) 一重項超伝導の Pauli 帯磁率

一重項超伝導の場合、Green 関数は

$$G_{\alpha\alpha}(\mathbf{k}, i\omega_n) = \frac{i\omega_n + \xi_{\mathbf{k}-\alpha}}{(i\omega_n - \xi_{\mathbf{k}\alpha})(i\omega_n + \xi_{\mathbf{k}-\alpha}) - |\Delta(\hat{\mathbf{k}})|^2}$$

$$\Delta_{\uparrow\uparrow}(\hat{\mathbf{k}})\Delta_{\uparrow\uparrow}^\dagger(\hat{\mathbf{k}}) = \Delta_{\uparrow\uparrow}(\hat{\mathbf{k}})\Delta_{\uparrow\uparrow}^\dagger(\hat{\mathbf{k}}) \quad (= |\Delta(\hat{\mathbf{k}})|^2)$$

と書ける。Green 関数を磁場について展開すると、一次の項は

$$G_{\alpha\alpha}^{(1)}(\mathbf{k}, i\omega_n) = -\frac{1}{2}(\sigma_3)_{\alpha\alpha}\omega_L \frac{(i\omega_n + \xi_{\mathbf{k}})^2 + |\Delta(\hat{\mathbf{k}})|^2}{((i\omega_n - \xi_{\mathbf{k}})(i\omega_n + \xi_{\mathbf{k}}) - |\Delta(\hat{\mathbf{k}})|^2)^2}$$

となる。\$G^{(1)}\$について \$\sum_{\omega_n}\$ を実行して

$$G_{\alpha\alpha}^{(1)}(\mathbf{k}, \tau = -0) = -\frac{1}{2}\omega_L \frac{\partial}{\partial E_{\mathbf{k}}} n_F(E_{\mathbf{k}})$$

を得る。\$n_F(E_{\mathbf{k}})\$ は Fermi 分布関数を示す。

Pauli 帯磁率は、

$$\begin{aligned} \chi &= \frac{(g\mu_B)^2}{2} N(0) \int \frac{d\Omega_{\mathbf{k}}}{4\pi} \int_{-\infty}^{\infty} d\xi_{\mathbf{k}} \left(-\frac{\partial}{\partial E_{\mathbf{k}}} n_F(E_{\mathbf{k}}) \right) \\ &= \chi_n Y(T) \end{aligned}$$

と書ける。\$N(0)\$ は Fermi 面上の状態密度を表し、

$$\chi_n = \frac{1}{2}(g\mu_B)^2 N(0)$$

は常伝導状態での Pauli 帯磁率を表す。

$$Y(T) = \int \frac{d\Omega_{\mathbf{k}}}{4\pi} \int_{-\infty}^{\infty} d\xi_{\mathbf{k}} \left(-\frac{\partial}{\partial E_{\mathbf{k}}} n_F(E_{\mathbf{k}}) \right)$$

は、いわゆる芳田関数である (図 G)。

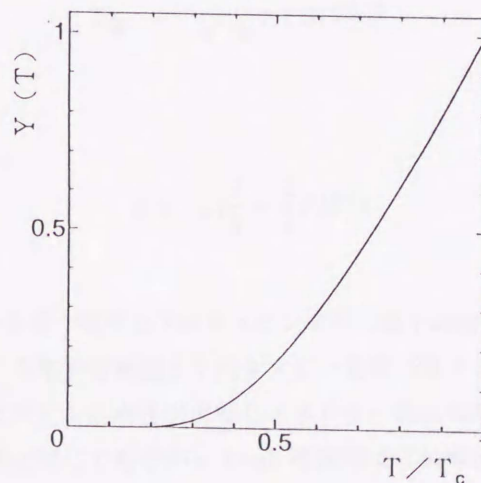


図 G s 波超伝導の場合の芳田関数。

$Y(T)$ は転移温度で 1 になり、絶対零度では 0 となる。転移温度近傍では十分に準粒子の励起が起こり、Cooper 対の破壊が起こる。絶対零度の基底状態では準粒子の励起がない。従って、Pauli 帯磁率は転移温度近傍で常伝導状態の値に近づき、一方絶対零度では 0 になる。

2) BW 状態の Pauli 帯磁率

BW 状態の Green 関数は

$$G_{\alpha\alpha}(\mathbf{k}, \omega_n) = \frac{1}{i\omega_n - \xi_{\mathbf{k}\alpha} - \frac{|\Delta_1(\hat{\mathbf{k}})|^2}{i\omega_n + \xi_{\mathbf{k}\alpha}} - \frac{|\Delta_0(\hat{\mathbf{k}})|^2}{i\omega_n + \xi_{\mathbf{k}-\alpha}}}$$

と書くことができる。但し、

$$\begin{aligned} |\Delta_{1\uparrow}(\hat{\mathbf{k}})| &= |\Delta_{1\downarrow}(\hat{\mathbf{k}})| = |\Delta_1(\hat{\mathbf{k}})| \\ |\Delta_{1\downarrow}(\hat{\mathbf{k}})| &= |\Delta_0(\hat{\mathbf{k}})| \end{aligned}$$

と定義する。また

$$|\Delta_0(\hat{\mathbf{k}})|^2 + |\Delta_1(\hat{\mathbf{k}})|^2 = |\Delta(T)|^2$$

は角度によらない。

Green 関数を磁場について展開すると、一次の項は

$$G_{\alpha\alpha}^{(1)}(\mathbf{k}, i\omega_n) = -\frac{1}{2}(\sigma_3)_{\alpha\alpha}\omega_L \frac{(i\omega_n + \xi_{\mathbf{k}})^2 + |\Delta_0(\hat{\mathbf{k}})|^2 - |\Delta_1(\hat{\mathbf{k}})|^2}{((i\omega_n - \xi_{\mathbf{k}})(i\omega_n + \xi_{\mathbf{k}}) - |\Delta_0(\hat{\mathbf{k}})|^2 - |\Delta_1(\hat{\mathbf{k}})|^2)^2}$$

となる。 $G^{(1)}$ について \sum_{ω_n} を実行して

$$\begin{aligned} G_{\alpha\alpha}^{(1)}(\mathbf{k}, \tau = -0) &= -\frac{1}{2}\omega_L \left[\frac{E_{\mathbf{k}} - |\Delta_1(\hat{\mathbf{k}})|^2}{E_{\mathbf{k}}^2} \frac{\partial}{\partial E_{\mathbf{k}}} n_F(E_{\mathbf{k}}) \right. \\ &\quad \left. + \frac{|\Delta_1(\hat{\mathbf{k}})|^2}{E_{\mathbf{k}}^3} (n_F(E_{\mathbf{k}}) - \frac{1}{2}) \right] \\ E_{\mathbf{k}} &= \sqrt{\xi_{\mathbf{k}}^2 + |\Delta(T)|^2} \end{aligned}$$

を得る。

Pauli 帯磁率は

$$\chi = \chi_n \left(\frac{2}{3} + \frac{1}{3} Y(T) \right)$$

と表せる。

BW 状態では上向きスピンを持つ電子と下向きスピンを持つ電子の間で起こる電子対凝縮以外に、上向きスピンを持つ電子の間で起こる電子対凝縮と下向きスピンを持つ電子の間で起こる電子対凝縮がある。後者二つでは、磁場をかけるとスピンの向きが反転しエネルギー的に有利な Cooper 対が増加する。この二成分の振る舞いは常伝導状態と同じであるから Pauli 帯磁率は常伝導状態と同じになる。前者では上向きスピンを持つ電子と下向きスピンを持つ電子の Cooper 対であるから、この成分は s 波超伝導と同じ Pauli 帯磁率になる。

3) equal-spin 状態の Pauli 帯磁率
 equal-spin 状態の秩序パラメータは

$$\Delta(\hat{\mathbf{k}}) = \begin{pmatrix} \Delta_{11}(\hat{\mathbf{k}}) & 0 \\ 0 & \Delta_{11}(\hat{\mathbf{k}}) \end{pmatrix}$$

$$|\Delta_{11}(\hat{\mathbf{k}})|^2 = |\Delta_{11}(\hat{\mathbf{k}})|^2 \quad (= |\Delta(\mathbf{k})|^2)$$

と書ける。

Green 関数は

$$G_{\alpha\alpha}(\mathbf{k}, i\omega_n) = \frac{i\omega_n + \xi_{\mathbf{k}\alpha}}{(i\omega_n - \xi_{\mathbf{k}\alpha})(i\omega_n + \xi_{\mathbf{k}\alpha}) - |\Delta(\hat{\mathbf{k}})|^2}$$

となる。Green 関数から、 $n_{\mathbf{k}\alpha}$ を求めると

$$n_{\mathbf{k}\alpha} = \frac{\xi_{\mathbf{k}\alpha}}{2E_{\mathbf{k}\alpha}} (2n_F(E_{\mathbf{k}\alpha}) - 1) + \frac{1}{2}$$

と表せる。但し、

$$E_{\mathbf{k},\alpha} = \sqrt{\xi_{\mathbf{k}\alpha}^2 + |\Delta(\mathbf{k})|^2}$$

である。上述の表式より Pauli 帯磁率は

$$\begin{aligned} \chi &= \frac{(g\mu_B)^2}{2} \int \frac{d^3\mathbf{k}}{(2\pi)^3} \frac{\partial}{\partial \xi_{\mathbf{k}}} \left[\frac{\xi_{\mathbf{k}}}{E_{\mathbf{k}}} \left(\frac{1}{2} - n_F(E_{\mathbf{k}}) \right) \right] \\ &= \chi_n \end{aligned}$$

と書ける。equal-spin 状態の Pauli 帯磁率は常伝導状態の Pauli 帯磁率と同じである。同じ向きのスピンの電子対凝縮を起こしているため、磁場を付加してもスピンの向きが逆転するだけで電子対破壊が起こらない。この状態は Pauli 常磁性に対して常伝導状態と同じ振る舞いをする。

以上、1), 2), 3) から equal-spin 状態は Pauli 常磁性によって常伝導状態に転移しないことがわかる。

謝辞

本論文は広島大学大学院生物圏科学研究科において平成4年度から平成6年度の間に行った研究をまとめたものである。本研究の遂行にあたり多くの人に助言を頂きました。

ご多忙にもかかわらず、適切な御指導と叱咤激励して下さいました永井克彦教授にこころから深く感謝いたします。本研究分野に導いて下さり、また多数の助言及びに議論をして下さいました。

嶋原浩助手には、何かと有益な助言を頂き深く感謝いたします。

本論文の研究について、有益な議論をして下さいました渡部三雄教授、星野公三教授、高島敏郎助教授、宇田川眞行助教授に深く感謝いたします。

UPd₂Al₃の実験について有益な議論をして下さいました東北大学理学部の澤田安樹助教授に深く感謝いたします。

長登康さん、東谷誠二さん、山田耕太郎君、濱田稔君、山本幹雄君、江口麻紀さんには、不明瞭な点を指摘して頂きありがとうございます。

参考文献

- [1] K. Gloos, R. Modler, H. Schimanski, C. D. Bredl, C. Geibel, F. Steglich, A. I. Buzdin, N. Sato and T. Komatsubara: *Phys. Rev. Lett.* **70** (1993) 501.
- [2] H. Schimanski, K. Gloos, F. Martin, R. Modler, C. Geibel, C. Schank and F. Steglich: *Physica B* **199&200** (1994) 125.
- [3] P. Fulde and R. A. Ferrell: *Phys. Rev.* **135** (1964) A550.
- [4] A. I. Larkin and Y. N. Ovchinnikov: *Zh. Eksp. Teor. Fiz.* **47** (1964) 1136
[*Sov. Phys.-JETP* **20** (1965) 762].
- [5] D. Saint-James, G. Sarma and E. J. Thomas: *Type II Superconductivity* (Pergamon Press, 1969)
- [6] M. R. Norman: *Phys. Rev. Lett.* **71** (1993) 3391.
- [7] G. Yin and K. Maki: *Phys. Rev.* **B48** (1993) 650.
- [8] 川畑有郷 安岡弘志 編: 遍歴電子系の磁性と超伝導 (裳華房, 1990)
- [9] M. Sigrist and K. Ueda: *Rev. Mod. Phys.* **63** (1991) 239.
- [10] G. E. Volovik and L. P. Gor'kov: *Zh. Eksp. Teor. Fiz.* **88** (1985) 1412
[*Sov. Phys.-JETP* **61** (1985) 843].
- [11] R. Feyherm, A. Amato, C. Geibel, F. N. Gygax, T. Komatsubara, N. Sato, A. Schenck and F. Steglich: *Physica B* **199&200** (1994) 103.
- [12] P. W. Anderson and P. Morel: *Phys. Rev.* **123** (1961) 1911.
- [13] A. J. Leggett: *Rev. Mod. Phys.* **47** (1975) 331.
- [14] E. Helfand, and N. R. Werthamer: *Phys. Rev. Lett.* **13** (1964) 686.
- [15] E. Helfand, and N. R. Werthamer: *Phys. Rev.* **147** (1966) 288.
- [16] N. R. Werthamer, E. Helfand, and P. C. Honenberg: *Phys. Rev.* **147** (1966) 295.
- [17] K. Scharnberg and R. A. Klemm: *Phys. Rev.* **B22** (1980) 5233.
- [18] L. W. Gruenberg and L. Gunther: *Phys. Rev. Lett.* **16** (1966) 996.
- [19] R. Balian and N. R. Werthamer: *Phys. Rev.* **131** (1963) 1553.
- [20] P. W. Anderson and W. F. Brinkman: *Phys. Rev. Lett.* **30** (1973) 1108.
- [21] G. D. Mahan: *Many-Particle Physics, 2nd edition*, (Plenum Press, 1990)

- [22] I. A. Luk'yanchuk and V. P. Mineev: Zh. Eksp. Teor. Fiz. **93** (1987) 2045.
[Sov. Phys.-JETP **66** (1987) 1168].
- [23] Ye Sun and K. Maki: Phys. Rev. **B47** (1993) 9108.
- [24] de Gennes: *Superconductivity of Metals and Alloys*, (W. A. Benjamin, Inc. press, 1966)
- [25] 中嶋 貞雄: 超伝導入門 (培風館, 1971)
- [26] A. M. Clogston: Phys. Rev. Lett. **9** (1962) 266.
- [27] B. S. Chandrasekhar: Appl. Phys. Lett. **1** (1962) 7.
- [28] M. Asida and K. Nagai: Prog. Theor. Phys. **74** (1985) 949.
- [29] S. Matsuo, H. Shimahara and K. Nagai: J. Phys. Soc. Jpn. **63** (1994) 2499.
- [30] C. Geibel, C. Schank, S. Thies, H. Kitazawa, C. D. Bredl, A. Böhm, M. Rau, A. Grauel, R. Caspary, R. Helfrich, U. Ahlheim, G. Weber, and F. Steglich: Z. Phys. **B84** (1991) 1.
- [31] A. Amato, R. Feyerherm, F. N. Gygax, A. Schenck, M. Weber, R. Caspary, P. Hellmann, C. Schank, C. Geibel, F. Steglich, D. E. MacLaughlin, E. A. Knetsch, and R. H. Heffner: Europhys. Lett. **19** (1992) 127.
- [32] N. Sato, T. Sakon, N. Takeda, T. Komatsubara, C. Geibel and F. Steglich: J. Phys. Soc. Jpn. **61** (1992) 32.
- [33] A. Grauel, A. Böhm, H. Fisher, C. Geibel, R. Köhler, R. Modler, C. Schank, F. Steglich, G. Weber, T. Komatsubara and N. Sato: Phys. Rev. **B46** (1992) 5818.
- [34] Y. Dalichaouch, M. C. de Andrade, and M. B. Maple: Phys. Rev. **B46** (1992) 8671.
- [35] N. Sato, T. Sakon, K. Imamura, Y. Inada, H. Aono and T. Komatsubara: Physica **B186-188** (1993) 195.
- [36] G. C. Psaltakis and E. W. Fenton: J. Phys. C: Solid State Phys. **16** (1983) 3913.
- [37] K. Machida, K. Nokura, and T. Matsubara: Phys. Rev. Lett. **44** (1980) 821.
- [38] Y. Suzumura and K. Ishino: Prog. Theor. Phys., **70** (1983) 654.
- [39] S. Matsuo, H. Shimahara and K. Nagai: J. Phys. Soc. Jpn. **64** (1995) 371.
- [40] R. Caspary, P. Hellmann, M. Keller, G. Sparn, C. Wassilew, R. Köhler, C. Geibel, C. Schank, F. Steglich and N. E. Phillips Phys. Rev. Lett. **71** (1993) 2146.
- [41] H. Goshima, T. Suzuki, T. Fujita, M. Hedo, T. Nakama and K. Yagasaki:
to be published.

[42] M. Crisan, and Al. Anghel: J. Low Temp. Phys. **24** (1976) 513.

[その他 FF 状態に関する参考文献]

[43] N. Dupuis, G. Montambaux, and C. A. R. Sá de Melo : Phys. Rev. Lett. **70** (1993) 2613.

[44] B. Schuh, and U. Gummich: Z. Phys. **B61** (1985) 139.

[45] S. Takada and T. Izuyama: Prog. Theor. Phys. **41** (1969) 635.

[46] H. Shimahara: Phys. Rev. **B50** (1994) 12760.

[47] 古沢元 修士論文 広島大学大学院生物圏科学研究科 (1992)