

多層地盤における埋込み基礎の  
動的相互作用解析

平成4年6月

藤井大地

①

## 論文概要

# 多層地盤における埋込み基礎の 動的相互作用解析

平成4年6月

藤井大地

# 論文概要

本論文は、周方向をフーリエ展開した薄層法リング状線加振解を用いた境界積分方程式法による多層成層地盤に埋込まれた基礎の動的相互作用解析法を開発し、側壁と地盤のはく離と滑動、埋戻し土の影響、および基礎形状の効果などを考慮した埋込み基礎の動的相互作用解析を行い、多層地盤における埋込み基礎の動的特性の一端を解明したものである。

第1章は、本研究の背景、現状、研究目的およびその概要について述べている。

第2章は、境界積分方程式法を用いた動的相互作用解析の概要を説明し、動的相互作用問題を支配する基本物理量であるインピーダンスおよび地震強制力の導出法を示している。

第3章は、3次元薄層法によるグリーン関数（点加振解、リング状線加振解）の導出法を3次元波動論から出発して詳細に示している。

第4章は、薄層法グリーン関数を用いた境界積分方程式法において、大きな問題となる内部領域の共振が外部領域の解析に影響を与える内部共振現象に対する解決法を示している。この内部共振現象は、グリーン関数の精度の低下に比例して内部共振振動数付近のより広い振動数領域で発生することを示し、この解決法として、基礎部分に相当する内部領域に蓋と内部空孔面を設けて内部共振解を解析対象振動数の外に上昇させる方法と、蓋と内部空孔面の代わりに境界積分方程式法の分割要素に相当する複数の内部拘束面を導入する方法を示している。

第5章は、薄層法グリーン関数を用いた解析におけるもう一つの問題である加振点近傍におけるグリーン関数応力解の精度の低下に対する解決法を示している。この方法は、グリーン関数応力解の各要素上の積分値で構成される応力マトリクスを適当な修正条件のもとに再評価するものである。まず、弾性地盤においては、基礎部分に相当する内部領域の応力が実数となることを修正条件とする。粘弾性地盤においては、内部拘束面を加振させても基礎面を静止させれば外部応力は発生しないという条件と、外部領域に加振点をもつグリーン関数が内部領域で満足すべき境界積分方程式を修正条件とする方法を示している。

第6章は、軸対称問題における境界積分方程式法と有限要素法の結合法を示し、第7章では、軸対称問題における境界積分方程式法と3次元境界要素法の結合法を示している。

第8章以降は、以上の解析法を利用して、多層地盤における埋込み基礎の動的特性を調査したものであり、第8章は、基盤層に着底した基礎のねじれインピーダンス解析を行い、表層と基盤層の剛性比、および地盤の材料減衰の影響に関して調査している。

第9章は、埋込み基礎の動的特性に及ぼす基礎側壁部分のはく離、滑動の影響について定性的な調査を行っている。

第10章は、第6章に示した解析法を利用して、埋込み基礎の動的特性に及ぼす埋戻し土の影響について調査している。

第 11 章は、第 7 章に示した解析法を利用して、埋込み矩形基礎の動的特性について調査している。

最終第 12 章は、前章までに得られた事項を要約し本研究の総括的な結論を導いている。

以上、本論文では、周方向をフーリエ展開した薄層法リング状線加振解を用いた境界積分方程式法を中心に一連の動的相互作用解析法を開発し、多層地盤における埋込み基礎の動特性について論じた。特に、埋込み基礎が地表面基礎に比較して耐震上有利であるのかという問題について、基礎の側壁に生ずるはく離や滑動、あるいは基礎周辺の埋戻し土の影響などを考慮に入れて検討し、埋込み基礎の動的特性について重要な知見を得ている。

## ABSTRACT

### Dynamic Interaction Analysis of the Foundations Embedded in the Multi-layered Soil

by

Daiji Fujii

In this paper, I develop the method of dynamic interaction analysis of the foundations embedded in the multi-layered soil, by using the boundary integral equation method based on the ring Green's functions which, derived from the thin layer method, is expanded in a Fourier series in the circumferential direction. Considering the effects of separation and slipping between side walls and the soil, of the buckfilled soil, and of shapes of the foundation, I clarify a part of dynamic property of the foundations embedded in the multi-layered soil by those methods.

Chapter 1 presents the backgrounds, present situation, purpose and outline of this study.

Chapter 2 outlines the dynamic interaction analysis by the boundary integral equation method and shows the method of derivation of the impedance and exciting force which are fundamental physical quantities governing the dynamic interaction problems.

Chapter 3 starts with the three dimensional wave propagation theory and then details the derivation of the Green's functions (point load solutions or ring-line-load solutions) by the three dimensional thin layer method.

Chapter 4 shows the methods for resolving the phenomenon of internal resonance, that is, the phenomenon that the internal resonance influences the analysis in the outer domain, which is one of two complexities for boundary integral equation method using the Green's function by the thin layer method. The worse the accuracy of Green's function becomes, the larger the influence of the phenomenon of internal resonance becomes near the resonance point. There are two methods for resolving this complexity. One is to take away the internal resonance point from the frequency range of interest by putting a cover and an internal constraint surface in the inner domain which corresponds to the region of foundation. The other is to take away it by putting, instead of them, several constraint panels which are as large as one of boundary elements.

Chapter 5 shows the methods for resolving the other complexity that the calculation of the stress components of the Green's functions obtained by thin layer method introduces substantial errors near the applied point. These methods are to reevaluate under certain conditions the stress matrix which includes the value of integration of the stress components of the Green's function on a element. First, in linear elastic soil, one of those conditions is derived from the fact that the stress in the inner domain is real value. In visco-elastic soil, there are two conditions. One is derived from the fact that if the boundary is fixed, the stress in the outer domain is zero when the constraint panels in the inner domain are exciting. The other condition is derived from the boundary integral equations which the Green's functions must satisfy in the inner domain when an applied point is in the outer domain.

Chapter 6 shows the method which combines the axi-symmetric finite element method with the boundary integral equation method in the thin layered soil model described above, with which Chapter 7 shows the method combining the three dimensional boundary element method.

In the following chapters, I investigate the dynamic property of the foundations embedded in the multi-layered soil by the methods mentioned above. Chapter 8 shows the dynamic torsional stiffness analysis of the foundation rested on the elastic base and investigates the effects of stiffness ratio between the surface layer and the elastic base and of material damping in the soil.

Chapter 9 makes qualitative investigations into the effects of separation and slipping on the side walls of the foundation upon the dynamic response of the embedded foundation.

Chapter 10 adopts the method presented in Chapter 6 for investigations into the effects of the backfilled soil upon the dynamic response of the embedded foundation.

Chapter 11 adopts the method presented in Chapter 7 for investigations into the property of the rigid rectangular foundation embedded in the soil.

In the final chapter, I draw a conclusion summarily from the main points presented above.

Thus, I have in this paper developed the series of methods of dynamic interaction analysis by the integral equation methods, by using the ring Green's functions which, obtained by the thin layer method, is expanded in a Fourier series in the circumferential direction and discussed the dynamic property of the foundation embedded in the multi-layered soil. With due regard to the separation and slipping on the side walls of the foundation or the buckfilled soil near the foundation, I have examined the matter as to whether the embedded foundation is superior to the surface foundation in terms of the earthquake resistance; and consequently I have illuminated the dynamic property of the embedded foundations.

## 記号表

$a_o$	: 無次元化振動数 ( $= \omega R_o / V_S$ )
$[A]$	: 上部構造物の剛体変位モードマトリクス
$B$	: 矩形基礎の $x$ 軸に対して平行な辺の長さの $1/2$
$c_{ij}$	: 地盤の減衰係数
$c_{TT}$	: ねじれインピーダンス虚部
$c_{HH}$	: 水平インピーダンス虚部
$c_{MM}$	: 回転インピーダンス虚部
$c_{HM}$	: 水平・回転連成インピーダンス虚部
$c_{MH}$	: 水平・回転連成インピーダンス虚部
$C$	: 矩形基礎の $y$ 軸に対して平行な辺の長さの $1/2$
$[C_b]$	: 上部構造物の減衰マトリクス
$\{d\}$	: 上部構造物の弾性変位成分を表すベクトル
$\{d_b\}$	: 上部構造物の絶対変位を表すベクトル
$D$	: 埋込み深さ
$D_m(\theta)$	: $(\cos m\theta, \sin m\theta)$
$D_m$	: $D_m(\theta)$ の略表記
$e_i$	: $i$ 方向単位ベクトル
$E_m(\theta)$	: $(\sin m\theta, -\cos m\theta)$
$E_m$	: $E_m(\theta)$ の略表記
$\{f^m\}$	: 軸対称有限要素の節点力ベクトル
$\{f_g^m\}$	: 軸対称有限要素節点に加わる地震強制力ベクトル
$\{F\}$	: 地震強制力ベクトル
$\{F_b\}$	: 上部構造物の全慣性力
$\{F^B\}$	: 底板地震強制力ベクトル
$\{F^{SN}\}$	: 側壁の法線方向地震強制力ベクトル
$\{F^{ST}\}$	: 側壁の接線方向地震強制力ベクトル
$[G]$	: 変位マトリクス
$h$	: 薄層要素厚
$h_P$	: $P$ 波に対する減衰定数
$h_S$	: $S$ 波に対する減衰定数
$h_b$	: 上部構造物の減衰定数
$H_1$	: 表層の厚さ
$H_b$	: 上部構造物の高さ
$H_m^{(2)}$	: $m$ 次の第 2 種 Hankel 関数
$[H]$	: 応力マトリクス

$i$	: 虚数単位
$[I]$	: 単位マトリクス
$\text{Im}[\ ]$	: 復素数の虚部
$j_n$	: $n$ 次の第 1 種球 Bessel 関数
$J_m(qr)$	: $m$ 次の第 1 種 Bessel 関数
$J_m$	: $J_m(qr)$ の略表記
$J_m^o$	: $\partial J_m(qr)/\partial r$ の略表記
$J_m^p(x)$	: $= \{J_{m-1}(x) + J_{m+1}(x)\}/2$
$J_m^s(x)$	: $= \{J_{m-1}(x) - J_{m+1}(x)\}/2$
$k_{ij}$	: 地盤の剛性係数
$k_S$	: $= \omega/V_S$
$k_{TT}$	: ねじれインピーダンス実部
$k_{HH}$	: 水平インピーダンス実部
$k_{MM}$	: 回転インピーダンス実部
$k_{HM}$	: 水平・回転連成インピーダンス実部
$k_{MH}$	: 水平・回転連成インピーダンス実部
$[K]$	: インピーダンスマトリクス
$[K_b]$	: 上部構造物の剛性マトリクス
$[K_B^m]$	: 有限要素に対応する外部領域の全体剛性マトリクス
$[K_F^m]$	: 軸対称有限要素法による剛性マトリクス
$[K^m]$	: $= [K_F^m] - \omega^2[M_F^m]$
$[K^B]$	: 底板インピーダンスマトリクス
$[K^{SN}]$	: 側壁の法線方向表面力によるインピーダンスマトリクス
$[K^{ST}]$	: 側壁の接線方向表面力によるインピーダンスマトリクス
$L$	: 薄層分割したときの全層数 (最下層も含む)
	: 内部拘束面の個数
$L_S$	: $S$ 波の波長
$m$	: 基礎の質量
$m_b$	: 上部構造物の質量
$M$	: 境界面 $S_d$ 上の要素数
$[M]$	: 基礎の質量マトリクス
$[M_b]$	: 上部構造物の質量マトリクス
$[M_E]$	: 上部構造物の等価質量マトリクス
$[M_F^m]$	: 軸対称有限要素法による質量マトリクス
$n$	: 領域 $V'$ 内に向かう法線ベクトル $[= (n_1, n_2, n_3)]$
$N_1, N_2, N_3$	: 内挿関数
$N$	: 薄層要素分割における全節点数 ( $= 2L - 1$ )
$p_i$	: 領域 $V$ 内の $i$ 方向表面力
$\hat{p}_i$	: 領域 $V'$ 内の $i$ 方向表面力
$\tilde{p}_i$	: 領域 $V''$ 内の $i$ 方向表面力
$p_i^r$	: 放射場における $i$ 方向表面力
$p_i^f$	: 入反射場における $i$ 方向表面力

$p_i^s$	: 散乱場における $i$ 方向表面力
$p_i^m$	: 表面力の周方向波数 $m$ のフーリエ係数
$p_{ij}(x; \xi)$	: $x$ 点における $i$ 方向点加振による $\xi$ 点での $j$ 方向表面力
$p_{ji}^m(\xi; x)$	: $\xi$ 点における $j$ 方向 $m$ 波リング状線加振時の $x$ 点での $i$ 方向表面力
$\{p_d\}$	: 境界面 $S_d$ 上の表面力
$\{\tilde{p}_d\}$	: 全体場の表面力
$\{p_g^m\}$	: 地震強制力の分布ベクトル
$P_n^m$	: 第 1 種 Legendre 陪関数
$q$	: 波数
$q_j$	: $j$ 番目の波数に関する固有値
$[Q]$	: 外部領域の剛性マトリクス
$[Q^R]$	: Rayleigh 波成分に対する固有値マトリクス
$[Q^L]$	: Love 波成分に対する固有値マトリクス
$r_o$	: 加振ディスク半径
$(r, \theta, z)$	: 局所円筒座標
$R_o$	: 基礎半径
$\text{Re}[\ ]$	: 複素数の実部
$\bar{s}_r$	: 波数領域の $r$ 方向応力
$\bar{s}_\theta$	: 波数領域の $\theta$ 方向応力
$\bar{s}_z$	: 波数領域の $z$ 方向応力
$s_J$	: 簡単な幾何形状を持つ平面パネル (要素)
$\Delta s_I$	: パネル $s_I$ の面積
$S_d$	: 外部領域と内部領域の境界面
$S_e$	: 領域 $V'$ と領域 $V''$ の境界面
	: 内部拘束面
$S_e^+$	: 領域 $V''$ の上部表面
$S_e^-$	: 領域 $V''$ の下部表面
$S_f$	: 自由地表面
$S_f'$	: 内部領域 $V'$ の蓋
$[S]$	: 面積マトリクス
$T_b$	: 上部構造物の固有周期
$u_r$	: $r$ 方向変位
$u_\theta$	: $\theta$ 方向変位
$u_z$	: $z$ 方向変位
$\bar{u}_r$	: 波数領域の $r$ 方向変位
$\bar{u}_\theta$	: 波数領域の $\theta$ 方向変位
$\bar{u}_z$	: 波数領域の $z$ 方向変位
$\bar{u}'_i$	: $\partial \bar{u}_i / \partial z$ の略表記
$u_i$	: 領域 $V$ 内の $i$ 方向変位
$\hat{u}_i$	: 領域 $V'$ 内の $i$ 方向変位
$\tilde{u}_i$	: 領域 $V''$ 内の $i$ 方向変位
$u_o$	: 半無限層における入射 $S$ 波振幅の 2 倍

$u_i^e$	: 基礎の定常加振変位振幅の $i$ 方向成分
$u_i^r$	: 放射場における $i$ 方向変位
$u_i^f$	: 入反射場における $i$ 方向変位
$u_i^s$	: 散乱場の変位
$u_i^m$	: 変位の周方向波数 $m$ のフーリエ係数
$\{\tilde{u}_d\}$	: 全体場の変位
$\{\tilde{u}_d^m\}$	: $S_d$ 面の変位の相対変位成分
$u_{ij}(x; \xi)$	: $x$ 点における $i$ 方向点加振による $\xi$ 点での $j$ 方向変位
$u_{ji}^m(\xi; x)$	: $\xi$ 点における $j$ 方向 $m$ 波リング状線加振時の $x$ 点での $i$ 方向変位
$[U^e(x)]$	: モードマトリクス
$V$	: 外部領域
$V'$	: 基礎部分に相当する内部領域
$V''$	: 領域 $V'$ 内の空孔領域
$V_S$	: 横波速度 ( $S$ 波速度)
$V_{S1}$	: 表層の $S$ 波速度
$V_S^r$	: 埋戻し土の $S$ 波速度
$V_P$	: 縦波速度 ( $P$ 波速度)
$x$	: 位置ベクトル [= $(x_1, x_2, x_3)$ ]
$x^I$	: $I$ 番目パネルの重心点
$\{y\}$	: Rayleigh 波成分に対する左固有ベクトル
$[Y]$	: Rayleigh 波成分に対する左固有マトリクス
$Z_m(x)$	: $H_m^{(2)}(x)$ または $J_m(x)$
$\{z\}$	: Rayleigh 波成分に対する右固有ベクトル
$[Z]$	: Rayleigh 波成分に対する右固有マトリクス
$\gamma$	: $= V_S/V_P$
$\delta_{ij}$	: クロネッカーのデルタ記号
$\{\delta^m\}$	: 軸対称有限要素の節点変位ベクトル
$\Delta_i$	: $i$ 方向の並進モード
$\Delta_H^o$	: 水平基礎入力動
$\{\Delta^m\}$	: $S_d$ 面の変位の剛体変位成分
$\varepsilon_m$	: Neumann 因子 ( $= 2 - \delta_{m0}$ )
$\zeta_N$	: 側壁の法線方向インピーダンスの寄与率
$\zeta_T$	: 側壁の接線方向インピーダンスの寄与率
$\eta_j$	: ソース (加振強度) 分布
$\eta_j^r$	: 放射場のソース分布
$\eta_j^s$	: 散乱場のソース分布
$\eta_i^m$	: ソース分布の周方向波数 $m$ のフーリエ係数
$\eta_j^J$	: $J$ 番目パネルのソース分布
$\lambda$	: ラーメの定数
$\Lambda_j$	: 一般化変位モード
	: 基礎を剛体とすると剛体変位モード
$\{\Lambda^o\}$	: 基礎入力動 (無質量基礎の応答)

$[\Lambda_d^m]$	: 剛体変位モードマトリクス
$\mu$	: せん断剛性
$\mu_1$	: 表層のせん断剛性
$\mu_2$	: 基盤層のせん断剛性
$\nu$	: ポアソン比
$\xi$	: 位置ベクトル [= $(\xi_1, \xi_2, \xi_3)$ ]
$\rho$	: 地盤の密度
$\rho'$	: 基礎の密度
$\rho_z$	: 鉛直加振力分布
$\rho_x$	: 水平加振力分布
$(\rho, \varphi, z)$	: 全体円筒座標系
$(\rho_e, \varphi_e, z_e)$	: 加振位置座標
$\{\phi_y\}$	: Love 波成分に対する固有ベクトル
$\Phi_i$	: 基礎上端中央点における $i$ 軸回りの回転モード
$\Phi_M^o$	: 回転基礎入力動
$[\Phi_x]$	: $r$ 方向固有マトリクス
$[\Phi_z]$	: $z$ 方向固有マトリクス
$[\Phi_y]$	: $\theta$ 方向固有マトリクス
$\omega$	: 円振動数
$\omega'$	: 領域 $V'$ の最小固有振動数
$\omega''$	: 領域 $V''$ の最小固有振動数
$\omega_{max}$	: 解析対象振動数の上限
$\partial$	: 偏微分記号

# 目次

論文概要	i
Abstract	iii
記号表	v
<b>1 序論</b>	<b>1</b>
1.1 緒言	1
1.2 埋込み基礎の動的相互作用問題に関する既往の研究	2
1.3 研究の目的と概要	6
1.4 関係論文	9
<b>2 境界積分方程式法を用いた動的相互作用解析</b>	<b>12</b>
2.1 動的相互作用解析の概要	12
2.2 境界積分方程式の定式化	16
2.3 境界積分方程式の離散化	17
2.4 インピーダンスマトリクス	19
2.5 地震強制力ベクトル	21
<b>3 薄層地盤のグリーン関数</b>	<b>23</b>
3.1 波数領域の運動方程式	23
3.2 要素剛性方程式	25
3.3 変位の一般解	28
3.4 薄層法点加振解	35
3.5 薄層法リング状線加振解	38
<b>4 内部共振解の除去法</b>	<b>45</b>
4.1 内部共振解と解析精度	45
4.2 蓋と内部空孔面による内部共振解の除去法	47
4.3 内部拘束面による内部共振解の除去法	52
<b>5 応力マトリクスの修正法</b>	<b>56</b>
5.1 弾性地盤における修正法	56
5.2 粘弾性地盤における修正法(その1)	61
5.3 粘弾性地盤における修正法(その2)	67
<b>6 境界積分方程式法と軸対称有限要素法の結合法</b>	<b>72</b>
6.1 外部領域の剛性方程式	72
6.2 結合法	74
6.3 地震強制力の導出法	79

7	境界積分方程式法と3次元境界要素法の結合法	81
7.1	外部領域の剛性方程式	81
7.2	内部領域の剛性方程式	85
7.3	外部領域と内部領域の結合方程式	89
7.4	任意形状剛基礎の動的相互作用解析法	90
7.5	1/4解析	91
7.5.1	外部領域	91
7.5.2	内部領域	93
7.6	解析法の有効性の検証	95
7.6.1	フーリエ展開次数と周方向分割数に関する調査	95
7.6.2	埋込み正方形基礎のインピーダンス値の比較	98
8	二層地盤における円筒剛基礎のねじれインピーダンス特性	100
8.1	解析方法と解析モデルの設定	100
8.2	弾性二層地盤におけるねじれインピーダンス	101
8.3	粘弾性二層地盤におけるねじれインピーダンス	105
8.4	まとめ	107
9	埋込み基礎の動的特性に及ぼすはく離と滑動の影響	108
9.1	解析方法と解析モデルの設定	108
9.2	インピーダンスと基礎入力動に及ぼすはく離と滑動の影響	110
9.3	構造物の応答に及ぼすはく離と滑動の影響	117
9.4	まとめ	122
10	埋込み基礎の動的特性に及ぼす埋戻し土の影響	123
10.1	解析方法と解析モデルの設定	123
10.2	インピーダンスと基礎入力動に及ぼす埋戻し土の影響	125
10.3	構造物の応答に及ぼす埋戻し土の影響	131
10.4	構造物の高さに対する影響	135
10.5	まとめ	140
11	埋込み矩形基礎の動的特性	141
11.1	解析方法と解析モデルの設定	141
11.2	埋込み正方形基礎の地反力分布	143
11.3	埋込み正方形基礎のインピーダンス	148
11.4	埋込み矩形基礎のアスペクト比に関する調査	151
11.5	地盤の成層性の影響	154
11.6	まとめ	157
12	結論	158

謝辞	162
参考文献	163

## Appendix

A 相反定理による境界積分方程式の定式化	169
B 境界積分方程式の軸対称表現	172
B.1 変位表現 . . . . .	172
B.2 表面力表現 . . . . .	175
C インピーダンスの実部と虚部の関係	178
D 多層地盤における入反射場解析	180
D.1 平面波の波動方程式 . . . . .	180
D.2 <i>SH</i> 波入射の場合 . . . . .	181
D.3 <i>SV</i> 波, <i>P</i> 波入射の場合 . . . . .	185
D.4 直交デカルト座標系における変位と表面力 . . . . .	190
E 動のおよび静的 Kelvin 解の変位と表面力	192
E.1 動的 Kelvin 解の変位と表面力 . . . . .	192
E.2 静的 Kelvin 解の変位と表面力 . . . . .	192

# Chapter 1

## 序論

### 1.1 緒言

震源から発した地震波は地盤を介して構造物の基礎に入射する。このとき、基礎は地震波の地動を構造物に伝えると同時に、その結果として構造物に生ずる振動を支え、これを地盤に伝える役割を果たす。つまり、地盤と構造物とが基礎を介して相互に影響し合っているわけで、これを地盤と構造物の動的相互作用（Soil-Structure Interaction）と呼んでいる。

地盤と構造物の動的相互作用は、その機能から二つに分けて考えることができる。その一つは、入力 of 相互作用（Kinematic Interaction）と呼ばれるものである [1] [2]。これは、地震動を受けたとき基礎が周囲の土の変位を拘束して生ずる基礎の動きをいい、この場合は基礎の慣性力は考えない。つまり無質量基礎とする。一般に地動は下層を通過して上昇するとき震源からの経路および地層構造によっては地表面に必ずしも垂直に入射するとは限らず、斜め入射または表面波として伝わってくることもある。このような場合、地表面上に基礎が設置されていると、基礎は地盤に対して相対的に剛であるため、入射する地動の位相差を基礎底面内で拘束し、平均化する働きがある。これが入力の相互作用である。基礎は地動の位相差により自由地表面の1点の地動とは明らかに異なるねじれ動を生じたりする。また、基礎内で位相差が打ち消されることにより基礎内を透過する地震動のエネルギーを弱める結果ともなり、この相互作用を入力損失とも呼んでいる [3]。ただし、これは地震動が鉛直方向から入射し、同一位相、同一振幅で基礎に作用する場合には生じない。しかし、基礎が埋込まれていると、鉛直入射の場合でも基礎側面には地震動が位相差をもって作用するため、基礎にロッキング振動が起こったり、入力の高振動成分が低減されたりする。このように、地震時における構造物への実際の入力は、構造物の存在しない自由地盤で観測された地動ではなく、入力の相互作用を考慮した無質量基礎の応答である。これを基礎入力動（Foundation Input Motion）と称している。

他のもう一つの相互作用は、構造物の質量を考慮した場合に現れる相互作用である。基礎を介して構造物に地震動が入力すると構造物が振動する。このとき、構造物には慣性力が発生し、その力は地盤に作用して新たな地動を生ぜしめる。いいかえると、構造物が新たな震源となって地盤を動かし、それが再び構造物に入力となって作用するという現象が起こる。これは慣性力を媒介として生じる相互作用であり、慣性の相互作用（Inertial

Interaction) と呼ばれている [1] [2]。この場合、地盤は基礎の動きに対する抵抗材として働き、その作用は地盤のばね効果と減衰効果の和によって表される。この地盤による抵抗力の変位に対する係数を動的地盤剛性、またはインピーダンス関数 (Impedance function) と称している。また、この場合の減衰は構造物の振動エネルギーの一部が弾性波動として半無限地盤に逸散することによって生ずるもので、地下逸散減衰、または radiation damping と呼ばれ、構造物に付与される減衰の中でも重要な部分を占めている。

地盤と構造物との動的相互作用問題に関する研究は、1935、1936年に発表された妹沢、金井 [4] [5] の地下逸散減衰に関する研究、および同一時期に発表された Reissner [6] の半無限弾性地盤上の円形剛基礎に上下加振力が作用した時の基礎の応答解析に端を発している。その後約半世紀にわたって次第にこの問題の重要性が認識され、特に最近の20数年間にこの問題に関する研究はめざましい進展を遂げてきた。この間、地表面基礎から埋込み基礎へ、単独基礎から複数基礎へ、一様地盤から成層地盤、さらには不整形地盤へ、また単なる動的地盤剛性の評価から基礎入力動を含めた総合的な評価へと研究の対象が実験・実測と解析の両面において拡大して来ている。こうした活発な研究は、そもそも大規模構造物に対する需要の増大とこれを解析するコンピュータの発達によって促されたものであるが、それらの背景により今日では、深い埋込みを有する大規模構造物と複雑な構成をもつ地盤の動的相互作用解析も可能になりつつある。

最近、原子炉建屋、LNG・LPGおよび原油貯蔵タンク、長大橋梁等の大規模な重要構造物が我が国の立地および地質条件から、埋込みの深い基礎を有する構造物あるいは地中構造物として建設される傾向にある。我が国の地震環境を考えれば、これらの構造設計は十分に耐震安全性を確保したものでなければならない。ところで、これらの構造物では基礎そのもののスケールが大きいことや構造物の重量が非常に重いことなどから、地盤と構造物の動的相互作用が地震動の特性に大きな影響を与えていることが考えられる。しかしながら、地震動特性に与える影響のうち、実務設計に採り入れることができるのは、地震の規模、震央距離、建設地点の地盤条件に限られ、現段階では地盤と構造物の動的相互作用を考慮されるまでに至っていない。この主な理由としては、埋込み基礎と地盤の動的相互作用の研究が未だ発展途上にあるため、設計上問題となる様々な事柄に対して十分答えきれていないことが挙げられる。特に埋込み基礎の研究では、実地盤の成層性や半無限性などを十分に評価しているものが少なく、地盤のモデル化の自由度などの点で地表面基礎の研究に比べてかなり後れをとっている。

本研究では、このような現状を踏まえ、より実地盤に近い多層成層地盤モデルを対象とした計算効率のよい埋込み基礎の動的相互作用解析法を開発し、入力相互作用と慣性の相互作用の両面から地盤と埋込み基礎の動的相互作用問題を論ずる。

## 1.2 埋込み基礎の動的相互作用問題に関する既往の研究

埋込み基礎の動的相互作用問題に関する研究は、1966年の田治見 [7] による表層を貫いて基礎に達する円筒基礎の回転振動問題の解析に始まる。田治見は3次元波動理論に立脚し、表層と基礎の波動インピーダンス比に基づく減衰を表層の内部減衰に含めること、表層の上下変位は水平変位に比べて小さいものとして無視すること等の仮定のもとで側面の回転インピーダンス効果を論じた。さらに、田治見 [8] は水平振動の解析も行っ

ている。1972、73年にNovakとBeredugo [9] [10] およびNovakとSachs [11]は、円筒基礎の底面インピーダンスと側面のそれを分離し、底面インピーダンスには地表面基礎のコンプライアンスの逆数を利用することにより連成振動を含むより定量的な解析を行った。1975年三浦は田治見の理論を応用して、表層を貫いて基盤に達する箱型基礎のインピーダンス解析 [12] や円筒基礎に対する埋戻し土の影響を調査する解析 [13] を行った。

このような近似的手法に対して、1976年Luco [14]は半球基礎のねじれインピーダンスと斜めSH波入射に対するねじれ基礎入力動の厳密解を球座標系における固有関数展開法により誘導した。さらに、ApselとLuco [15]は埋込み深さの影響を調べるため、この問題を半楕円体基礎に拡張し、楕円体座標系における固有関数展開法によりその厳密解を得た。1982年LeeとTrifunac [16]はLucoの研究 [14]を応用し、半球基礎のねじれ以外の運動モードに関し地表面の応力境界条件を部分的に満足するインピーダンスと実体波に対する基礎入力動の解析解を求めた。

埋込み基礎の解析的な研究で得られた解は、半球や半楕円体のような単純な基礎形状に関する厳密解であるか、基礎の底面と側面の相互の影響を無視するという仮定の制約を受けた近似的解析解である。これらに対して、有限要素法は基礎形状や地盤性状をより詳細に評価できる手法である。しかし、半無限領域としての地盤に有限要素法を単純に適用したモデルでは、有限化された領域から波動の反射が起こり、無限遠に逸散する進行波を表現できない。そこで、1969年LysmerとKuhlemeyer [17]は逸散波を吸収し反射波の出現を抑える粘性境界を設けた軸対称有限要素モデルによって半無限弾性地盤を模擬し、円筒基礎の垂直コンプライアンスを求めた。UrlichとKuhlemeyer [18]は、水平・回転連成系の解析を行い、埋込み深さが増大するとクロスコンプライアンスが設計上無視し得なくなること示した。しかし、両者の地表面円形基礎の解析結果は、既往の解析解を正確に近似するまでに至っていない。これは、粘性境界における波動のエネルギー吸収が完全でないことを示している。

1975年KauselとRoesset [19] [20]は水平方向の波動吸収効率を改善するため水平方向の波動逸散を半解析的に表現する薄層要素を開発し、基盤上の表層中に埋込まれた円筒基礎のインピーダンス解析を行った。しかし、下方への波動逸散を十分に表現するには至っておらず、これは特に低振動数域における解の精度に大きく影響した。これとは独立に、田治見等 [21]によっても薄層要素の開発が行われている。

1977年Day [22] [23]は、基礎にパルス衝撃を与え、基礎から逸散する波動が人工的に設定した境界から反射して再び基礎に影響を与える前に計算を打ち切ることを前提に、大次元の有限要素モデルを用いて過渡応答解析を行い、時刻歴のフーリエ変換量としてインピーダンスおよび基礎入力動を算定した。Dayの方法は、逸散波が反射を起こす問題を解決したものであるが、大容量計算を必要とすること、一様地盤の問題に限定されることなどの理由からその後の発展が文献に示されていない。

有限要素法を単独に用いる方法では、波動の逸散性を厳密に表現することが難しく、また、3次元解析においては膨大な計算量を必要とする。これらの欠点を克服するために、1980年Dasgupta [24]は、連続体理論によって求めた半無限地盤における埋込み基礎上面に相当する地表面部分の剛性マトリクスと、有限要素法とその縮約によって求めた埋込み基礎の外周部分の剛性マトリクスを結合することによって、埋込み基礎が地盤と接する面の剛性マトリクスを作成する方法を工夫した。しかし、この手法では、地表面部分の節点数と埋込み基礎が地盤と接する面の節点数を同一にしなければならない

め、基礎の埋込みが浅い場合には有効な手法となるが、埋込みが深い場合への適用には問題がある。

また、軸対称薄層要素法と3次元有限要素法の結合解法により、計算効率のよい任意形状埋込み基礎の解析を可能にした研究も行われている。1982年上島ら [25] は、Waasら [26] によって提案された軸対称問題における薄層要素法と有限要素法の結合解法を発展させ、従来の軸対称有限要素領域内の一部に3次元有限要素領域を付加し、これらを結合する解法を提案している。この方法では、基礎近傍以外の領域を軸対称として扱えるため、かなりの計算効率の改善が望める。また、底面に粘性境界を付与することにより半無限地盤の模擬も可能である。しかし、この方法では、軸対称領域の変位場が1次のフーリエ展開で表されているため、一般に3次元領域と軸対称領域の境界上で非適合な結合となり、基礎形状、加振方向等には制約が加えられる。これに対して、1986年 Werkle [27] は、外部領域に任意の波数でフーリエ展開した薄層要素法を適用して、これらをフーリエ逆変換することにより内部領域と結合する方法を提案している。この方法によれば、任意形状の埋込み基礎の解析が可能である。しかしながら、この方法では、剛基盤仮定を用いているため、地盤の半無限性を考慮できないこと、および表層が厚い場合には、有限要素数が膨大となることなどの問題が残されている。

有限要素法に対して境界積分方程式法は、波動の逸散性を厳密に表現し、地盤の成層性にも対応でき、しかもインピーダンスおよび基礎入力動を混合境界値問題の解として総合的に解析し得る方法である。1978年 Dominguez [28] は、全無限体のグリーン関数(動的 Kelvin 解)を利用した境界要素法により、半無限一様地盤に埋め込まれた箱型基礎の周波数領域における動的応答解析を行った。1985年 Karabalis と Beskos [29] は、同様な方法によって時間領域における解析を行っている。この方法では、グリーン関数の計算が容易である反面、埋込み基礎と地盤が接する面に加えて自由地表面上の境界条件をも満足させることが必要であり、このため境界要素分割数が膨大となる。

1979年 Apsel [30] は、伝達マトリクス法を用いて半無限平行多層地盤における地中リング状線加振解の一般表現を示し、これを積分方程式法に利用して円筒基礎のインピーダンス解析を行った。解析には、地中リング状線加振解を円筒基礎の内部に分布させ、その線形結合によって場を表現し、基礎と地盤の密着条件を満足するようにグリーン関数の分布強度を決定する手法が採られた。1986年に Luco と Wong [31] はこの方法により一様地盤における半球基礎の全運動モードに対するインピーダンス解析を行い、その結果を表に示している。同様に、1987年 Apsel と Luco [32] は一様地盤における様々な埋込み深さをもつ円筒基礎の全運動モードのインピーダンス値を表に示している。また、この論文では、ねじれインピーダンスに及ぼす側壁の高さの影響や多層地盤における解析例も示されている。

1982年 Maeda [33] は、松岡と八幡 [34] [35] [36] によって導出された半無限一様地盤の地中点加振解を境界積分方程式法に利用し、半球基礎の動的相互作用解析を行っている。Maeda は得られたインピーダンス関数と基礎入力動を既往解と比較することによってこの手法の有効性を検証しているが、これらの解析例では解析対象振動数が比較的低い値に限られている。1985年に Rizzo ら [37] は、Apsel と Luco [32] [38] [39] による半無限地盤の地中点加振解を境界積分方程式法に利用し、一様地盤における半球基礎のねじれインピーダンスを高振動数域まで解析している。しかし、この結果得られたねじれインピーダンス関数は、掘削地盤に相当する内部領域の共振点付近の幅広い振動数域で

正解から大きく離れている。Rizzo らはこの内部共振現象による解析精度の悪化の問題を解決するため内部領域に静止条件を課す拘束点を置き、これによって増えた条件式数をラグランジュ乗数法によって処理する方法を提案している。また、後に井口ら [40] はラグランジュ乗数法の代わりに最小自乗法を用いる方法も提案している。

半無限地盤における解析的なグリーン関数は波数に関する無限積分を含むことや、埋込み基礎の解析ではグリーン関数の変位解ばかりでなく応力解も要求されることなどから、境界積分方程式法による埋込み基礎の解析は、一般に膨大な計算時間を要する。このような問題に対して、1986年三田 [41] は、有限要素法と積分方程式法の結合法によって、半無限領域のグリーン関数応力解の計算を回避するとともに Dasgupta [27] の方法を発展させグリーン関数の加振点と観測点を基礎内部の地表面と平行な面に置く方法を提案し、グリーン関数の計算量の削減を計っている。1988年に吉田と高橋 [42] は、波数に関する半無限積分で表現される成層地盤のグリーン関数が、円筒座標系では振動数の他、主に加振点の深さ、観測点の深さおよび加振点と観測点の水平距離に依存していることに着目し、あらかじめ振動数毎に、ある加振深さに対して深さ方向と半径方向に離散化した格子状の観測点群を設定し、各観測点でグリーン関数を評価した数値表を用意しておくことにより計算時間の短縮をはかっている。

このような解析的なグリーン関数に対して、1980年に Tajimi [43]、Waas [44]、1981,82年に Kausel [45] [46] [47] らは、3次元薄層法を利用してグリーン関数を近似的に求める方法を提案した。この方法ではグリーン関数の計算は波数に関する代数固有値問題に帰着され数値積分を必要としないため計算効率が飛躍的に改善された。1982年に田治見と泉川 [48] は薄層法による地中点加振解を基礎内に3次元的に分布させ基礎全体を剛体加振する容積法によって箱型基礎の解析を行っている。薄層法では下方への波動逸散性が問題となったが、彼らは最下層にダッシュポット・マットを設けることによって半無限地盤を模擬している。1984年に Hull と Kausel [49] は、薄層法グリーン関数における下方への波動逸散性を改善するために最下層に半無限一様地盤の剛性マトリクスを波数が十分小さいとしてテーラ展開したものを付加する方法を提案した。増田と佐々木 [50] は半無限地盤上の地表面点加振解を理論解と比較することによってこの方法の有効性を確かめている。

1985年に Waas ら [51] は薄層法によるリング状線加振解を導出し、埋込み基礎に相当する領域を有限要素法で、それ以外の領域を境界積分方程式法で解析する結合解法によって、粘弾性多層地盤における円筒基礎のインピーダンス解析を行った。しかし、この解析では最下層を剛基盤としているため、半無限一様地盤における地表面基礎のインピーダンスを正確に近似するには至っていない。1986年松本ら [52] は、Kausel ら [47] の導出した薄層法点加振解を境界積分方程式法に利用して多層地盤における箱型基礎の解析を行っている。彼らは、Waas ら [51] の方法を一般的な3次元解析に拡張することによりグリーン関数応力解の計算を回避している。

薄層法グリーン関数を利用した境界積分方程式法は、多層地盤における埋込み基礎の動的解析を行う上で、非常に有力な手法であるが、これまでの研究では、高振動数域までの精度を保証した解析例が見あたらない。

以上に概観したように、埋込み基礎の解析では、精度と計算効率の良さを同時に満足する解析手法が未だ少ない。このため、対象とする地盤モデルは半無限一様地盤かまたは表層下に剛基盤を仮定した単純なものが多く、また、動的相互作用の効果もインピー

ダンス関数のみで評価される場合が多い。したがって、埋込み基礎の研究では、地盤の成層性を考慮でき、動的相互作用問題をインピーダンスと基礎入力動の両面から精度と計算効率よく解析できる手法の開発が望まれる。

### 1.3 研究の目的と概要

埋込み基礎の動的相互作用解析は、基礎面の境界条件と自由地表面条件および無限遠方における進行波条件を半無限弾性体の境界条件として課す外部境界値問題に帰着される。半無限弾性体の動的グリーン関数（点加振解、リング状線加振解）を利用した境界積分方程式法はこれらの境界条件を適切に評価し得る解析法である。この解析法の有効性は採用する動的グリーン関数の計算法に大きく依存している。多層地盤の動的グリーン関数としては、前節で見たように Apsel らによる伝達マトリクス法による厳密解 [30] [38] [39] と、田治見、Kausel、Waas 等による薄層法による近似解 [43] [44] [45] [46] [47] [51] がある。伝達マトリクス法の解は、波数に関する片側半無限積分によって表され、これを加振点と観測点の組合せごとに数値積分して得られる。一方、薄層法では波数に関する大次元の複素固有値問題を解く必要があるが、数値積分を必要とせず、しかも多点での即時計算が可能である。したがって、動的グリーン関数を多点で大量に計算する必要のある境界積分方程式法では薄層法が有効であると考えられる。

しかしながら、薄層法グリーン関数は地盤の深さ方向に有限要素法的な手法を用いて得られる近似解であるため、次の二つの重要な問題が発生する。一つは内部領域の共振が外部領域の解析に影響を与える内部共振現象の問題である。この内部共振現象はグリーン関数の精度の低下に比例して内部共振振動数付近のより広い振動数領域で発生する。このため薄層法グリーン関数のような近似解を利用した埋込み基礎の解析にあたっては、このような内部共振解の発生を解析対象振動数領域から除去する必要がある。他のもう一つの問題は、応力場の精度である。薄層法グリーン関数の応力解の精度は加振点近傍で著しく悪化する。このため、境界積分方程式を離散化する場合に、グリーン関数の応力解の積分を加振点を含む要素上で適切に評価することができない。これは境界積分方程式法による解析の精度を大きく左右する重要な因子である。

本研究の第一の目的は、以上の二点の問題を解決し、周方向にフーリエ展開された薄層法リング状線加振解を利用した境界積分方程式法による多層地盤における埋込み基礎の有効な解析法を確立し、さらに、この方法と軸対称有限要素法、あるいは3次元境界要素法との結合を行い、埋戻し土、任意形状埋込み基礎などの幅広い解析が行えるような一連の解析法を開発することにある。

本研究で対象とする埋込み基礎は、地表面基礎に比して底面のみならず側壁のインピーダンスが増大することと、高振動数域での地震波の入力損失が側壁でも生じるため、地震作用時により大きな制震効果が期待される。インピーダンスの増大は、埋込み深さに比例して基礎の底板と側壁の両部分において生じるが [53]、理論的には、側壁部分の増大がより顕著である。しかし、側壁部分では、地盤とのはく離や滑動等の非線形現象が発生すること、また、一般に側壁部分は埋戻し土を介して地盤と接していることなどから、上に挙げた制震効果が必ずしも十分実現されるとは言い難い。したがって、埋込み基礎の動的特性を解明するためには、これらの影響を考慮した動的相互作用解析が必要となる。

本研究の第二の目的は、上述の解析法を利用して、側壁と地盤のはく離と滑動、埋戻し土の影響、および基礎形状の効果などを考慮した埋込み基礎の動的相互作用解析を行い、多層地盤における埋込み基礎の動的特性の一端を解明することにある。

本論文は、第1章序論を含め全12章により構成されている。第2章から第7章では、本論文の第1の目的である解析法の開発について記し、第8章から第11章では、第2の目的である埋込み基礎の動的特性の調査について記している。第2章以後の概要を以下に示す。

第2章では、境界積分方程式法を用いた動的相互作用解析の概要を説明する。2.1節では、動的相互作用問題の数理的構成を波動論の立場から記述する。その過程でインピーダンスおよび地震強制力の定義式が誘導される。地震強制力は、静止させた基礎に地震波動が入射したとき基礎が受ける力を意味し、基礎入力動は、地震強制力をインピーダンスで割った量として求められる。次に、Lucoら[54]にしたがい、地盤と基礎の動的相互作用の効果が上部構造物への入力としてどのように評価されるかを概説する。2.2節では境界積分方程式の定式化を行う。境界積分方程式法の定式化には直接法と間接法がある。変位と応力の関係を直接定式化するものが直接法である。これに対し、ソース分布を介して変位と応力を別個に表現するものが間接法である。本研究では間接法を採用する。2.3節では、2.2節で定式化された境界積分方程式を離散化する手法について述べる。2.4節では、インピーダンスマトリクスの導出法を示す。ここでは、グリーン関数の応力解を利用する直接的方法の他に、グリーン関数の応力解を利用しない間接的方法も示している。2.5節では、地震強制力ベクトルの導出法を示す。地震強制力は散乱場を決定するソース分布から直接求められる。

第3章では、薄層法によるグリーン関数の導出法を示す。3.1節では、円筒座標系における3次元弾性体の運動方程式に波数 $q$ に関してFourier-Hankel変換された変位解を導入して波数領域の運動方程式を導出する。3.2節では、3.1節で得られた波数領域の運動方程式を重み付き残差法を用いて離散化し、薄層一要素の剛性方程式を導出する。これは、波数 $q$ に関する2次式の形となる。3.3節では、この要素剛性方程式を重ね合わせることによって全体剛性方程式をつくる。これを波数 $q$ に関する固有値解析によって解き、波数領域における変位解を求める。この変位解を逆変換して空間領域における変位の一般解を求める。3.4節では、3.3節で得られた変位の一般解に点加振の境界条件を導入し、薄層法点加振解を導出する。その際、波数 $q$ に関する無限積分は陽な形に解かれる。3.5節では、3.4節の点加振解をリング状に積分することによって薄層法リング状線加振解を誘導する。

第4章では内部共振解の除去法を示す。境界積分方程式法における内部共振解の除去法としては、前節に挙げたようにRizzoら[37]または井口ら[40]の方法があるが、薄層法のようにグリーン関数が厳密でない場合にはこれらの方法では十分な効果が得られない。このため本章では新たな内部共振解の除去法を提案する。4.1節では内部共振現象を数理的に説明し、半球剛基礎のインピーダンス虚部の解析によって内部共振現象が実際の解析に及ぼす影響について調査する。4.2節では、基礎領域に蓋および内部空孔面を付加することによって、内部共振解を解析対象振動数の外に上昇させることを試みる。4.3節では、4.2節の内部空孔面の代わりに面積が境界積分方程式の分割要素に相当する複数の内部拘束面を導入する。内部拘束面の採用は配置の分散と設定個数の自由度を高めるため、内部領域におけるより少ない要素分割を可能にする。

第5章ではグリーン関数応力解の加振点近傍における精度悪化の問題を解決するため、グリーン関数応力解の各要素上の積分値で構成される応力マトリクスを適当な修正条件のもとに再評価する方法について示す。5.1節では、弾性多層地盤における修正法を示す。この方法は、基礎部分に相当する内部領域の応力が実数となることを応力マトリクスの修正条件とするものである。5.3節、5.4節では、粘弾性多層地盤における修正法を示す。5.3節の方法は、4.3節に示した内部拘束面を加振させても基礎面を静止させれば外部応力は発生し得ないという事実から応力マトリクスの修正条件を導くものである。5.4節の方法は、外部領域に加振点をもつグリーン関数（点加振解、リング状線加振解）が内部領域で満足すべき境界積分方程式を導出し、これを応力マトリクスの修正条件とするものである。

第6章では、基礎周辺の地盤性状をより詳細に評価するため、軸対称問題における境界積分方程式法と有限要素法の結合法を示す。6.1節では境界積分方程式法による外部領域の剛性方程式を導出する。6.2節では、6.1節で得られた境界積分方程式法による剛性方程式を仮想仕事法を用いて有限要素法に対応する剛性方程式に変換し、これを軸対称有限要素法によって離散化された内部領域の剛性方程式に加算する。この結合法の特徴は、境界面に接する1つの有限要素に対して、多数の境界要素を対応させることができる点にあり、したがって、外部薄層分割とは独立に必要な最小限の有限要素分割が可能である。6.3節では地震強制力の導出法について述べる。

第7章では、任意形状埋込み基礎の解析を行うため、軸対称問題における境界積分方程式法と3次元境界要素法の結合解法を示す。この方法は、地盤を仮想境界面によって基礎を含む内部領域とそれ以外の外部領域に分割し、外部領域には第5章までに示した薄層法リング状線加振解を用いた境界積分方程式法を、内部領域には動的 Kelvin 解を用いた境界要素法を適用し、Werkle [27] の示したフーリエ逆変換手法により、外部領域の剛性マトリクスを内部領域の剛性マトリクスに加算する新たな方法である。7.1節では、Werkle [27] の示したフーリエ逆変換手法を用いて、外部領域の剛性マトリクスを周方向にフーリエ展開する方法について示す。7.2節では、動的 Kelvin 解を用いた境界要素法による内部領域の剛性マトリクスの定式化およびその計算法について示す。7.3節では、外部領域と内部領域の剛性マトリクスを結合して全領域の剛性方程式を求める。7.4節では、全領域の剛性方程式から剛基礎のインピーダンスマトリクス、地震強制力ベクトルおよび基礎入力動を求める方法を示す。7.5節では、変位場が  $x$  軸および  $y$  軸に関して対称性を有する場合に適用できる  $1/4$  解析法を示す。7.6節では、以上の解析法の有効性について検討する。

第8章では、多層地盤の基本的な解析例として、基盤着底型基礎のねじれインピーダンス解析を行い、表層と基盤層の剛性比、および地盤の材料減衰の影響に関して調査を行う。8.1節では、解析モデルと解析方法の概要について説明する。8.2節では、地盤に粘性を含まない弾性二層地盤におけるねじれインピーダンスを解析し、表層地盤の共振等について考察を行う。8.3節では、地盤に粘性を含む粘弾性二層地盤におけるねじれインピーダンスを解析し、弾性二層地盤のねじれインピーダンスとの比較、考察を行う。8.4節では、以上で得られた結果をまとめる。

第9章では、埋込み基礎の動的特性に及ぼす基礎側壁部分のはく離、滑動の影響について調査する。側壁部分のはく離、滑動等に関しては、このような現象を分析するための非線形解析手法は現段階では未だ開発されていない。したがって、側壁のはく離や滑

動の動的効果に対する定性的な議論も十分成されていないのが現状である。そこで本章では、基礎側壁部分におけるはく離や滑動等の非線形現象を、線形解析によって得られる側壁部分のインピーダンスと地震強制力に側壁の寄与率を表す簡単なパラメータを乗ずることによって近似的に評価する。9.1節では、解析方法と解析モデルについて説明する。本章では、一様地盤浮型基礎、表層浮型基礎、および基礎着底型基礎の基本的な3種の地盤構成を対象とする。9.2節では、水平・回転動連成系の動的相互作用解析を行い、インピーダンスと基礎入力動に及ぼす側壁部分のはく離と滑動の影響について調査する。9.3節では、上部構造物を単純なせん断一質点系にモデル化し、上部構造物の固有周期に対する地盤-基礎-上部構造物系の応答解析を行い、構造物の応答に及ぼすはく離と滑動の影響について調査する。9.4節では、以上で得られた結果をまとめる。

第10章では、埋込み基礎の動的特性に及ぼす埋戻し土の影響について調査する。埋戻し土の影響に関しては、三浦[13]が、3次元波動理論に基づく解析法によって、埋戻し土の硬軟度とその幅に注目して詳しい調査を行っている。しかし、この場合、構造物は、基礎に直接支持されていること、ロッキング振動のみを行うとすること、表層地盤と埋戻し土の深さ方向の変形は無視することなどの仮定が課されており、基礎入力動の評価もなされていない。また、三田ら[55]は2次元問題における境界積分方程式法と有限要素法の結合解法によって半無限一様地盤に埋込まれた構造物の水平・回転動連成系の基礎入力動をも含めた動的相互作用解析を行い、埋戻し土の影響を調査している。しかし、3次元問題における同様な解析例は未だ示されていない。そこで、本章では、第6章で示した解析法を用いて、第9章と同じ地盤構成を対象とした水平-回転動連成系の動的相互作用解析を行い、埋込み円筒剛基礎の動的特性に及ぼす埋戻し土の影響について調査する。10.1節では、解析法と解析モデルについて説明する。10.2節では、インピーダンスと基礎入力動に及ぼす埋戻し土の影響について調査する。10.3節では、上部構造物の固有周期に対する地盤-基礎-上部構造物系の応答解析を行い、構造物の応答に及ぼす埋戻し土の影響について調査する。10.4節では、上部構造物の高さが変化した場合について、10.3節と同様な調査を行う。10.5節では、以上で得られた結果をまとめる。

第11章では、第7章で示した解析法を用いて、現実の基礎形状に近い埋込み矩形基礎の水平・回転動連成系の動的相互作用解析を行う。11.1節では、解析法と解析モデルについて説明する。11.2節では、半無限一様地盤における埋込み正方形基礎の地反力分布を示す。11.3節では、各基礎面におけるインピーダンスの分担度を調査する。11.4節では、鉛直SH波入射に対する埋込み矩形基礎のアスペクト比の影響を調べる。11.5節では、表層浮型基礎を例に、埋込み正方形基礎における地盤の成層性の影響を調査する。11.6節では、以上で得られた結果をまとめる。

最終第12章においては、前章までに得られた事項を要約し、本研究の総括的な結論を導く。

## 1.4 関係論文

### A. 論文発表

1. 基本物理量の相互関係に基づく地盤と基礎の動的相互作用解析, 日本建築学会構造系論文報告集, 第367号, pp.103-110, 1986, 共著者: 吉田長行, 藤谷義信

2. 薄層地盤モデルにおける境界積分方程式法の利用, 日本建築学会構造系論文報告集, 第 372 号, pp.93-102, 1987.2, 共著者: 吉田長行, 藤谷義信
3. 粘弾性薄層地盤モデルにおける境界積分方程式法の利用－ねじれ振動の場合－, 日本建築学会構造系論文報告集, 第 383 号, pp.98-108, 1988.1, 共著者: 吉田長行, 藤谷義信
4. 粘弾性薄層地盤モデルにおける境界積分方程式法の利用－水平・回転振動の場合－, 日本建築学会構造系論文報告集, 第 394 号, pp.84-93, 1988.12, 共著者: 吉田長行, 藤谷義信
5. 埋戻し土を考慮した円筒剛基礎の動的応答特性, 日本建築学会構造系論文報告集, 第 405 号, pp.103-113, 1989.11, 共著者: 吉田長行, 藤谷義信
6. 結合解法による地盤と基礎の 3 次元動的相互作用解析, 日本建築学会構造系論文報告集, 第 421 号, pp.89-99, 1991.3, 共著者: 吉田長行, 瀬戸 裕, 藤谷義信

#### B. 口頭発表

1. 埋込み構造物と地盤の動的相互作用解析における基本式(その2)－解析法の検討, 日本建築学会大会学術講演梗概集(関東), pp.743-744, 1984.10, 共著者: 吉田長行, 藤谷義信
2. 境界積分方程式法による地盤と基礎の動的相互作用解析(その1), 日本建築学会大会学術講演梗概集(東海), pp.215-216, 1985.10, 共著者: 吉田長行, 藤谷義信
3. 境界積分方程式法による地盤と基礎の動的相互作用解析(その2), 日本建築学会大会学術講演梗概集(東海), pp.217-218, 1985.10, 共著者: 吉田長行, 藤谷義信
4. 薄層法リング状線加振解による軸対称埋込み基礎のインピーダンス解析, 日本建築学会大会学術講演梗概集(北海道), pp.575-576, 1986.8, 共著者: 吉田長行, 藤谷義信
5. 粘弾性薄層地盤モデルにおける境界積分方程式法の利用(1), 日本建築学会中国・九州支部研究報告集, pp.97-100, 1987.3, 共著者: 吉田長行, 藤谷義信
6. 粘弾性薄層地盤モデルにおける境界積分方程式法の利用(2), 日本建築学会中国・九州支部研究報告集, pp.101-104, 1987.3, 共著者: 吉田長行, 藤谷義信
7. 粘弾性多層地盤上の基礎のインピーダンス解析, 日本建築学会大会学術講演梗概集(近畿), pp.539-540, 1987.10, 共著者: 吉田長行, 藤谷義信
8. 粘弾性多層地盤における埋込み基礎の解析(1), 日本建築学会中国支部研究報告集, pp.1-4, 1988.3, 共著者: 吉田長行, 藤谷義信
9. 粘弾性多層地盤における埋込み基礎の解析(2), 日本建築学会中国支部研究報告集, pp.5-8, 1988.3, 共著者: 吉田長行, 藤谷義信

10. 粘弾性多層地盤における埋込み基礎の解析, 日本建築学会大会学術講演梗概集 (関東), pp.789-790, 1988.10, 共著者: 吉田長行, 藤谷義信
11. 薄層地盤モデルによる 3 次元動的相互作用解析, 日本建築学会中国支部研究報告集, pp.1-4, 1989.3, 共著者: 吉田長行, 瀬戸 裕, 藤谷義信
12. 埋戻し土を考慮した円筒剛基礎の動的応答特性, 日本建築学会中国支部研究報告集, pp.5-8, 1989.3, 共著者: 吉田長行, 藤谷義信
13. 薄層地盤モデルを用いた 3 次元動的相互作用解析, 日本建築学会大会学術講演梗概集 (九州), pp.221-222, 1989.10, 共著者: 瀬戸 裕, 吉田長行, 藤谷義信
14. 円筒剛基礎における埋戻し土の動的効果 (その 1), 日本建築学会大会学術講演梗概集 (九州), pp.243-244, 1989.10, 共著者: 吉田長行, 藤谷義信, 中川太郎
15. 円筒剛基礎における埋戻し土の動的効果 (その 2), 日本建築学会大会学術講演梗概集 (九州), pp.245-246, 1989.10, 共著者: 吉田長行, 藤谷義信, 中川太郎
16. 薄層地盤モデルによる 3 次元動的相互作用解析 (その 2), 日本建築学会 中国・九州支部研究報告集, 第 8 号, pp.385-388, 1989.3, 共著者: 吉田長行, 瀬戸 裕, 藤谷義信

## Chapter 2

# 境界積分方程式法を用いた動的相互作用解析

本章では、まず、地盤－基礎－構造物系の動的相互作用解析の概要について述べ、この過程において、動的相互作用解析における基本的な物理量であるインピーダンスおよび地震強制力の定義式を導く。次に、境界積分方程式法間接法による動的相互作用問題の定式化および離散化法を示し、インピーダンスおよび地震強制力の導出法を示す。インピーダンスの導出では、地表面基礎あるいは埋込み基礎領域を含む地盤層内に材料減衰が存在しない場合における計算効率のよい解析法も示す。また、地震強制力は、散乱場を決定するソース分布から直接求める方法を示す。

### 2.1 動的相互作用解析の概要

Fig.2.1(a) に示すように、基礎に円振動数 $\omega$ の定状加振変位  $u_i^e e^{i\omega t}$  を与える。ただし、添え字  $i$  は直交デカルト座標系における変位の方向を表し、 $i$  は虚数単位を示す。また、以後の議論では時間項  $e^{i\omega t}$  は省略する。基礎の運動により基礎から地盤内へ向かって伝播する波動が生成される。この波動場を放射場と呼ぶ。放射場の変位および表面力をそれぞれ  $u_i^r, p_i^r$  とする。このとき、基礎表面  $S_d$  上における  $x [= (x_1, x_2, x_3)]$  点の基礎と地盤の密着条件は、

$$u_i^r(x) = u_i^e(x) \quad (2.1)$$

Fig.2.1(b) に示すように、基礎のない地盤、すなわち自由地盤に地震波が入射すると自由地表面で反射波が生ずる。この入射波と反射波の和によって構成される場を入射場と呼ぶ。入射場の変位と表面力をそれぞれ  $u_i^f, p_i^f$  とする。一方、基礎が静止した状態で地盤上または地盤内に存在すると、基礎からも反射波が生ずる。この反射波による波動場を散乱場と呼ぶ。散乱場の変位と表面力をそれぞれ  $u_i^s, p_i^s$  とする。このとき基礎が静止している条件を基礎表面  $S_d$  上で表すと次式となる。

$$u_i^f(x) + u_i^s(x) = 0 \quad (2.2)$$

この条件の下で、基礎表面に生じている場の表面力は  $p_i^f(x) + p_i^s(x)$  である。

以上は、Thau [56] にしたがって、基礎と地盤の動的相互作用問題を (2.1) 式による放射場問題と (2.2) 式による散乱場問題に分離して記述したものである。それゆえ Fig.2.1(c)

に示す全体場の変位と表面力  $u_i, p_i$  は、放射場、入反射場および散乱場の和である。

$$u_i(x) = u_i^r(x) + u_i^f(x) + u_i^s(x) \quad (2.3)$$

$$p_i(x) = p_i^r(x) + p_i^f(x) + p_i^s(x) \quad (2.4)$$

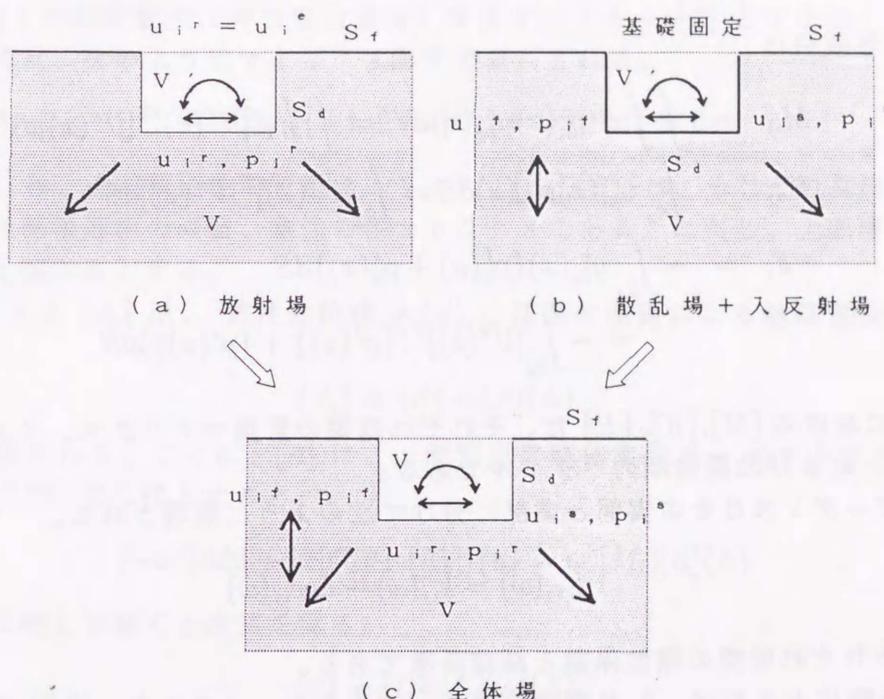


Figure 2.1: 動的相互作用の解析モデル

(2.1),(2.2),(2.3) 式より、基礎と地盤の  $S_d$  上における幾何学的連続条件は次式となる。

$$u_i^r(x) + u_i^f(x) + u_i^s(x) = u_i^e(x) \quad (2.5)$$

地盤-基礎連成系の力学的平衡条件は、基礎の領域を  $V'$ 、その密度を  $\rho'$  とし、基礎面の法線を基礎内へ向かう方向にとると、仮想仕事の原理より次のように表現される。

$$\begin{aligned} \omega^2 \int \int \rho' \delta u_i^e(x) u_i^e(x) dV' \\ = - \int_{S_d} \delta u_i^e(x) \{ p_i^r(x) + p_i^f(x) + p_i^s(x) \} dS \end{aligned} \quad (2.6)$$

ここで、 $u_i^e$  を一般化変位モード  $\Lambda_j (j = 1, 2, 3, \dots)$  を用いて次のように書く。

$$u_i^e(x) = u_{ij}^e(x) \Lambda_j = [U^e(x)] \{ \Lambda \} \quad (2.7)$$

上式に対応して放射場の表面力が次のように書けるものとする。

$$p_i^r(x) = p_{ij}^r(x) \Lambda_j = [V^r(x)] \{ \Lambda \} \quad (2.8)$$

(2.7),(2.8) 式を (2.6) 式に用いると次式を得る。

$$\begin{aligned} \omega^2 \int \int \rho' u_{ki}^e(x) u_{kj}^e(x) dV' \Lambda_j \\ = - \int_{S_d} u_{ki}^e(x) \{ p_{kj}^r(x) \Lambda_j + p_k^f(x) + p_k^s(x) \} dS \end{aligned} \quad (2.9)$$

上式において、左辺は基礎の慣性力を、右辺は動的相互作用力を表す。

上式をマトリクス形式で書き直すと、次のように整理される。

$$(-\omega^2[M] + [K])\{\Lambda\} = \{F\} \quad (2.10)$$

ここに、各成分は、

$$M_{ij} = \int \int \rho' u_{ki}^e(x) u_{kj}^e(x) dV' = \int \int \rho' [U^e(x)]^T [U^e(x)] dV' \quad (2.11)$$

$$K_{ij} = \int_{S_d} u_{ki}^e(x) p_{kj}^r(x) dS = \int_{S_d} [U^e(x)]^T [V^r(x)] dS \quad (2.12)$$

$$\begin{aligned} F_i &= - \int_{S_d} u_{ki}^e(x) \{p_k^f(x) + p_k^s(x)\} dS \\ &= - \int_{S_d} [U^e(x)]^T (\{p^f(x)\} + \{p^s(x)\}) dS \end{aligned} \quad (2.13)$$

(2.10) 式における  $[M]$ ,  $[K]$ ,  $\{F\}$  は、それぞれ基礎の質量マトリクス、インピーダンスマトリクス、および地震強制力ベクトルである。

インピーダンスはその実部と虚部に分けて次のように表現される。

$$K_{ij}(\omega) = k_{ij}(\omega) + i\omega c_{ij}(\omega) \quad (2.14)$$

$k_{ij}$ ,  $c_{ij}$  はそれぞれ地盤の剛性係数と減衰係数である。

基礎を剛体とすれば、 $\Lambda_j$  は剛体変位モードを表す。このとき、(2.7) 式の右辺の成分を直交デカルト座標系において表現すると次のようになる。

$$[U^e(x)] = [e_x, e_y \times x, e_y, e_x \times x, e_z, e_z \times x] \quad (2.15)$$

$$\{\Lambda\}^T = [\Delta_x, \Phi_y, \Delta_y, \Phi_x, \Delta_z, \Phi_z] \quad (2.16)$$

ここに、 $e_i$  は  $i$  方向単位ベクトル、 $\Delta_i$  は  $i$  方向の並進モード、 $\Phi_i$  は基礎上端中央点における  $i$  軸回りの回転モード。また、軸対称問題においては、円筒座標系  $(\rho, \varphi, z)$  を用いて、 $[U^e(x)]$  は次のように表される。

$$[U^e(x)] = \begin{bmatrix} \cos \varphi & z \cos \varphi & \sin \varphi & z \sin \varphi & 0 & 0 \\ -\sin \varphi & -z \sin \varphi & \cos \varphi & z \cos \varphi & 0 & \rho \\ 0 & -\rho \cos \varphi & 0 & -\rho \sin \varphi & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad (2.17)$$

(2.10) 式から、無質量基礎 ( $[M] = 0$ ) の応答、即ち基礎入力動  $\{\Lambda^\circ\}$  は次式となる。

$$\{\Lambda^\circ\} = [K]^{-1} \{F\} \quad (2.18)$$

$\{\Lambda^\circ\}$  を用いることによって (2.10) 式は次のようにも書かれる。

$$(-\omega^2[M] + [K])\{\Lambda\} = [K]\{\Lambda^\circ\} \quad (2.19)$$

このように、地震波の入力動は自由地盤で観測される  $u_i^f$  ではなく、(2.18) 式で定義される基礎入力動  $\Lambda_j^\circ$  である。

以上の議論では地震波入射に対する構造物の運動を基礎にのみ着目して扱った。次に、剛基礎の運動が上部弾性構造物に対する入力としてどのように作用するかを Luco [54] にしたがって概説する。

上部弾性構造物をせん断質点系にモデル化し、各質点の絶対変位を表すベクトルを  $\{d_b\}$ 、基礎との相対変位（弾性変位成分）を表すベクトル  $\{d\}$  とすると、上部構造物の運動方程式は、次のようにマトリクス形式で表わされる。

$$-\omega^2[M_b]\{d_b\} + (i\omega[C_b] + [K_b])\{d\} = 0 \quad (2.20)$$

ここに、 $[M_b]$  は、上部構造物の質量マトリクス、 $[C_b], [K_b]$  は、それぞれ基礎固定の条件を導入した上部構造物の減衰、剛性の各マトリクスである。ただし、上部構造物の回転中心は基礎上端中央とする。

変位ベクトル  $\{d_b\}$  は、弾性変位成分  $\{d\}$  と基礎の運動による剛体変位成分の和として、

$$\{d_b\} = \{d\} + [A]\{\Lambda\} \quad (2.21)$$

のように表現される。ここに、 $[A]$  は、上部質点の剛体変位モードマトリクスである。(2.21) 式を (2.20) 式に代入すると、

$$(-\omega^2[M_b] + i\omega[C_b] + [K_b])\{d\} = \omega^2[M_b][A]\{\Lambda\} \quad (2.22)$$

上式を  $\{d\}$  に関して解くと次式を得る。

$$\{d\} = [D][M_b][A]\{\Lambda\} \quad (2.23)$$

ただし、

$$[D] = \omega^2(-\omega^2[M_b] + i\omega[C_b] + [K_b])^{-1} \quad (2.24)$$

(2.21),(2.23) 式により上部構造物の全慣性力  $\{F_b\}$  は次式となる。

$$\{F_b\} = -\omega^2[A]^T[M_b]\{d_b\} = -\omega^2[M_E]\{\Lambda\} \quad (2.25)$$

ここで、

$$[M_E] = [A]^T([M_b] + [M_b]^T[D][M_b])[A] \quad (2.26)$$

$[M_E]$  は、Luco によって示された上部構造物の剛性と質量分布を考慮した等価質量マトリクスである。

基礎の運動方程式である (2.10) 式に上部構造物から作用する  $\{F_b\}$  を足し込むと、

$$(-\omega^2([M] + [M_E]) + [K])\{\Lambda\} = \{F\} \quad (2.27)$$

上式を解くと、

$$\{\Lambda\} = (-\omega^2([M] + [M_E]) + [K])^{-1}\{F\} \quad (2.28)$$

または、(2.18) 式より

$$\{\Lambda\} = (-\omega^2[K]^{-1}([M] + [M_E]) + [I])^{-1}\{\Lambda^o\} \quad (2.29)$$

このように、地盤との動的相互作用を考慮せずに導かれる上部構造物の運動方程式 (2.22) 式に (2.28) 式または (2.29) 式によって定義される量を入力動として用いれば、動的相互作用を厳密に評価した振動解析が可能となる。

## 2.2 境界積分方程式の定式化

Fig.2.2 は、境界積分方程式法の解析モデルを示している。ここに、図中の記号は以下のものを表す。 $V$ :外部領域、 $V'$ :内部領域、 $S_f$ :自由地表面、 $S_d$ :外部領域と内部領域の境界面、 $n$ :領域  $V'$ 内に向かう法線ベクトル。

図中の各点と法線ベクトルは3次元直交デカルト座標系において定義され、 $x = (x_1, x_2, x_3)$ ,  $\xi = (\xi_1, \xi_2, \xi_3)$ ,  $n = (n_1, n_2, n_3)$  と表される。また、以下の記述で方向を表す下添字は1, 2, 3 をとり、総和規約にしたがうものとする。

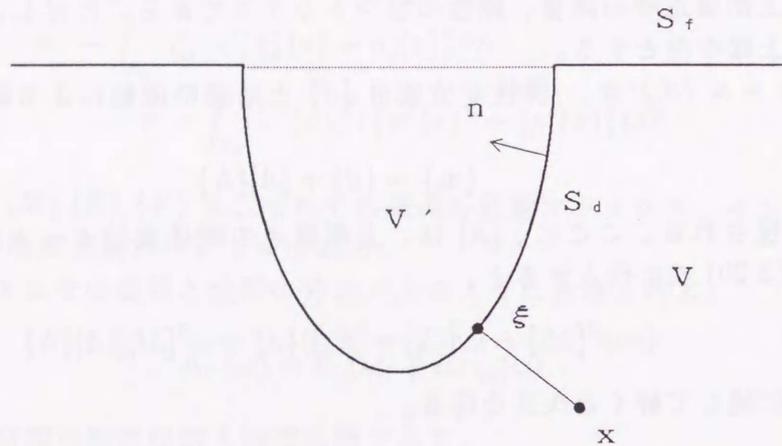


Figure 2.2: 境界積分方程式法の解析モデル

半無限弾性地盤 ( $x_3 \leq 0$ ) の  $x$  点における  $i$  方向点加振による  $\xi$  点での  $j$  方向変位を  $u_{ij}(x; \xi)$  とする。変位を観測点である  $\xi$  点の座標で微分して得られる歪を

$$\varepsilon_{ijk}(x; \xi) = \frac{1}{2} \left\{ \frac{\partial u_{ij}(x; \xi)}{\partial \xi_k} + \frac{\partial u_{ik}(x; \xi)}{\partial \xi_j} \right\} \quad (2.30)$$

とする。これらの歪から応力を次のように表す。

$$\sigma_{ijk}(x; \xi) = \lambda(\xi) \varepsilon_{imm}(x; \xi) \delta_{jk} + 2\mu(\xi) \varepsilon_{ijk}(x; \xi) \quad (2.31)$$

ここに、 $\delta_{jk}$  はクロネッカーのデルタ記号、 $\lambda(\xi)$ ,  $\mu(\xi)$  は  $\xi$  点のラーメの定数である。地盤に粘性が含まれる場合は、 $\lambda$  と  $\mu$  は虚数単位  $i$  を用いて  $\lambda + 2\mu = (\lambda_0 + 2\mu_0)(1 + 2h_p i)$ ,  $\mu = \mu_0(1 + 2h_s i)$  と与えられる。上式より、 $\xi$  点で法線  $n$  を有する面の  $j$  方向表面力は次式となる。

$$p_{ij}(x; \xi) = \sigma_{ijk}(x; \xi) n_k(\xi) \quad (2.32)$$

加振点  $x$  が領域  $V$  内にあるとする。このとき領域  $V$  内の変位  $u_i$  と表面力  $p_i$  の間に次のような関係がある。Appendix A には、次式を相反定理から導出する方法を示している。

$$u_i(x) + \int_{S_d} p_{ij}(x; \xi) u_j(\xi) dS(\xi) = \int_{S_d} u_{ij}(x; \xi) p_j(\xi) dS(\xi) \quad (2.33)$$

一方、領域  $V'$  の変位  $\hat{u}_i$  と表面力  $\hat{p}_i$  の間には次式が成立する。

$$\int_{S_d} p_{ij}(x; \xi) \hat{u}_j(\xi) dS(\xi) = \int_{S_d} u_{ij}(x; \xi) \hat{p}_j(\xi) dS(\xi) \quad (2.34)$$

$S_d$ 上で  $u_j = \hat{u}_j$  とし、(2.33) 式から (2.34) 式を差し引くと、

$$u_i(x) = \int_{S_d} u_{ij}(x; \xi) \{p_j(\xi) - \hat{p}_j(\xi)\} dS(\xi) \quad (2.35)$$

ここで、ソース (加振強度) 分布  $\eta_j$  を

$$\eta_j(\xi) = p_j(\xi) - \hat{p}_j(\xi) \quad (2.36)$$

と定義し、これを (2.35) 式に導入すると次式を得る。

$$u_i(x) = \int_{S_d} u_{ij}(x; \xi) \eta_j(\xi) dS(\xi) \quad (2.37)$$

ところで、グリーン関数には次の相反性が成立する。

$$u_{ij}(x; \xi) = u_{ji}(\xi; x) \quad (2.38)$$

上式の関係を用いると、

$$u_i(x) = \int_{S_d} u_{ji}(\xi; x) \eta_j(\xi) dS(\xi) \quad (2.39)$$

上式における  $x$  点を  $S_d$  上に移動すれば、変位に関する境界積分方程式が得られる。

(2.39) 式から、(2.30), (2.31), (2.32) 式の過程を用いることにより、法線  $n$  を有する面上の  $x$  点における  $i$  方向表面力が次のように求められる。

$$p_i(x) = \int_{S_d} p_{ji}(\xi; x) \eta_j(\xi) dS(\xi) \quad (2.40)$$

(2.40) 式の  $x$  点を  $S_d$  上に移動すると次式となる。

$$p_i(x) = c_{ji} \eta_j(x) + \int_{S_d} p_{ji}(\xi; x) \eta_j(\xi) dS(\xi) \quad (2.41)$$

$x$  点近傍が滑らかな境界では、 $c_{ji} = (\pm 1/2) \delta_{ji}$  となる。±は  $x$  点が  $S_d$  上に領域  $V$  より近づくとき正をとり、領域  $V'$  より近づくとき負をとる。(2.39) 式と (2.41) 式が、境界積分方程式法間接法の基礎式となるものである。なお、(2.39), (2.41) 式の軸対称問題における表現を Appendix B に導出している。Appendix B に示すように、(2.39), (2.41) 式の軸対称表現は、(2.39) および (2.41) 式と同一形式で表現される。したがって、以下の議論は、直交デカルト座標系における 3次元問題を対象として展開するが、これは軸対称問題にもそのまま適用できる。

## 2.3 境界積分方程式の離散化

(2.39), (2.41) 式に示した境界積分方程式は、次に説明する離散化手法によって近似的に評価される。まず、境界面  $S_d$  を簡単な幾何形状を持つ  $M$  個の平面パネル  $s_j$  ( $J =$

1, 2, ..., M) に分割する。各パネル上のソース分布を一定とし、その強度を $\eta_j^J$ とする。観測点の位置 (選点) をパネル $s_J$ の重心点 $x^I$ にとり、(2.39) 式を離散化すると次式を得る。

$$u_i(x^I) = \sum_{J=1}^M \int_{s_J} u_{ji}(\xi; x^I) dS(\xi) \cdot \eta_j^J \quad (2.42)$$

上式をベクトル・マトリクス表示すると

$$\{u^I\} = \sum_{J=1}^M [G^{IJ}] \{\eta^J\} \quad (2.43)$$

ここに、

$$\begin{aligned} \{u^I\}^T &= [u_1(x^I), u_2(x^I), u_3(x^I)] \\ \{\eta^J\}^T &= [\eta_1^J, \eta_2^J, \eta_3^J] \\ [G^{IJ}] \text{の成分} &G_{ij}^{IJ} = \int_{s_J} u_{ji}(\xi; x^I) dS(\xi) \end{aligned}$$

同様に、(2.41) 式を離散化すると次式となる。

$$p_i(x^I) = \sum_{J=1}^M [\pm \frac{1}{2} \delta_{ji} \delta_{IJ} + \int_{s_J} p_{ji}(\xi; x^I) dS(\xi)] \eta_j^J \quad (2.44)$$

上式をベクトル・マトリクス表示すると、

$$\{p^I\} = \sum_{J=1}^M (\pm \frac{1}{2} [I^{IJ}] + [H^{IJ}]) \{\eta^J\} \quad (2.45)$$

ここに、

$$\begin{aligned} \{p^I\}^T &= [p_1(x^I), p_2(x^I), p_3(x^I)] \\ [H^{IJ}] \text{の成分} &H_{ij}^{IJ} = \int_{s_J} p_{ji}(\xi; x^I) dS(\xi) \\ [I^{IJ}] \text{の成分} &I_{ij}^{IJ} = \delta_{IJ} \delta_{ji} \end{aligned}$$

(2.43) 式を $I = 1, 2, \dots, M$ についてまとめると次のような全体マトリクス表示を得る。

$$[G] \{\eta\} = \{u\} \quad (2.46)$$

ここに、

$$\begin{aligned} \{\eta\}^T &= [\{\eta^1\}^T, \{\eta^2\}^T, \dots, \{\eta^M\}^T] \\ \{u\}^T &= [\{u^1\}^T, \{u^2\}^T, \dots, \{u^M\}^T] \\ [G] &= \begin{bmatrix} [G^{1,1}] & \dots & [G^{1,M}] \\ \vdots & & \vdots \\ [G^{M,1}] & \dots & [G^{M,M}] \end{bmatrix} \end{aligned}$$

同様に、(2.45) 式の  $\{(\pm 1/2)[I^{IJ}] + [H^{IJ}]\}$  を新たに  $[H^{IJ}]$  と置き、 $I = 1, 2, \dots, M$  についてまとめると、

$$[H]\{\eta\} = \{p\} \quad (2.47)$$

ここに、

$$\begin{aligned} \{p\}^T &= [\{p^1\}^T, \{p^2\}^T, \dots, \{p^M\}^T] \\ [H] &= \begin{bmatrix} [H^{1,1}] & \dots & [H^{1,M}] \\ \vdots & & \vdots \\ [H^{M,1}] & \dots & [H^{M,M}] \end{bmatrix} \end{aligned}$$

以下では、(2.46) 式の  $[G]$  を変位マトリクス、(2.47) 式の  $[H]$  を応力マトリクスと呼ぶことにする。

## 2.4 インピーダンスマトリクス

境界積分方程式法によるインピーダンスマトリクスの導出法について説明する。まず、(2.39) 式に  $S_d$  上における基礎と地盤の密着条件 (2.1) 式を導入する。これを (2.7) 式の表現を用いて書くと次のようになる。

$$u_i(x) = u_i^e(x) = u_{ij}^e(x)\Lambda_j = [U^e(x)]\{\Lambda\} \quad (2.48)$$

ただし、 $\{\Lambda\}$  は (2.16) 式の基礎の剛体変位モードを表し、 $[U^e(x)]$  は (2.15) 式 [軸対称問題の場合は (2.17) 式] に示されるものである。(2.48) 式に対応する  $\xi$  点における放射場のソース分布を (2.36) 式から次のように置く。

$$\eta_i^r(\xi) = \eta_{ij}^r(\xi)\Lambda_j = \{p_{ij}^r(\xi) - \hat{p}_{ij}^r(\xi)\}\Lambda_j = [N^r(\xi)]\{\Lambda\} \quad (2.49)$$

このとき、(2.39) 式は、次のように表される。

$$u_{ij}^e(x) = \int_{S_d} u_{ki}(\xi; x)\eta_{kj}^r(\xi)dS(\xi) \quad (2.50)$$

上式は  $S_d$  上のソース分布  $\eta_{kj}^r(\xi)$  を未知数とする境界積分方程式である。これを解くと放射場のソース分布が得られる。得られたソース分布を (2.41) 式に代入すると  $S_d$  上の外部領域における表面力が次式のように求まる。

$$p_{ij}^r(x) = \frac{1}{2}\eta_{ij}^r(x) + \int_{S_d} p_{ki}(\xi; x)\eta_{kj}^r(\xi)dS(\xi) \quad (2.51)$$

上式を (2.12) 式に代入して積分を実行すると  $S_d$  面に作用するインピーダンスが得られる。

以上を示したインピーダンスの計算は、実際には 2.3 節に示した離散化手法を用いて行われる。(2.50), (2.51) 式は、(2.43), (2.45) 式より次式のようにベクトル・マトリクスで表示される。

$$\sum_{J=1}^M [G^{IJ}][N^r(x^J)] = [U^e(x^I)] \quad (2.52)$$

$$\sum_{j=1}^M \left( \frac{1}{2} [I^{IJ}] + [H^{IJ}] \right) [N^r(x^j)] = [V^r(x^I)] \quad (2.53)$$

(2.52), (2.53) 式を (2.46), (2.47) 式のように、 $I = 1, 2, \dots, M$  についてまとめると、

$$[G][N^r] = [U^e] \quad (2.54)$$

$$[H][N^r] = [V^r] \quad (2.55)$$

ここに、

$$[N^r] = \begin{bmatrix} [N^r(x^1)] \\ [N^r(x^2)] \\ \vdots \\ [N^r(x^M)] \end{bmatrix}, [U^e] = \begin{bmatrix} [U^e(x^1)] \\ [U^e(x^2)] \\ \vdots \\ [U^e(x^M)] \end{bmatrix}, [V^r] = \begin{bmatrix} [V^r(x^1)] \\ [V^r(x^2)] \\ \vdots \\ [V^r(x^M)] \end{bmatrix} \quad (2.56)$$

(2.54) 式を解くと、 $S_d$  面上の各要素のソース分布が次式のように得られる。

$$[N^r] = [G]^{-1}[U^e] \quad (2.57)$$

上式を (2.55) 式に代入すると、

$$[Q][U^e] = [V^r] \quad (2.58)$$

ここに、

$$[Q] = [H][G]^{-1} \quad (2.59)$$

(2.58) 式を (2.12) 式に代入し積分を近似的に評価すると、インピーダンスマトリクス  $[K]$  が次式のように得られる。

$$[K] = [U^e]^T [S][Q][U^e] \quad (2.60)$$

ここに、

$$[S] = \begin{bmatrix} [S^1] & & & \\ & [S^2] & & \\ & & \ddots & \\ & & & [S^M] \end{bmatrix}, [S^I] = \begin{bmatrix} [\Delta s_I] & & \\ & [\Delta s_I] & \\ & & \ddots \\ & & & [\Delta s_I] \end{bmatrix} \quad (2.61)$$

ただし、 $\Delta s_I$  はパネル  $s_I$  の面積。

地表面基礎あるいは埋込み基礎領域を含む地盤層内に材料減衰が存在しない場合には、(2.49) 式のソース分布から直接インピーダンスを求めることもできる。

(2.12) 式および (2.14) 式よりインピーダンスは次式で定義される。

$$K_{ij}(\omega) = k_{ij}(\omega) + i\omega c_{ij}(\omega) = \int_{S_d} u_{ki}^e(x) p_{kj}^r(x) dS \quad (2.62)$$

上式に (2.49) 式の関係を用いると、

$$K_{ij}(\omega) = \int_{S_d} \{u_{ki}^e(x) \eta_{kj}(x) + u_{ki}^e(x) \hat{p}_{kj}^r(x)\} dS \quad (2.63)$$

上式の右辺第二項は、領域  $V'$  の内部インピーダンスである。地表面基礎の場合はこの項は 0 となる。したがって、地表面基礎のインピーダンスは次式より求められる。

$$K_{ij}(\omega) = \int_{S_d} u_{ki}^e(x) \eta_{kj}(x) dS \quad (2.64)$$

上式を離散化された表現で示すと、

$$[K] = [U^e]^T [S] [N^r] \quad (2.65)$$

また、基礎領域を含む地盤層内に材料減衰がないものとすれば、(2.63) 式の右辺第二項は実数であり、さらに  $\omega = 0$  のとき、領域  $V'$  が剛体移動することから 0 となる。したがって次式が成立する。

$$k_{ij}(0) = \int_{S_d} u_{ki}^e(x) \operatorname{Re}[\eta_{kj}(x)(\omega = 0)] dS \quad (2.66)$$

$$c_{ij}(\omega) = \frac{1}{\omega} \int_{S_d} u_{ki}^e(x) \operatorname{Im}[\eta_{kj}(x)] dS \quad (2.67)$$

離散化された表現で示すと、

$$[k_o] = [U^e]^T [S] \operatorname{Re}([N_o^r]) \quad (2.68)$$

$$[c] = \frac{1}{\omega} [U^e]^T [S] \operatorname{Im}([N^r]) \quad (2.69)$$

Appendix C に示すようにインピーダンスの実部と虚部の間にはヒルベルト変換則が成立する。これを利用すると、インピーダンス実部は (2.66), (2.67) から次式によって求めることができる。

$$k_{ij}(\omega) = -\frac{2\omega^2}{\pi} P \int_0^\infty \frac{c_{ij}(\omega_o)}{(\omega_o^2 - \omega^2)} d\omega_o + k_{ij}(0) \quad (2.70)$$

ここに、 $P$  は Cauchy の主値を表す。(2.70) 式には  $c_{ij}$  に関する無限積分が含まれるため、実際の計算は次のように行う。まず、積分領域をインピーダンスの虚部の数値解が得られている第一区間  $0 \leq \omega_o \leq \omega_{max}$  とそれ以外の第二区間  $\omega_{max} \leq \omega_o \leq \infty$  の二つに分ける。第二区間では、高振動数域でのインピーダンス虚部の漸近解  $c_{ij}(\infty)$  と数値解を接続する近似関数を求め積分を解析的に実行する。

## 2.5 地震強制力ベクトル

(2.39) 式に散乱場の条件 (2.2) 式を導入すると、

$$\int_{S_d} u_{ji}(\xi; x) \eta_j^s(\xi) dS(\xi) = u_i^s(x) = -u_i^f(x) \quad (2.71)$$

ここに、 $\eta_j^s$  は散乱場のソース分布を表す。(2.36) 式より  $S_d$  上では

$$\eta_j^s(x) = p_j^s(x) - \hat{p}_j^s(x) \quad (2.72)$$

内部領域  $V'$  は静止しているので、

$$p_j^f(x) + \hat{p}_j^s(x) = 0 \quad (2.73)$$

(2.72) 式と (2.73) 式より、 $S_d$ 上の散乱波を生起させるソース分布は境界面上に生じている外部表面力に等しい。

$$\eta_j^s(x) = p_j^f(x) + p_j^s(x) \quad (2.74)$$

上式を地震強制力の定義式 (2.13) に代入すると、

$$F_i = - \int_{S_d} u_{ki}^e(x) \eta_k^s(x) dS(x) \quad (2.75)$$

このように、剛境界面に対する地震強制力は散乱波を決定するソース分布に剛体変位を掛け、これを境界面上で積分したものとなる。

(2.71) 式を離散化すると、(2.46) 式より、

$$[G]\{\eta^s\} = \{u^s\} = -\{u^f\} \quad (2.76)$$

ここに、 $\{\eta^s\}$ ,  $\{u^s\}$ ,  $\{u^f\}$  はそれぞれ  $S_d$ 上の選点における  $\eta_i^s$ ,  $u_i^s$ ,  $u_i^f$  の値を並べたベクトル。(2.76) 式を解くと、

$$\{\eta^s\} = -[G]^{-1}\{u^f\} \quad (2.77)$$

上式を (2.75) 式に代入し、積分を近似的に評価すると、(2.60) 式と同様に剛境界面に作用する地震強制力ベクトルを次のように得る。

$$\{F\} = -[U^e]^T[S]\{\eta^s\} = [U^e]^T[S][G]^{-1}\{u^f\} \quad (2.78)$$

なお、多層地盤における入反射場変位  $\{u^f\}$  の解析法を Appendix D に示しておく。

# Chapter 3

## 薄層地盤のグリーン関数

3次元薄層法によるグリーン関数の導出法は、点加振解については、田治見 [48]、Kausel[46]等によって、リング状線加振解については、Waas[51]によって既に示されているが、導出過程が複雑であること、点加振解とリング状線加振解の導出法がそれぞれ異なること等により、一貫した理解がなかなか難しい。そこで、本章では、3次元薄層法による点加振解およびリング状線加振解の導出法を、3次元波動論から出発して、できるだけ導出過程を省略することなく、より明解な形で記述している。また、本論文において既往論文と異なる点は、薄層要素を2次の変位関数を用いて離散化している点と、リング状線加振解を Bessel 関数の加法定理を利用して導出している点にある。

### 3.1 波数領域の運動方程式

3次元弾性体の円筒座標系  $(r, \theta, z)$  における変位に関する運動方程式は、

$$\begin{aligned}(\lambda + 2\mu) \frac{\partial \Theta}{\partial r} - 2\mu \left( \frac{1}{r} \frac{\partial \tilde{\omega}_z}{\partial \theta} - \frac{\partial \tilde{\omega}_\theta}{\partial z} \right) &= \rho \frac{\partial^2 u_r}{\partial t^2} \\(\lambda + 2\mu) \frac{1}{r} \frac{\partial \Theta}{\partial \theta} - 2\mu \left( \frac{\partial \tilde{\omega}_r}{\partial z} - \frac{\partial \tilde{\omega}_z}{\partial r} \right) &= \rho \frac{\partial^2 u_\theta}{\partial t^2} \\(\lambda + 2\mu) \frac{\partial \Theta}{\partial z} - 2\mu \left( \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r \tilde{\omega}_\theta) - \frac{1}{r} \frac{\partial \tilde{\omega}_r}{\partial \theta} \right) &= \rho \frac{\partial^2 u_z}{\partial t^2}\end{aligned} \quad (3.1)$$

ここに、

$$\begin{aligned}\Theta &= \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r u_r) + \frac{1}{r} \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial u_z}{\partial z} \\2\tilde{\omega}_r &= \frac{1}{r} \frac{\partial u_z}{\partial \theta} - \frac{\partial u_\theta}{\partial z} \\2\tilde{\omega}_\theta &= \frac{\partial u_r}{\partial z} - \frac{\partial u_z}{\partial r} \\2\tilde{\omega}_z &= \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r u_\theta) - \frac{1}{r} \frac{\partial u_r}{\partial \theta}\end{aligned} \quad (3.2)$$

で与えられる。ここで、 $u_r, u_\theta, u_z$  は変位の  $r, \theta, z$  方向成分、 $\rho$  は密度、 $\lambda, \mu$  はラーメの弾性定数。

時間因子に  $e^{i\omega t}$  ( $i$ : 虚数単位,  $\omega$ : 円振動数) をもつ調和振動状態における薄層地盤の解を等方均質弾性体の一般解からの類推により次のように置く。ただし以下では時間項  $e^{i\omega t}$  は省略する。

$$\begin{aligned} u_r &= \int_0^\infty \left\{ -\bar{u}_r(z) \frac{\partial}{\partial r} J_m(qr) + \bar{u}_\theta(z) \frac{m}{r} J_m(qr) \right\} dq \cdot D_m(\theta) \\ u_\theta &= \int_0^\infty \left\{ -\bar{u}_\theta(z) \frac{\partial}{\partial r} J_m(qr) + \bar{u}_r(z) \frac{m}{r} J_m(qr) \right\} dq \cdot E_m(\theta) \\ u_z &= \int_0^\infty \left\{ -\bar{u}_z(z) q J_m(qr) \right\} dq \cdot D_m(\theta) \end{aligned} \quad (3.3)$$

ここに、 $J_m$  は、 $m$  次の第 1 種 Bessel 関数、 $q$  は波数、 $\bar{u}_r, \bar{u}_\theta, \bar{u}_z$  は  $z$  に関する未知関数を表す。また、

$$D_m(\theta) = \begin{Bmatrix} \cos m\theta \\ \sin m\theta \end{Bmatrix}, \quad E_m(\theta) = \begin{Bmatrix} \sin m\theta \\ -\cos m\theta \end{Bmatrix} \quad ; \text{上下同順} \quad (3.4)$$

である。

(3.3) 式を (3.2) 式に代入し、Bessel 関数の微分方程式

$$\frac{\partial^2}{\partial r^2} J_m(qr) + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} J_m(qr) + (q^2 - \frac{m^2}{r^2}) J_m(qr) = 0 \quad (3.5)$$

を用いて整理すると、

$$\Theta = \int_0^\infty (\bar{u}_r q - \bar{u}'_z) q J_m dq \cdot D_m \quad (3.6)$$

$$2\tilde{\omega}_r = \int_0^\infty \left\{ (\bar{u}_z q - \bar{u}'_r) \frac{m}{r} J_m + \bar{u}'_\theta J_m^\circ \right\} dq \cdot E_m$$

$$2\tilde{\omega}_\theta = \int_0^\infty \left\{ (\bar{u}_z q - \bar{u}'_r) J_m^\circ + \bar{u}'_\theta \frac{m}{r} J_m \right\} dq \cdot D_m \quad (3.7)$$

$$2\tilde{\omega}_z = \int_0^\infty \bar{u}_\theta q^2 J_m dq \cdot E_m$$

となる。ただし、 $J_m = J_m(qr)$ 、 $J_m^\circ = \partial J_m(qr) / \partial r$ 、 $\bar{u}'_i = \partial \bar{u}_i / \partial z$ 、 $D_m = D_m(\theta)$ 、 $E_m = E_m(\theta)$ 。

(3.3), (3.6), (3.7) 式を (3.1) 式に代入すると、

$$\int_0^\infty \left[ \left\{ -\mu \bar{u}_r'' - (\lambda + \mu) q \bar{u}'_z + \{ (\lambda + 2\mu) q^2 - \rho \omega^2 \} \bar{u}_r \right\} J_m^\circ - \left\{ -\mu \bar{u}_\theta'' + (\mu q^2 - \rho \omega^2) \bar{u}_\theta \right\} \frac{m}{r} J_m \right] dq \cdot D_m = 0$$

$$\int_0^\infty \left[ \left\{ -\mu \bar{u}_r'' - (\lambda + \mu) q \bar{u}'_z + \{ (\lambda + 2\mu) q^2 - \rho \omega^2 \} \bar{u}_r \right\} \frac{m}{r} J_m - \left\{ -\mu \bar{u}_\theta'' + (\mu q^2 - \rho \omega^2) \bar{u}_\theta \right\} J_m^\circ \right] dq \cdot E_m = 0 \quad (3.8)$$

$$\int_0^\infty \left\{ -(\lambda + 2\mu) \bar{u}_z'' + (\lambda + \mu) q \bar{u}'_r + (\mu q^2 - \rho \omega^2) \bar{u}_z \right\} q J_m dq \cdot D_m = 0$$

上式より波数領域の運動方程式を次のように得る。

$$\left( q^2 \begin{bmatrix} \lambda + 2\mu & 0 \\ 0 & \mu \end{bmatrix} - \rho \omega^2 \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right) \begin{Bmatrix} \bar{u}_r \\ \bar{u}_z \end{Bmatrix} + q \begin{bmatrix} 0 & -\lambda \\ \mu & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \bar{u}'_r \\ \bar{u}'_z \end{Bmatrix}$$

$$-q \begin{bmatrix} 0 & \mu \\ -\lambda & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \bar{u}'_r \\ \bar{u}'_z \end{Bmatrix} - \begin{bmatrix} \mu & 0 \\ 0 & \lambda + 2\mu \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \bar{u}''_r \\ \bar{u}''_z \end{Bmatrix} = \{0\} \quad (3.9)$$

$$(q^2\mu - \rho\omega^2)\bar{u}_\theta - \mu\bar{u}''_\theta = 0 \quad (3.10)$$

境界条件式を得るために、応力に関しても (3.3) 式と同様な表現を求めておく。水平面 ( $r-\theta$ 平面) 上に作用する応力は、

$$\begin{aligned} s_r &= \tau_{zr} = \mu \left( \frac{\partial u_r}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial r} \right) \\ s_\theta &= \tau_{\theta z} = \mu \left( \frac{1}{r} \frac{\partial u_z}{\partial \theta} + \frac{\partial u_\theta}{\partial z} \right) \\ s_z &= \sigma_z = \lambda \Theta + 2\mu \frac{\partial u_z}{\partial z} \end{aligned} \quad (3.11)$$

(3.3),(3.6) 式を上式に代入すると、

$$\begin{aligned} s_r &= \int_0^\infty \left\{ -\bar{s}_r(z) \frac{\partial}{\partial r} J_m(qr) + \bar{s}_\theta(z) \frac{m}{r} J_m(qr) \right\} dq \cdot D_m(\theta) \\ s_\theta &= \int_0^\infty \left\{ -\bar{s}_\theta(z) \frac{\partial}{\partial r} J_m(qr) + \bar{s}_r(z) \frac{m}{r} J_m(qr) \right\} dq \cdot E_m(\theta) \\ s_z &= \int_0^\infty \left\{ -\bar{s}_z(z) q J_m(qr) \right\} dq \cdot D_m(\theta) \end{aligned} \quad (3.12)$$

ここに、

$$\begin{Bmatrix} \bar{s}_r \\ \bar{s}_z \end{Bmatrix} = q \begin{bmatrix} 0 & \mu \\ -\lambda & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \bar{u}_r \\ \bar{u}_z \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} \mu & 0 \\ 0 & \lambda + 2\mu \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \bar{u}'_r \\ \bar{u}'_z \end{Bmatrix} \quad (3.13)$$

$$\bar{s}_\theta = \mu \bar{u}'_\theta \quad (3.14)$$

## 3.2 要素剛性方程式

(3.9),(3.10) 式に示された基礎微分方程式と (3.13),(3.14) 式から重み付き残差式をつくる。(3.9),(3.10) 式をまとめて次のように書く。

$$(q^2[a] - \omega^2[m])\{\bar{u}\} + q[b]\{\bar{u}'\} - q[b]^T\{\bar{u}'\} - [g]\{\bar{u}''\} = \{0\} \quad (3.15)$$

ここに、

$$\begin{aligned} [a] &= \begin{bmatrix} \lambda + 2\mu & 0 & 0 \\ 0 & \mu & 0 \\ 0 & 0 & \mu \end{bmatrix}, & [b] &= \begin{bmatrix} 0 & -\lambda & 0 \\ \mu & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \\ [g] &= \begin{bmatrix} \mu & 0 & 0 \\ 0 & \lambda + 2\mu & 0 \\ 0 & 0 & \mu \end{bmatrix}, & [m] &= \begin{bmatrix} \rho & 0 & 0 \\ 0 & \rho & 0 \\ 0 & 0 & \rho \end{bmatrix} \end{aligned}$$

$$\{\bar{u}\}^T = [\bar{u}_r, \bar{u}_z, \bar{u}_\theta]$$

(3.13),(3.14) 式も同様に、

$$\{\bar{s}\} = q[b]^T\{\bar{u}\} + [g]\{\bar{u}'\}, \quad \{\bar{s}\}^T = [\bar{s}_r, \bar{s}_z, \bar{s}_\theta] \quad (3.16)$$

Fig.3.1 に示す薄層要素における重み付き残差式は次式となる。

$$\int_{z_3}^{z_1} \{\delta\bar{u}\}^T \langle (q^2[a] - \omega^2[m])\{\bar{u}\} + q[b]\{\bar{u}'\} - q[b]^T\{\bar{u}'\} - [g]\{\bar{u}''\} \rangle dz - [\{\delta\bar{u}\}^T(\{\bar{s}\} - q[b]^T\{\bar{u}\} - [g]\{\bar{u}'\})]_{z_3}^{z_1} = 0 \quad (3.17)$$

(3.17) 式の一部を部分積分すると次のようになる。

$$\int_{z_3}^{z_1} \langle q^2\{\delta\bar{u}\}^T[a]\{\bar{u}\} + q(\{\delta\bar{u}\}^T[b]\{\bar{u}'\} + \{\delta\bar{u}'\}^T[b]^T\{\bar{u}\}) + \{\delta\bar{u}'\}^T[g]\{\bar{u}'\} - \omega^2\{\delta\bar{u}\}^T[m]\{\bar{u}\} \rangle dz = [\{\delta\bar{u}\}^T\{\bar{s}\}]_{z_3}^{z_1} \quad (3.18)$$

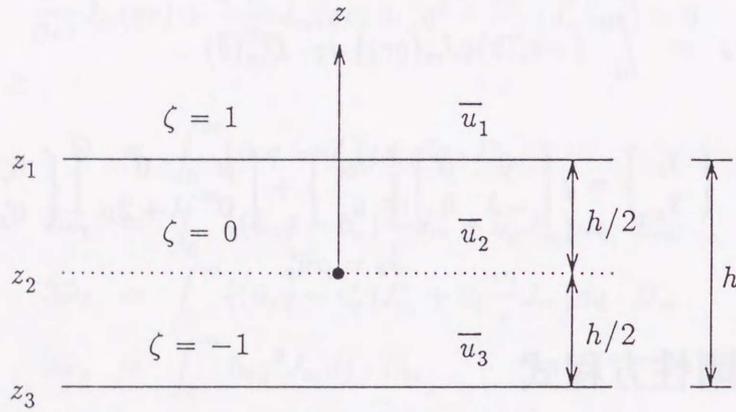


Figure 3.1: 薄層要素

薄層要素内の変位分布を2次の内挿関数  $N_1, N_2, N_3$  を用いて次式のように仮定する。

$$\{\bar{u}\} = [N]\{U\}^e \quad (3.19)$$

ここに、

$$[N] = \begin{bmatrix} N_1 & N_2 & N_3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & N_1 & N_2 & N_3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & N_1 & N_2 & N_3 \end{bmatrix}$$

$$N_1 = \frac{\zeta(1+\zeta)}{2}, \quad N_2 = (1-\zeta^2), \quad N_3 = -\frac{\zeta(1-\zeta)}{2}$$

$$\{U\}^{eT} = [U_{r1}, U_{r2}, U_{r3}, U_{z1}, U_{z2}, U_{z3}, U_{\theta1}, U_{\theta2}, U_{\theta3}]$$

要素内の  $z$  座標も変位と同様に節点座標と内挿関数を用いて次のように表す。

$$z = N_1 z_1 + N_2 z_2 + N_3 z_3 \quad (3.20)$$

ただし、

$$z_1 - z_2 = h/2, \quad z_2 - z_3 = h/2 \quad (3.21)$$

このとき、 $z$  座標に関する微分は次のようになる。

$$\frac{d}{dz} = \frac{2}{h} \frac{d}{d\zeta} \quad (3.22)$$

上式より、変位の  $z$  座標に関する微分は次式のように表される。

$$\{\bar{u}'\} = \frac{2}{h} [N'] \{U\}^e \quad (3.23)$$

ここに、

$$[N'] = \begin{bmatrix} N'_1 & N'_2 & N'_3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & N'_1 & N'_2 & N'_3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & N'_1 & N'_2 & N'_3 \end{bmatrix}$$

$$N'_1 = \frac{1}{2} + \zeta, \quad N'_2 = -2\zeta, \quad N'_3 = -\frac{1}{2} + \zeta$$

(3.19)~(3.23) 式を (3.18) 式に代入すると、

$$\begin{aligned} \{\delta U\}^{eT} & \left[ q^2 \frac{h}{2} \int_{-1}^1 [N]^T [a] [N] d\zeta + q \int_{-1}^1 ([N]^T [b] [N'] + [N']^T [b]^T [N]) d\zeta \right. \\ & \left. + \frac{h}{2} \int_{-1}^1 [N']^T [g] [N'] d\zeta - \omega^2 \frac{h}{2} \int_{-1}^1 [N]^T [m] [N] d\zeta \right] \{U\}^e \\ & = \{\delta U\}^{eT} [N]^T \{S\}^e \Big|_{-1}^1 = \{\delta U\}^{eT} \{P\}^e \end{aligned} \quad (3.24)$$

ただし、

$$\begin{aligned} \{S\}_{\zeta=1}^{eT} & = [S_{r1}, S_{z1}, S_{\theta1}], \quad \{S\}_{\zeta=-1}^{eT} = [S_{r3}, S_{z3}, S_{\theta3}] \\ \{P\}^{eT} & = [S_{r1}, 0, -S_{r3}, S_{z1}, 0, -S_{z3}, S_{\theta1}, 0, -S_{\theta3}] \end{aligned}$$

ここで、

$$\begin{aligned} [A]^e & = \frac{h}{2} \int_{-1}^1 [N]^T [a] [N] d\zeta \\ [B]^e & = \int_{-1}^1 ([N]^T [b] [N'] + [N']^T [b]^T [N]) d\zeta \\ [G]^e & = \frac{h}{2} \int_{-1}^1 [N']^T [g] [N'] d\zeta \\ [M]^e & = \frac{h}{2} \int_{-1}^1 [N]^T [m] [N] d\zeta \end{aligned} \quad (3.25)$$

とおくと、(3.24) 式は、

$$([A]^e q^2 + [B]^e q + [G]^e - \omega^2 [M]^e) \{U\}^e = \{P\}^e \quad (3.26)$$

ここに、

$$[A]^e = \begin{bmatrix} [A_x]^e & & \\ & [A_z]^e & \\ & & [A_y]^e \end{bmatrix}, [B]^e = \begin{bmatrix} & [B_{xz}]^e \\ [B_{xz}]^{eT} & \end{bmatrix}$$

$$[G]^e = \begin{bmatrix} [G_x]^e & & \\ & [G_z]^e & \\ & & [G_y]^e \end{bmatrix}, [M]^e = \begin{bmatrix} [M_x]^e & & \\ & [M_z]^e & \\ & & [M_y]^e \end{bmatrix}$$

$$[A_x]^e = \frac{h}{30} \begin{bmatrix} 4(\lambda + 2\mu) & 2(\lambda + 2\mu) & -(\lambda + 2\mu) \\ 2(\lambda + 2\mu) & 16(\lambda + 2\mu) & 2(\lambda + 2\mu) \\ -(\lambda + 2\mu) & 2(\lambda + 2\mu) & 4(\lambda + 2\mu) \end{bmatrix}$$

$$[A_z]^e = \frac{h}{30} \begin{bmatrix} 4\mu & 2\mu & -\mu \\ 2\mu & 16\mu & 2\mu \\ -\mu & 2\mu & 4\mu \end{bmatrix}$$

$$[A_y]^e = [A_z]^e$$

$$[B_{xz}]^e = \frac{1}{6} \begin{bmatrix} -3(\lambda - \mu) & 4(\lambda + \mu) & -(\lambda + \mu) \\ -4(\lambda + \mu) & 0 & 4(\lambda + \mu) \\ (\lambda + \mu) & -4(\lambda + \mu) & 3(\lambda - \mu) \end{bmatrix}$$

$$[G_x]^e = \frac{1}{3h} \begin{bmatrix} 7\mu & -8\mu & \mu \\ -8\mu & 16\mu & -8\mu \\ \mu & -8\mu & 7\mu \end{bmatrix}$$

$$[G_z]^e = \frac{1}{3h} \begin{bmatrix} 7(\lambda + 2\mu) & -8(\lambda + 2\mu) & (\lambda + 2\mu) \\ -8(\lambda + 2\mu) & 16(\lambda + 2\mu) & -8(\lambda + 2\mu) \\ (\lambda + 2\mu) & -8(\lambda + 2\mu) & 7(\lambda + 2\mu) \end{bmatrix}$$

$$[G_y]^e = [G_z]^e$$

$$[M_x]^e = \frac{\rho h}{30} \begin{bmatrix} 4 & 2 & -1 \\ 2 & 16 & 2 \\ -1 & 2 & 4 \end{bmatrix}$$

$$[M_z]^e = [M_x]^e, \quad [M_y]^e = [M_x]^e$$

### 3.3 変位の一般解

半無限地盤を Fig.3.2 のように薄層に分割する。(3.26) 式で示される 1 要素の剛性方程式を各節面で重ね合わせることによって、次式のような全体剛性方程式を作る。

$$[K]\{U\} = \{P\} \quad (3.27)$$

ここに、

$$[K] = [A]q^2 + [B]q + [C], \quad [C] = [G] - \omega^2[M]$$

$$[A] = \begin{bmatrix} [A_x] & & \\ & [A_z] & \\ & & [A_y] \end{bmatrix}, [B] = \begin{bmatrix} & & [B_{xz}] \\ [B_{xz}]^T & & \end{bmatrix}$$

$$[C] = \begin{bmatrix} [C_x] & & \\ & [C_z] & \\ & & [C_y] \end{bmatrix}$$

$$\{U\}^T = [\{U_x\}^T, \{U_z\}^T, \{U_y\}^T], \quad \{P\}^T = [\{P_x\}^T, \{P_z\}^T, \{P_y\}^T]$$

$$\{U_x\}^T = [U_{r1}, U_{r2}, \dots, U_{rN}], \quad \{P_x\}^T = [P_{r1}, P_{r2}, \dots, P_{rN}]$$

$$\{U_z\}^T = [U_{z1}, U_{z2}, \dots, U_{zN}], \quad \{P_z\}^T = [P_{z1}, P_{z2}, \dots, P_{zN}]$$

$$\{U_y\}^T = [U_{\theta1}, U_{\theta2}, \dots, U_{\theta N}], \quad \{P_y\}^T = [P_{\theta1}, P_{\theta2}, \dots, P_{\theta N}]$$

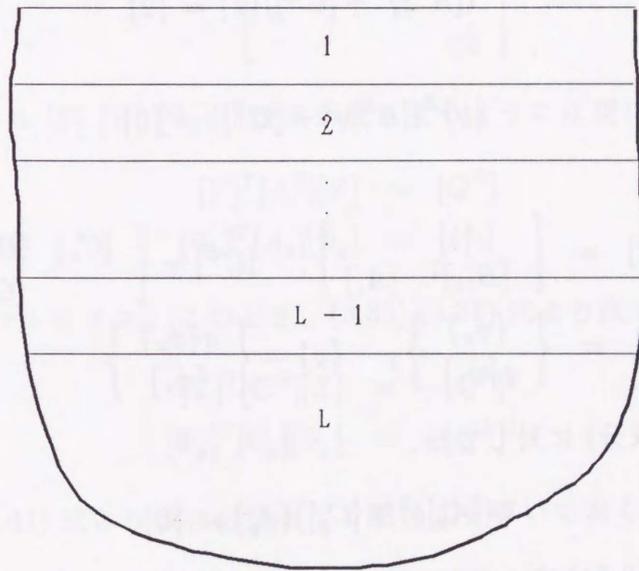


Figure 3.2: 薄層地盤モデル

ただし、最下面には、半無限一様地盤の剛性マトリクスを波数  $q$  が十分小さいとして 2 次までテーラ展開した

$$[K_L] = i\omega\rho V_S \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/\gamma & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} - \frac{\mu(1-2\gamma)}{\gamma} q \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$+ \frac{i\mu V_S}{2\omega} q^2 \begin{bmatrix} -\frac{2-\gamma}{\gamma} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1-2\gamma}{\gamma^3} & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \quad (3.28)$$

を付加する [49][50]。ここで、 $V_S$ は横波速度、 $V_P$ は縦波速度、 $\gamma = V_S/V_P$ である。(3.27) 式を Kausel の方法 [45][46] にしたがって、波数  $q$  を未知変数として残したままで次式の形に解く。

$$\{U\} = [K]^{-1}\{P\} \quad (3.29)$$

Kausel の方法は、まず、(3.27) 式の  $\{P\}$  を  $\{0\}$  に置いた波数  $q$  に関する 2 次の固有方程式

$$[K]\{\phi\} = \{0\} \quad (3.30)$$

の固有値解析を行い、求められた固有ベクトルの直交性を利用して  $[K]^{-1}$  を導くものである。

いま、(3.30) 式の  $[K]$  を元の形で書くと、

$$([A]q^2 + [B]q + [C])\{\phi\} = \{0\} \quad (3.31)$$

となる。(3.27) 式に示されるマトリクス  $[A]$ ,  $[B]$ ,  $[C]$  の特別な構造を利用すると、(3.31) 式の波数  $q$  に関する 2 次の固有値問題は 1 次の固有値問題として解くことができる。すなわち、 $r$  と  $z$  方向成分 (Rayleigh 波成分) に対しては、

$$([A^R]q^2 + [C^R])\{z\} = \{0\} \quad (3.32)$$

または、

$$\{y\}^T([A^R]q^2 + [C^R]) = \{0\} \quad (3.33)$$

ここに、

$$[A^R] = \begin{bmatrix} [A_x] & \\ [B_{xz}]^T & [A_z] \end{bmatrix}, \quad [C^R] = \begin{bmatrix} [C_x] & [B_{xz}] \\ & [C_z] \end{bmatrix}$$

$$\{z\} = \begin{Bmatrix} \{\phi_x\} \\ q\{\phi_z\} \end{Bmatrix}, \quad \{y\} = \begin{Bmatrix} q\{\phi_x\} \\ \{\phi_z\} \end{Bmatrix}$$

$\theta$  方向成分 (Love 波成分) に対しては、

$$([A_y]q^2 + [C_y])\{\phi_y\} = \{0\} \quad (3.34)$$

が得られる。(3.32), (3.34) 式の固有値問題を解くと、全層数が  $L$  で全節点が  $N (= 2L - 1)$  のとき (3.32) 式からは  $4N$  個、(3.34) 式からは  $2N$  個の複素数の固有値と固有ベクトルが得られる。その内、無限遠方での進行波条件 (固有値  $q_j$  の虚部が負) を満足する固有値と固有ベクトルを選択すると、有意なものはそれぞれ (3.32) 式が  $2N$  個、(3.34) 式が  $N$  個となる。得られた固有値と固有ベクトルを用いると、(3.32), (3.33) 式は次のように書ける。

$$[A^R][Z][Q^R]^2 + [C^R][Z] = \{0\} \quad (3.35)$$

$$[A^R]^T[Y][Q^R]^2 + [C^R]^T[Y] = \{0\} \quad (3.36)$$

ここに、

$$[Z] = \begin{bmatrix} [\Phi_x] \\ [\Phi_z][Q^R] \end{bmatrix}, \quad [Y] = \begin{bmatrix} [\Phi_x][Q^R] \\ [\Phi_z] \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned}
[\Phi_x] &= [\{\phi_{x1}\}, \{\phi_{x2}\}, \dots, \{\phi_{x2N}\}] \\
[\Phi_z] &= [\{\phi_{z1}\}, \{\phi_{z2}\}, \dots, \{\phi_{z2N}\}] \\
[Q^R] &= \begin{bmatrix} q_1^R & & & \\ & q_2^R & & \\ & & \ddots & \\ & & & q_{2N}^R \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

ここで、 $q_j, \{\phi_j\}$  は、第  $j$  番目の固有値および固有ベクトルを表す。  
同様に (3.34) 式は、次のようになる。

$$[A_y][\Phi_y][Q^L]^2 + [C_y][\Phi_y] = \{0\} \quad (3.37)$$

ここに、

$$\begin{aligned}
[\Phi_y] &= [\{\phi_{y1}\}, \{\phi_{y2}\}, \dots, \{\phi_{yN}\}] \\
[Q^L] &= \begin{bmatrix} q_1^L & & & \\ & q_2^L & & \\ & & \ddots & \\ & & & q_N^L \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

ただし、固有ベクトル  $[Z], [Y], [\Phi_y]$  は次式が成り立つように正規化する。

$$[Y]^T[A^R][Z] = [Q^R] \quad (3.38)$$

$$[\Phi_y]^T[A_y][\Phi_y] = [I] \quad (3.39)$$

ここで、 $[I]$  は単位マトリクス。このとき、(3.35),(3.37) 式より次式が成り立つ。

$$[Y]^T[C^R][Z] = -[Q^R]^3 \quad (3.40)$$

$$[\Phi_y]^T[C_y][\Phi_y] = -[Q^L]^2 \quad (3.41)$$

ここで、(3.38)~(3.41) 式より後に必要となる関係式を導いておく。(3.38) 式の両辺の逆行列をとると、

$$[Z]^{-1}[A^R]^{-1}([Y]^T)^{-1} = [Q^R]^{-1} \quad (3.42)$$

上式より、

$$[A^R]^{-1} = [Z][Q^R]^{-1}[Y]^T \quad (3.43)$$

ここに、

$$\begin{aligned}
[A^R]^{-1} &= \begin{bmatrix} [A_x]^{-1} & \\ -[A_z]^{-1}[B_{xz}]^T[A_x]^{-1} & [A_z]^{-1} \end{bmatrix} \\
[Z][Q^R]^{-1}[Y]^T &= \begin{bmatrix} [\Phi_x][\Phi_x]^T & [\Phi_x][Q^R]^{-1}[\Phi_z]^T \\ [\Phi_z][Q^R][\Phi_x]^T & [\Phi_z][\Phi_z]^T \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

したがって、(3.43) 式より次の関係式が得られる。

$$[A_x]^{-1} = [\Phi_x][\Phi_x]^T \quad (3.44)$$

$$[A_z]^{-1} = [\Phi_z][\Phi_z]^T \quad (3.45)$$

$$[A_z]^{-1}[B_{xz}]^T[A_x]^{-1} = -[\Phi_z][Q^R][\Phi_x]^T \quad (3.46)$$

$$[0] = [\Phi_x][Q^R][\Phi_z]^T \quad (3.47)$$

また、(3.39) 式より、

$$[A_y]^{-1} = [\Phi_y][\Phi_y]^T \quad (3.48)$$

同様に (3.40) 式の逆行列をとることによって、

$$[C^R]^{-1} = -[Z][Q^R]^{-3}[Y]^T \quad (3.49)$$

ここに、

$$[C^R]^{-1} = \begin{bmatrix} [C_x]^{-1} & -[C_x]^{-1}[B_{xz}][C_z]^{-1} \\ & [C_z]^{-1} \end{bmatrix}$$

$$-[Z][Q^R]^{-3}[Y]^T = - \begin{bmatrix} [\Phi_x][Q^R]^{-2}[\Phi_x]^T & [\Phi_x][Q^R]^{-3}[\Phi_z]^T \\ [\Phi_z][Q^R]^{-1}[\Phi_x]^T & [\Phi_z][Q^R]^{-2}[\Phi_z]^T \end{bmatrix}$$

(3.49) 式から次の関係式が得られる。

$$[C_x]^{-1} = -[\Phi_x][Q^R]^{-2}[\Phi_x]^T \quad (3.50)$$

$$[C_z]^{-1} = -[\Phi_z][Q^R]^{-2}[\Phi_z]^T \quad (3.51)$$

$$[C_x]^{-1}[B_{xz}][C_z]^{-1} = [\Phi_x][Q^R]^{-3}[\Phi_z]^T \quad (3.52)$$

$$[0] = [\Phi_z][Q^R]^{-1}[\Phi_x]^T \quad (3.53)$$

また、(3.41) 式より、

$$[C_y]^{-1} = -[\Phi_y][Q^L]^{-2}[\Phi_y]^T \quad (3.54)$$

いま、(3.27) 式も (3.32), (3.34) 式のような形式で書くと、

$$([A^R]q^2 + [C^R])\{U^R\} = \{P^R\} \quad (3.55)$$

$$([A_y]q^2 + [C_y])\{U_y\} = \{P_y\} \quad (3.56)$$

ただし、

$$\{U^R\} = \begin{Bmatrix} \{U_x\} \\ q\{U_z\} \end{Bmatrix}, \quad \{P^R\} = \begin{Bmatrix} \{P_x\} \\ q\{P_z\} \end{Bmatrix} \quad (3.57)$$

(3.55) 式の両辺の左から  $[Y]^T$  を掛け、左辺に  $[Z][Z]^{-1} = [I]$  を挿入すると、

$$[Y]^T([A^R]q^2 + [C^R])[Z][Z]^{-1}\{U^R\} = [Y]^T\{P^R\} \quad (3.58)$$

(3.38), (3.40) 式の直交性を考慮すると、

$$[Q^R](q^2[I] - [Q^R]^2)[Z]^{-1}\{U^R\} = [Y]^T\{P^R\} \quad (3.59)$$

となる。 $[Q^R](q^2[I] - [Q^R]^2)$  は対角マトリクスであるから、この逆行列は単に対角項の逆数をとればよい。したがって、

$$\{U^R\} = [Z][Q^R]^{-1}(q^2[I] - [Q^R]^2)^{-1}[Y]^T\{P^R\} \quad (3.60)$$

を得る。 $\{U^R\}, \{P^R\}, [Z], [Y]$  の表現を元にもどすと、

$$\begin{Bmatrix} \{U_x\} \\ \{U_z\} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} [\Phi_x][D^R][\Phi_x]^T & q[\Phi_x][Q^R]^{-1}[D^R][\Phi_z]^T \\ \frac{1}{q}[\Phi_z][Q^R][D^R][\Phi_x]^T & [\Phi_z][D^R][\Phi_z]^T \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \{P_x\} \\ \{P_z\} \end{Bmatrix} \quad (3.61)$$

ただし、

$$[D^R] = (q^2[I] - [Q^R]^2)^{-1} \quad (3.62)$$

となる。(3.47) 式または (3.53) 式の関係から、

$$\frac{1}{q}[\Phi_z][Q^R][D^R][\Phi_x]^T = (q[\Phi_x][Q^R]^{-1}[D^R][\Phi_z]^T)^T \quad (3.63)$$

であることは容易に示されるので、(3.61) 式は対称マトリクスである。

同様に (3.56) 式から (3.39), (3.41) 式の直交性を用いて、

$$\{U_y\} = [\Phi_y][D^L][\Phi_y]^T\{P_y\} \quad (3.64)$$

ただし、

$$[D^L] = (q^2[I] - [Q^L]^2)^{-1} \quad (3.65)$$

が得られる。以上で、(3.27) 式は、(3.61), (3.64) 式の形に解かれたことになる。(3.61), (3.64) 式から、第  $l$  節点に加振源があるときの第  $k$  節点での波数領域の変位を次の形に得る。ただし、節点の変位および表面力は  $r, \theta, z$  順に並べかえる。

$$\{U^k\} = [f^{kl}]\{P^l\} \quad (3.66)$$

ここに、

$$[f^{kl}] = \begin{bmatrix} f_{xx}^{kl} & 0 & f_{xz}^{kl} \\ 0 & f_{yy}^{kl} & 0 \\ f_{zx}^{kl} & 0 & f_{zz}^{kl} \end{bmatrix}$$

$$\{U^k\} = [U_r^k, U_\theta^k, U_z^k]$$

$$\{P^l\} = [P_r^l, P_\theta^l, P_z^l]$$

ただし、

$$f_{xx}^{kl} = \sum_{n=1}^{2N} \phi_x^{kn} \phi_x^{nl} a_n^R$$

$$f_{xz}^{kl} = \sum_{n=1}^{2N} \phi_x^{kn} \phi_z^{nl} b_n^R = \sum_{n=1}^{2N} \phi_x^{kn} \phi_z^{nl} c_n^R$$

$$\begin{aligned}
f_{zx}^{kl} &= \sum_{n=1}^{2N} \phi_z^{kn} \phi_x^{nl} b_n^R = \sum_{n=1}^{2N} \phi_z^{kn} \phi_x^{nl} c_n^R \\
f_{zz}^{kl} &= \sum_{n=1}^{2N} \phi_z^{kn} \phi_z^{nl} a_n^R \\
f_{yy}^{kl} &= \sum_{n=1}^N \phi_y^{kn} \phi_y^{nl} a_n^L
\end{aligned} \tag{3.67}$$

$$a_n = \frac{1}{q^2 - q_n^2}, \quad b_n = \frac{q}{q_n(q^2 - q_n^2)}, \quad c_n = \frac{q_n}{q(q^2 - q_n^2)} \tag{3.68}$$

(3.67) 式の  $a_n, b_n, c_n$  の上添字  $R, L$  は、(3.68) 式の  $q_n$  に  $q_n^R$  を用いるか  $q_n^L$  を用いるかの選択を示している。

(3.66) 式を (3.19) 式に適用すると、第  $l$  節点に加振源があるときの任意の  $i$  層内の波数領域の変位が次式によって得られる。

$$\{\bar{u}\} = [N]\{U\} \tag{3.69}$$

ここで  $\{U\}$  は、 $i$  層の上面に位置する節点番号が  $(2i-1)$  であることから、

$$\{U\}^T = [\{U^{2i-1}\}^T, \{U^{2i}\}^T, \{U^{2i+1}\}^T] \tag{3.70}$$

で与えられる。(3.69) 式を (3.3) 式に代入すれば、第  $l$  節点に加振源があるときの任意の  $i$  層内における空間領域の変位解が得られる。それらをまとめて書くと次のようになる。

$$\{u\} = [T_m] \int_0^\infty [C_m][N]\{U\} dq \tag{3.71}$$

ここに、

$$\begin{aligned}
\{u\}^T &= [u_r, u_\theta, u_z] \\
[T_m] &= \begin{bmatrix} D_m(\theta) & 0 & 0 \\ 0 & E_m(\theta) & 0 \\ 0 & 0 & D_m(\theta) \end{bmatrix} \\
[C_m] &= \begin{bmatrix} -J_m^s(qr) & J_m^p(qr) & 0 \\ J_m^p(qr) & -J_m^s(qr) & 0 \\ 0 & 0 & -J_m(qr) \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

$$J_m^s(qr) = \frac{J_{m-1}(qr) - J_{m+1}(qr)}{2}$$

$$J_m^p(qr) = \frac{J_{m-1}(qr) + J_{m+1}(qr)}{2}$$

なお、(3.71) 式は、 $i$  層内の任意点の変位を表す式であるが、第  $k$  節点のみの変位が必要な場合は、(3.66) 式を用いて (3.71) 式は次のように表せる。

$$\{u^{kl}\} = [T_m] \int_0^\infty [C_m][f^{kl}]\{P^l\} q dq \tag{3.72}$$

### 3.4 薄層法点加振解

ここで、薄層の任意の節点に点加振が作用する時の変位解を求める。加振力として、原点において鉛直方向に作用する上下方向加振と、水平方向に作用する水平方向加振を考える。まず、任意の節点上の原点を中心とした半径  $r_o$  の円の内部に一様に  $\rho_z e^{i\omega t}$  の鉛直加振力が作用しているものとする。この場合の応力の境界条件は、

$$s_z = \begin{cases} \rho_z & (r < r_o) \\ 0 & (r > r_o) \end{cases} \quad (3.73)$$

で与えられる。ただし、時間項は省略している。いま、 $\pi r_o \rho_z = 1$  とすると、(3.73) の条件は、Hankel 変換とその逆変換によって次のように表すことができる。

$$s_z = \frac{1}{\pi r_o^2} \int_0^\infty r_o J_1(qr_o) J_0(qr) dq \quad (3.74)$$

(3.74) 式を (3.12) 式に代入してその両辺を比較すれば、

$$\bar{s}_z = -\frac{J_1(qr_o)}{\pi r_o q} \quad (3.75)$$

が得られる。同様に、任意の節点上の原点を中心とした半径  $r_o$  の円の内部に一様に  $\rho_x e^{i\omega t}$  の水平加振力が作用しているものとする。この場合の応力の境界条件は次のように書ける。

$$s_r = \begin{cases} \rho_x D_1(\theta) & (r < r_o) \\ 0 & (r > r_o) \end{cases} \\ s_\theta = \begin{cases} \rho_x E_1(\theta) & (r < r_o) \\ 0 & (r > r_o) \end{cases} \quad (3.76)$$

ただし、上式は、 $D_1(\theta), E_1(\theta)$  の上側をとると、 $x$  方向加振を表し、下側をとると  $y$  方向加振を表す。(3.76) 式は、 $\pi r_o^2 \rho_x = 1$  とすると、(3.74) 式と同じく次のように表される。

$$s_r = \frac{1}{\pi r_o^2} \int_0^\infty r_o J_1(qr_o) J_0(qr) dq \cdot D_1(\theta) \quad (3.77)$$

$$s_\theta = -\frac{1}{\pi r_o^2} \int_0^\infty r_o J_1(qr_o) J_0(qr) dq \cdot E_1(\theta) \quad (3.78)$$

ここで、次の公式

$$qJ_0(qr) = \frac{\partial J_1(qr)}{\partial r} + \frac{J_1(qr)}{r} \quad (3.79)$$

を考慮して、(3.77),(3.78) 式を (3.12) 式に代入してその両辺を比較すると、

$$\bar{s}_r = -\frac{J_1(qr_o)}{\pi r_o q}, \quad \bar{s}_\theta = \frac{J_1(qr_o)}{\pi r_o q} \quad (3.80)$$

が得られる。したがって、(3.72) 式の第  $l$  節点の表面力  $\{P^l\}$  は次式で表される。

$$\{P^l\}^T = [0, 0, \bar{s}_z] \quad ; \text{鉛直加振} \quad (3.81)$$

$$\{P^l\}^T = [\bar{s}_r, \bar{s}_\theta, 0] \quad ; \text{水平加振} \quad (3.82)$$

(3.81) を (3.72) 式に代入すると、第  $l$  節点の鉛直方向の円盤状加振による第  $k$  節点の変位解を次式のように得る。

$$\begin{aligned} u_r^{kl} &= \frac{1}{\pi r_o} \sum_{n=1}^{2N} \phi_x^{kn} \phi_z^{ln} \frac{d}{dr} I_{1n}^R / q_n^R \\ u_\theta^{kl} &= 0 \\ u_z^{kl} &= \frac{1}{\pi r_o} \sum_{n=1}^{2N} \phi_z^{kn} \phi_z^{ln} I_{1n}^R \end{aligned} \quad (3.83)$$

ここに、

$$\begin{aligned} I_{1n} &= \int_0^\infty \frac{1}{q^2 - q_n^2} J_0(qr) J_1(qr_o) dq \\ &= \begin{cases} \frac{\pi}{2iq_n} J_0(q_n r) H_1^{(2)}(q_n r_o) - \frac{1}{r_o q_n^2} & 0 \leq r \leq r_o \\ \frac{\pi}{2iq_n} J_1(q_n r_o) H_0^{(2)}(q_n r) & r_o \leq r \end{cases} \end{aligned} \quad (3.84)$$

ただし、 $H_m^{(2)}$  は、 $m$  次の第 2 種 Hankel 関数を表す。

同様に、(3.82) を (3.72) 式に代入すると、第  $l$  節点の水平方向の円盤状加振による第  $k$  節点の変位解を次式のように得る。

$$\begin{aligned} u_r^{kl} &= \frac{1}{\pi r_o} \left( \sum_{n=1}^{2N} \phi_x^{kn} \phi_x^{ln} \frac{d}{dr} I_{3n}^R + \frac{1}{r} \sum_{n=1}^N \phi_y^{kn} \phi_y^{ln} I_{3n}^L \right) \cdot D_1(\theta) \\ u_\theta^{kl} &= -\frac{1}{\pi r_o} \left( \frac{1}{r} \sum_{n=1}^{2N} \phi_x^{kn} \phi_x^{ln} I_{3n}^R + \sum_{n=1}^N \phi_y^{kn} \phi_y^{ln} \frac{d}{dr} I_{3n}^L \right) \cdot E_1(\theta) \\ u_z^{kl} &= \frac{1}{\pi r_o} \sum_{n=1}^{2N} \phi_z^{kn} \phi_x^{ln} I_{3n}^R q_n^R \cdot D_1(\theta) \end{aligned} \quad (3.85)$$

ここに、

$$\begin{aligned} I_{3n} &= \int_0^\infty \frac{1}{q(q^2 - q_n^2)} J_1(qr) J_1(qr_o) dq \\ &= \begin{cases} \frac{\pi}{2iq_n^2} J_1(q_n r) H_1^{(2)}(q_n r_o) - \frac{r}{2r_o q_n^2} & 0 \leq r \leq r_o \\ \frac{\pi}{2iq_n^2} J_1(q_n r_o) H_1^{(2)}(q_n r) - \frac{r_o}{2r q_n^2} & r_o \leq r \end{cases} \end{aligned} \quad (3.86)$$

次に、(3.83) 式において  $r_o \rightarrow 0$  とし、このとき  $J_1(q_n r_o) \rightarrow q_n r_o / 2$  であること考慮すると、第  $l$  節点の  $z$  方向点加振による第  $k$  節点の変位解が次式のように得られる。ただし、 $u$  の最初の添字は加振方向を示すものとする。

$$\begin{aligned} u_{zr}^{kl} &= \frac{1}{4i} \sum_{n=1}^{2N} \phi_x^{kn} \phi_z^{ln} \frac{d}{dr} H_0^{(2)}(q_n^R r) / q_n^R \\ u_{z\theta}^{kl} &= 0 \\ u_{zz}^{kl} &= \frac{1}{4i} \sum_{n=1}^{2N} \phi_z^{kn} \phi_z^{ln} H_0^{(2)}(q_n^R r) \end{aligned} \quad (3.87)$$

同様に (3.85) 式において  $r_0 \rightarrow 0$  とし、 $J_1(q_n r_0) \rightarrow q_n r_0/2$  であること、(3.27) 式において  $[C_x] = [C_y]$  であることと (3.50), (3.54) 式、および (3.53) 式の関係などを考慮すると、第  $l$  節点の  $j(j = x, y)$  方向点加振による第  $k$  節点の変位解が次式のように得られる。

$$\begin{aligned}
 u_{jr}^{kl} &= \frac{1}{4i} \left\{ \sum_{n=1}^{2N} \phi_x^{kn} \phi_x^{ln} \frac{d}{dr} H_1^{(2)}(q_n^R r)/q_n^R \right. \\
 &\quad \left. + \frac{1}{r} \sum_{n=1}^N \phi_y^{kn} \phi_y^{ln} H_1^{(2)}(q_n^L r)/q_n^L \right\} \cdot D_1(\theta) \\
 u_{j\theta}^{kl} &= -\frac{1}{4i} \left\{ \frac{1}{r} \sum_{n=1}^{2N} \phi_x^{kn} \phi_x^{ln} H_1^{(2)}(q_n^R r)/q_n^R \right. \\
 &\quad \left. + \sum_{n=1}^N \phi_y^{kn} \phi_y^{ln} \frac{d}{dr} H_1^{(2)}(q_n^L r)/q_n^L \right\} \cdot E_1(\theta) \\
 u_{jz}^{kl} &= \frac{1}{4i} \sum_{n=1}^{2N} \phi_z^{kn} \phi_x^{ln} H_1^{(2)}(q_n^R r) \cdot D_1(\theta) \tag{3.88}
 \end{aligned}$$

ただし、

$$D_1(\theta) = \begin{cases} \cos \theta & (j = x) \\ \sin \theta & (j = y) \end{cases}, \quad E_1(\theta) = \begin{cases} \sin \theta & (j = x) \\ -\cos \theta & (j = y) \end{cases} \tag{3.89}$$

次に、直交デカルト座標系における点加振解の表現を求めておく。直交デカルト座標系と円筒座標系の座標変換は次式で表せる。

$$\begin{Bmatrix} u_{ix} \\ u_{iy} \\ u_{iz} \end{Bmatrix} = [T_r(\theta)] \begin{Bmatrix} u_{ir} \\ u_{i\theta} \\ u_{iz} \end{Bmatrix}; \quad i = x, y, z \tag{3.90}$$

ここに、

$$[T_r(\theta)] = \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta & 0 \\ \sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{3.91}$$

(3.90) 式に、(3.87), (3.88) 式を代入すると、

$$\begin{aligned}
 u_{xx}^{kl} &= \frac{1}{8i} \left[ \sum_{n=1}^{2N} \phi_x^{kn} \phi_x^{ln} H_0^R + \sum_{n=1}^N \phi_y^{kn} \phi_y^{ln} H_0^L \right. \\
 &\quad \left. - \left\{ \sum_{n=1}^{2N} \phi_x^{kn} \phi_x^{ln} H_2^R - \sum_{n=1}^N \phi_y^{kn} \phi_y^{ln} H_2^L \right\} \cos 2\theta \right] \\
 u_{xy}^{kl} &= -\frac{1}{8i} \left\{ \sum_{n=1}^{2N} \phi_x^{kn} \phi_x^{ln} H_2^R - \sum_{n=1}^N \phi_y^{kn} \phi_y^{ln} H_2^L \right\} \sin 2\theta \\
 u_{xz}^{kl} &= \frac{1}{4i} \sum_{n=1}^{2N} \phi_z^{kn} \phi_x^{ln} H_1^R \cos \theta \\
 u_{yx}^{kl} &= u_{xy}^{kl} \\
 u_{yy}^{kl} &= \frac{1}{8i} \left[ \sum_{n=1}^{2N} \phi_x^{kn} \phi_x^{ln} H_0^R + \sum_{n=1}^N \phi_y^{kn} \phi_y^{ln} H_0^L \right.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \left\{ \sum_{n=1}^{2N} \phi_x^{kn} \phi_x^{ln} H_2^R - \sum_{n=1}^N \phi_y^{kn} \phi_y^{ln} H_2^L \right\} \cos 2\theta \Big] \\
u_{yz}^{kl} &= \frac{1}{4i} \sum_{n=1}^{2N} \phi_z^{kn} \phi_x^{ln} H_1^R \sin \theta \\
u_{zx}^{kl} &= -\frac{1}{4i} \sum_{n=1}^{2N} \phi_x^{kn} \phi_z^{ln} H_1^R \cos \theta \\
u_{zy}^{kl} &= -\frac{1}{4i} \sum_{n=1}^{2N} \phi_x^{kn} \phi_z^{ln} H_1^R \sin \theta \\
u_{zz}^{kl} &= -\frac{1}{4i} \sum_{n=1}^{2N} \phi_z^{kn} \phi_z^{ln} H_0^R \quad (3.92)
\end{aligned}$$

ただし、

$$H_m^R = H_m^{(2)}(q_n^R r), \quad H_m^L = H_m^{(2)}(q_n^L r) \quad (3.93)$$

### 3.5 薄層法リング状線加振解

直交デカルト座標系における点加振解 (3.92) 式を全体円筒座標系  $(\rho, \varphi, z)$  において加振位置を点  $(\rho_e, \varphi_e, z_e)$  とする点加振解と解釈する (Fig.3.3 参照)。このとき、(3.92) 式の加振位置の座標系と観測位置の座標系を次式によって全体円筒座標系に変換する。

$$\begin{aligned}
[u_{st}] &= [T_r(\varphi_e)][u_{ij}][T_r(\varphi)]^T \quad (3.94) \\
& ; s, t = \rho, \varphi, z \quad i, j = x, y, z
\end{aligned}$$

(3.94) 式を具体的に書くと次式のようなになる。ただし、以後添字として  $\rho, \varphi, z$  を用いる

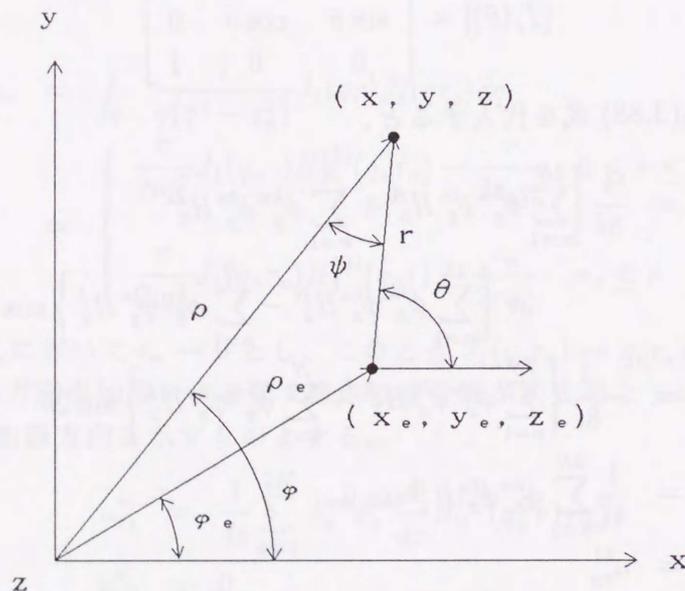


Figure 3.3: 全体円筒座標と局所円筒座標

ときはそれぞれに代えて 1, 2, 3 と表記する。

$$\begin{aligned}
 u_{11}^{kl} &= u_{xx}^{kl} \cos \varphi \cos \varphi_e + u_{xy}^{kl} \sin(\varphi + \varphi_e) + u_{yy}^{kl} \sin \varphi \sin \varphi_e \\
 u_{12}^{kl} &= -u_{xx}^{kl} \sin \varphi \cos \varphi_e + u_{xy}^{kl} \cos(\varphi + \varphi_e) + u_{yy}^{kl} \cos \varphi \sin \varphi_e \\
 u_{13}^{kl} &= u_{xz}^{kl} \cos \varphi_e + u_{yz}^{kl} \sin \varphi_e \\
 u_{21}^{kl} &= -u_{xx}^{kl} \cos \varphi \sin \varphi_e + u_{xy}^{kl} \cos(\varphi + \varphi_e) + u_{yy}^{kl} \sin \varphi \cos \varphi_e \\
 u_{22}^{kl} &= u_{xx}^{kl} \sin \varphi \sin \varphi_e - u_{xy}^{kl} \sin(\varphi + \varphi_e) + u_{yy}^{kl} \cos \varphi \cos \varphi_e \\
 u_{23}^{kl} &= -u_{xz}^{kl} \sin \varphi_e + u_{yz}^{kl} \cos \varphi_e \\
 u_{31}^{kl} &= u_{zx}^{kl} \cos \varphi + u_{zy}^{kl} \sin \varphi \\
 u_{32}^{kl} &= -u_{zx}^{kl} \sin \varphi + u_{zy}^{kl} \cos \varphi \\
 u_{33}^{kl} &= u_{zz}^{kl}
 \end{aligned} \tag{3.95}$$

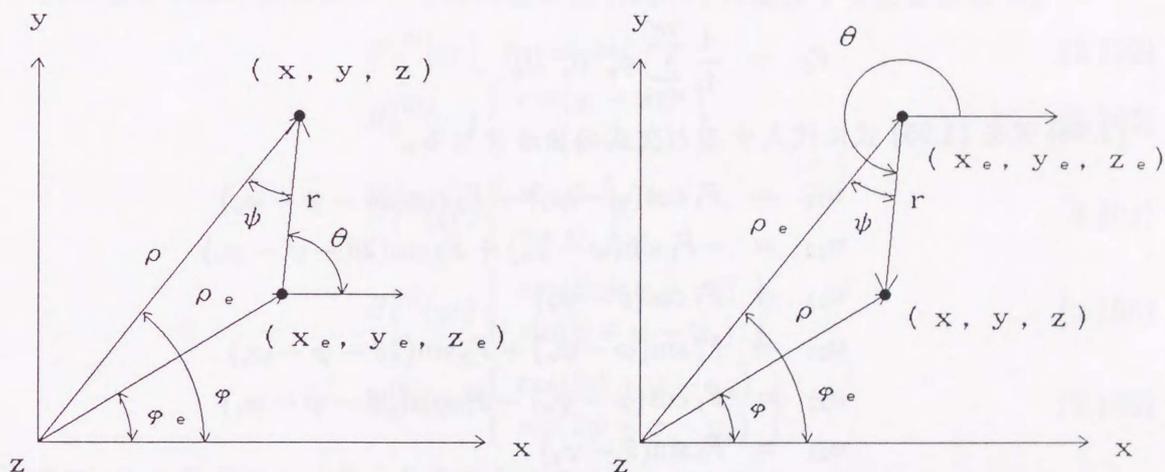


Figure 3.4:  $\rho > \rho_e$  と  $\rho < \rho_e$  の場合における  $\theta$  と  $\psi$  の幾何学的関係

次に (3.95) 式に (3.92) 式を代入し、Bessel 関数の加法定理 [57]

$$\begin{aligned}
 &H_n^{(2)}(qr)D_n(\psi) \\
 &= \begin{cases} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\varepsilon_m}{2} \{ \pm (-1)^n H_{m-n}^{(2)}(q\rho) + H_{m+n}^{(2)}(q\rho) \} J_m(q\rho_e) D_m(\varphi - \varphi_e) & ; \rho > \rho_e \\ \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\varepsilon_m}{2} \{ \pm (-1)^n H_{m-n}^{(2)}(q\rho_e) + H_{m+n}^{(2)}(q\rho_e) \} J_m(q\rho) D_m(\varphi_e - \varphi) & ; \rho < \rho_e \end{cases} \tag{3.96}
 \end{aligned}$$

ここに、

$$\varepsilon_m = 2 - \delta_{m0} = \begin{cases} 1 & (m = 0) \\ 2 & (m \leq 1) \end{cases}, \quad D_n(\psi) = \begin{cases} \cos n\psi \\ \sin n\psi \end{cases} \tag{3.97}$$

を用いて局所円筒座標  $(r, \theta, z)$  で表されている部分を全体円筒座標  $(\rho, \varphi, z)$  に変換する

(Fig.3.4 参照)。まず周方向の表現を整理するために (3.92) 式を次のように表しておく。

$$\begin{aligned}
 u_{xx}^{kl} &= F_1 + F_2 \cos 2\theta & u_{xy}^{kl} &= F_2 \sin 2\theta & u_{xz}^{kl} &= F_3 \cos \theta \\
 u_{yx}^{kl} &= u_{xy}^{kl} & u_{yy}^{kl} &= F_1 - F_2 \cos 2\theta & u_{yz}^{kl} &= F_3 \sin \theta \\
 u_{zx}^{kl} &= F_4 \cos \theta & u_{zy}^{kl} &= F_4 \sin \theta & u_{zz}^{kl} &= F_5
 \end{aligned} \tag{3.98}$$

ここに、

$$\begin{aligned}
 F_1 &= \frac{1}{8i} \left\{ \sum_{n=1}^{2N} \phi_x^{kn} \phi_x^{ln} H_0^R + \sum_{n=1}^N \phi_y^{kn} \phi_y^{ln} H_0^L \right\} \\
 F_2 &= -\frac{1}{8i} \left\{ \sum_{n=1}^{2N} \phi_x^{kn} \phi_x^{ln} H_2^R - \sum_{n=1}^N \phi_y^{kn} \phi_y^{ln} H_2^L \right\} \\
 F_3 &= \frac{1}{4i} \sum_{n=1}^{2N} \phi_z^{kn} \phi_x^{ln} H_1^R \\
 F_4 &= -\frac{1}{4i} \sum_{n=1}^{2N} \phi_x^{kn} \phi_z^{ln} H_1^R \\
 F_5 &= \frac{1}{4i} \sum_{n=1}^{2N} \phi_z^{kn} \phi_z^{ln} H_0^R
 \end{aligned}$$

(3.98) 式を (3.95) 式に代入すると次式のようになる。

$$\begin{aligned}
 u_{11} &= F_1 \cos(\varphi - \varphi_e) + F_2 \cos(2\theta - \varphi - \varphi_e) \\
 u_{12} &= -F_1 \sin(\varphi - \varphi_e) + F_2 \sin(2\theta - \varphi - \varphi_e) \\
 u_{13} &= F_3 \cos(\theta - \varphi_e) \\
 u_{21} &= F_1 \sin(\varphi - \varphi_e) + F_2 \sin(2\theta - \varphi - \varphi_e) \\
 u_{22} &= F_1 \cos(\varphi - \varphi_e) - F_2 \cos(2\theta - \varphi - \varphi_e) \\
 u_{23} &= F_3 \sin(\theta - \varphi_e) \\
 u_{31} &= F_4 \cos(\theta - \varphi) \\
 u_{32} &= F_4 \sin(\theta - \varphi) \\
 u_{33} &= F_5
 \end{aligned} \tag{3.99}$$

(3.96) 式を適用するために、(3.99) 式の  $\theta$  を  $\psi$  を用いて書き直す。 $\rho > \rho_e$  の場合は、Fig.3.4 の左図より、 $\theta = \varphi + \psi$  となるので (3.99) 式は次式となる。

$$\begin{aligned}
 u_{11} &= F_1 \cos(\varphi - \varphi_e) + F_2 \cos(2\psi + \varphi - \varphi_e) \\
 u_{12} &= -F_1 \sin(\varphi - \varphi_e) + F_2 \sin(2\psi + \varphi - \varphi_e) \\
 u_{13} &= F_3 \cos(\psi + \varphi - \varphi_e) \\
 u_{21} &= F_1 \sin(\varphi - \varphi_e) + F_2 \sin(2\psi + \varphi - \varphi_e) \\
 u_{22} &= F_1 \cos(\varphi - \varphi_e) - F_2 \cos(2\psi + \varphi - \varphi_e) \\
 u_{23} &= F_3 \sin(\psi + \varphi - \varphi_e) \\
 u_{31} &= F_4 \cos \psi \\
 u_{32} &= F_4 \sin \psi \\
 u_{33} &= F_5
 \end{aligned} \tag{3.100}$$

一方、 $\rho < \rho_e$ の場合は、Fig.3.4 右図より、 $\theta = \pi + \varphi_e + \psi$ となるので、(3.99)式は次式となる。

$$\begin{aligned}
 u_{11} &= F_1 \cos(\varphi_e - \varphi) + F_2 \cos(2\psi + \varphi_e - \varphi) \\
 u_{12} &= F_1 \sin(\varphi_e - \varphi) + F_2 \sin(2\psi + \varphi_e - \varphi) \\
 u_{13} &= -F_3 \cos \psi \\
 u_{21} &= -F_1 \sin(\varphi_e - \varphi) + F_2 \sin(2\psi + \varphi_e - \varphi) \\
 u_{22} &= F_1 \cos(\varphi_e - \varphi) - F_2 \cos(2\psi + \varphi_e - \varphi) \\
 u_{23} &= -F_3 \sin \psi \\
 u_{31} &= -F_4 \cos(\psi + \varphi_e - \varphi) \\
 u_{32} &= -F_4 \sin(\psi + \varphi_e - \varphi) \\
 u_{33} &= F_5
 \end{aligned} \tag{3.101}$$

まず、 $\rho > \rho_e$ の場合について考える。(3.98)式の $F_1 \sim F_5$ のHankel関数部分と(3.100)式から、次の項を(3.96)式によって全体円筒座標 $(\rho, \varphi, z)$ に変換する必要がある。

$$H_0^{(2)}(qr) \tag{3.102}$$

$$H_0^{(2)}(qr) \begin{Bmatrix} \cos(\varphi - \varphi_e) \\ \sin(\varphi - \varphi_e) \end{Bmatrix} \tag{3.103}$$

$$H_1^{(2)}(qr) \begin{Bmatrix} \cos \psi \\ \sin \psi \end{Bmatrix} \tag{3.104}$$

$$H_1^{(2)}(qr) \begin{Bmatrix} \cos(\psi + \varphi - \varphi_e) \\ \sin(\psi + \varphi - \varphi_e) \end{Bmatrix} \tag{3.105}$$

$$H_2^{(2)}(qr) \begin{Bmatrix} \cos(2\psi + \varphi - \varphi_e) \\ \sin(2\psi + \varphi - \varphi_e) \end{Bmatrix} \tag{3.106}$$

(3.96)式の $\rho > \rho_e$ の方に $n = 0, 1, 2$ を代入すると、

$$\begin{aligned}
 H_0^{(2)}(qr) &= \sum_{m=0}^{\infty} \varepsilon_m H_m^{(2)}(q\rho) J_m(q\rho_e) \cos m(\varphi - \varphi_e) \\
 H_1^{(2)}(qr) D_1(\psi) &= \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\varepsilon_m}{2} \{ \mp H_{m-1}^{(2)}(q\rho) + H_{m+1}^{(2)}(q\rho) \} J_m(q\rho_e) D_m(\varphi - \varphi_e) \tag{3.107} \\
 H_2^{(2)}(qr) D_2(\psi) &= \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\varepsilon_m}{2} \{ \pm H_{m-2}^{(2)}(q\rho) + H_{m+2}^{(2)}(q\rho) \} J_m(q\rho_e) D_m(\varphi - \varphi_e)
 \end{aligned}$$

上式により(3.102),(3.104)は得られたことになる。次に(3.103),(3.105),(3.106)に(3.107)式を代入して、若干の変形を行う。ただし、以下では簡略のため次の表記を用いる。

$$H_m^{(2)}(q\rho) = H_m, \quad J_m(q\rho_e) = J_m^e, \quad \varphi - \varphi_e = \bar{\varphi} \tag{3.108}$$

このとき、(3.103)は、

$$H_0^{(2)}(qr) \cos \bar{\varphi} = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\varepsilon_m}{2} (H_{m-1} J_{m-1}^e + H_{m+1} J_{m+1}^e) \cos m\bar{\varphi} \tag{3.109}$$

$$H_0^{(2)}(qr) \sin \bar{\varphi} = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\varepsilon_m}{2} (H_{m-1} J_{m-1}^e - H_{m+1} J_{m+1}^e) \sin m\bar{\varphi} \tag{3.110}$$

(3.105) は、

$$\begin{aligned}
H_1^{(2)}(qr) \cos(\psi + \bar{\varphi}) &= H_1^{(2)}(qr) (\cos \psi \cos \bar{\varphi} - \sin \psi \sin \bar{\varphi}) \\
&= \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\varepsilon_m}{4} \{(-H_{m-2} + H_m) J_{m-1}^e + (-H_m + H_{m+2}) J_{m+1}^e\} \cos m\bar{\varphi} \\
&\quad - \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\varepsilon_m}{4} \{-(H_{m-2} + H_m) J_{m-1}^e + (H_m + H_{m+2}) J_{m+1}^e\} \cos m\bar{\varphi} \\
&= \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\varepsilon_m}{2} (J_{m-1}^e - J_{m+1}^e) H_m \cos m\bar{\varphi} \tag{3.111}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
H_1^{(2)}(qr) \sin(\psi + \bar{\varphi}) &= H_1^{(2)}(qr) (\cos \psi \sin \bar{\varphi} + \sin \psi \cos \bar{\varphi}) \\
&= \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{2} \{(-H_{m-2} + H_m) J_{m-1}^e - (-H_m + H_{m+2}) J_{m+1}^e\} \sin m\bar{\varphi} \\
&\quad + \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{2} \{(H_{m-2} + H_m) J_{m-1}^e + (H_m + H_{m+2}) J_{m+1}^e\} \sin m\bar{\varphi} \\
&= \sum_{m=0}^{\infty} (J_{m-1}^e + J_{m+1}^e) H_m \sin m\bar{\varphi} \tag{3.112}
\end{aligned}$$

(3.106) は、

$$\begin{aligned}
H_2^{(2)}(qr) \cos(2\psi + \bar{\varphi}) &= H_2^{(2)}(qr) (\cos 2\psi \cos \bar{\varphi} - \sin 2\psi \sin \bar{\varphi}) \\
&= \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\varepsilon_m}{2} (H_{m+1} J_{m-1}^e - H_{m-1} J_{m+1}^e) \cos m\bar{\varphi} \tag{3.113}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
H_2^{(2)}(qr) \sin(2\psi + \bar{\varphi}) &= H_2^{(2)}(qr) (\cos 2\psi \sin \bar{\varphi} + \sin 2\psi \cos \bar{\varphi}) \\
&= \sum_{m=0}^{\infty} (H_{m+1} J_{m-1}^e - H_{m-1} J_{m+1}^e) \sin m\bar{\varphi} \tag{3.114}
\end{aligned}$$

となる。  $\rho < \rho_e$  の場合は、(3.109)~(3.114) 式において、  $\bar{\varphi} = \varphi_e - \varphi$  とし、  $\rho$  と  $\rho_e$  を入れ換えることによって得られる。(3.109)~(3.114) 式といま述べた入れ換えをおこなった式をそれぞれ (3.100) 式と (3.101) 式に代入すると、全体円筒座標で表された点加振解が次式のように得られる。ただし、第 2 種 Hankel 関数の上添字の (2) は省略する。

$$u_{11}^{kl} = \sum_{m=0}^{\infty} \varepsilon_m \cdot u_{11}^{mkl} \cos m(\varphi - \varphi_e)$$

$$u_{12}^{kl} = \sum_{m=0}^{\infty} \varepsilon_m \cdot u_{12}^{mkl} \sin m(\varphi - \varphi_e)$$

$$u_{13}^{kl} = \sum_{m=0}^{\infty} \varepsilon_m \cdot u_{13}^{mkl} \cos m(\varphi - \varphi_e)$$

$$u_{21}^{kl} = - \sum_{m=0}^{\infty} \varepsilon_m \cdot u_{21}^{mkl} \sin m(\varphi - \varphi_e)$$

$$u_{22}^{kl} = \sum_{m=0}^{\infty} \varepsilon_m \cdot u_{22}^{mkl} \cos m(\varphi - \varphi_e)$$

$$u_{23}^{kl} = - \sum_{m=0}^{\infty} \varepsilon_m \cdot u_{23}^{mkl} \sin m(\varphi - \varphi_e)$$

$$\begin{aligned}
u_{31}^{kl} &= \sum_{m=0}^{\infty} \varepsilon_m \cdot u_{31}^{mkl} \cos m(\varphi - \varphi_e) \\
u_{32}^{kl} &= \sum_{m=0}^{\infty} \varepsilon_m \cdot u_{32}^{mkl} \sin m(\varphi - \varphi_e) \\
u_{33}^{kl} &= \sum_{m=0}^{\infty} \varepsilon_m \cdot u_{33}^{mkl} \cos m(\varphi - \varphi_e)
\end{aligned} \tag{3.115}$$

ここに、

$$\begin{aligned}
u_{11}^{mkl} &= \frac{1}{4i} \left( \sum_{n=1}^{2N} \phi_x^{kn} \phi_x^{ln} \left\{ \begin{array}{l} H_m^s(q_n^R \rho) J_m^s(q_n^R \rho_e) \\ J_m^s(q_n^R \rho) H_m^s(q_n^R \rho_e) \end{array} \right\} \right. \\
&\quad \left. + \sum_{n=1}^N \phi_y^{kn} \phi_y^{ln} \left\{ \begin{array}{l} H_m^p(q_n^L \rho) J_m^p(q_n^L \rho_e) \\ J_m^p(q_n^L \rho) H_m^p(q_n^L \rho_e) \end{array} \right\} \right) \\
u_{12}^{mkl} &= -\frac{1}{4i} \left( \sum_{n=1}^{2N} \phi_x^{kn} \phi_x^{ln} \left\{ \begin{array}{l} H_m^p(q_n^R \rho) J_m^s(q_n^R \rho_e) \\ J_m^p(q_n^R \rho) H_m^s(q_n^R \rho_e) \end{array} \right\} \right. \\
&\quad \left. + \sum_{n=1}^N \phi_y^{kn} \phi_y^{ln} \left\{ \begin{array}{l} H_m^s(q_n^L \rho) J_m^p(q_n^L \rho_e) \\ J_m^s(q_n^L \rho) H_m^p(q_n^L \rho_e) \end{array} \right\} \right) \\
u_{13}^{mkl} &= \frac{1}{4i} \sum_{n=1}^{2N} \phi_z^{kn} \phi_x^{ln} \left\{ \begin{array}{l} H_m(q_n^R \rho) J_m^s(q_n^R \rho_e) \\ J_m(q_n^R \rho) H_m^s(q_n^R \rho_e) \end{array} \right\} \\
u_{21}^{mkl} &= -\frac{1}{4i} \left( \sum_{n=1}^{2N} \phi_x^{kn} \phi_x^{ln} \left\{ \begin{array}{l} H_m^s(q_n^R \rho) J_m^p(q_n^R \rho_e) \\ J_m^s(q_n^R \rho) H_m^p(q_n^R \rho_e) \end{array} \right\} \right. \\
&\quad \left. + \sum_{n=1}^N \phi_y^{kn} \phi_y^{ln} \left\{ \begin{array}{l} H_m^p(q_n^L \rho) J_m^s(q_n^L \rho_e) \\ J_m^p(q_n^L \rho) H_m^s(q_n^L \rho_e) \end{array} \right\} \right) \\
u_{22}^{mkl} &= \frac{1}{4i} \left( \sum_{n=1}^{2N} \phi_x^{kn} \phi_x^{ln} \left\{ \begin{array}{l} H_m^p(q_n^R \rho) J_m^p(q_n^R \rho_e) \\ J_m^p(q_n^R \rho) H_m^p(q_n^R \rho_e) \end{array} \right\} \right. \\
&\quad \left. + \sum_{n=1}^N \phi_y^{kn} \phi_y^{ln} \left\{ \begin{array}{l} H_m^s(q_n^L \rho) J_m^s(q_n^L \rho_e) \\ J_m^s(q_n^L \rho) H_m^s(q_n^L \rho_e) \end{array} \right\} \right) \\
u_{23}^{mkl} &= -\frac{1}{4i} \sum_{n=1}^{2N} \phi_z^{kn} \phi_x^{ln} \left\{ \begin{array}{l} H_m(q_n^R \rho) J_m^p(q_n^R \rho_e) \\ J_m(q_n^R \rho) H_m^p(q_n^R \rho_e) \end{array} \right\} \\
u_{31}^{mkl} &= \frac{1}{4i} \sum_{n=1}^{2N} \phi_x^{kn} \phi_z^{ln} \left\{ \begin{array}{l} H_m^s(q_n^R \rho) J_m(q_n^R \rho_e) \\ J_m^s(q_n^R \rho) H_m(q_n^R \rho_e) \end{array} \right\} \\
u_{32}^{mkl} &= -\frac{1}{4i} \sum_{n=1}^{2N} \phi_x^{kn} \phi_z^{ln} \left\{ \begin{array}{l} H_m^p(q_n^R \rho) J_m(q_n^R \rho_e) \\ J_m^p(q_n^R \rho) H_m(q_n^R \rho_e) \end{array} \right\} \\
u_{33}^{mkl} &= \frac{1}{4i} \sum_{n=1}^{2N} \phi_z^{kn} \phi_z^{ln} \left\{ \begin{array}{l} H_m(q_n^R \rho) J_m(q_n^R \rho_e) \\ J_m(q_n^R \rho) H_m(q_n^R \rho_e) \end{array} \right\}
\end{aligned} \tag{3.116}$$

ここで、上添字の  $p, s$  は、

$$\begin{aligned}
Z_m^s(x) &= \{Z_{m-1}(x) - Z_{m+1}(x)\}/2 \\
Z_m^p(x) &= \{Z_{m-1}(x) + Z_{m+1}(x)\}/2
\end{aligned}$$

を意味する。ただし、 $Z_m(x)$  は、 $H_m^{(2)}(x)$  または  $J_m(x)$ 。また、カッコ内は、 $\left\{ \begin{array}{l} \rho > \rho_e \\ \rho \leq \rho_e \end{array} \right\}$  により選択される。

ここで、第  $l$  節点上の半径  $\rho_e$  の円周上に作用する周方向展開次数  $m$  の線加力分布を考える。

$$\begin{aligned} e_1 &= \frac{D_m(\varphi_e)}{2\pi} \\ e_2 &= \frac{E_m(\varphi_e)}{2\pi} \\ e_3 &= \frac{D_m(\varphi_e)}{2\pi} \end{aligned} \quad (3.117)$$

これを重みとして (3.115) 式に掛け、 $\varphi$  に関して 0 から  $2\pi$  まで積分すると、周方向波数  $m$  のリング状線加振に対する第  $k$  節点の変位解が次のように得られる。

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} u_{i1}^{kl} e_i d\varphi &= u_{i1}^{mkl} D_m(\varphi) \\ \int_0^{2\pi} u_{i2}^{kl} e_i d\varphi &= u_{i2}^{mkl} E_m(\varphi) \quad ; i = 1, 2, 3 \\ \int_0^{2\pi} u_{i3}^{kl} e_i d\varphi &= u_{i3}^{mkl} D_m(\varphi) \end{aligned} \quad (3.118)$$

本論文の以下の解析においては、グリーン関数として、上式に示されるリング状線加振解を用いる。

# Chapter 4

## 内部共振解の除去法

本章では内部共振解の除去法を示す。4.1節では内部共振現象を数理的に説明し、半球剛基礎のインピーダンス虚部を例に内部共振現象の影響を示す。4.2節では、基礎領域に蓋および内部空孔面を付加することによって、内部共振解を解析対象振動数の外に上昇させる方法を示す。4.3節では、内部空孔面の上面と下面を密着させることにより、面積が境界積分方程式の分割要素に相当する内部拘束面を導入し、これを内部に複数配置することにより内部共振解を除去する方法を示す。

### 4.1 内部共振解と解析精度

(2.39) 式の同次方程式

$$\int_{S_d} u_{ji}(\xi; x) \eta_j(\xi) dS(\xi) = 0 \quad (4.1)$$

が  $\eta_j(\xi) = 0$  以外の解を有すれば、(4.1) 式の解は一意に定まらない。以下にこのような解が存在することを明らかにする。

領域  $V'$  において (Fig.2.2 参照)、境界条件

$$\hat{u}_j(\xi) = 0 \quad ; \xi \in S_d \quad (4.2)$$

を満足する解が存在するならば、(2.34) 式より

$$- \int_{S_d} u_{ij}(x; \xi) \hat{p}_j(\xi) dS(\xi) = 0 \quad (4.3)$$

が成立している。(4.1) 式と (4.3) 式を (2.38) 式を考慮して比較すると、(4.1) 式において

$$\eta_j(\xi) = -\hat{p}_j(\xi) \quad (4.4)$$

となる自明でない解が存在する。

このとき、 $S_d$  上では変位の連続性より  $u_j = 0$ 、(2.36) 式と (4.4) 式の比較より  $p_j = 0$  である。これらを (2.33) 式に代入すると  $x \in V$  に対し  $u_i(x) = 0$  となる。すなわち、(4.1) 式で自明でない解が存在するとき領域  $V$  は静止している。このような現象を領域  $V'$  における内部共振現象と呼ぶ。また、自明でない解 (4.4) 式を内部共振解と呼んでいる。以

上述べてきたように内部共振解が存在する場合には、(2.39) 式の解を一意に定めることができない。

次に、このような内部共振現象を半無限弾性地盤における半球剛基礎のねじれインピーダンス虚部の解析例で見てみる。なお、以下の解析例ではすべて (2.50) 式および (2.51) 式のグリーン関数として、(3.118) 式で得られる薄層法リング状線加振解を用いる。

Fig.4.1は、(2.69) 式から求めた半径  $R_0$  の半球剛基礎のねじれインピーダンス虚部  $c_{TT}$  である。ただし、 $c_{TT}$  は、ねじれインピーダンス  $K_{TT}$  を

$$K_{TT}(a_0) = 2\pi\mu R_0^3 \{k_{TT}(a_0) + a_0 c_{TT}(a_0)\} \quad ; a_0 = \omega R_0 / V_S \quad (4.5)$$

と表した場合の値を示す。ここに、 $a_0$  は無次元化振動数、 $V_S$  は地盤の  $S$  波速度である。図には、比較のため (3.19) 式の離散化に 1 次の内挿関数を用いた場合の結果も示している。基礎面  $S_d$  の境界要素分割数は、半球の母線に沿って、薄層 1 次要素の場合が 10 と 20、薄層 2 次要素の場合が 10 とし、等分割とした。基礎下の薄層分割は、1 次要素の場合が、層厚  $0.1 \times R_0$  のものを 5 層、 $L_S/8$  ( $L_S$ ;  $S$  波の波長) のものを 8 層、2 次要素の場合が、 $0.2 \times R_0$  のものを 3 層、 $L_S/6$  のものを 6 層とした。ただし、これらの層厚は  $5R_0$  を超えないものとする。図中の破線は Luco [14] による厳密解を示す。

ところで、半球のねじれ動における内部固有関数は、球座標系  $(R, \theta, \varphi)$  において、次のようになる。

$$u_\varphi \sim j_n(k_S R) P_n^1(\cos \theta) \quad ; n = 1, 3, 5, \dots \quad (4.6)$$

ここに、 $j_n$  は第 1 種球 Bessel 関数、 $k_S = \omega/V_S$ 、 $P_n^m$  は第 1 種 Legendre 陪関数である。前述の議論により内部共振解は、基礎面の変位が 0 となる場所に存在するので、上式より半球剛基礎の内部共振解は、

$$j_n(k_S R_0) = j_n(a_0) = 0 \quad (4.7)$$

を満足する。最小の内部共振解は  $j_1$  の第 1 零点  $a_0 \doteq 4.493$  となる。したがって、図の無次元化振動数  $a_0 = 4.5$  付近の挙動は、内部領域  $V'$  における共振の影響である。図からわかるように薄層要素数を増やすこと、または、薄層要素を高次化することによって、内部共振の影響を受ける範囲が狭まる。これは、内部共振点付近に現れる解の乱れ幅がグリーン関数の精度に依存していることを示している。したがって、薄層法グリーン関数のような近似的グリーン関数を用いる場合は、解析の対象となる振動数領域から内部共振解を除去する必要がある。

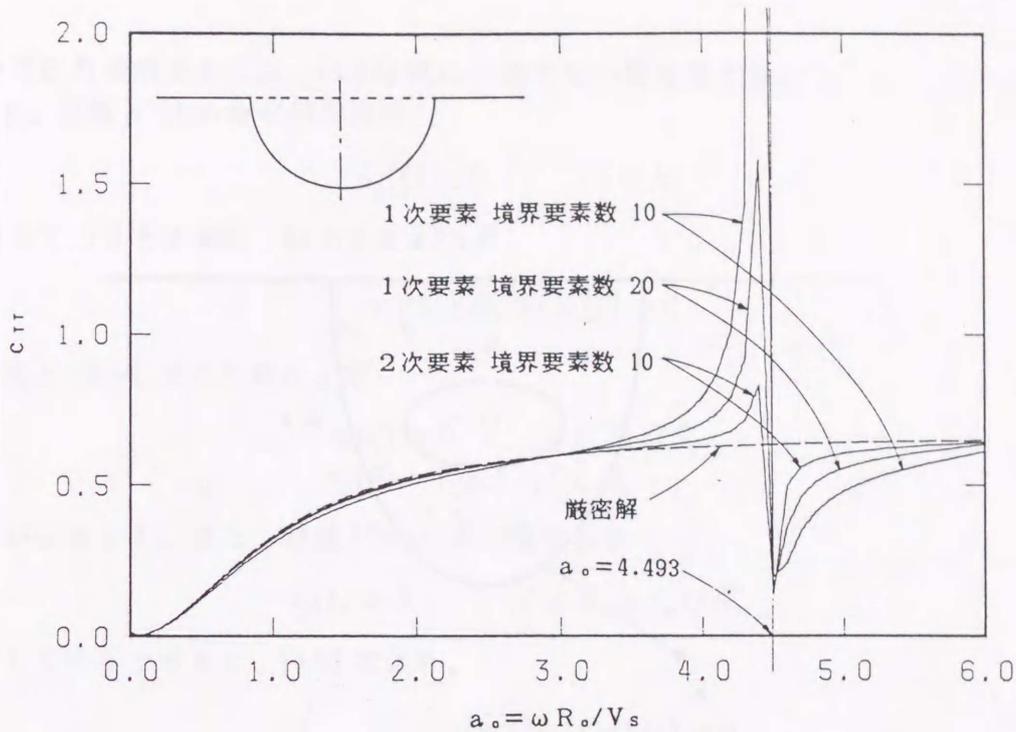


Figure 4.1: ねじれインピーダンス虚部に対する内部共振の影響

## 4.2 蓋と内部空孔面による内部共振解の除去法

本節では、内部領域  $V'$  に蓋および内部空孔面を設けることによって内部共振解を解析対象振動数から除去する方法を試みる。

Fig.4.2は、蓋と内部空孔面を設けた解析モデルを示している。ここに、図中の記号は以下のものを表す。 $V$ :外部領域、 $V'$ :内部領域、 $V''$ :領域  $V'$  内の空孔領域、 $S_f$ :自由地表面、 $S'_f$ :内部領域  $V'$  の蓋、 $S_d$ :領域  $V$  と領域  $V'$  の境界面、 $S_e$ :領域  $V'$  と領域  $V''$  の境界面、 $n$ :領域  $V'$  内に向かう法線ベクトル。

加振点  $x$  が領域  $V$  内にあるとする。このとき、領域  $V$  内では、(2.33) 式が成立する。再記すると、

$$u_i(x) + \int_{S_d} p_{ij}(x; \xi) u_j(\xi) dS(\xi) = \int_{S_d} u_{ij}(x; \xi) p_j(\xi) dS(\xi) \quad (4.8)$$

一方、領域  $V'$  内の変位  $\hat{u}_i$  と表面力  $\hat{p}_i$  の間には次式が成立する。

$$\begin{aligned} & \int_{S_d} \{p_{ij}(x; \xi) \hat{u}_j(\xi) - u_{ij}(x; \xi) \hat{p}_j(\xi)\} dS(\xi) \\ & + \int_{S_e} \{p_{ij}(x; \xi) \hat{u}_j(\xi) - u_{ij}(x; \xi) \hat{p}_j(\xi)\} dS(\xi) \\ & - \int_{S'_f} u_{ij}(x; \xi) \hat{p}_j(\xi) dS(\xi) = 0 \end{aligned} \quad (4.9)$$

ただし、上式では、 $S'_f$  上で  $\hat{p}_j \neq 0$  としている。さらに、領域  $V''$  で定義される変位と表面力を  $\tilde{u}_i, \tilde{p}_i$  とすると次式が成り立つ。

$$\int_{S_e} \{p_{ij}(x; \xi) \tilde{u}_j(\xi) - u_{ij}(x; \xi) \tilde{p}_j(\xi)\} dS(\xi) = 0 \quad (4.10)$$

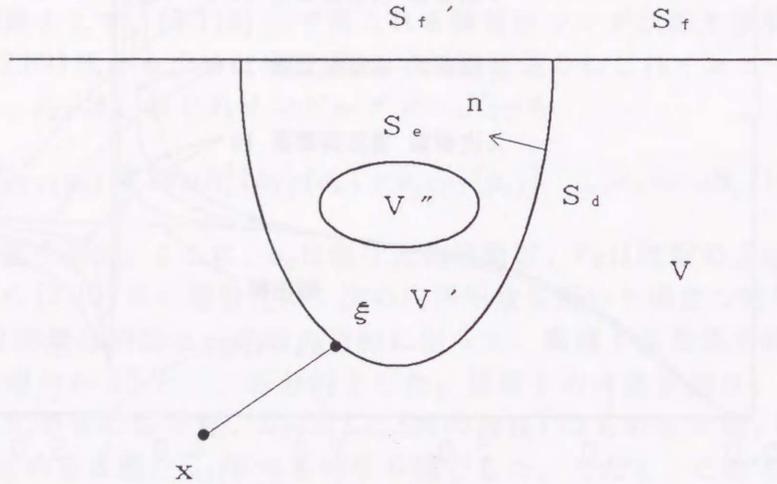


Figure 4.2: 蓋と内部空孔面を付加した解析モデル

次の条件

$$\begin{aligned} u_i &= \hat{u}_i && \text{on } S_d \\ \hat{u}_i &= \tilde{u}_i && \text{on } S_e \end{aligned}$$

の下で、(4.8) 式-(4.9) 式+(4.10) 式を作ると、

$$\begin{aligned} u_i(x) &= \int_{S_d} u_{ij}(x; \xi) \{ \hat{p}_j(\xi) - p_j(\xi) \} dS(\xi) \\ &+ \int_{S_e} u_{ij}(x; \xi) \{ \hat{p}_j(\xi) - \tilde{p}_j(\xi) \} dS(\xi) \\ &+ \int_{S_f'} u_{ij}(x; \xi) \hat{p}_j(\xi) dS(\xi) \end{aligned} \quad (4.11)$$

ここで、ソース分布 (加振強度分布)  $\eta_j$  を次のように定義する。

$$\eta_j(\xi) = \begin{cases} \hat{p}_j(\xi) - p_j(\xi) & ; \xi \in S_d \\ \hat{p}_j(\xi) - \tilde{p}_j(\xi) & ; \xi \in S_e \\ \hat{p}_j(\xi) & ; \xi \in S_f' \end{cases} \quad (4.12)$$

これより、(4.11) 式を書き換えると次式を得る。

$$u_i(x) = \int_{S_d + S_e + S_f'} u_{ij}(x; \xi) \eta_j(\xi) dS(\xi) \quad (4.13)$$

(4.13) 式の同次方程式

$$\int_{S_d + S_e + S_f'} u_{ij}(x; \xi) \eta_j(\xi) dS(\xi) = 0 \quad (4.14)$$

が $\eta_j = 0$ 以外の解をもてば、(4.13)式は一意的でない解を有する。

いま、領域 $V''$ 内の解が境界条件

$$\tilde{u}_j(\xi) = 0 \quad ; \xi \in S_e \quad (4.15)$$

を満たしているとする、(4.10)式より、

$$\int_{S_e} u_{ij}(x; \xi) \tilde{p}_j(\xi) dS(\xi) = 0 \quad (4.16)$$

(4.16)式と(4.14)式の比較により

$$\begin{aligned} \eta_j(\xi) &= 0 & ; \xi \in S_d \cup S'_f \\ \eta_j(\xi) &= \tilde{p}_j(\xi) & ; \xi \in S_e \end{aligned} \quad (4.17)$$

なる解が存在する。また、領域 $V'$ 内の解が境界条件

$$\hat{u}_j(\xi) = 0 \quad ; \xi \in S_d \cup S_e \cup S'_f \quad (4.18)$$

を満たしているとする、(4.9)式より、

$$\int_{S_d + S_e + S'_f} u_{ij}(x; \xi) \hat{p}_j(\xi) dS(\xi) = 0 \quad (4.19)$$

(4.19)式と(4.14)式の比較より、

$$\eta_j(\xi) = \hat{p}_j(\xi) \quad ; \xi \in S_d \cup S_e \cup S'_f \quad (4.20)$$

なる解も存在する。このように、周面を固定した領域 $V'$ ,  $V''$ それぞれの内部固有振動数が加振振動数と一致するとき(4.14)式が成立する。

したがって、領域 $V'$ ,  $V''$ の最小固有振動数をそれぞれ $\omega'$ ,  $\omega''$ とすると、解析対象振動数の上限 $\omega_{max}$ が、

$$\omega_{max} < \min(\omega', \omega'') \quad (4.21)$$

となるように $V''$ ,  $V'$ を設定すれば、内部共振解を解析対象振動数域から除去することが可能である。

(4.13)式は、(2.39)式の $S_d$ を $S_d + S_e + S'_f$ に拡張した形となっている。すなわち、

$$\begin{aligned} u_i(x) &= \int_{S_t} u_{ji}(\xi; x) \eta_j(\xi) dS(\xi) \\ & \quad ; S_t = S_d + S_e + S'_f \end{aligned} \quad (4.22)$$

上式に対応して、(2.41)式は、

$$p_i(x) = \pm \frac{1}{2} \eta_i(x) + \int_{S_t} p_{ji}(\xi; x) \eta_j(\xi) dS(\xi) \quad (4.23)$$

となる。いま、蓋および内部空孔面の要素数を $L$ 個として、(4.22), (4.23)式を離散化すると、(2.43), (2.45)式に対応して、

$$\{u^J\} = \sum_{J=1}^{M+L} [G^{IJ}] \{\eta^J\} \quad (4.24)$$

$$\{p^J\} = \sum_{J=1}^{M+L} \left( \pm \frac{1}{2} [I^{JJ}] + [H^{JJ}] \right) \{\eta^J\} \quad (4.25)$$

が得られる。(4.24) 式を  $I = 1, 2, \dots, M + L$  についてまとめると、

$$[G]\{\eta\} = \{u\} \quad (4.26)$$

ここに、

$$\begin{aligned} \{\eta\}^T &= [\{\eta^1\}^T, \{\eta^2\}^T, \dots, \{\eta^{M+L}\}^T] \\ \{u\}^T &= [\{u^1\}^T, \{u^2\}^T, \dots, \{u^{M+L}\}^T] \\ [G] &= \begin{bmatrix} [G^{1,1}] & \dots & [G^{1,M+L}] \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ [G^{M+L,1}] & \dots & [G^{M+L,M+L}] \end{bmatrix} \end{aligned}$$

同じく、(4.25) 式を表面力を知る必要のある  $S_d$  上の  $I = 1, 2, \dots, M$  についてまとめると、

$$[H]\{\eta\} = \{p_d\} \quad (4.27)$$

ここに、

$$\begin{aligned} \{p_d\}^T &= [\{p_d^1\}^T, \{p_d^2\}^T, \dots, \{p_d^M\}^T] \\ [H] &= \begin{bmatrix} [H^{1,1}] & \dots & [H^{1,M+L}] \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ [H^{M,1}] & \dots & [H^{M,M+L}] \end{bmatrix} \end{aligned}$$

したがって、2.4 節および 2.5 節の  $[G], [H]$  を (4.26), (4.27) 式で定義されるものに置き換えれば、これまでとまったく同様に解析を行うことができる。

以上のことを実証するために、まず、領域  $V'$  に蓋をした場合を解析し、領域  $V'$  の固有振動数がどの程度上昇するかを調査する。なお、以下の解析では、薄層要素はすべて 2 次要素とする。

Fig.4.3 は、半球剛基礎に蓋を付加して、(2.69) 式によりねじれインピーダンス虚部を解析したものである。基礎の蓋および地盤との境界面の境界要素数は、母線に沿ってそれぞれ 10 とした。基礎下の薄層分割は、 $0.2 \times R_o$  のものを 3 層、 $L_s/6$  のものを 6 層とした。ただし、この層厚は  $5R_o$  を超えないものとする。図の破線は厳密解 [14] である。

基礎上面に蓋がある場合の (4.6) 式に対応する内部固有関数は、

$$u_\varphi \sim j_n(k_S R) P_n^1(\cos \theta) \quad ; n = 2, 4, 6, \dots \quad (4.28)$$

となる。 $a_o$  の最小の内部共振解は、 $j_2$  の第 1 零点より  $a_o = 5.763$  となる。図の解析値も、その近傍で大きく変化していることがわかる。この結果から、蓋を設けるだけでは、固有振動数の大幅な上昇は望めないことがわかる。

Fig.4.4 は同じ半球剛基礎のモデルで、基礎に蓋と内部空孔面を設けた場合の結果である。内部空孔面の境界要素数は、上面、側面、下面の各部分で 4 とした。図から  $a_o = 6.0$  以下には、内部共振の影響が生じていないことがわかる。したがって、蓋と内部空孔面を組み合わせれば、内部共振解を解析対象振動数から除去できることが検証された。

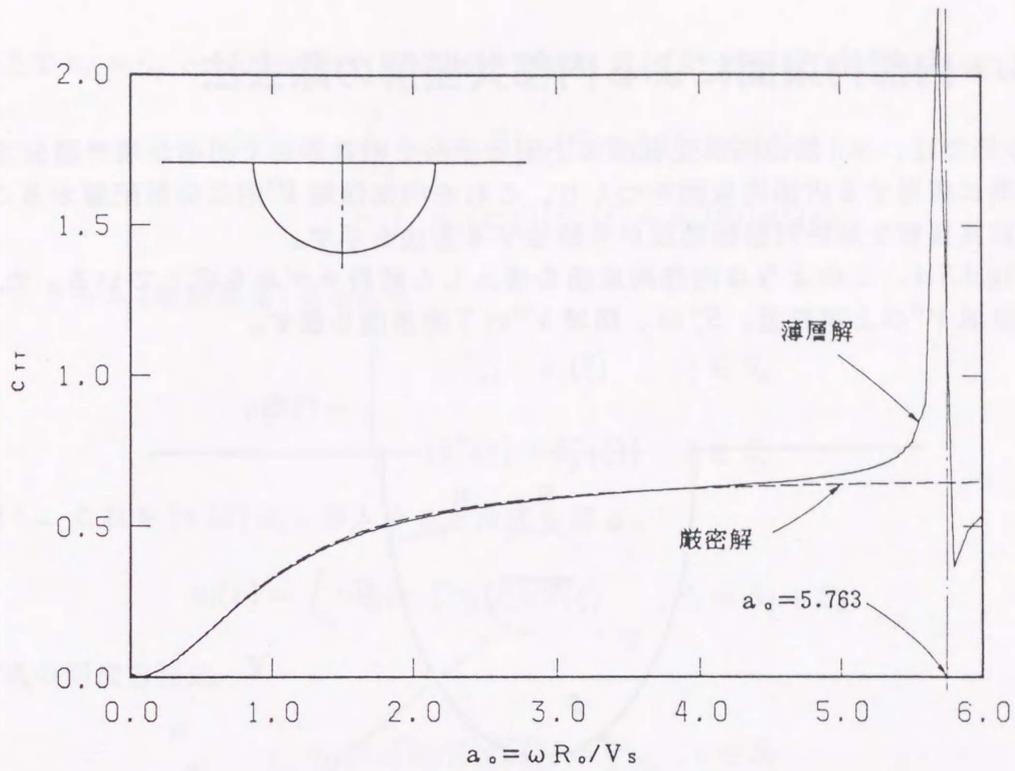


Figure 4.3: 蓋付き半球基礎のねじれインピーダンス虚部

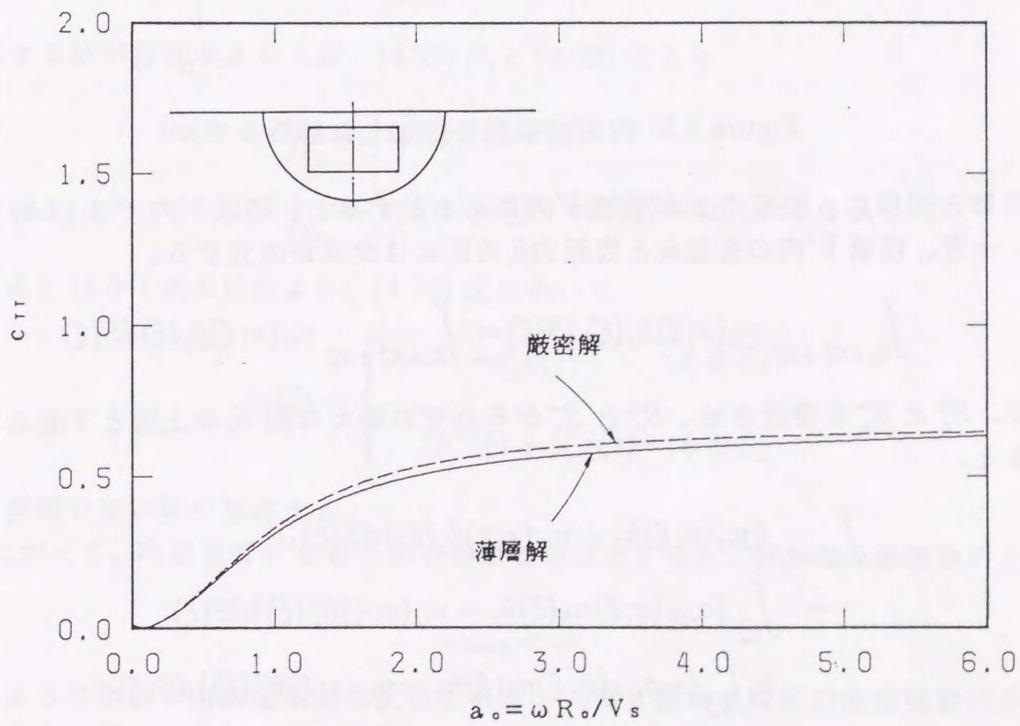


Figure 4.4: 内部空孔面付加による内部共振解の上昇

### 4.3 内部拘束面による内部共振解の除去法

本節では、4.2節の内部空孔面の上面と下面を密着させて面積が境界積分方程式の分割要素に相当する内部拘束面をつくり、これを内部領域  $V'$  内に分散配置することによって内部共振解を解析対象振動数から除去する方法を示す。

Fig.4.5は、このような内部拘束面を導入した解析モデルを示している。ただし、 $S_e^+$  は、領域  $V''$  の上部表面、 $S_e^-$  は、領域  $V''$  の下部表面を表す。

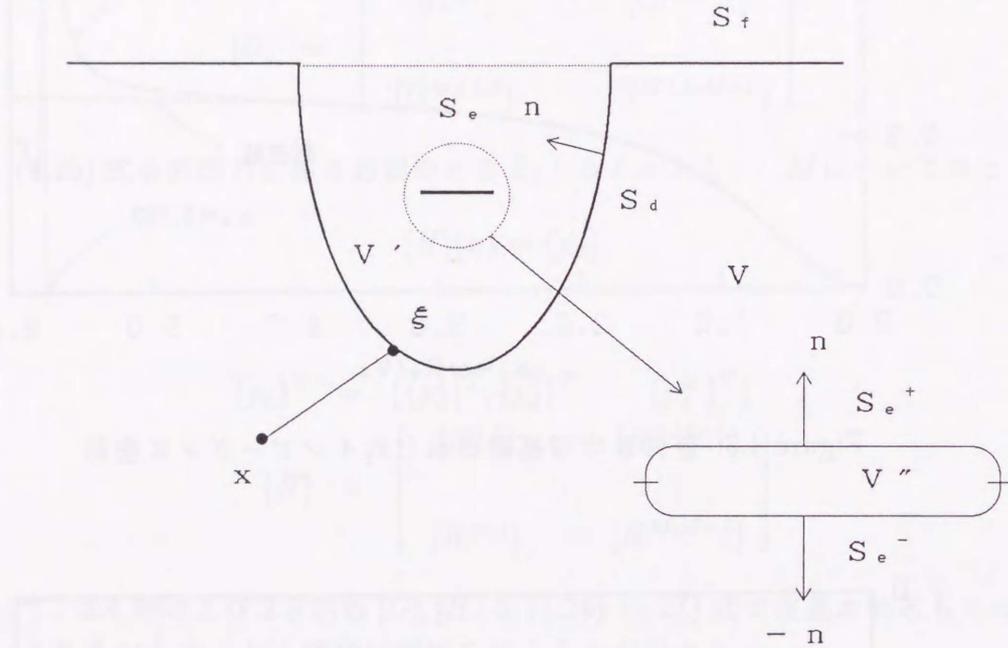


Figure 4.5: 内部拘束面を付加した解析モデル

4.2節と同様に、加振点  $x$  が領域  $V$  内にあるとすると、領域  $V$  内では (4.8) 式が成立する。一方、領域  $V'$  内の変位  $\hat{u}_i$  と表面力  $\hat{p}_i$  の間には次式が成立する。

$$\int_{S_d+S_e^++S_e^-} p_{ij}(x;\xi)\hat{u}_j(\xi)dS(\xi) = \int_{S_d+S_e^++S_e^-} u_{ij}(x;\xi)\hat{p}_j(\xi)dS(\xi) \quad (4.29)$$

ここで、 $S_e^+$  と  $S_e^-$  を接近させ、 $S_e^+$  と  $S_e^-$  がそれぞれ新たな面  $S_e$  の上面と下面となるようにすると、

$$\begin{aligned} & \int_{S_e^++S_e^-} \{p_{ij}(x;\xi)\hat{u}_j - u_{ij}(x;\xi)\hat{p}_j(\xi)\}dS(\xi) \\ & \rightarrow \int_{S_e^+} \{\sigma_{ijk}(x;\xi)n_k(\xi)\hat{u}_j - u_{ij}(x;\xi)\hat{p}_j^+(\xi)\}dS(\xi) \\ & \quad + \int_{S_e^-} \{-\sigma_{ijk}(x;\xi)n_k(\xi)\hat{u}_j - u_{ij}(x;\xi)\hat{p}_j^-(\xi)\}dS(\xi) \\ & \rightarrow -\int_{S_e} u_{ij}(x;\xi)\{\hat{p}_j^+(\xi) + \hat{p}_j^-(\xi)\}dS(\xi) \end{aligned} \quad (4.30)$$

ここに、 $\hat{p}_j^+$  と  $\hat{p}_j^-$  はそれぞれ  $S_e$  の上面と下面における表面力である。

$S_d$ 上で  $u_j = \hat{u}_j$  とし、さらに (4.30) 式を考慮して (4.8) 式から (4.29) 式を差し引くと、

$$u_i(x) = \int_{S_d} u_{ij}(x; \xi) \{p_j(\xi) - \hat{p}_j(\xi)\} dS(\xi) - \int_{S_e} u_{ij}(x; \xi) \{\hat{p}_j^+(\xi) + \hat{p}_j^-(\xi)\} dS(\xi) \quad (4.31)$$

ここで、ソース (加振強度) 分布  $\eta_j$  を

$$\eta_j(\xi) = \begin{cases} p_j(\xi) - \hat{p}_j(\xi) & ; \xi \in S_d \\ -\{\hat{p}_j^+(\xi) + \hat{p}_j^-(\xi)\} & ; \xi \in S_e \end{cases} \quad (4.32)$$

と定義し、これを (4.31) 式に導入すると次式を得る。

$$u_i(x) = \int_{S_t} u_{ij}(x; \xi) \eta_j(\xi) dS(\xi) \quad ; S_t = S_d + S_e \quad (4.33)$$

(4.33) 式の同次方程式

$$\int_{S_t} u_{ij}(x; \xi) \eta_j(\xi) dS(\xi) = 0 \quad ; x \in S_t \quad (4.34)$$

が  $\eta_j(\xi) = 0$  以外の解をもてば、(4.33) 式は一意的でない解を有する。

いま、領域  $V'$  において、境界条件

$$\hat{u}_j(\xi) = 0 \quad ; \xi \in S_t \quad (4.35)$$

を満足する解が存在するならば、(4.29) 式と (4.30) 式より

$$0 = - \int_{S_d} u_{ij}(x; \xi) \hat{p}_j(\xi) dS(\xi) - \int_{S_e} u_{ij}(x; \xi) \{\hat{p}_j^+(\xi) + \hat{p}_j^-(\xi)\} dS(\xi) \quad ; x \in S_t \quad (4.36)$$

(4.36) 式と (4.34) 式の比較より、(4.34) 式において

$$\eta_j(\xi) = \begin{cases} -\hat{p}_j(\xi) & ; \xi \in S_d \\ -\{\hat{p}_j^+(\xi) + \hat{p}_j^-(\xi)\} & ; \xi \in S_e \end{cases} \quad (4.37)$$

となる自明でない解が存在する。

したがって、内部領域  $V'$  の最小固有振動数を  $\omega'$  とすると、解析対象振動数の上限  $\omega_{max}$  が、

$$\omega_{max} < \omega' \quad (4.38)$$

となるように複数の内部拘束面を配置すれば、内部共振解を解析対象振動数域から除去することが可能である。一般に内部拘束面を適切に均等配置するならば、 $\omega'$  は、内部拘束面の個数に比例して上昇する。

解析は、(4.22) 式の  $S_t$  を (4.33) 式によって定義されるものとし、内部拘束面の個数を  $L$  個とすれば、4.2 節と全く同様に行える。

一様地盤における剛基礎のインピーダンス関数は振動数の増加と共に高振動数域の漸近解に滑らかに収束する。これに対して、多層地盤のインピーダンス関数は漸近解に収束する以前に激しく振動する傾向がある。しかもその要因が重複反射にあるのか内部共振にあるのかを判別することは容易でない。それゆえ、多層地盤の解析にあたっては、以下に示すようにあらかじめ一様地盤の解析を行って、(4.38) 式を満足するような内部拘束面を設定しておく必要がある。

1. 全層の材料定数を表層のそれに等しく置く
2. 内部拘束面の個数 ( $L$ ) の決定とそれらの均等配置
3. 新 $\omega =$  旧 $\omega + \Delta\omega$
4. (4.26) 式の  $[G]$  マトリクスの作成
5. (2.69) 式によるインピーダンス虚部の算定
6.  $\omega < \omega_{max}$  ならば、3 に戻る。
7. (4.38) 式の検定; インピーダンス虚部に内部共振現象が発生していれば  $L$  を増やして 2 に戻る。

Fig.4.6は、以上の内部拘束面の効果を調査するため、半無限一様地盤における半球剛基礎のねじれインピーダンス虚部を解析したものである。基礎面  $S_d$  の境界要素分割数は、半球の母線に沿って 10 とし、等分割とした。内部拘束面の幅は  $R_o/10$  とした。基礎下の薄層分割は、 $0.1 \times R_o$  のものを 1 層、 $0.2 \times R_o$  のものを 2 層、 $L_S/6$  のものを 6 層とした。図には、図中の右に示すように内部拘束面の数を 0, 1, 3, 5 と増やした場合の結果を示している。図から内部拘束面を増やしていくと内部共振振動数は比例的に上昇し、5 個程度配置すれば内部共振の影響はほぼ完全に除去できることがわかる。したがって、内部拘束面の採用により、前節の蓋と内部空孔面よりも少ない要素数で効率的な内部共振解の除去が可能となる。

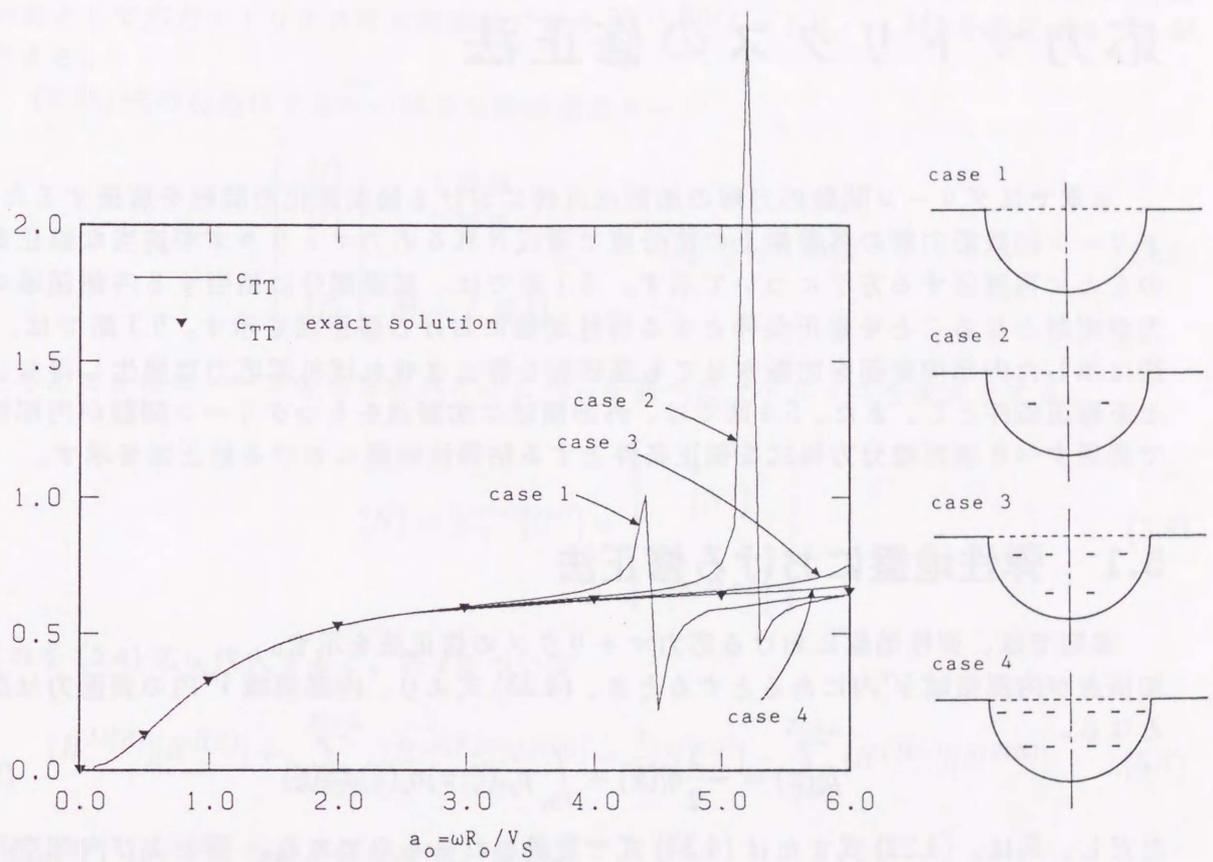


Figure 4.6: 内部拘束面付加による内部共振解の上昇

# Chapter 5

## 応力マトリクスの修正法

本章ではグリーン関数応力解の加振点近傍における精度悪化の問題を解決するため、グリーン関数応力解の各要素上の積分値で構成される応力マトリクスを適当な修正条件のもとに再評価する方法について示す。5.1節では、基礎部分に相当する内部領域の応力が実数となることを修正条件とする弾性地盤における修正法を示す。5.3節では、4.3節に示した内部拘束面を加振させても基礎面を静止させれば外部応力は発生し得ないことを修正条件とし、また、5.4節では、外部領域に加振点をもつグリーン関数が内部領域で満足すべき境界積分方程式を修正条件とする粘弾性地盤における修正法を示す。

### 5.1 弾性地盤における修正法

本節では、弾性地盤における応力マトリクスの修正法を示す。加振点が内部領域  $V'$  内にあるとすると、(4.23) 式より、内部領域  $V'$  内の表面力は次式となる。

$$\hat{p}_i(x) = -\frac{1}{2}\eta_i(x) + \int_{S_t} p_{ji}(\xi; x)\eta_j(\xi)dS(\xi) \quad (5.1)$$

ただし、 $S_t$  は、(4.22) 式または (4.33) 式で定義されるものである。蓋および内部空孔面の分割要素数または内部拘束面の個数を  $L$  として、(4.25) 式と同様に上式をベクトル・マトリクス表示すると、

$$\{\hat{p}^I\} = \sum_{J=1}^{M+L} \left( -\frac{1}{2}[I^{IJ}] + [H^{IJ}] \right) \{\eta^J\} \quad (5.2)$$

上式を実部と虚部に分離すると、

$$\begin{aligned} \{\hat{p}^{I(R)}\} + i\{\hat{p}^{I(C)}\} &= \sum_{J=1}^{M+L} \left\langle \left( -\frac{1}{2}[I^{IJ}] + [H^{IJ(R)}] \right) \{\eta^{J(R)}\} - [H^{IJ(C)}] \{\eta^{J(C)}\} \right. \\ &\quad \left. + i \left[ [H^{IJ(C)}] \{\eta^{J(R)}\} + \left( -\frac{1}{2}[I^{IJ}] + [H^{IJ(R)}] \right) \{\eta^{J(C)}\} \right] \right\rangle \quad (5.3) \end{aligned}$$

ここで、上添字  $(R)$  は実部、 $(C)$  は虚部を表す。内部領域  $V'$  を含む地盤層内に材料減衰がないとすると、内部領域  $V'$  における表面力は実数である。したがって、 $\{\hat{p}^{I(C)}\} = 0$  よ



一致する。これは、本節の修正法が内部領域の表面力が実数となることを条件としているためである。比較のため厳密なグリーン関数を数値積分して解析したもの [58] を黒丸で、また、半球剛基礎の場合は厳密解を破線 [14] で、円筒剛基礎の場合は Day の有限要素解 [23] を“□”で示している。

図から、直接解においては、応力マトリクスの修正を行わないものは極めて精度が悪いのに対し、応力マトリクスの修正を行ったものは、半球の場合は厳密解と、円筒の場合は厳密なグリーン関数による解析解と良好な一致を示していることがわかる。また、Fig.5.1, Fig.5.3における Hilbert 変換による間接解も良好な精度を示している。Fig.5.3のインピーダンス実部に見られる高振動数域における若干の精度の低下は  $\alpha_0 > 6.0$  に存在する内部共振の影響である。Fig.5.4のインピーダンス虚部にはその影響がまったく見られないことから、虚部に比較して実部は、内部共振の影響が広範囲にわたって現れることを示している。したがって、半無限一様地盤において得られる応力修正による解の精度、および内部共振の影響を調査するに際しては、インピーダンスの虚部の精度のみに依存し、計算の容易な Hilbert 変換による間接解との比較が有効である。

なお、本節の応力マトリクスの修正法は、ねじれ動以外の運動モードにおいてもねじれ動と同様な精度を示す。

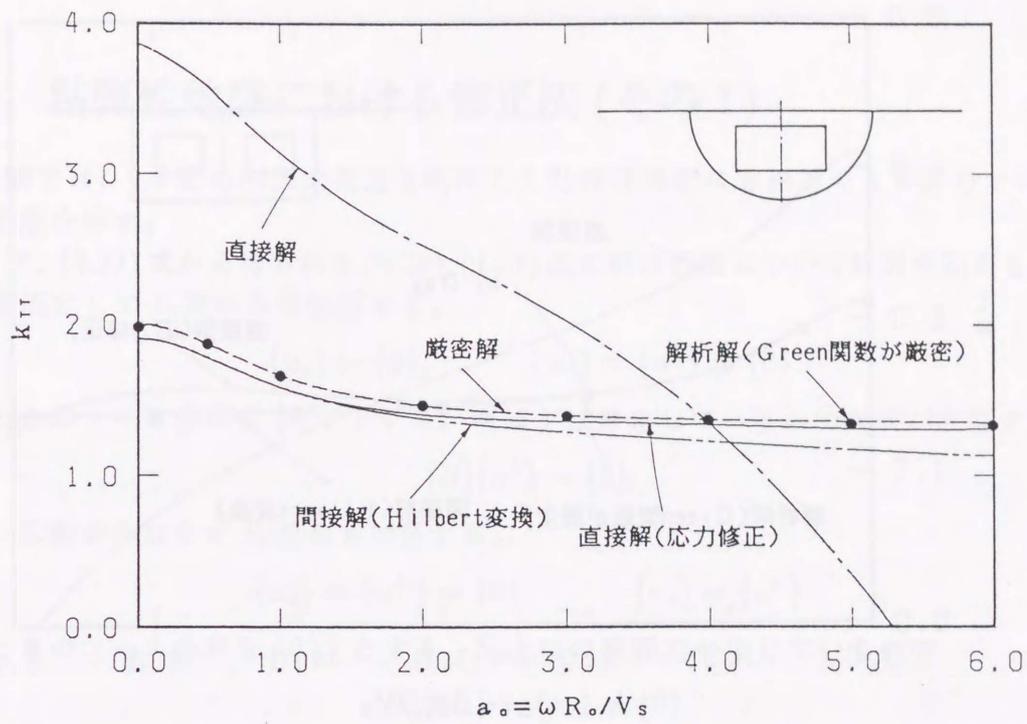


Figure 5.1: 半球基礎のねじれインピーダンス実部の比較

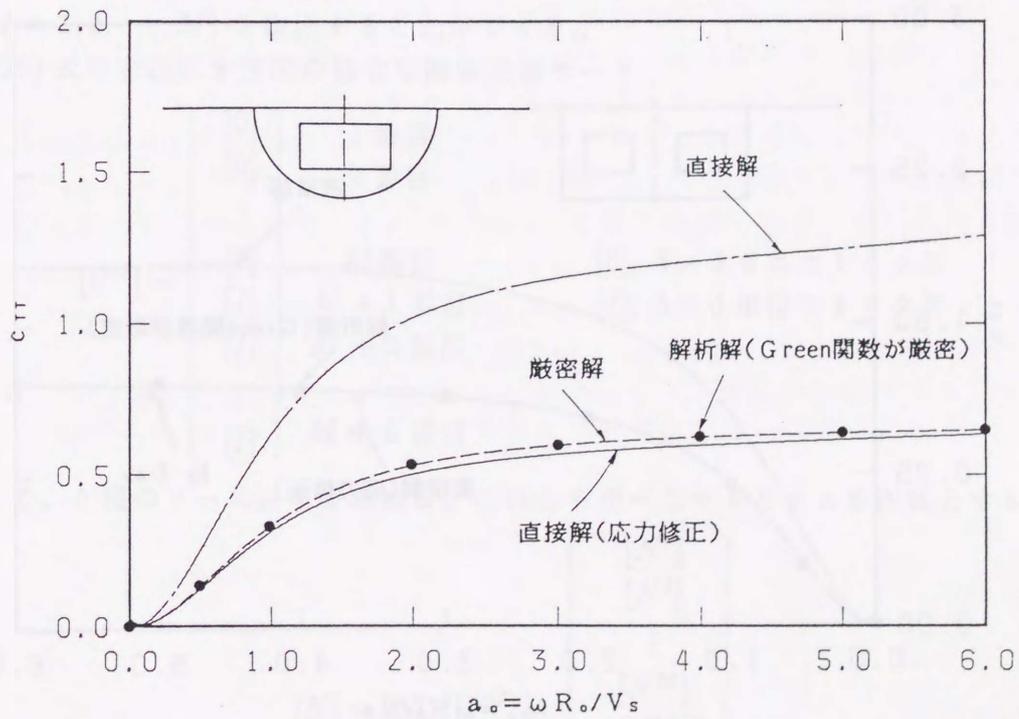


Figure 5.2: 半球基礎のねじれインピーダンス虚部の比較

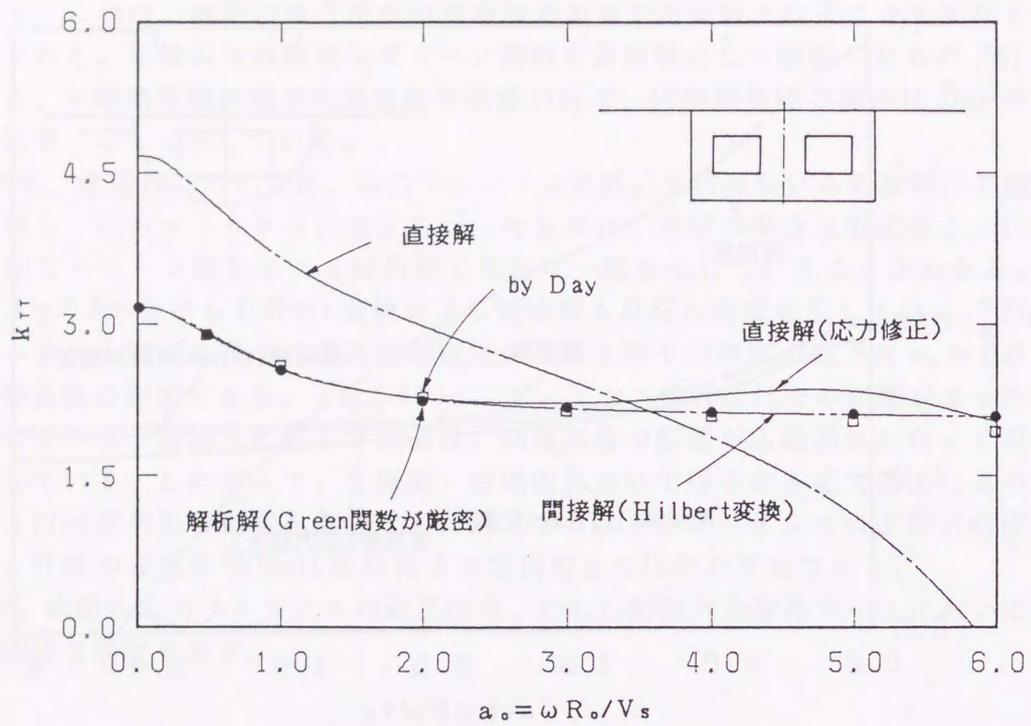


Figure 5.3: 円筒基礎のねじれインピーダンス実部の比較

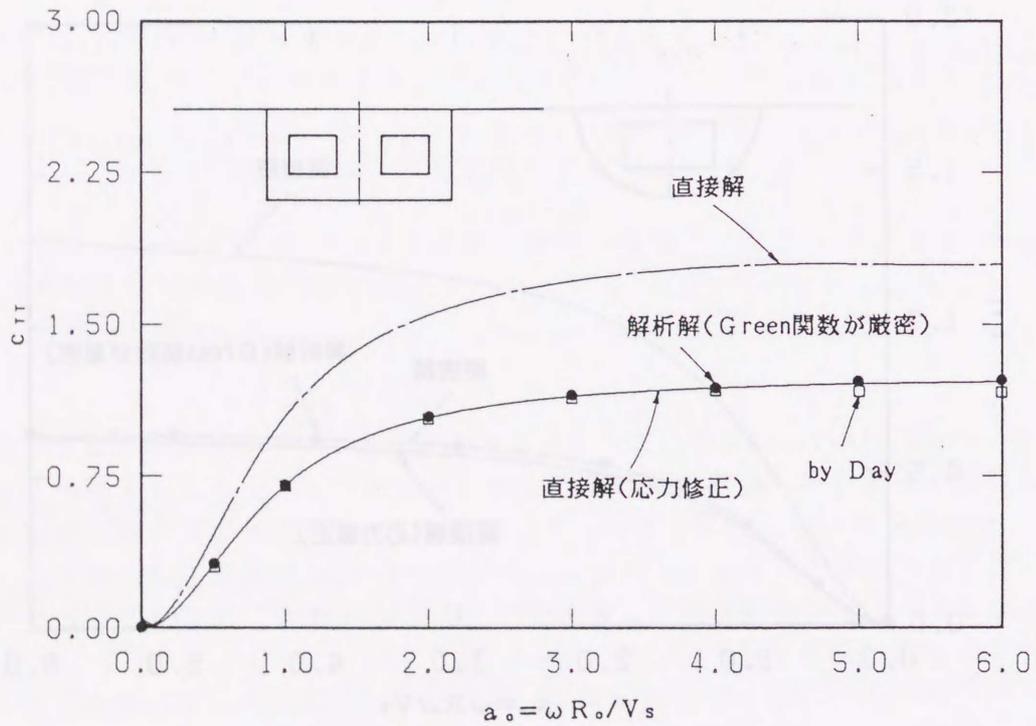


Figure 5.4: 円筒基礎のねじれインピーダンス虚部の比較



これを (5.10) 式に代入すると、各  $I$  について

$$[H^{II}][N^I] + \sum_{J=1, J \neq I}^{M+L} [H^{IJ}][N^J] = [0] \quad (5.15)$$

これより、 $[H^{II}]$  の修正値は次式となる。

$$[H^{II}] = - \left[ \sum_{J=1, J \neq I}^{M+L} [H^{IJ}][N^J] \right] [N^I]^{-1} \quad (5.16)$$

以上の応力マトリクス修正法の有効性を検討するため、4.3 節に示される内部拘束面を付加し、(5.16) 式を用いて応力マトリクスを修正した後、(2.60) 式によって半無限一様地盤における半球および円筒剛基礎のねじれインピーダンスを解析する。半球基礎の解析モデルは、4.3 節の Fig.4.6 中における Case 4 と同様とする。円筒基礎の離散化モデルは Fig.5.5 に示すとおりである。図において、 $R_0$  は基礎半径、 $D$  は埋込み深さを表す。 $D/R_0 = 1$  である。基礎面の境界要素数は、均等分割で 20、内部拘束面は 9 個としている。14 層以下には、層厚が  $L_S/6$  ( $L_S$ ; S 波の波長) のものを 6 層設けている。ただし、この層厚は、 $5R_0$  を超えないものとする。Fig.5.6~5.9 は、地盤に粘性を含まない場合を、Fig.5.10, 5.11 は地盤に粘性を含む場合を、それぞれ (4.5) 式によって無次元化された  $k_{TT}$ ,  $c_{TT}$  で示している。

Fig.5.6~5.9 では、応力マトリクスを修正したものを実線で、修正していないものを 1 点鎖線で示し、比較のため半球の場合は厳密解 [14] を、円筒の場合は厳密なグリーン関数 [58] を用いて解析した結果を破線で示している。また、Fig.5.7, 5.9 には、(2.69) 式から計算した  $c_{TT}$  を 2 点鎖線で示している。これらの図から、修正前の応力マトリクスを用いて解析したインピーダンス関数に比較して、修正後の応力マトリクスを用いて解析したインピーダンス関数は著しくその精度が改善され、半球の場合は厳密解と、円筒の場合は厳密なグリーン関数を用いた解析値と極めて良好な一致を示すことがわかる。

Fig.5.10, 5.11 は、地盤の減衰定数を  $h_S = 0.01$  とした場合の結果である。図中の実線が応力マトリクスを修正して求めた本解析値で、破線がグリーン関数分布法による Apsel の解析値 [30] である。図より、粘弾性地盤においても、本解析法による  $k_{TT}$  と  $c_{TT}$  の値は Apsel の解と非常に良い一致を示していることがわかる。

なお、ねじれ以外の運動モードに対する解析精度は次節において検討する。

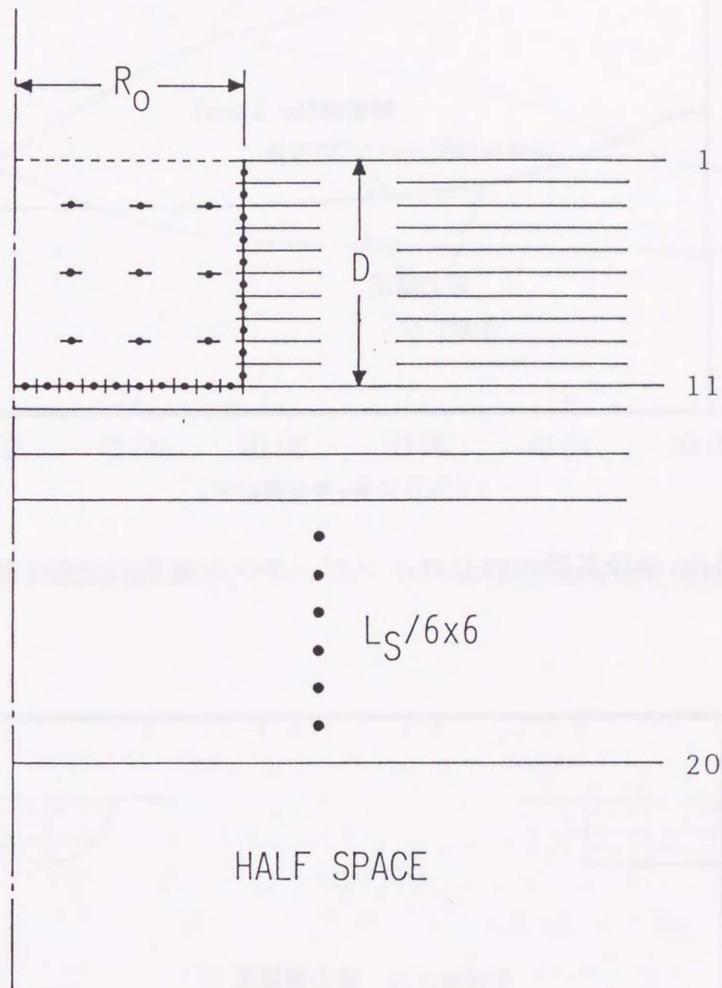


Figure 5.5: ねじれインピーダンス解析における円筒基礎の離散化モデル

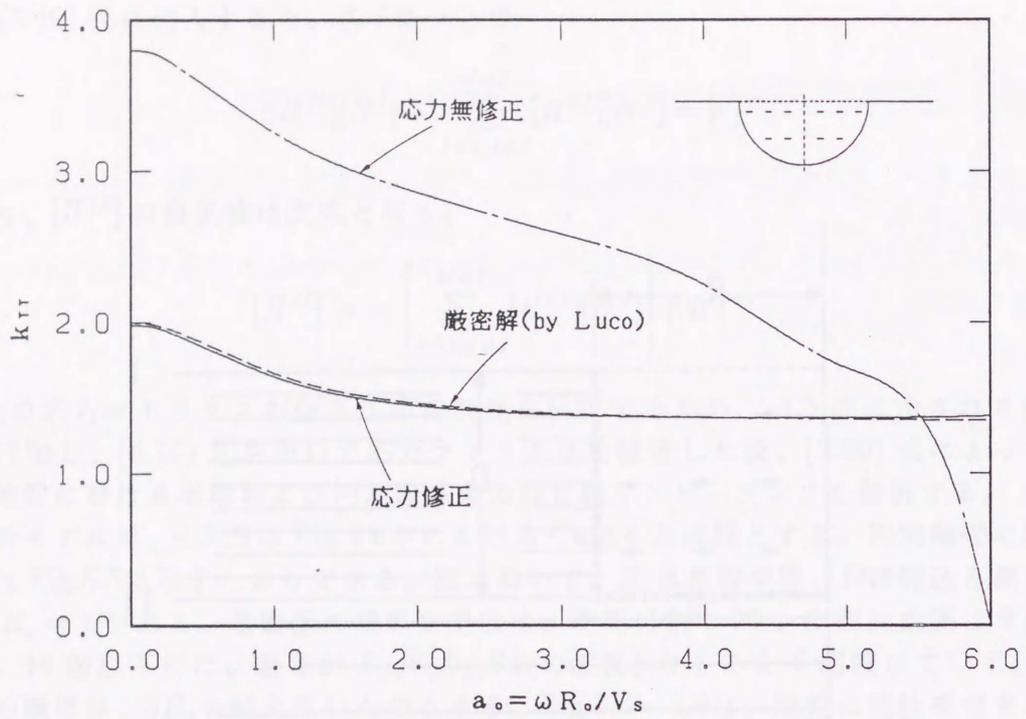


Figure 5.6: 半球基礎のねじれインピーダンス実部の比較 (弾性一様地盤)

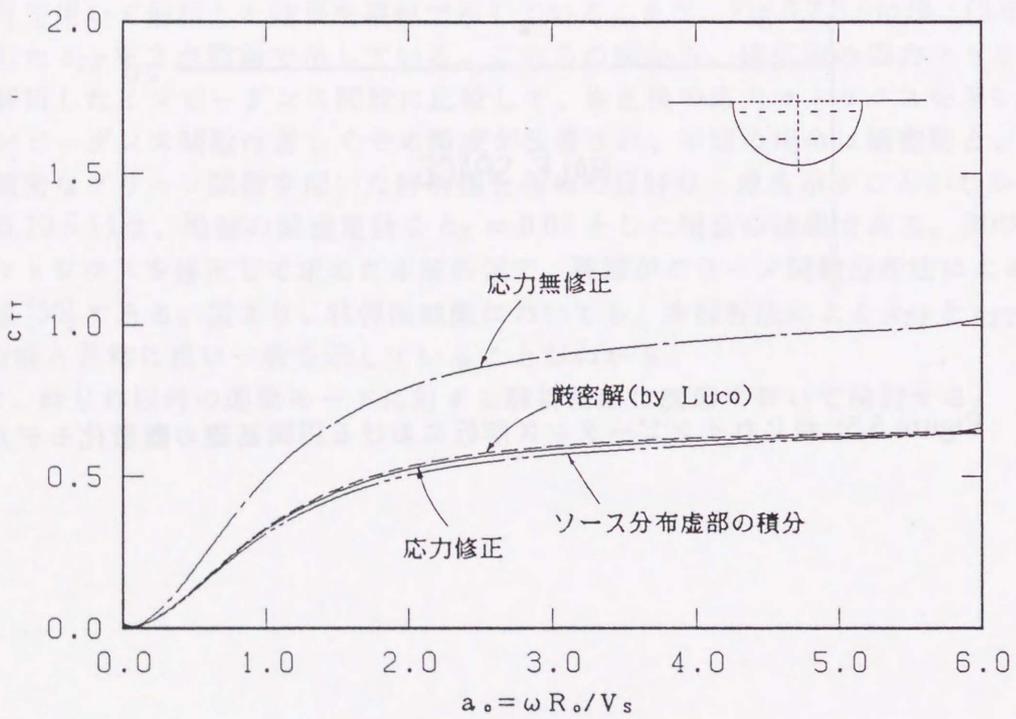


Figure 5.7: 半球基礎のねじれインピーダンス虚部の比較 (弾性一様地盤)

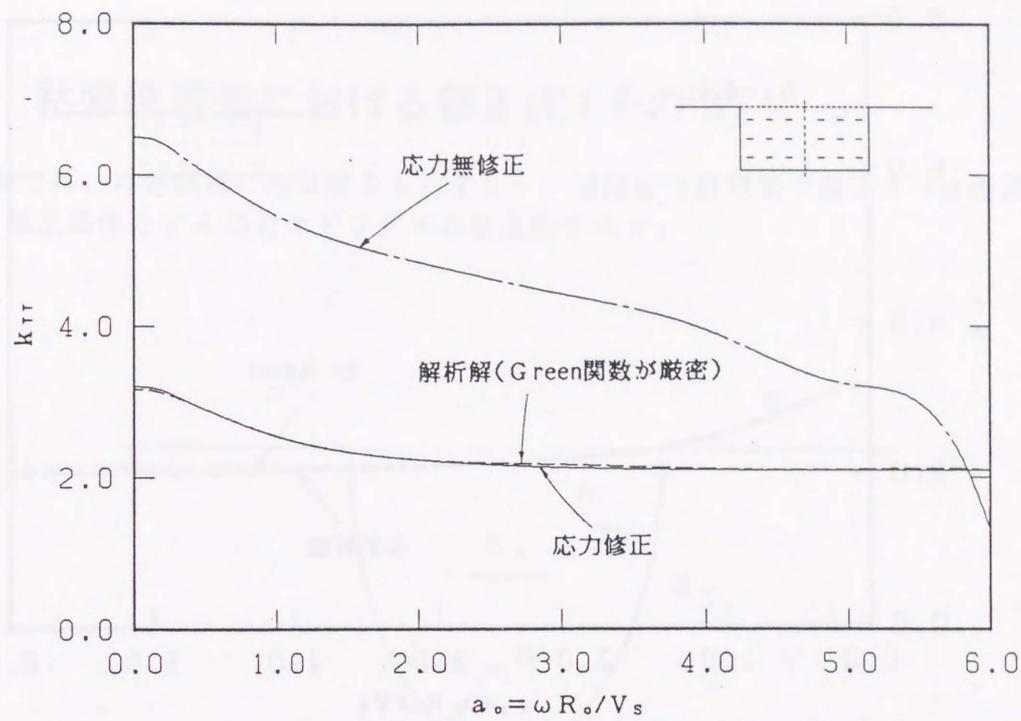


Figure 5.8: 円筒基礎のねじれインピーダンス実部の比較 (弾性一様地盤)

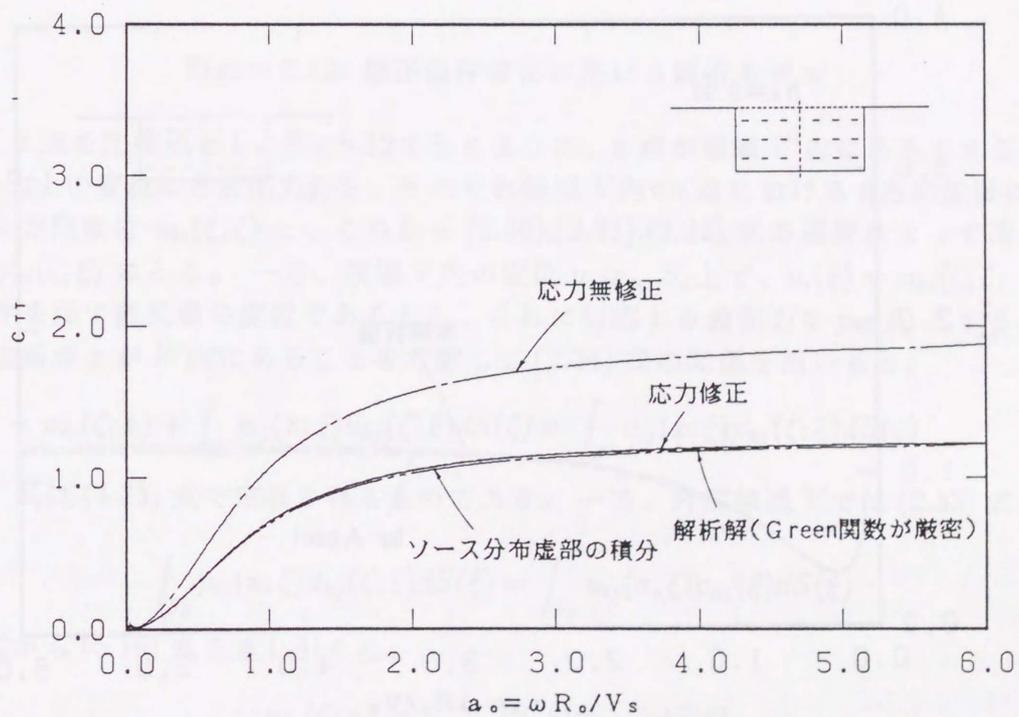


Figure 5.9: 円筒基礎のねじれインピーダンス虚部の比較 (弾性一様地盤)

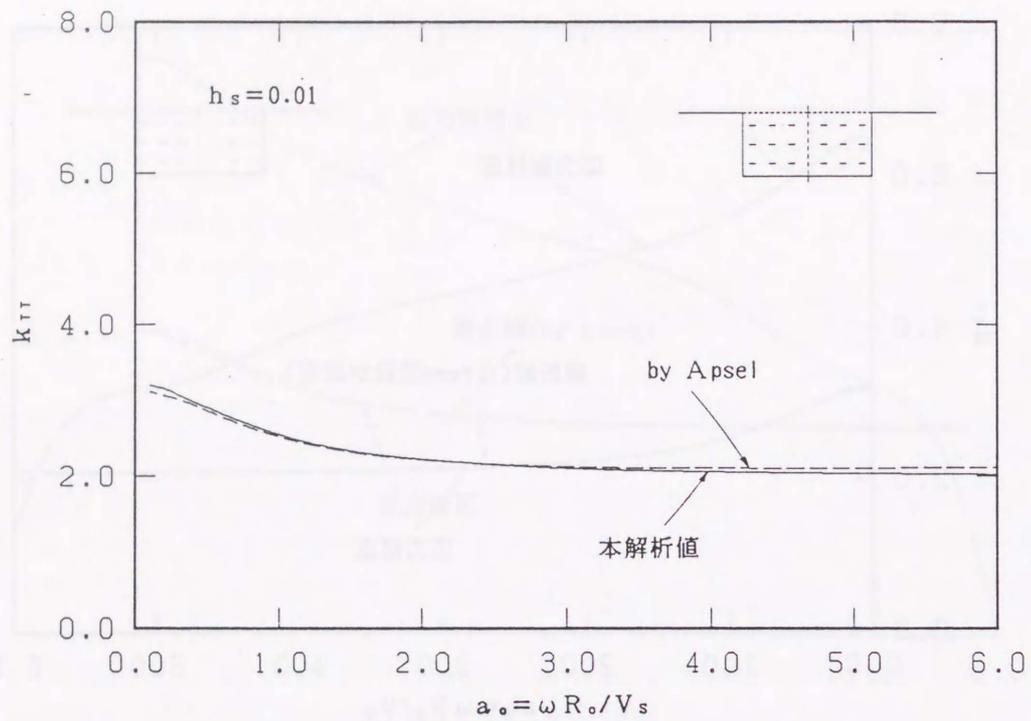


Figure 5.10: 円筒基礎のねじれインピーダンス実部の比較 (粘弾性一様地盤)

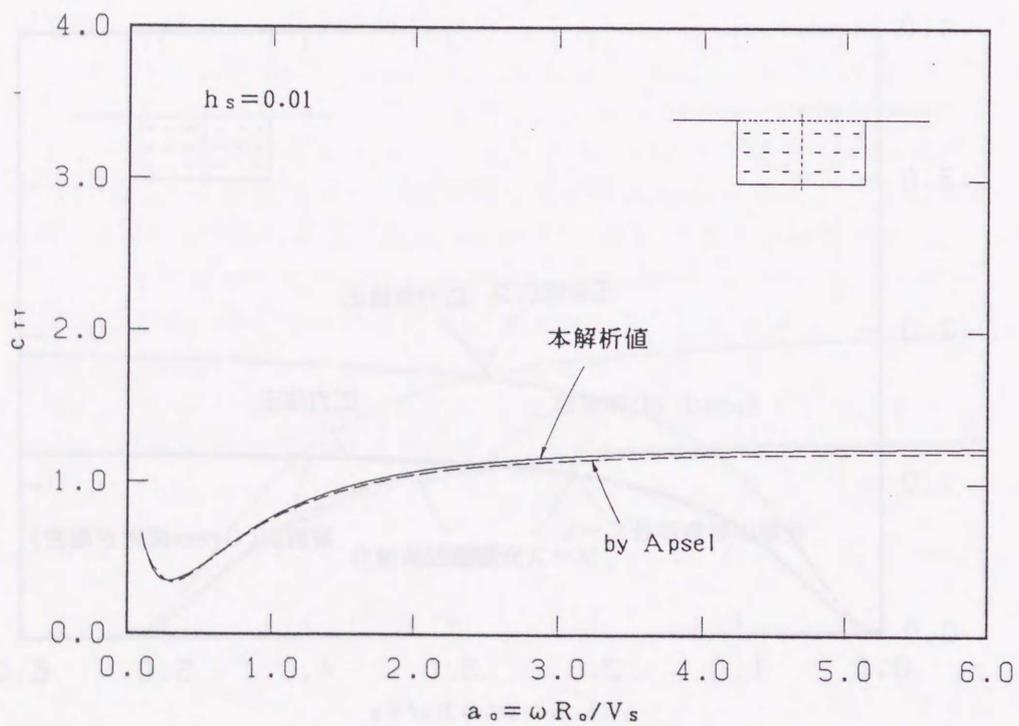


Figure 5.11: 円筒基礎のねじれインピーダンス虚部の比較 (粘弾性一様地盤)

### 5.3 粘弾性地盤における修正法 (その2)

本節では、外部領域に加振源をもつグリーン関数が内部領域で満足すべき境界積分方程式を修正条件とする応力マトリクスの修正法を示す。

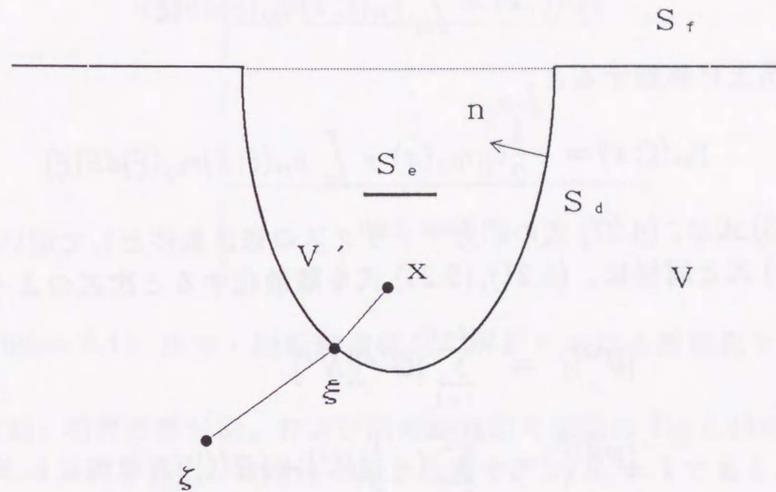


Figure 5.12: 修正条件導出に用いる解析モデル

いま  $x$  点を加振点とし、Fig.5.12に示すように、 $x$  点が領域  $V'$  内にあるとする。領域  $V'$  内の  $S_d$  上の変位  $\hat{u}_i$  と表面力  $\hat{p}_i$  を、それぞれ領域  $V$  内の  $\zeta$  点における  $k$  方向加振による  $\xi$  点での  $i$  方向変位  $u_{ki}(\zeta; \xi)$  と、これから (2.30), (2.31), (2.32) 式の過程によって得られる表面力  $p_{ki}(\zeta; \xi)$  にとる。一方、領域  $V$  内の変位  $u_i$  は、 $S_d$  上で、 $u_i(\xi) = u_{ki}(\zeta; \xi)$  となる境界条件を課す散乱場の変位であるとし、これに対応する表面力を  $p_{ki}(\xi)$  とする。このとき、加振点  $x$  が  $V'$  内にあることを考慮して (2.34) 式の関係を用いると、

$$-u_{ki}(\zeta; x) + \int_{S_t} p_{ij}(x; \xi) u_{kj}(\zeta; \xi) dS(\xi) = \int_{S_t} u_{ij}(x; \xi) p_{kj}(\zeta; \xi) dS(\xi) \quad (5.17)$$

ただし、 $S_t$  は (4.33) 式で定義されるものである。一方、外部領域  $V$  では (2.33) 式の関係より、

$$\int_{S_d} p_{ij}(x; \xi) u_{kj}(\zeta; \xi) dS(\xi) = \int_{S_d} u_{ij}(x; \xi) p_{kj}(\xi) dS(\xi) \quad (5.18)$$

(5.17) 式から (5.18) 式を差し引くと、

$$u_{ki}(\zeta; x) = \int_{S_t} u_{ij}(x; \xi) \eta_{kj}(\xi) dS(\xi) \quad (5.19)$$

ここに、

$$\eta_{kj}(\xi) = \begin{cases} p_{kj}(\xi) - p_{kj}(\zeta; \xi) & ; \xi \in S_d \\ -\{p_{kj}^+(\zeta; \xi) + p_{kj}^-(\zeta; \xi)\} = 0 & ; \xi \in S_e \end{cases} \quad (5.20)$$

上式中、第2式の右辺の関係は、領域  $V$  内に加振点を有する点加振解の応力は、領域  $V'$  内で連続であることによる。

(2.38) 式の関係を用いれば (5.19) 式は、次式のようにも書ける。

$$u_{ki}(\zeta; x) = \int_{S_t} u_{ji}(\xi; x) \eta_{kj}(\xi) dS(\xi) \quad (5.21)$$

上式における  $x$  点を  $S_t$  上に移動すれば、(2.39) 式において、 $u_i(x) = u_{ki}(\zeta; x)$  とした方程式が得られる。(5.21) 式に (2.30), (2.31), (2.32) 式の過程を用いると、

$$p_{ki}(\zeta; x) = \int_{S_t} p_{ji}(\xi; x) \eta_{kj}(\xi) dS(\xi) \quad (5.22)$$

上式の  $x$  点を  $S_t$  上に移動すると、

$$p_{ki}(\zeta; x) = -\frac{1}{2} \delta_{ji} \eta_{kj}(x) + \int_{S_t} p_{ji}(\xi; x) \eta_{kj}(\xi) dS(\xi) \quad (5.23)$$

(5.21) 式と (5.23) 式は、(4.27) 式の応力マトリクスの修正条件として用いることができる。

(4.24), (4.25) 式と同様に、(5.21), (5.23) 式を離散化すると次式のようになる。

$$[U^{GI}] = \sum_{J=1}^{M+L} [G^{IJ}][N^J] \quad (5.24)$$

$$[P^{GI}] = \sum_{J=1}^{M+L} \left( -\frac{1}{2} [I^{IJ}] + [H^{IJ}] \right) [N^J] \quad (5.25)$$

ここに、

$$\begin{aligned} [U^{GI}] \text{ の成分 } U_{ki}^{GI} &= u_{ki}(\zeta; x^I) \\ [P^{GI}] \text{ の成分 } P_{ki}^{GI} &= p_{ki}(\zeta; x^I) \\ [N^J] \text{ の成分 } N_{ki}^J &= \begin{cases} \eta_{kj}^J & ; n = 1, 2, \dots, M \\ 0 & ; n = M + 1, \dots, M + L \end{cases} \end{aligned}$$

(5.24) 式より  $[N^J]$  を求め、これを (5.25) 式に代入すると、各  $I$  について次式を得る。

$$\left( -\frac{1}{2} [I^{II}] + [H^{II}] \right) [N^I] + \sum_{J=1, J \neq I}^M [H^{IJ}] [N^J] = [P^{GI}] \quad (5.26)$$

これより、 $[H^{II}]$  の修正値は次式となる。

$$[H^{II}] = \frac{1}{2} [I^{II}] + \left[ [P^{GI}] - \sum_{J=1, J \neq I}^M [H^{IJ}] [N^J] \right] [N^I]^{-1} \quad (5.27)$$

上式の  $[H^{II}]$  を (4.27) 式の  $[H^{II}]$  と置き換えることによって応力マトリクスの修正を行うことができる。

以上の修正法の精度を調べるため、半無限一様地盤における円筒剛基礎の水平・回転動連成系のインピーダンスを解析する。なお、ねじれ動に対する本修正法の精度は前節のものと同程度である。

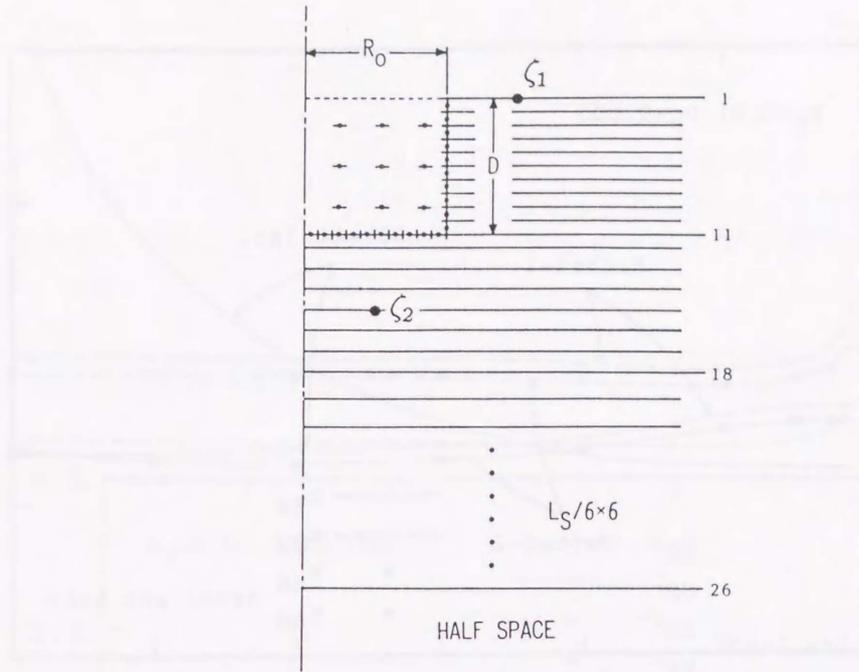


Figure 5.13: 水平・回転動連成系の解析における離散化モデル

薄層要素分割、境界要素分割、および内部拘束面の配置は Fig.5.13 に示す通りである。図において、 $R_0$  は基礎半径、 $D$  は埋込み深さを表す。 $D/R_0 = 1$  である。基礎面の境界要素数は、均等分割で 20、内部拘束面は 9 個としている。20 層以下には、層厚が  $L_S/6$  のものを 6 層設けている。ただし、この層厚は、 $5R_0$  を超えないものとする。応力マトリックスの修正に用いる加振源は、側壁部分の修正では  $\zeta_1$  に、底板部分の修正では  $\zeta_2$  に置く。パネル  $s_j$  上の積分は、円筒側面の要素と円筒底面の加振点を含まない要素では要素両端と中点の値を二次の補間関数で結ぶことによって積分し、円筒底面の加振点を含む要素では、要素を二分し、各辺の端点と中点の値を計算することによって同様に積分する。水平動、回転動、および水平・回転連成の各インピーダンスは、それぞれ、

$$\begin{aligned}
 K_{HH}(a_o) &= 2\pi\mu R_0 \{k_{HH}(a_o) + ia_o c_{HH}(a_o)\} \\
 K_{MM}(a_o) &= 2\pi\mu R_0^3 \{k_{MM}(a_o) + ia_o c_{MM}(a_o)\} \\
 K_{MH}(a_o) &= 2\pi\mu R_0^2 \{k_{MH}(a_o) + ia_o c_{MH}(a_o)\}
 \end{aligned} \tag{5.28}$$

と表した場合の無次元化量  $k_{ij}, c_{ij}$  を示す。

Fig.5.14~ Fig.5.16 は、本節の方法 (Method-2) と前節の方法 (Method-1)、および加振点を含む要素上のグリーン関数の応力解を直接積分する方法 (Direct Int.) によって求めたインピーダンス値を Apsel と Luco [32] の解析値と比較したものである。地盤の減衰定数とポアソン比は Apsel と Luco の設定値と等しくとり、それぞれ、 $h_S = 0.01, h_P = 0.005, \nu = 0.25$  とした。これらの図から、水平・回転動連成系のインピーダンスに関しては、前節の方法よりも本節の方法による値の方が Apsel と Luco の値に近く、本節の方法による値は高振動数域まで Apsel と Luco の値に良好に一致することがわかる。したがって、水平・回転動連成系の解析においては、本節の方法を用いるのが有効である。

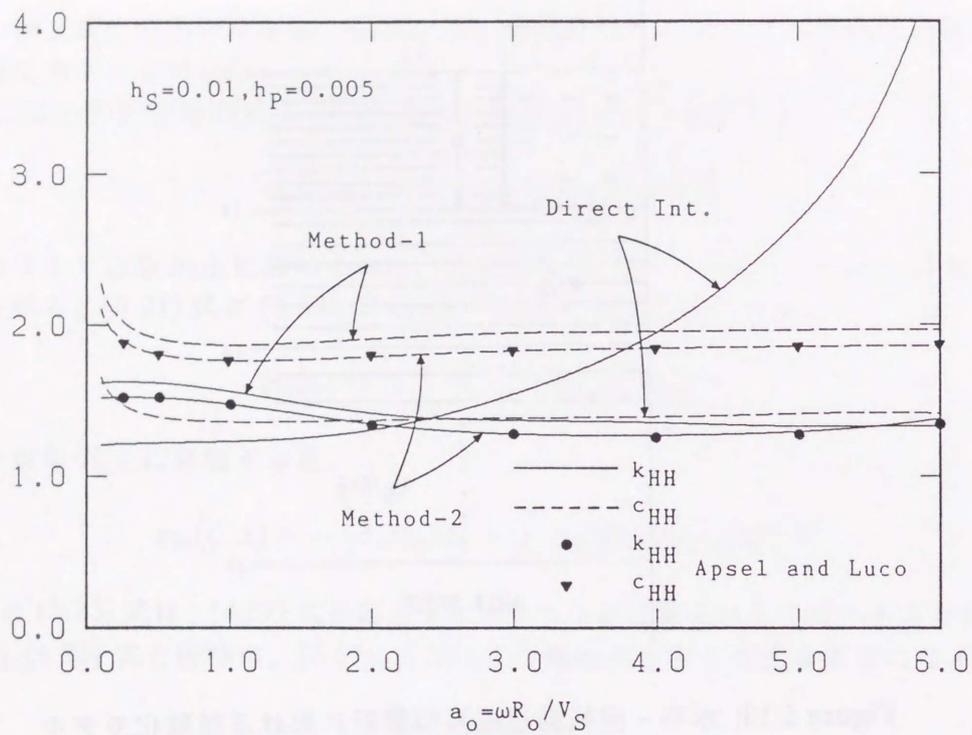


Figure 5.14: 水平インピーダンスの比較

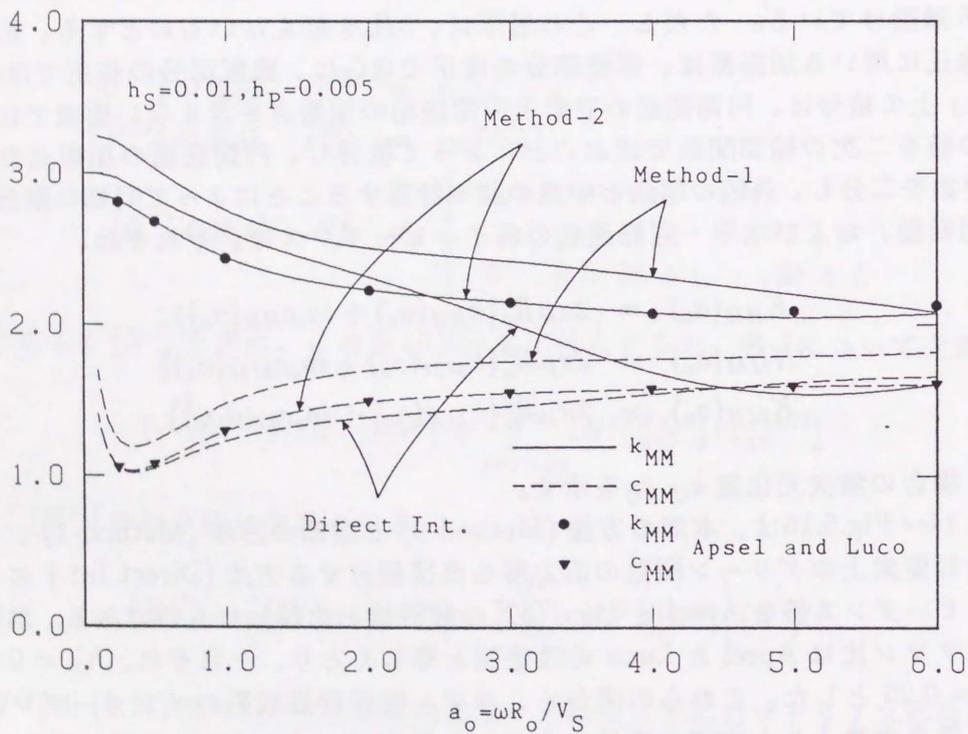


Figure 5.15: 回転インピーダンスの比較

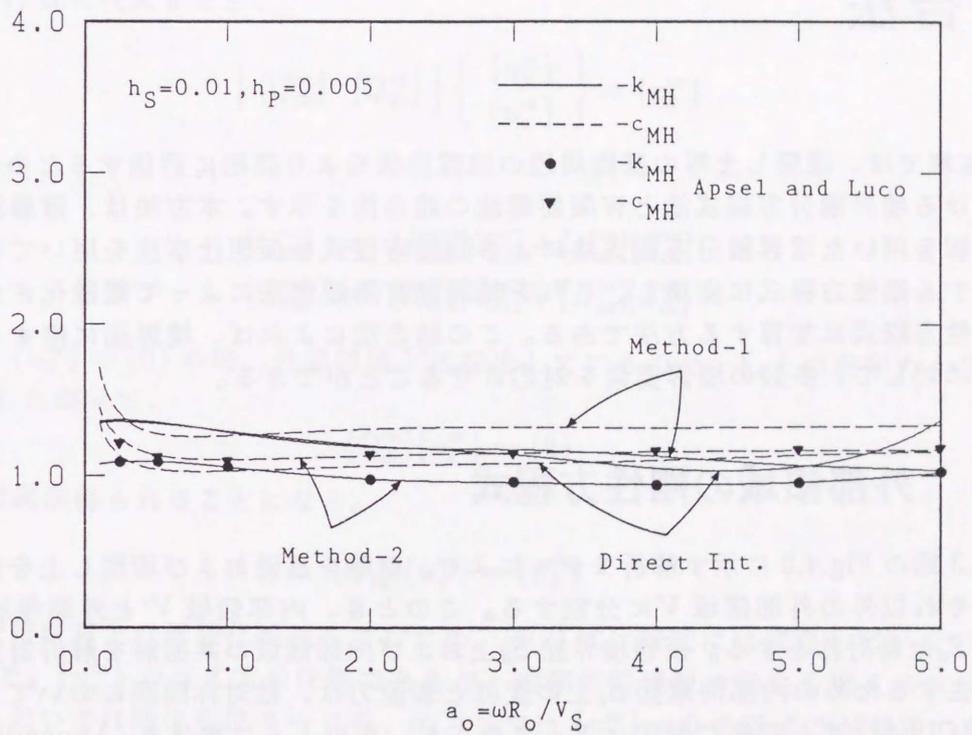


Figure 5.16: 水平-回転連成インピーダンスの比較

# Chapter 6

## 境界積分方程式法と軸対称有限要素法の 結合法

本章では、埋戻し土等の基礎周辺の地盤性状をより詳細に評価するため、軸対称問題における境界積分方程式法と有限要素法の結合法を示す。本方法は、薄層法リング状線加振解を用いた境界積分方程式法による剛性方程式を仮想仕事法を用いて有限要素法に対応する剛性方程式に変換し、これを軸対称有限要素法によって離散化された内部領域の剛性方程式に加算する方法である。この結合法によれば、境界面に接する1つの有限要素に対して、多数の境界要素を対応させることができる。

### 6.1 外部領域の剛性方程式

4.3節の Fig.4.5 に示す解析モデルにより、地盤を基礎および埋戻し土を含む内部領域  $V'$  とそれ以外の外部領域  $V$  に分割する。このとき、内部領域  $V'$  と外部領域  $V$  の仮想境界面  $S_d$  は軸対称とする。仮想境界面  $S_d$  上および内部領域の共振解を解析対象振動数域から除去するための内部拘束面  $S_e$  上の変位と表面力は、軸対称問題においても、(2.39) 式および (2.41) 式と同様な形式によって表され、次のように書ける (Appendix B 参照)。

$$u_i^m(x) = \int_{S_t} u_{ji}^m(\xi; x) \eta_j^m(\xi) dS(\xi) \quad (6.1)$$

$$p_i^m(x) = -\frac{1}{2} \eta_i^m(x) + \int_{S_t} p_{ji}^m(\xi; x) \eta_j^m(\xi) dS(\xi) \quad (6.2)$$

$; S_t = S_d + S_e, i, j = \rho, \varphi, z$

ここに、 $u_{ji}^m, p_{ji}^m$  は、 $\xi$  点における  $j$  方向  $m$  波リング状線加振時の  $x$  点での  $i$  方向変位、ならびに表面力である。 $u_i^m, p_i^m, \eta_j^m$  は、それぞれ変位、表面力、ソース分布の周方向波数  $m$  のフーリエ係数である。

2.3節と同様に、境界面  $S_d$  を母線上で  $M$  個の要素に分割し、この要素と面積が同程度の内部拘束面  $L$  個を内部領域内に配置した後、各要素上の諸量を一定として (6.1), (6.2) 式を離散化すると、形式的に次のようなマトリクス方程式を得る。

$$[G^m] \{ \eta^m \} = \begin{bmatrix} [G_{dd}^m] & [G_{de}^m] \\ [G_{ed}^m] & [G_{ee}^m] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \{ \eta_d^m \} \\ \{ \eta_e^m \} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \{ u_d^m \} \\ \{ u_e^m \} \end{Bmatrix} = \{ u^m \} \quad (6.3)$$

$$[H^m]\{\eta^m\} = \begin{bmatrix} [H_{dd}^m] & [H_{de}^m] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \{\eta_d^m\} \\ \{\eta_e^m\} \end{Bmatrix} = \{p_d^m\} \quad (6.4)$$

ここに、 $\{\eta^m\}, \{u^m\}, \{p_d^m\}$  は、それぞれ各要素のソース分布、変位、表面力のフーリエ係数を並べたベクトル、 $[G^m], [H^m]$  は、 $u_{ji}^m, p_{ji}^m$  の各要素における積分値を内容とするマトリクスである。下添字  $d$  は  $S_d$  上、下添字  $e$  は  $S_e$  上の量であることを示す。(6.4) 式を  $\{\eta^m\}$  について解くと、

$$\{\eta^m\} = [G^m]^{-1}\{u^m\} = \begin{bmatrix} [Z_{dd}^m] & [Z_{de}^m] \\ [Z_{ed}^m] & [Z_{ee}^m] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \{u_d^m\} \\ \{u_e^m\} \end{Bmatrix} \quad (6.5)$$

これを (6.4) 式に代入すると、

$$\begin{bmatrix} [Q_{dd}^m] & [Q_{de}^m] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \{u_d^m\} \\ \{u_e^m\} \end{Bmatrix} = \{p_d^m\} \quad (6.6)$$

ここに、

$$\begin{aligned} [Q_{dd}^m] &= [H_{dd}^m][Z_{dd}^m] + [H_{de}^m][Z_{ed}^m] \\ [Q_{de}^m] &= [H_{dd}^m][Z_{de}^m] + [H_{de}^m][Z_{ee}^m] \end{aligned}$$

理論上は、 $\{u_d^m\} = \{0\}$  の時、外部領域  $V$  は静止しているので、 $S_d$  上の表面力  $\{p_d^m\}$  は生じない。したがって、

$$[Q_{de}^m]\{u_e^m\} = \{0\} \quad (6.7)$$

これより次式が得られることになる。

$$[Q_{dd}^m]\{u_d^m\} = \{p_d^m\} \quad (6.8)$$

しかし、数値計算上は離散化誤差を含むため、(6.7) 式は厳密には成立していない。

ところで、 $\{u_e^m\}$  の与え方は任意であるが、内部共振現象の発生を抑えるためには、 $m = 0, 1$  においては剛体変位モードを、 $m \geq 2$  では  $\{u_e^m\} = 0$  を課するのが有効である。

$m = 0, 1$  において、 $S_d$  面の変位を剛体変位  $\{\Delta^m\}$  と相対変位  $\{\tilde{u}_d^m\}$  に分離する。

$$\{u_d^m\} = [\Lambda_d^m]\{\Delta^m\} + \{\tilde{u}_d^m\} \quad ; m = 0, 1 \quad (6.9)$$

ここに、 $[\Lambda_d^m]$  は剛体変位モードマトリクスである。

$S_e$  面の変位として、 $S_d$  面の剛体変位を強制すると、 $\{u_e^m\}$  は次のように書ける。

$$\{u_e^m\} = [\Lambda_e^m]\{\Delta^m\} \quad (6.10)$$

(6.9) 式の  $\{\Delta^m\}$  の定め方は任意であるので、何らかの規範が必要である。ここでは、相対変位のノルムが最小となるように定めることにする。ノルムを

$$E = \{\tilde{u}_d^m\}^T \{\tilde{u}_d^m\} = (\{u_d^m\}^T - \{\Delta^m\}^T [\Lambda_d^m]^T) (\{u_d^m\} - [\Lambda_d^m]\{\Delta^m\}) \quad (6.11)$$

と定義すると、ノルムの最小条件

$$\frac{\partial E}{\partial \{\Delta^m\}^T} = 0 \quad (6.12)$$

より次式が得られる。

$$\{\Delta^m\} = ([\Lambda_d^m]^T [\Lambda_d^m])^{-1} [\Lambda_d^m]^T \{u_d^m\} \quad (6.13)$$

これを (6.10) 式に代入し、

$$\{u_e^m\} = [B^m] \{u_d^m\} \quad (6.14)$$

ただし、

$$[B^m] = [\Lambda_e^m] ([\Lambda_d^m]^T [\Lambda_d^m])^{-1} [\Lambda_d^m]^T \quad (6.15)$$

(6.14) 式を (6.6) 式に代入すると、 $\{u_d^m\}$  と  $\{p_d^m\}$  の関係が次のように得られる。

$$[Q^m] \{u_d^m\} = \{p_d^m\} \quad (6.16)$$

ここに、

$$[Q^m] = \begin{cases} [Q_{dd}^m] + [Q_{de}^m][B^m] & ; m = 0, 1 \\ [Q_{dd}^m] & ; m \geq 2 \end{cases} \quad (6.17)$$

(6.16) 式を外部領域  $V$  の剛性方程式とする。以下簡単のため (6.16) 式の諸量における下添字  $d$  と上添字  $m$  は省略する。

## 6.2 結合法

まず、(6.16) 式を内部領域  $V'$  の境界面  $S_d$  上の有限要素分割と対応するように各ブロックに分離して表す。Fig.6.1に示すように、境界面の母線上における有限要素分割数を  $N$  個とする。このとき、第  $I$  番目の有限要素に対して、 $c(I)$  個の境界要素が存在するものとする、(6.16) 式は次のように表される。

$$\begin{bmatrix} [Q_{11}] & \cdots & \cdots & \cdots & [Q_{1N}] \\ \vdots & & & & \vdots \\ [Q_{I1}] & \cdots & [Q_{IJ}] & \cdots & [Q_{IN}] \\ \vdots & & & & \vdots \\ [Q_{N1}] & \cdots & \cdots & \cdots & [Q_{NN}] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \{u_1\} \\ \vdots \\ \{u_J\} \\ \vdots \\ \{u_N\} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \{p_1\} \\ \vdots \\ \{p_I\} \\ \vdots \\ \{p_N\} \end{Bmatrix} \quad (6.18)$$

ここに、

$$\begin{aligned} \{u_J\}^T &= [\{u_J^1\}^T, \cdots, \{u_J^j\}^T, \cdots, \{u_J^{c(J)}\}^T] \\ \{p_I\}^T &= [\{p_I^1\}^T, \cdots, \{p_I^i\}^T, \cdots, \{p_I^{c(I)}\}^T] \\ \{u_J^j\} &= [u_\rho^m, u_\varphi^m, u_z^m] \\ \{p_I^i\} &= [p_\rho^m, p_\varphi^m, p_z^m] \\ [Q_{IJ}] &= \begin{bmatrix} [Q_{IJ}^{1,1}] & \cdots & \cdots & \cdots & [Q_{IJ}^{1,c(J)}] \\ \vdots & & & & \vdots \\ [Q_{IJ}^{i,1}] & \cdots & [Q_{IJ}^{i,j}] & \cdots & [Q_{IJ}^{i,c(J)}] \\ \vdots & & & & \vdots \\ [Q_{IJ}^{c(I),1}] & \cdots & \cdots & \cdots & [Q_{IJ}^{c(I),c(J)}] \end{bmatrix} \end{aligned}$$

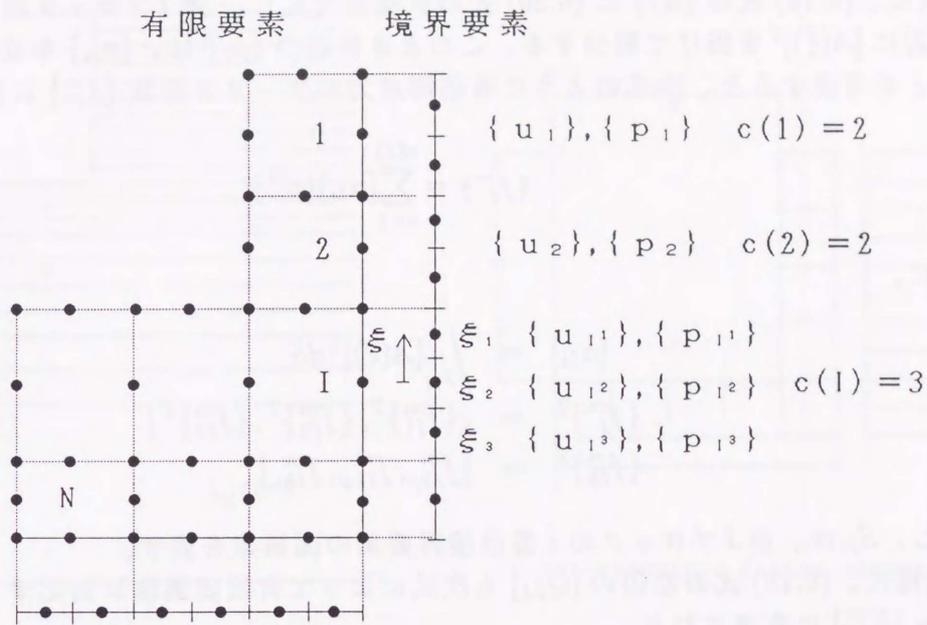


Figure 6.1: 境界積分方程式法と有限要素法の結合モデル

(6.18) 式に仮想仕事法を適用して、有限要素法に対応する剛性方程式に変換する。有限要素の母線上の節点変位間を補間する 2 次の内挿関数を  $N_1, N_2, N_3$  とすると、(6.18) 式の  $\{u_j^j\}$  は、第  $J$  番目有限要素の母線上の節点変位のフーリエ係数  $\{\delta_j^m\}$  を用いて次のように評価できる。

$$\{u_j^j\} = [A(\xi_j)]\{\delta_j^m\} = [[A_1(\xi_j)], [A_2(\xi_j)], [A_3(\xi_j)]] \begin{Bmatrix} \{d_{j1}^m\} \\ \{d_{j2}^m\} \\ \{d_{j3}^m\} \end{Bmatrix} \quad (6.19)$$

ここに、

$$\begin{aligned} \{d_{jk}^m\}^T &= [u_{jk\rho}^m, u_{jk\varphi}^m, u_{jkz}^m] \\ [A_k(\xi)] &= \begin{bmatrix} N_k & 0 & 0 \\ 0 & N_k & 0 \\ 0 & 0 & N_k \end{bmatrix} \quad ; k = 1, 2, 3 \\ ; N_1 &= \frac{\xi(\xi+1)}{2}, N_2 = (1-\xi^2), N_3 = \frac{\xi(\xi-1)}{2} \end{aligned}$$

ただし、 $\xi_j$  は第  $J$  ブロックの  $j$  番目境界要素の重心点の局所座標を表し、上添字  $m$  は、周方向波数を表す。したがって、 $\{u_j\}$  は次式のように表せる。

$$\{u_j\} = \begin{bmatrix} [A(\xi_1)] \\ \vdots \\ [A(\xi_j)] \\ \vdots \\ [A(\xi_{\alpha(J)})] \end{bmatrix} \{\delta_j^m\} \quad (6.20)$$

次に、(6.18) 式の  $\{u_J\}$  に (6.20) 式の表現を代入し、第  $I$  ブロック段の 1 行  $\sim c(I)$  行の両辺に  $[A(\xi)]^T$  を掛けて積分する。このとき右辺の  $\{p_I\}$  は、 $\{p_{Ii}\}$  が要素内で一定であることを考慮すると、次式のように等価節点力のフーリエ係数  $\{f_I^m\}$  に変換される。

$$\{f_I^m\} = \sum_{i=1}^{c(I)} [\alpha_{Ii}] \{p^{Ii}\} \quad (6.21)$$

ここに、

$$\begin{aligned} [\alpha_{Ii}] &= \int_{S_{Ii}} [A(\xi)]^T dS \\ \{f_I^m\}^T &= [\{f_{I1}^m\}^T, \{f_{I2}^m\}^T, \{f_{I3}^m\}^T] \\ \{f_{Ik}^m\}^T &= [f_{Ik\rho}^m, f_{Ik\varphi}^m, f_{Ikz}^m] \end{aligned}$$

ただし、 $S_{Ii}$  は、第  $I$  ブロックの  $i$  番目境界要素の面積素を表す。

同様に、(6.18) 式の左辺の  $[Q_{IJ}]$  も次式によって有限要素法に対応する要素剛性マトリクス  $[K_{IJ}^m]$  に変換される。

$$[K_{IJ}^m] = \sum_{i=1}^{c(I)} \sum_{j=1}^{c(J)} [\alpha_{Ii}] [Q_{IJ}^{ij}] [A(\xi_j)] \quad (6.22)$$

(6.21), (6.22) 式を各ブロックで求め、有限要素の母線上の節点に関して重ね合わせることによって、(6.18) 式は次のような全体剛性方程式に書き換えることができる。

$$[K_B^m] \{\delta_d^m\} = \{f_d^m\} \quad (6.23)$$

ただし、下添字  $d$  は、 $S_d$  上の量であることを表す。

一方、軸対称有限要素法によって離散化される内部領域  $V'$  の剛性方程式は、周方向波数  $m$  の剛性マトリクスを  $[K_F^m]$ 、質量マトリクスを  $[M_F^m]$ 、節点変位ベクトルを  $\{\delta^m\}$ 、節点力ベクトルを  $\{f^m\}$  とすると形式的に次式のように表される。

$$[K^m] \{\delta^m\} = \{f^m\} \quad (6.24)$$

ただし、 $[K^m] = [K_F^m] - \omega^2 [M_F^m]$ 、 $\omega$ ；円振動数。

なお、本論文では、有限要素として、8 節点アイソパラメトリック四辺形断面軸対称要素を用いる。

(6.24) 式の  $\{\delta^m\}$  を境界面  $S_d$  上の節点変位  $\{\delta_d^m\}$  とそれ以外の節点変位  $\{\delta_s^m\}$  に分け、さらに  $S_d$  上の節点力の連続性を考慮すると、

$$\begin{bmatrix} [K_{ss}^m] & [K_{sd}^m] \\ [K_{ds}^m] & [K_{dd}^m] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \{\delta_s^m\} \\ \{\delta_d^m\} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \{f_s^m\} \\ -\{f_d^m\} \end{Bmatrix} \quad (6.25)$$

上式に (6.23) 式を代入すると次式を得る。

$$\begin{bmatrix} [K_{ss}^m] & [K_{sd}^m] \\ [K_{ds}^m] & [K_{dd}^m] + [K_B^m] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \{\delta_s^m\} \\ \{\delta_d^m\} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \{f_s^m\} \\ \{0\} \end{Bmatrix} \quad (6.26)$$

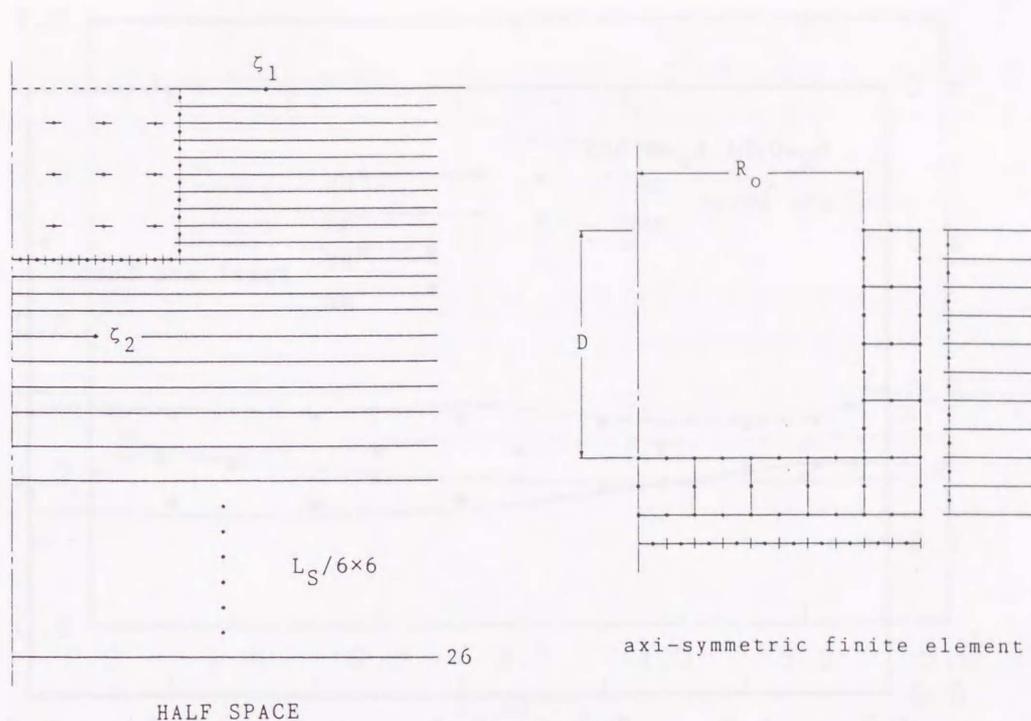


Figure 6.2: 境界積分方程式法と有限要素法の結合解法における離散化モデル

上式に、基礎面の剛体加振条件と自由地表面の表面力 0 の条件を導入して解くことによりインピーダンスを求めることができる。

以上の解析法の有効性を確かめるため、半無限一様地盤における円筒剛基礎の水平・回転動連成系のインピーダンスを解析する。外部領域の解析における薄層要素分割、境界要素分割、および内部拘束面の配置は Fig.6.2の左に示す通りである。境界面母線の境界要素数は、均等分割で 20、内部拘束面は 9 個としている。薄層要素の 20 層以下には、層厚が  $L_S/6$  ( $L_S$ ; S波の波長) のものを 6 層設けている。ただし、この層厚は、側面の母線半径の 5 倍を超えないものとする。5.3 節の応力マトリクス  $[H^m]$  の修正に用いる加振源は、境界面の側面部分の修正では  $\zeta_1$  に、底面部分の修正では  $\zeta_2$  に置く。内部領域の解析における有限要素分割は、Fig.6.2の右に示すように、2つの境界要素に対して1つの有限要素が対応するように均等に 8 分割する。Fig.6.3~Fig6.5は、本解析法によって求めた水平、回転、および水平・回転連成の各インピーダンス値を Apsel と Luco[32] の解析値と比較したものである。地盤の減衰定数とポアソン比は、Apsel と Luco の設定値と等しくとり、それぞれ、 $h_S = 0.01$ ,  $h_P = 0.005$ ,  $\nu = 0.25$  とした。図から、本解析法による値は、Apsel と Luco の値に比較して、実部は、低振動数域では若干高め、高振動数域では若干低めに、虚部は、全体的に若干高めになる傾向にあるが、概ね高振動数域まで良好な精度が得られていることがわかる。5.3 節の同様な図に比較して、多少精度が悪化するの、内部領域の有限要素法による離散化誤差に起因している。

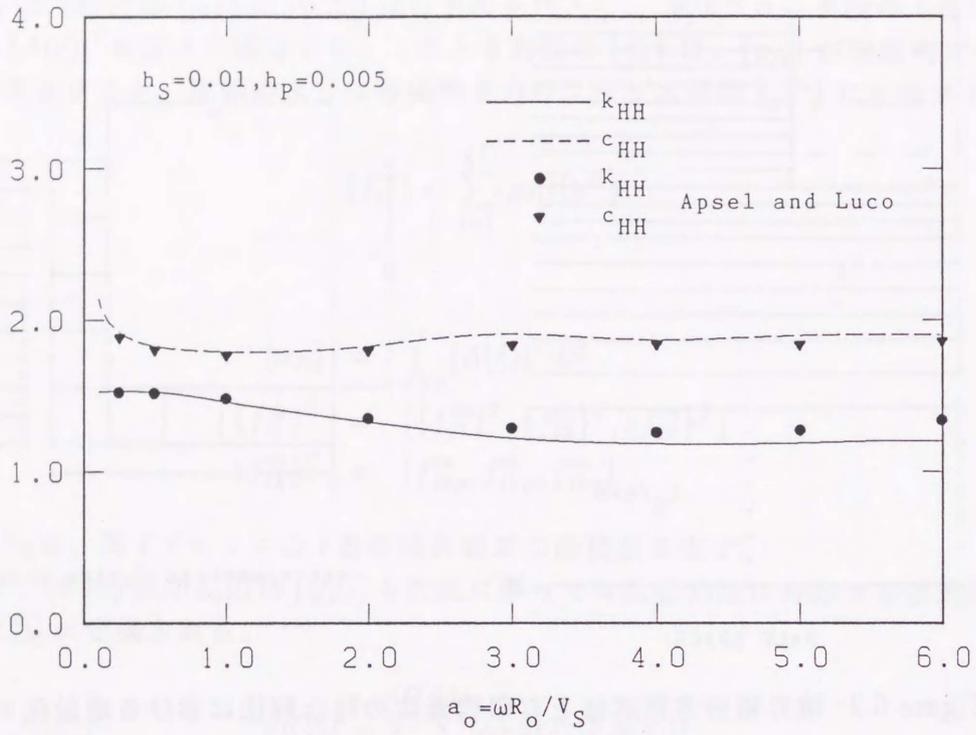


Figure 6.3: 水平インピーダンスの比較

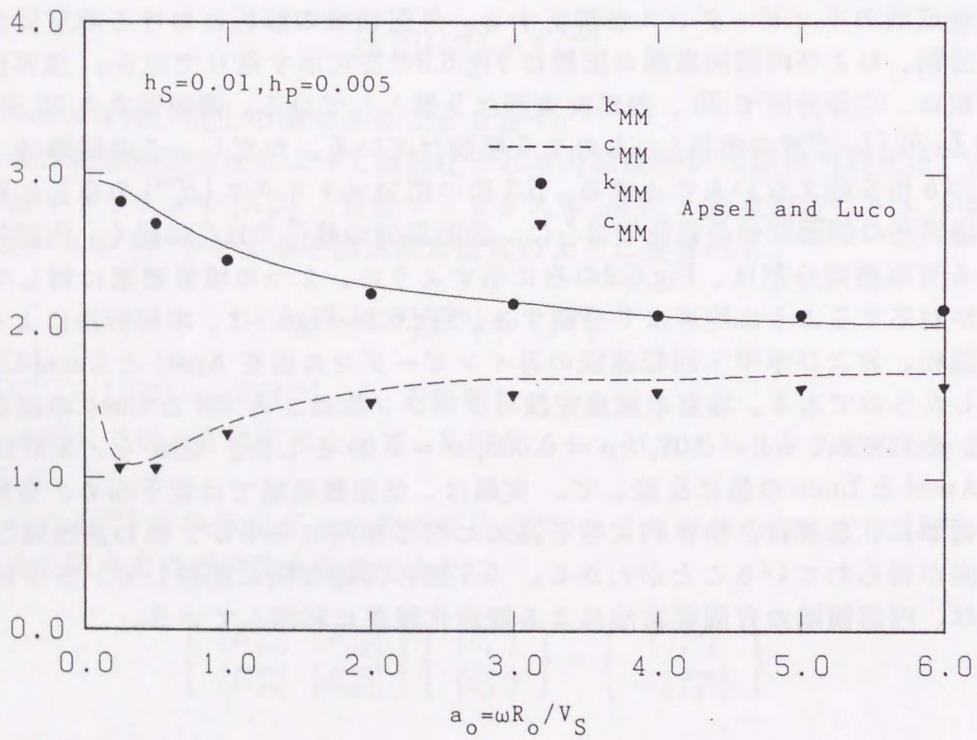


Figure 6.4: 回転インピーダンスの比較

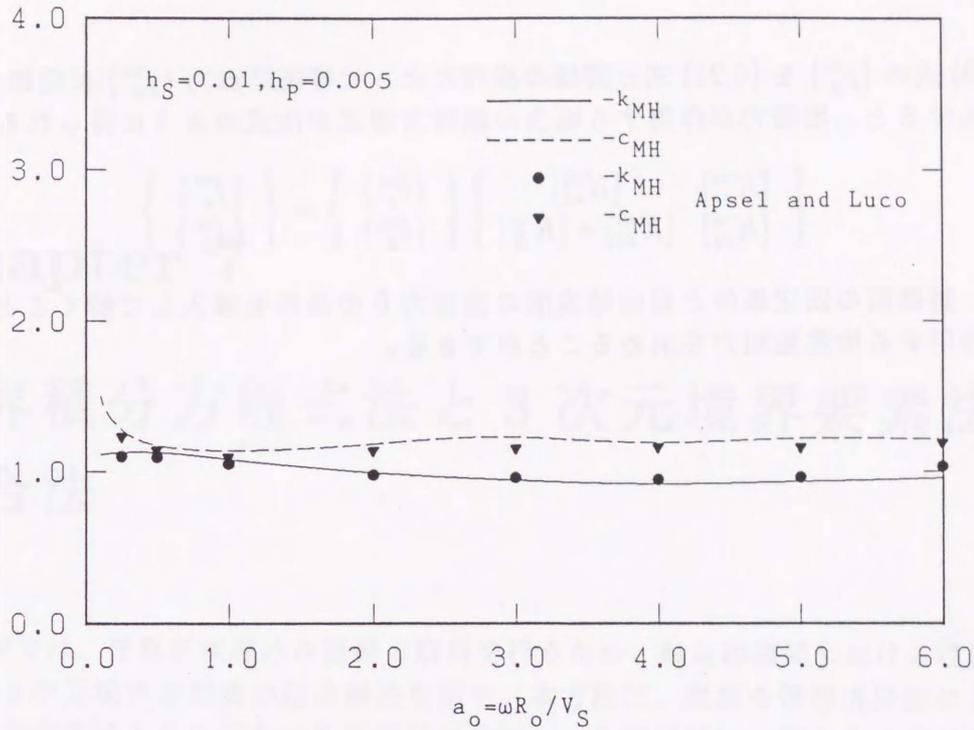


Figure 6.5: 水平-回転連成インピーダンスの比較

### 6.3 地震強制力の導出法

基礎面に作用する地震強制力の導出法について説明する。まず、境界面  $S_d$  を固定したときに、 $S_d$  面に発生する地震強制力分布を求める。これを等価節点力に変換し、全領域の運動方程式 (6.26) の外力として逆に作用させる。この運動方程式を基礎固定の条件のもとで解き、基礎面に作用する地震強制力を導出する。

いま、周方向波数  $m$  で展開した自由地盤における入反射場変位のフーリエ係数を  $u_i^{fm}$  とする。 $u_i^{fm}$  の入射に対し内部領域全体を静止させると外部領域内には散乱波  $u_i^{sm}$  が生じる。このような散乱場を決定する  $S_t$  上のソース分布を  $\eta_i^{sm}$  とする。この場合、(6.4) 式は次式となる。

$$[G^m]\{\eta^{sm}\} = \{u^{sm}\} = -\{u^{fm}\} \quad (6.27)$$

ここに、 $\{\eta^{sm}\}, \{u^{sm}\}, \{u^{fm}\}$  はそれぞれ  $S_t$  上の選点における  $\eta_i^{sm}, u_i^{sm}, u_i^{fm}$  の値を並べたベクトル。

ところで、(2.74) 式より、 $S_d$  上の散乱波を生起させるソース分布  $\eta_j^{sm}$  は  $S_d$  上に生じている外部表面力に等しい。

$$\eta_j^{sm}(x) = p_j^{fm}(x) + p_j^{sm}(x) \quad ; x \in S_d \quad (6.28)$$

したがって、この反力として静止した境界面  $S_d$  に作用する地震強制力の分布ベクトル  $\{p_g^m\}$  は、(6.27) 式より次のように評価される。

$$\{p_g^m\} = -\{\eta^{sm}\} = [G^m]^{-1}\{u^{fm}\} = [Z_d^m]\{u^{fm}\} \quad (6.29)$$

ここに、

$$[Z_d^m] = \begin{bmatrix} [Z_{dd}^m] & [Z_{de}^m] \end{bmatrix} \quad (6.30)$$

(6.29) 式の  $\{p_g^m\}$  を (6.21) 式と同様の操作によって等価節点力  $\{f_g^m\}$  に変換し、(6.26) 式に代入すると、地震力が作用する場合の剛性方程式が次式のように得られる。

$$\begin{bmatrix} [K_{ss}^m] & [K_{sd}^m] \\ [K_{ds}^m] & [K_{dd}^m] + [K_B^m] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \{\delta_s^m\} \\ \{\delta_d^m\} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \{f_s^m\} \\ \{f_g^m\} \end{Bmatrix} \quad (6.31)$$

上式に、基礎面の固定条件と自由地表面の表面力 0 の条件を導入して解くことにより基礎面に作用する地震強制力を求めることができる。

# Chapter 7

## 境界積分方程式法と3次元境界要素法の結合法

本章では、任意形状埋込み基礎の解析を行うため、軸対称問題における境界積分方程式法と3次元境界要素法の結合解法を示す。本方法は、地盤を仮想境界面によって基礎を含む内部領域とそれ以外の外部領域に分割し、外部領域には第5章までに示した薄層法リング状線加振解を用いた境界積分方程式法を、内部領域には動的 Kelvin 解を用いた境界要素法を適用し、フーリエ逆変換手法により外部領域の剛性マトリクスを内部領域の剛性マトリクスに加算する方法である。

### 7.1 外部領域の剛性方程式

6.1 節と同様に、4.3 節の Fig.4.5 に示す解析モデルにより、軸対称な仮想境界面  $S_d$  において、地盤を基礎近傍の内部領域  $V'$  とそれ以外の外部領域  $V$  に分割する。6.1 節の理論展開にしたがえば、仮想境界面  $S_d$  における外部領域の剛性方程式は次式のように得られる [(6.16) 式、ただし添字  $d$  は省略]。

$$[Q^m]\{u^m\} = \{p^m\} \quad (7.1)$$

ここに、

$$\begin{aligned} \{u^m\}^T &= [\{u_1^m\}^T, \dots, \{u_J^m\}^T, \dots, \{u_M^m\}^T] \\ \{p^m\}^T &= [\{p_1^m\}^T, \dots, \{p_I^m\}^T, \dots, \{p_M^m\}^T] \\ [Q^m] &= \begin{bmatrix} [Q_{11}] & \cdots & \cdots & \cdots & [Q_{1M}] \\ \vdots & & & & \vdots \\ [Q_{I1}] & \cdots & [Q_{IJ}] & \cdots & [Q_{IM}] \\ \vdots & & & & \vdots \\ [Q_{M1}] & \cdots & \cdots & \cdots & [Q_{MM}] \end{bmatrix} \end{aligned}$$

このとき、母線方向の第  $I$  段の表面力は次式で表される。

$$\sum_{J=1}^M [Q_{IJ}^m]\{u_J^m\} = \{p_I^m\} \quad (7.2)$$

また、第  $I$  段の表面力  $\{p_I(\varphi)\}$  を周方向に次数  $M_e$  まで有限フーリエ展開すると、次式のようなになる。

$$\{p_I(\varphi)\} = \sum_{m=0}^{M_e} ([T^{ms}(\varphi)]\{p_I^{ms}\} + [T^{ma}(\varphi)]\{p_I^{ma}\}) \quad (7.3)$$

ただし、

$$[T^{ms}(\varphi)] = \begin{bmatrix} \cos m\varphi & 0 & 0 \\ 0 & \sin m\varphi & 0 \\ 0 & 0 & \cos m\varphi \end{bmatrix}$$

$$[T^{ma}(\varphi)] = \begin{bmatrix} \sin m\varphi & 0 & 0 \\ 0 & -\cos m\varphi & 0 \\ 0 & 0 & \sin m\varphi \end{bmatrix}$$

上添字  $s$  は  $x$  軸に関する対称成分、 $a$  は非対称成分を表す。(7.2) 式より (7.3) 式は次のように書き換えられる。

$$\{p_I(\varphi)\} = \sum_{m=0}^{M_e} \left( [T^{ms}(\varphi)] \sum_{J=1}^M [Q_{IJ}^m]\{u_J^{ms}\} + [T^{ma}(\varphi)] \sum_{J=1}^M [Q_{IJ}^m]\{u_J^{ma}\} \right) \quad (7.4)$$

ここで、Fig.7.1 に示すように母線に沿って分割された各段を周方向に  $N$  個の要素に分割する。円筒座標系で表されている外部領域の  $\varphi = \varphi_K$  の表面力を次式により 3 次元直交デカルト座標系に変換する。

$$\{p_{IK}\} = [T(\varphi_K)]^T \{p_I(\varphi_K)\} \quad (7.5)$$

ただし、

$$[T(\varphi)] = \begin{bmatrix} \cos \varphi & \sin \varphi & 0 \\ -\sin \varphi & \cos \varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

ここに、 $\{p_{IK}\}$  は第  $I$  段の第  $K$  要素 ( $\varphi = \varphi_K$ ) の表面力である。

(7.4), (7.5) 式より、

$$\{p_{IK}\} = [T(\varphi_K)]^T \sum_{m=0}^{M_e} \left( [T^{ms}(\varphi_K)] \sum_{J=1}^M [Q_{IJ}^m]\{u_J^{ms}\} + [T^{ma}(\varphi_K)] \sum_{J=1}^M [Q_{IJ}^m]\{u_J^{ma}\} \right) \quad (7.6)$$

また、第  $I$  段の変位  $\{u_I(\varphi)\}$  も、 $\{p_I(\varphi)\}$  と同様に次式のように表すことができる。

$$\{u_I(\varphi)\} = \sum_{m=0}^{M_e} ([T^{ms}(\varphi)]\{u_I^{ms}\} + [T^{ma}(\varphi)]\{u_I^{ma}\}) \quad (7.7)$$

(7.7) 式のフーリエ係数  $\{u_I^{ms}\}$ ,  $\{u_I^{ma}\}$  は次式によって求められる。

$$\{u_I^{ms}\} = \frac{e_m}{2\pi} \int_0^{2\pi} [T^{ms}]\{u_I(\varphi)\} d\varphi = \frac{e_m}{2\pi} \sum_{L=1}^N \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} [T^{ms}]\{u_I(\varphi)\} d\varphi \quad (7.8)$$

$$\{u_I^{ma}\} = \frac{e_m}{2\pi} \int_0^{2\pi} [T^{ma}]\{u_I(\varphi)\} d\varphi = \frac{e_m}{2\pi} \sum_{L=1}^N \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} [T^{ma}]\{u_I(\varphi)\} d\varphi \quad (7.9)$$

$$; \quad e_m = 2 - \delta_{m0}, \quad \varphi_1 = \varphi_L - \Delta\varphi_L/2, \quad \varphi_2 = \varphi_L + \Delta\varphi_L/2 \quad (7.10)$$

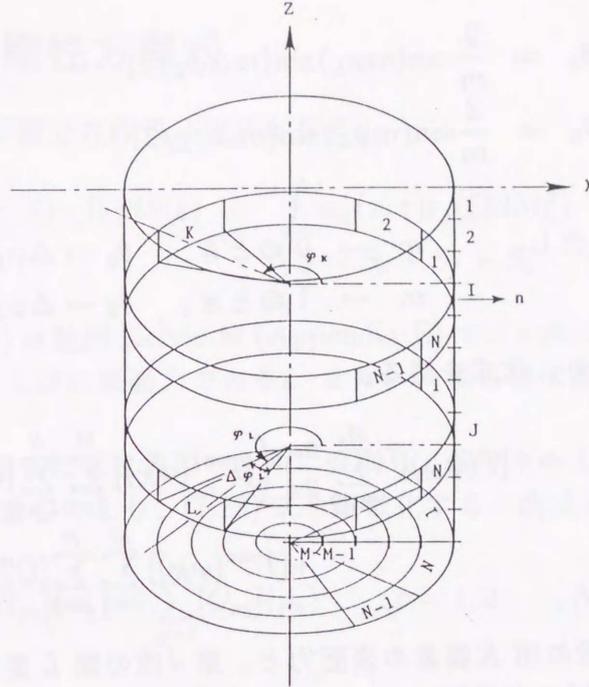


Figure 7.1: 境界面  $S_d$  の離散化モデル

また、

$$\{u_I(\varphi)\} = [T(\varphi)]\{u_{IL}\} \quad (7.11)$$

より、

$$\{u_I^{ms}\} = \frac{e_m}{2\pi} \sum_{L=1}^N [\Theta_L^{ms}] \{u_{IL}\} \quad (7.12)$$

$$\{u_I^{ma}\} = \frac{e_m}{2\pi} \sum_{L=1}^N [\Theta_L^{ma}] \{u_{IL}\} \quad (7.13)$$

ここに、

$$[\Theta_L^{ms}] = \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} [T^{ms}(\varphi)][T(\varphi)]d\varphi = \begin{bmatrix} \theta_1 + \theta_2 & \theta_3 - \theta_4 & 0 \\ \theta_1 - \theta_2 & \theta_3 + \theta_4 & 0 \\ 0 & 0 & \theta_5 \end{bmatrix} \quad (7.14)$$

$$[\Theta_L^{ma}] = \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} [T^{ma}(\varphi)][T(\varphi)]d\varphi = \begin{bmatrix} \theta_3 + \theta_4 & -\theta_1 + \theta_2 & 0 \\ \theta_3 - \theta_4 & -\theta_1 - \theta_2 & 0 \\ 0 & 0 & \theta_6 \end{bmatrix} \quad (7.15)$$

$$\theta_1 = \frac{1}{m+1} \cos((m+1)\varphi_L) \sin((m+1)\Delta\varphi_L/2)$$

$$\theta_2 = \frac{1}{m-1} \cos((m-1)\varphi_L) \sin((m-1)\Delta\varphi_L/2)$$

$$\theta_3 = \frac{1}{m+1} \sin((m+1)\varphi_L) \sin((m+1)\Delta\varphi_L/2)$$

$$\theta_4 = \frac{1}{m-1} \sin((m-1)\varphi_L) \sin((m-1)\Delta\varphi_L/2)$$

$$\theta_5 = \frac{2}{m} \cos(m\varphi_L) \sin(m\Delta\varphi_L/2)$$

$$\theta_6 = \frac{2}{m} \sin(m\varphi_L) \sin(m\Delta\varphi_L/2)$$

ただし、 $m \rightarrow 0$  のとき、 $\theta_5 \rightarrow \Delta\varphi_L$ ,  $\theta_6 \rightarrow 0$   
 $m \rightarrow 1$  のとき、 $\theta_2 \rightarrow \Delta\varphi_L/2$ ,  $\theta_4 \rightarrow 0$

(7.12), (7.13) 式より、次式を得る。

$$\{p_{IK}\} = [T(\varphi_K)]^T \sum_{m=0}^{M_e} \frac{e_m}{2\pi} \left( [T^{ms}(\varphi_K)] \sum_{J=1}^M \sum_{L=1}^N [Q_{IJ}^m][\Theta_L^{ms}] \right. \\ \left. + [T^{ma}(\varphi_K)] \sum_{J=1}^M \sum_{L=1}^N [Q_{IJ}^m][\Theta_L^{ma}] \right) \{u_{JL}\} \quad (7.16)$$

(7.16) 式は、第  $I$  段の第  $K$  要素の表面力と、第  $J$  段の第  $L$  要素の変位の関係を表している。これを外部領域の全体剛性マトリクス  $[Q]$  を介して書き改めると、外部領域における剛性方程式が、次式のように求められる。

$$[Q]\{u_d\} = \{p_d\} \quad (7.17)$$

ここで、

$$\begin{aligned} \{u_d\}^T &= [\{u_{d1}\}^T, \dots, \{u_{dJ}\}^T, \dots, \{u_{dM}\}^T] \\ \{p_d\}^T &= [\{p_{d1}\}^T, \dots, \{p_{dI}\}^T, \dots, \{p_{dM}\}^T] \\ \{u_{dJ}\}^T &= [\{u_{J1}\}^T, \dots, \{u_{JN}\}^T] \\ \{p_{dI}\}^T &= [\{p_{I1}\}^T, \dots, \{p_{IN}\}^T] \end{aligned}$$

$$[Q] = \begin{bmatrix} [Q_{11}] & \cdots & \cdots & \cdots & [Q_{1M}] \\ \vdots & & & & \vdots \\ [Q_{I1}] & \cdots & [Q_{IJ}] & \cdots & [Q_{IM}] \\ \vdots & & & & \vdots \\ [Q_{M1}] & \cdots & \cdots & \cdots & [Q_{MM}] \end{bmatrix}$$

$$[Q_{IJ}] = \begin{bmatrix} [Q_{IJ}^{11}] & \cdots & \cdots & \cdots & [Q_{IJ}^{1N}] \\ \vdots & & & & \vdots \\ [Q_{IJ}^{K1}] & \cdots & [Q_{IJ}^{KL}] & \cdots & [Q_{IJ}^{KN}] \\ \vdots & & & & \vdots \\ [Q_{IJ}^{N1}] & \cdots & \cdots & \cdots & [Q_{IJ}^{NN}] \end{bmatrix}$$

ただし、

$$[Q_{IJ}^{KL}] = \sum_{m=0}^{M_e} \frac{e_m}{2\pi} [T(\varphi_K)]^T ([T^{ms}(\varphi_K)][Q_{IJ}^m][\Theta_L^{ms}] + [T^{ma}(\varphi_K)][Q_{IJ}^m][\Theta_L^{ma}]) \quad (7.18)$$

## 7.2 内部領域の剛性方程式

内部領域における境界積分方程式は次式となる。

$$\frac{1}{2}u_i(x) + \int_S p_{ij}(x, \xi)u_j(\xi)dS(\xi) = \int_S u_{ij}(x, \xi)p_j(\xi)dS(\xi) \quad (7.19)$$

$$; S = S_d + S_f + S_b, \quad i, j = x, y, z$$

ここに、 $u_{ij}(x, \xi), p_{ij}(x, \xi)$  は動的 Kelvin 解 (Appendix E) で、 $x$  点における  $i$  方向加振による  $\xi$  点での  $j$  方向変位ならびに表面力である。また、 $S_f$  は自由地表面、 $S_b$  は基礎と地盤 ( $V'$ ) の接触面である。

表面  $S$  を  $N$  個の四角形または三角形パネルに分割し、各パネル上の変位と表面力を一定とする。  $\xi$  点をパネル重心にとり、(7.19) 式を離散化すると次式のようになる。

$$\sum_{q=1}^N [H_{pq}] \{u_q\} = \sum_{q=1}^N [G_{pq}] \{p_q\} \quad ; p = 1, 2, \dots, N \quad (7.20)$$

ここに、

$$\begin{aligned} \{u_q\}^T &= [u_x(x_q), u_y(x_q), u_z(x_q)] \\ \{p_q\}^T &= [p_x(x_q), p_y(x_q), p_z(x_q)] \end{aligned}$$

(7.20) 式を全体マトリクス表現すると、

$$[H]\{u\} = [G]\{p\} \quad (7.21)$$

ここに、

$$\begin{aligned} [H] &= \begin{bmatrix} [H_{11}] & \cdots & [H_{1N}] \\ \vdots & & \vdots \\ [H_{N1}] & \cdots & [H_{NN}] \end{bmatrix} \\ [G] &= \begin{bmatrix} [G_{11}] & \cdots & [G_{1N}] \\ \vdots & & \vdots \\ [G_{N1}] & \cdots & [G_{NN}] \end{bmatrix} \\ \{u\}^T &= [\{u_1\}, \dots, \{u_N\}] \\ \{p\}^T &= [\{p_1\}, \dots, \{p_N\}] \end{aligned}$$

(7.21) 式を、外部領域と内部領域の境界面  $S_d$ 、自由地表面  $S_f$  および基礎面  $S_b$  に分けて書きなおし  $\{p_f\} = \{0\}$  とすると、内部領域の剛性方程式は次式のように表すことができる。

$$\begin{bmatrix} H_{dd} & H_{df} & H_{db} \\ H_{fd} & H_{ff} & H_{fb} \\ H_{bd} & H_{bf} & H_{bb} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_d \\ u_f \\ u_b \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} G_{dd} & G_{db} \\ G_{fd} & G_{fb} \\ G_{bd} & G_{bb} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} p_d \\ p_b \end{Bmatrix} \quad (7.22)$$

ところで、(7.20) 式の  $[H_{pq}], [G_{pq}]$  の各成分  $h_{pq}^{ij}, g_{pq}^{ij}$  は、以下のようにして求める。

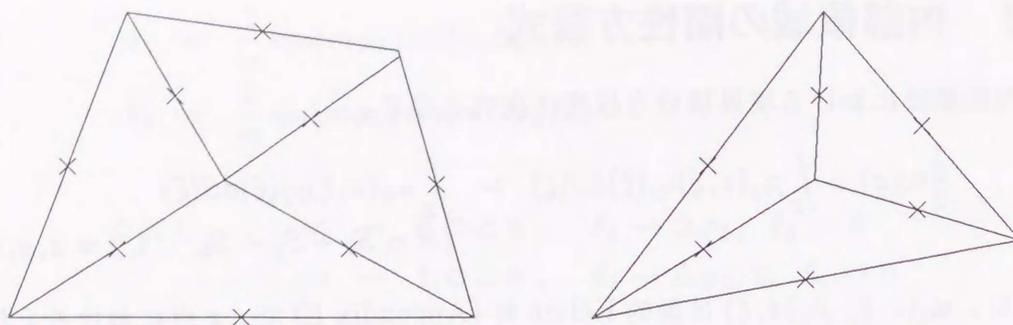


Figure 7.2: サブパネル要素

1)  $p \neq q$  のとき

Fig.7.2 のように、第  $q$  パネルを 3 または 4 個の三角形のサブパネルに分割し、各サブパネル上の被積分関数の値を Hammer の 3 点積分により各辺の中点  $\xi_L$  で評価すると、マトリクス成分は次のように書ける。

$$g_{pq}^{ij} = \frac{1}{3} \sum_{k=1}^{N_k} \sum_{L=1}^3 u_{ij}(x, \xi_L) \Delta S_{qk} \quad (7.23)$$

$$h_{pq}^{ij} = \frac{1}{3} \sum_{k=1}^{N_k} \sum_{L=1}^3 p_{ij}(x, \xi_L) \Delta S_{qk} \quad (7.24)$$

ここに、 $\Delta S_{qk}$  は第  $q$  パネルにおけるサブパネル  $k$  の面積である。

第  $q$  パネルが三角形のとき ;  $N_k = 3$

第  $q$  パネルが四角形のとき ;  $N_k = 4$

2)  $p = q$  のとき

動的 Kelvin 解を静的 Kelvin 解  $u_{ij}^K, p_{ij}^K$  を用いて次のように分解する。

$$u_{ij} = u_{ij}^K + (u_{ij} - u_{ij}^K) = u_{ij}^K + u_{ij}^D \quad (7.25)$$

$$p_{ij} = p_{ij}^K + (p_{ij} - p_{ij}^K) = p_{ij}^K + p_{ij}^D \quad (7.26)$$

これに対応して、 $[G_{pp}], [H_{pp}]$  も次のように分解できる。

$$[G_{pp}] = [G_{pp}^K] + [G_{pp}^D] \quad (7.27)$$

$$[H_{pp}] = [H_{pp}^K] + [H_{pp}^D] \quad (7.28)$$

a)  $[H_{pp}^D]$  と  $[G_{pp}^D]$  の評価

$p \neq q$  のときと同様に第  $p$  パネルを 3 または 4 個の三角形のサブパネルに分割し、各サブパネル上の被積分関数の値を Hammer の 3 点積分により各辺の中点  $x^L$  で評価すると、マトリクス成分は次のように書ける。

$$g_{pq}^{ijD} = \frac{1}{3} \sum_{k=1}^{N_k} \sum_{L=1}^3 u_{ij}^D(x, x_L) \Delta S_{pk} \quad (7.29)$$

$$h_{pq}^{ijD} = \frac{1}{3} \sum_{k=1}^{N_k} \sum_{L=1}^3 p_{ij}^D(x, x_L) \Delta S_{pk} \quad (7.30)$$

b)  $[H_{pp}^K]$  の評価

(7.21) 式の  $[H]$  を (7.26), (7.28) 式と同様に分割すると、

$$[H] = [H^K] + [H^D] \quad (7.31)$$

静的問題における剛体移動条件は、次のように示すことができる。

$$[H^K][A] = [0] \quad (7.32)$$

ここに、

$$[A] = \begin{bmatrix} [I] \\ [I] \\ \vdots \\ [I] \end{bmatrix} \quad [I]; 3 \times 3 \text{ の単位マトリクス}$$

これより、対角部分マトリクス  $[H_{pp}^K]$  は、次のように評価される。

$$[H_{pp}^K] = - \sum_{q=1, \neq p}^N [H_{pq}^K] \quad (7.33)$$

c)  $[G_{pp}^K]$  の評価

空間の任意の位置にあるパネル上での  $[G_{pp}^K]$  と Fig.7.3 に示されるような局所座標系で評価した  $[\bar{G}_{pp}^K]$  との関係は次式となる。

$$[G_{pp}^K] = [T]^T [\bar{G}_{pp}^K] [T] \quad (7.34)$$

ここに、

$$[T]^T = [t_1, t_2, n]$$

$t_1, t_2$  は、パネル面内にある直交する 2 つの接線ベクトル、 $n$  は、法線ベクトルである。

$[\bar{G}_{pp}^K]$  には、次のような厳密な解析的評価を行う。

$$\begin{aligned} \bar{x}_i &= \mathbf{r}_i \cdot \mathbf{t}_1, & \bar{x}_j &= \mathbf{r}_j \cdot \mathbf{t}_1 \\ \bar{y}_i &= \mathbf{r}_i \cdot \mathbf{t}_2, & \bar{y}_j &= \mathbf{r}_j \cdot \mathbf{t}_2 \\ \bar{x}_p &= \frac{(\bar{y}_j - \bar{y}_i)(\bar{x}_i \bar{y}_j - \bar{x}_j \bar{y}_i)}{(\bar{x}_j - \bar{x}_i)^2 + (\bar{y}_j - \bar{y}_i)^2} \\ \bar{y}_p &= -\frac{(\bar{x}_j - \bar{x}_i)(\bar{x}_i \bar{y}_j - \bar{x}_j \bar{y}_i)}{(\bar{x}_j - \bar{x}_i)^2 + (\bar{y}_j - \bar{y}_i)^2} \\ l_k &= \sqrt{\bar{x}_k^2 + \bar{y}_k^2} \\ \theta_k &= \begin{cases} \cos^{-1}(\bar{x}_k/l_k) & : \bar{y}_k \geq 0 \\ 2\pi - \cos^{-1}(\bar{x}_k/l_k) & : \bar{y}_k < 0 \end{cases} \quad ; k = i, j, p \end{aligned}$$

以上の諸量を用い、次式の計算を行う。

$$\bar{g}_{pp}^{stK} = \sum_{k=1}^{N_k} \bar{g}_k^{st} \quad (7.35)$$

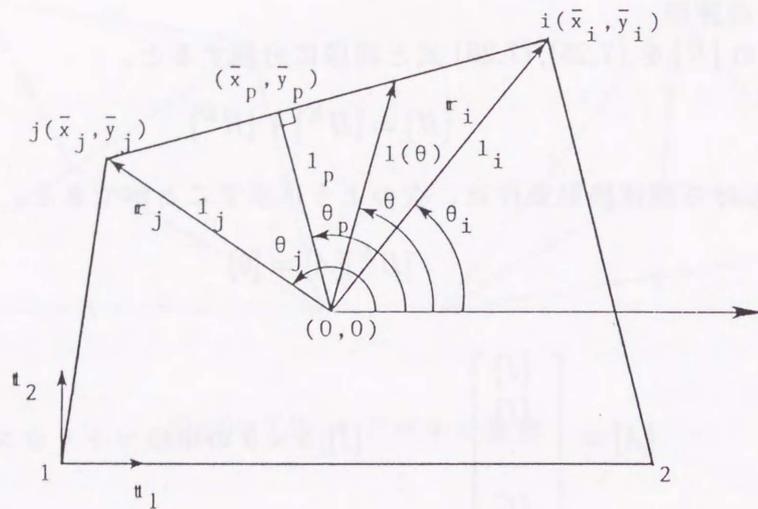


Figure 7.3: 局所座標

ただし、 $\bar{g}_{pp}^{stK}$  は、 $[\bar{G}_{pp}^K]$  の成分を表す。 $\bar{g}_k^{st}$  は次式によって表される。

$$\begin{aligned}\bar{g}_k^{st} &= \int_0^{l(\theta)} \int_{\theta_i}^{\theta_j} u_{st}^K(0,0;r,\theta) r dr d\theta \\ &= \frac{1}{16\pi\mu(1-\nu)} \int_{\theta_i}^{\theta_j} \{(3-4\nu)\delta_{st} + r_{,s}r_{,t}\} l(\theta) d\theta\end{aligned}\quad (7.36)$$

ところで、

$$\begin{aligned}l(\theta) \cos(\theta - \theta_p) &= l_p \\ r_{,x} &= \cos \theta \\ r_{,y} &= \sin \theta \\ r_{,z} &= 0\end{aligned}$$

の関係より、(7.36) 式の評価には、次の積分を求めればよい。

$$\begin{aligned}I_o &= \int_{\alpha_i}^{\alpha_j} \frac{1}{\cos x} dx \\ I_{cc} &= \int_{\alpha_i}^{\alpha_j} \frac{\cos^2(x + \theta_p)}{\cos x} dx \\ I_{cs} &= \int_{\alpha_i}^{\alpha_j} \frac{\cos(x + \theta_p) \sin(x + \theta_p)}{\cos x} dx \\ I_{ss} &= \int_{\alpha_i}^{\alpha_j} \frac{\sin^2(x + \theta_p)}{\cos x} dx\end{aligned}$$

ここに、 $\alpha_t = \theta_t - \theta_p$  ( $t = i, j$ )

積分の結果を示すと以下のようになる。

$$I_o = \left[ \log \left| \tan\left(\frac{\pi}{4} + \frac{x}{2}\right) \right| \right]_{\alpha_i}^{\alpha_j} \quad (7.37)$$

$$I_{cc} = \frac{1}{2}I_o + \frac{\cos 2\theta_p}{2}I_p + \sin 2\theta_p(\cos \alpha_j - \cos \alpha_i) \quad (7.38)$$

$$I_{cs} = \frac{\sin 2\theta_p}{2}I_p + \cos 2\theta_p(\cos \alpha_j - \cos \alpha_i) \quad (7.39)$$

$$I_{ss} = I_o - I_{cc} \quad (7.40)$$

ただし、

$$I_p = \left[ 2 \sin x - \log \left| \tan \left( \frac{\pi}{4} + \frac{x}{2} \right) \right| \right]_{\alpha_i}^{\alpha_j} = 2(\sin \alpha_j - \sin \alpha_i) - I_o \quad (7.41)$$

以上から、(7.36) 式は、次のように書ける。

$$[\bar{g}_k] = \frac{l_p}{16\pi\mu(1-\nu)} \begin{bmatrix} (3-4\nu)I_o + I_{cc} & I_{cs} & 0 \\ I_{cs} & (3-4\nu)I_o + I_{ss} & 0 \\ 0 & 0 & (3-4\nu)I_o \end{bmatrix} \quad (7.42)$$

### 7.3 外部領域と内部領域の結合方程式

放射場、入反射場及びそれらの和である全体場における境界面  $S_d$  の変位、表面力をそれぞれ  $(\{u_d\}, \{p_d\})$ ,  $(\{u_d^f\}, \{p_d^f\})$ ,  $(\{\tilde{u}_d\}, \{\tilde{p}_d\})$  とする。(3次元直交デカルト座標系における入反射場変位および表面力は、Appendix D の D.4 節に示してある。) これらには、次のような関係がある。

$$\{u_d\} = \{\tilde{u}_d\} - \{u_d^f\} \quad (7.43)$$

$$\{p_d\} = \{\tilde{p}_d\} - \{p_d^f\} \quad (7.44)$$

上式を (7.17) 式に代入すると、

$$[Q]\{\tilde{u}_d\} = \{\tilde{p}_d\} + \{p_g\} \quad (7.45)$$

ただし、

$$\{p_g\} = [Q]\{u_d^f\} - \{p_d^f\} \quad (7.46)$$

次に、外部領域と内部領域の結合条件

$$\{\tilde{u}_d\} = \{u_d\}_{I.D.}$$

$$\{\tilde{p}_d\} = \{p_d\}_{I.D.} \quad (I.D. \text{ は、内部領域を示す})$$

を考慮して、(7.45) 式を (7.22) 式に代入すると、

$$[H]\{u\} = \begin{bmatrix} G_{dd} \\ G_{fd} \\ G_{bd} \end{bmatrix} ([Q]\{u_d\} - \{p_g\}) + \begin{bmatrix} G_{db} \\ G_{fb} \\ G_{bb} \end{bmatrix} \{p_b\} \quad (7.47)$$

上式を変形すると次式を得る。

$$\begin{bmatrix} H_{dd} - G_{dd}Q & H_{df} & -G_{db} \\ H_{fd} - G_{fd}Q & H_{ff} & -G_{fb} \\ H_{bd} - G_{bd}Q & H_{bf} & -G_{bb} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_d \\ u_f \\ p_b \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} -G_{dd} & -H_{db} \\ -G_{fd} & -H_{fb} \\ -G_{bd} & -H_{bb} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} p_g \\ u_b \end{Bmatrix} \quad (7.48)$$

または、簡略に表現すると、

$$[D]\{a\} = -[G_d]\{p_g\} - [H_b]\{u_b\} \quad (7.49)$$

(7.48), (7.49) 式が、全領域における剛性方程式である。

## 7.4 任意形状剛基礎の動的相互作用解析法

地盤-剛基礎連成系の運動方程式は、(2.10) 式より、次のように表される。

$$(-\omega^2[M] + [K])\{\Lambda\} = \{F\} \quad (7.50)$$

ここに、 $\{\Lambda\}$  は (2.16) 式で示される剛体変位モード、 $[M], [K], \{F\}$  は、基礎の質量マトリクス、インピーダンスマトリクスおよび地震強制力ベクトルである。

一方、剛基礎の運動は (2.7) 式より、次のように表される。

$$\{u_b\} = [U^e]\{\Lambda\} \quad (7.51)$$

ここに、

$$[U^e] = \begin{bmatrix} [U^e(x^1)] \\ [U^e(x^2)] \\ \vdots \\ [U^e(x^{N_b})] \end{bmatrix} \quad (7.52)$$

ただし、 $N_b$  は  $S_b$  面の総パネル数であり、 $[U^e(x)]$  は (2.15) 式で示されるものである。

インピーダンスマトリクスは、2.1 節にしたがって、(7.49) 式に (7.51) 式を代入し、 $\{p_g\} = \{0\}$  とした次式

$$[D]\{a\} = -[H_b][U^e]\{\Lambda\} \quad (7.53)$$

を解いて、 $\{p_b\} = [V^r]\{\Lambda\}$  を求め、これより次のように得られる

$$[K] = [U^e]^T [S] [V^r] \quad (7.54)$$

ここに、

$$[V^r] = \begin{bmatrix} [V^r(x^1)] \\ [V^r(x^2)] \\ \vdots \\ [V^r(x^{N_b})] \end{bmatrix}$$

$$[S] = \begin{bmatrix} [S^1] & & & \\ & [S^2] & & \\ & & \dots & \\ & & & [S^{N_b}] \end{bmatrix}$$

$$[S_m] = \begin{bmatrix} \Delta S_m & 0 & 0 \\ 0 & \Delta S_m & 0 \\ 0 & 0 & \Delta S_m \end{bmatrix}; \Delta S_m \text{ は第 } m \text{ パネルの面積}$$

また、地震強制力ベクトルは、 $\{u_b\} = \{0\}$  とした次式

$$[D]\{a\} = -[G_d]\{p_g\} \quad (7.55)$$

を解いて、この場合の  $\{p_b\}$  を求め、(7.54) 式と同様にして次のように得られる。

$$\{F\} = [U^e]^T[S]\{p_b\} \quad (7.56)$$

基礎入力動は、(2.18) 式より、(7.54), (7.56) 式から次式のように求められる。

$$\{\Lambda_o\} = [K]^{-1}\{F\} \quad (7.57)$$

$x$  軸および  $y$  軸に関する対称性を持つ剛基礎のインピーダンスマトリクスおよび地震強制力ベクトルの成分を以下に示しておく。

$$[K] = \begin{bmatrix} K_{HH}^{xz} & K_{MH}^{xz} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ K_{HM}^{xz} & K_{MM}^{xz} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & K_{HH}^{yz} & K_{MH}^{yz} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & K_{HM}^{yz} & K_{MM}^{yz} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & K_{VV} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & K_{TT} \end{bmatrix} \quad (7.58)$$

$$\{F\}^T = [F_H^x, F_M^x, F_H^y, F_M^y, F_V, F_T] \quad (7.59)$$

## 7.5 1/4 解析

### 7.5.1 外部領域

円筒面  $S_d$  上の第  $I$  段の変位ベクトル  $\{u_I(\varphi)\}$  において、 $\varphi$  が第  $r$  象限にある場合には  $\{u_I^r(\varphi)\}$  と表記する。このとき、変位場の対称性は、一般に次のように表すことができる。

$$\{u_I^r(\varphi)\} = [e_r]\{u_I^1(\varphi_r)\} \quad (7.60)$$

ここに、 $\varphi_1 = \varphi$ ,  $\varphi_2 = \pi - \varphi$ ,  $\varphi_3 = \varphi - \pi$ ,  $\varphi_4 = 2\pi - \varphi$ 。また、各変位場に対応する  $[e_r]$  を整理すると以下のようなになる。ただし、 $[e_1] = [I]$  ( $3 \times 3$  の単位マトリクス)。

#### 1. 上下動問題 ( $z$ 方向並進)

$$[e_2] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad [e_3] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad [e_4] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

#### 2. ねじれ動問題 ( $z$ 軸回転)

$$[e_2] = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}, \quad [e_3] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad [e_4] = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

3. 水平・回転動問題 ( $x$  方向並進;  $y$  軸回転)

$$[e_2] = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}, \quad [e_3] = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}, \quad [e_4] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

4. 水平・回転動問題 ( $y$  方向並進;  $x$  軸回転)

$$[e_2] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad [e_3] = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}, \quad [e_4] = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

(7.60) 式を考慮して、 $\{u_I(\varphi)\}$  のフーリエ係数  $\{u_I^{ms}\}$  を求めると、

$$\begin{aligned} \{u_I^{ms}\} &= \frac{e_m}{2\pi} \int_0^{2\pi} [T^{ms}(\varphi)] \{u_I(\varphi)\} d\varphi \\ &= \frac{e_m}{2\pi} \sum_{r=1}^4 \int_{r_1}^{r_2} [T^{ms}(\varphi)] [e_r] \{u_{I1}(\varphi)\} d\varphi \end{aligned} \quad (7.61)$$

ここに、 $r_1 = \frac{\pi}{2}(r-1)$ ,  $r_2 = \frac{\pi}{2}r$   
変数変換すると、

$$\begin{aligned} \{u_I^{ms}\} &= \frac{e_m}{2\pi} \int_0^{\pi/2} \{ [T^{ms}(\varphi)] [e_1] + [T^{ms}(\pi-\varphi)] [e_2] \\ &\quad + [T^{ms}(\pi+\varphi)] [e_3] + [T^{ms}(2\pi-\varphi)] [e_4] \} \{u_{I1}(\varphi)\} d\varphi \end{aligned} \quad (7.62)$$

ここで、次の関係

$$\begin{aligned} [T^{ms}(\pi-\varphi)] &= (-1)^m [T^{ms}(\varphi)] [e^s] \\ [T^{ms}(\pi+\varphi)] &= (-1)^m [T^{ms}(\varphi)] \\ [T^{ms}(2\pi-\varphi)] &= [T^{ms}(\varphi)] [e^s] \end{aligned}$$

ここに、

$$[e^s] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

を用いると、(7.62) 式は次式となる。

$$\{u_I^{ms}\} = \frac{e_m}{2\pi} \int_0^{\pi/2} [T^{ms}(\varphi)] \{ [e_1] + [e^s][e_4] + ([e_3] + [e^s][e_2]) (-1)^m \} \{u_{I1}(\varphi)\} d\varphi \quad (7.63)$$

同様に、フーリエ係数  $\{u_I^{ma}\}$  は、

$$\{u_I^{ma}\} = \frac{e_m}{2\pi} \int_0^{\pi/2} [T^{ma}(\varphi)] \{ [e_1] + [e^a][e_4] + ([e_3] + [e^a][e_2]) (-1)^m \} \{u_{I1}(\varphi)\} d\varphi \quad (7.64)$$

ここに、

$$[e^a] = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

(7.63), (7.64) 式の { } 内をそれぞれ  $[E_s], [E_a]$  と置き、各変位場に対応する  $[e_r]$  を代入すると次のようになる。

	$[E^s]$	$[E^a]$
1)	$2\{1 + (-1)^m\}[I]$	$[0]$
2)	$[0]$	$2\{1 + (-1)^m\}[I]$
3)	$2\{1 - (-1)^m\}[I]$	$[0]$
4)	$[0]$	$2\{1 - (-1)^m\}[I]$

$$[E^t] = [e_1] + [e^t][e_4] + ([e_3] + [e^t][e_2])(-1)^m, (t = s, a)$$

これより、第1象限内にある第  $I$  段第  $K$  要素と第  $J$  段第  $L$  要素を関係づける剛性マトリクス  $[Q_{IJ}^{KL}]$  は、各動問題について次のようにまとめることができる。

$$1) \quad [Q_{IJ}^{KL}] = \sum_{m=0,2,4,\dots} \frac{2e_m}{\pi} [T(\varphi_K)]^T [T^{ms}(\varphi_K)] [Q_{IJ}^m] [\Theta_L^{ms}] \quad (7.65)$$

$$2) \quad [Q_{IJ}^{KL}] = \sum_{m=0,2,4,\dots} \frac{2e_m}{\pi} [T(\varphi_K)]^T [T^{ma}(\varphi_K)] [Q_{IJ}^m] [\Theta_L^{ma}] \quad (7.66)$$

$$3) \quad [Q_{IJ}^{KL}] = \sum_{m=1,3,5,\dots} \frac{4}{\pi} [T(\varphi_K)]^T [T^{ms}(\varphi_K)] [Q_{IJ}^m] [\Theta_L^{ms}] \quad (7.67)$$

$$4) \quad [Q_{IJ}^{KL}] = \sum_{m=1,3,5,\dots} \frac{4}{\pi} [T(\varphi_K)]^T [T^{ma}(\varphi_K)] [Q_{IJ}^m] [\Theta_L^{ma}] \quad (7.68)$$

### 7.5.2 内部領域

第1象限の第  $L$  パネル領域  $S_L^1$  の  $x$  軸,  $y$  軸に関し鏡像関係にある第  $t$  象限内のパネル領域を  $S_L^t$ 、その重心点を  $x_L^t$  とすると、内部領域における剛性方程式は、

$$[H]\{u\} = [G]\{p\} \quad (7.69)$$

または、

$$\begin{aligned} \sum_{L=1}^{N_e} \left[ \sum_{t=1}^4 \int_{S_L^t} p_{ij}(x_K^r, x_L^t) dS(x_L^t) u_j(x_L^t) \right] \\ = \sum_{L=1}^{N_e} \left[ \sum_{t=1}^4 \int_{S_L^t} u_{ij}(x_K^r, x_L^t) dS(x_L^t) p_j(x_L^t) \right] \end{aligned} \quad (7.70)$$

;  $r = 1, 2, 3, 4, \quad K = 1, 2, \dots, Ne$  ( $Ne$ : 第1象限内のパネル総数)

と書ける。上式の [ ] 内は、場の対称性を利用して縮約することができる。  
この対称性は一般的に次のように表すことができる。

$$u_j(x_L^t) = e_{t(j)} u_{(j)}(x_L^1) \quad (7.71)$$

$$p_j(x_L^t) = e_{t(j)} p_{(j)}(x_L^1) \quad (7.72)$$

ここで、各動問題における  $e_{t(j)}$  をマトリクス  $[e_{tj}]$  としてまとめておく。

- 1) 上下動問題 ( $z$  方向並進)                      2) ねじれ動問題 ( $z$  軸回転)

$$[e_{tj}] = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \quad [e_{tj}] = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

- 3) 水平・回転動問題                      4) 水平・回転動問題  
( $x$  方向並進;  $y$  軸回転)                      ( $y$  方向並進;  $x$  軸回転)

$$[e_{tj}] = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \quad [e_{tj}] = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

(7.71), (7.72) 式を (7.70) 式に代入すると、

$$\sum_{L=1}^{N_e} \left[ \sum_{t=1}^4 e_{t(j)} \int_{S_L^t} p_{i(j)}(x_K^r, x_L^t) dS(x_L^t) \right] u_j(x_L^1) = \sum_{L=1}^{N_e} \left[ \sum_{t=1}^4 e_{t(j)} \int_{S_L^t} u_{i(j)}(x_K^r, x_L^t) dS(x_L^t) \right] p_j(x_L^1) \quad (7.73)$$

場の対称性から上式は、各  $r$  について同一の式が得られるので、以後は  $r = 1$  と固定しておく。(7.73) 式を次のように書き改めると、

$$[H]\{u\} = [G]\{p\} \quad (7.74)$$

ここに、

$$\begin{aligned} \{u\}^T &= [\{u_i(x_1^1)\}^T, \dots, \{u_i(x_{N_e}^1)\}^T] \\ \{p\}^T &= [\{p_i(x_1^1)\}^T, \dots, \{p_i(x_{N_e}^1)\}^T] \\ [G] &= \begin{bmatrix} [G_{11}] & \cdots & [G_{1N_e}] \\ \vdots & [G_{KL}] & \vdots \\ [G_{N_e1}] & \cdots & [G_{N_eN_e}] \end{bmatrix} \\ [H] &= \begin{bmatrix} [H_{11}] & \cdots & [H_{1N_e}] \\ \vdots & [H_{KL}] & \vdots \\ [H_{N_e1}] & \cdots & [H_{N_eN_e}] \end{bmatrix} \end{aligned}$$

$[G_{KL}]$ 、 $[H_{KL}]$  の成分は、それぞれ

$$G_{KL}^{ij} = \sum_{t=1}^4 e_{t(j)} \int_{S_L^t} u_{i(j)}(x_K^1, x_L^t) dS(x_L^t) \quad (7.75)$$

$$H_{KL}^{ij} = \sum_{t=1}^4 e_{t(j)} \int_{S_L^t} p_{i(j)}(x_K^1, x_L^t) dS(x_L^t) \quad (7.76)$$

## 7.6 解析法の有効性の検証

### 7.6.1 フーリエ展開次数と周方向分割数に関する調査

まず、半無限一様地盤上に設置された正方形剛基礎の水平・回転動連成系のインピーダンス解析により、外部場を表すために必要なフーリエ展開次数とそれを内部場に伝達するために必要な  $S_d$  面の周方向分割数を調査する。なお、以下の解析では、すべて 7.5 節に示した 1/4 解析法を用いている。

Fig.7.4(a) は、解析対象地盤の薄層要素分割および外部領域の境界要素分割を示している。地盤のポアソン比および  $S$  波、 $P$  波に関する減衰定数は、それぞれ、 $1/3$ 、 $0.02$ 、 $0.02$  としている。Fig.7.4(b) は、周方向分割数 6 の時の基礎を含む内部領域の分割を示している。なお、基礎の代表長  $a$  は、基礎を等価面積の円形に置き換えたときの半径 ( $a = \sqrt{4b^2/\pi}$ ) としている。

Fig.7.5 ~ 7.8 は、フーリエ展開次数  $m$  の最大値を 1,3,5,7 と変化させ、周方向分割数を 2,4,6,8 とした場合の、水平・回転動連成系のインピーダンス値の収束性を示したものである。図には、厳密なグリーン関数を用いた Wong と Luco[59] の値も示している。図の縦軸は無次元化インピーダンス、横軸は周方向分割数であり、実線および波線は、それぞれインピーダンスの実部と虚部を示す。Case1 ~ Case4 は、それぞれフーリエ展開次数の最大値が 1,3,5,7 の各場合を示す。これらの図より、 $a_0 = 0.5$  では、フーリエ展開次数は 3 程度、周方向分割数は 4 程度必要であり、 $a_0 = 3.0$  では、フーリエ展開次数は 5 程度、周方向分割数は 6 程度必要であることがわかる。

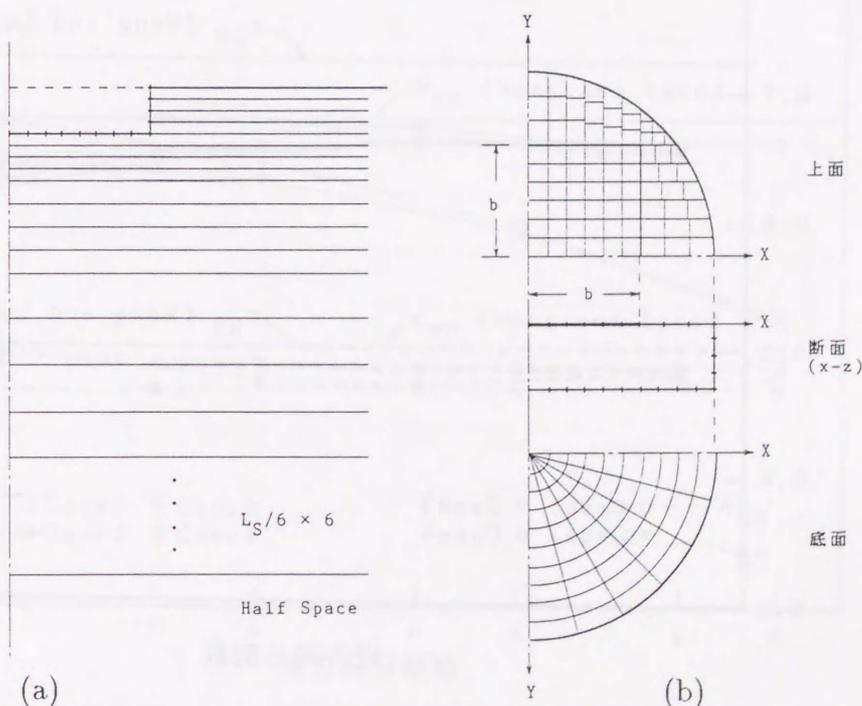


Figure 7.4: 地表面正方形基礎の解析モデル

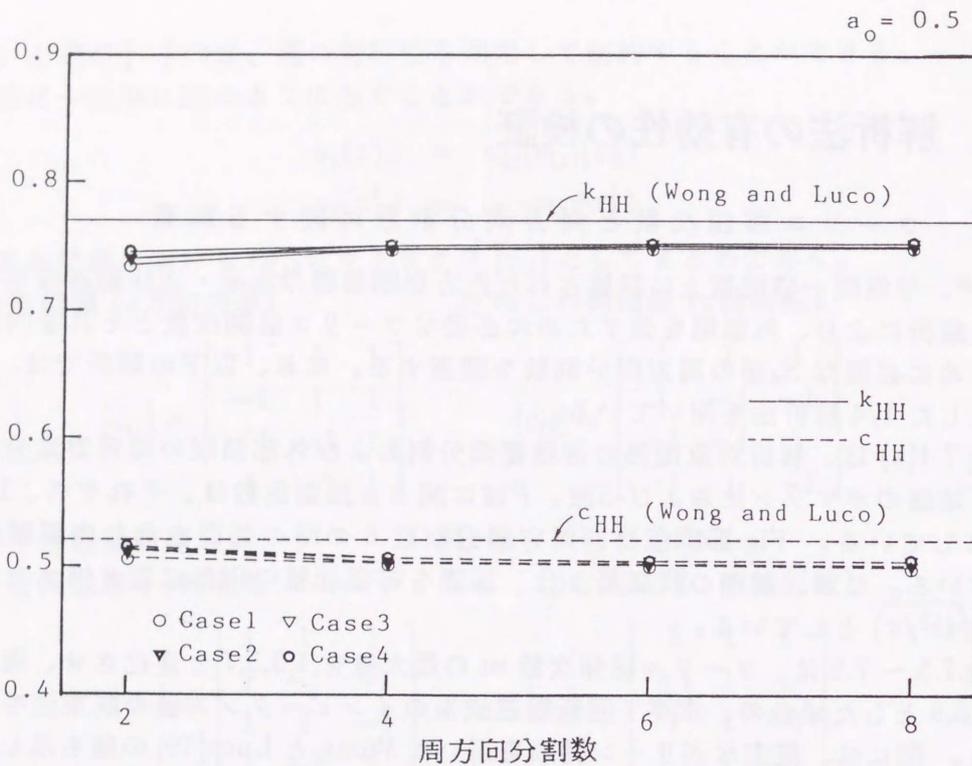


Figure 7.5: フーリエ展開次数と周方向分割数に関する調査 ( $K_{HH}, a_o = 0.5$ )

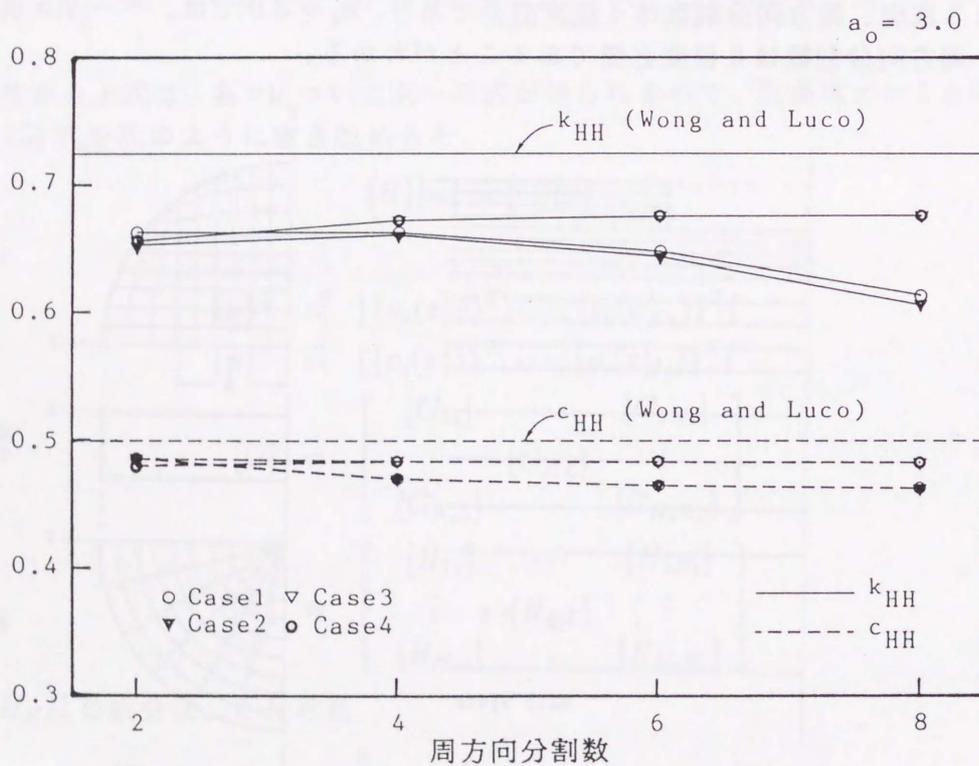


Figure 7.6: フーリエ展開次数と周方向分割数に関する調査 ( $K_{HH}, a_o = 3.0$ )

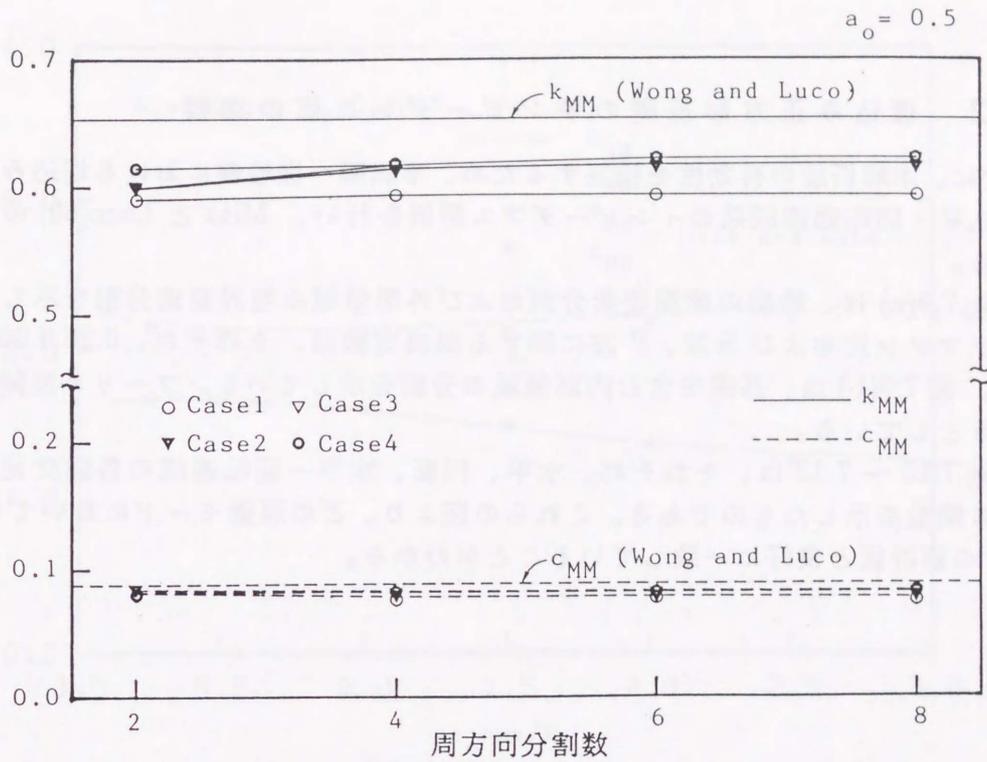


Figure 7.7: フーリエ展開次数と周方向分割数に関する調査 ( $K_{MM}, a_o = 0.5$ )

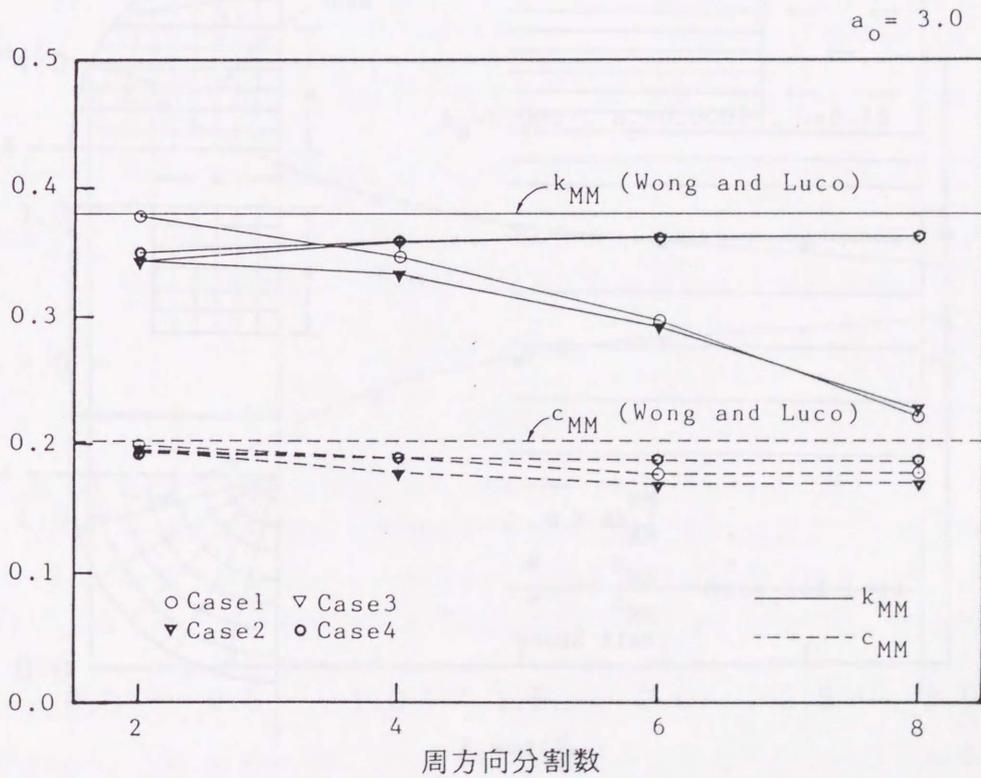


Figure 7.8: フーリエ展開次数と周方向分割数に関する調査 ( $K_{MM}, a_o = 3.0$ )

## 7.6.2 埋込み正方形基礎のインピーダンス値の比較

次に、本解析法の有効性を検証するため、半無限一様地盤における埋込み正方形剛基礎の水平・回転動連成系のインピーダンス解析を行い、MitaとLuco[60]の解析値と比較する。

Fig.7.9(a)は、地盤の薄層要素分割および外部領域の境界要素分割を示している。地盤のポアソン比およびS波、P波に関する減衰定数は、それぞれ、0.25,0.001,0.0005である。図7.9(b)は、基礎を含む内部領域の分割を示している。フーリエ展開次数の最大値は5としている。

Fig.7.10～7.12は、それぞれ、水平、回転、水平-回転連成の各無次元化インピーダンス関数を示したものである。これらの図より、どの運動モードにおいても、MitaとLucoの解析値と良好に一致していることがわかる。

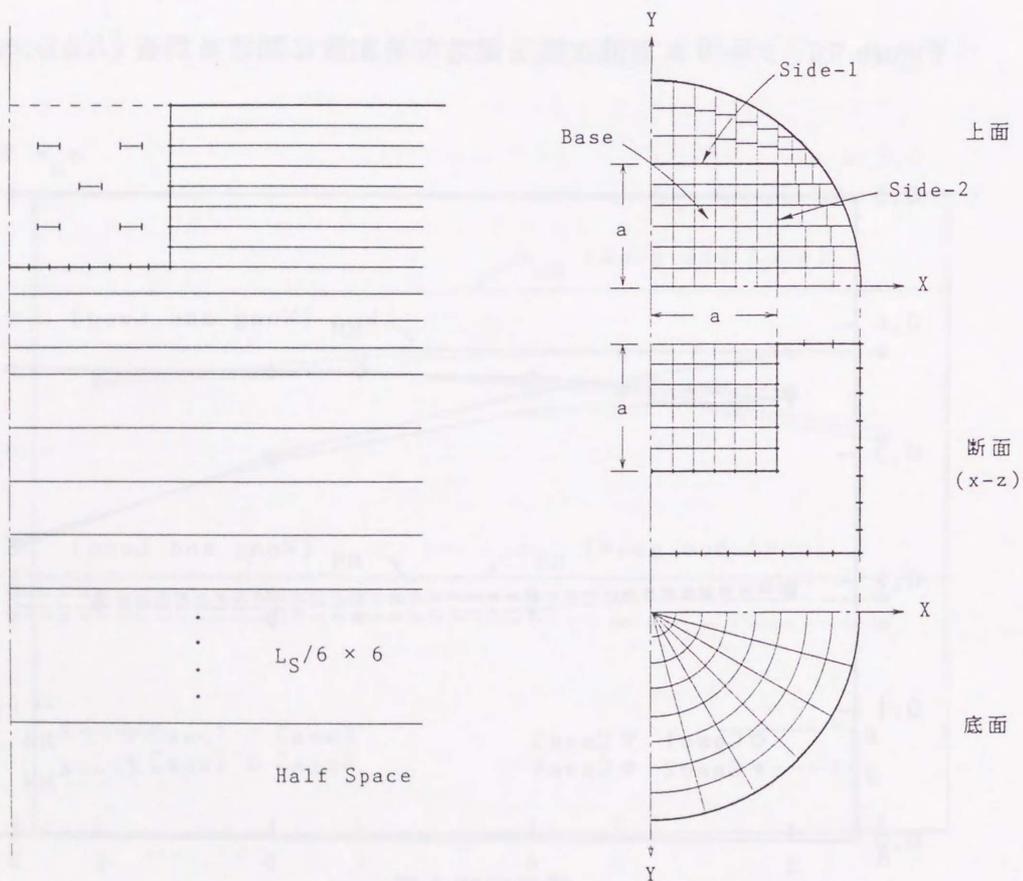


Figure 7.9: 埋込み正方形基礎の解析モデル

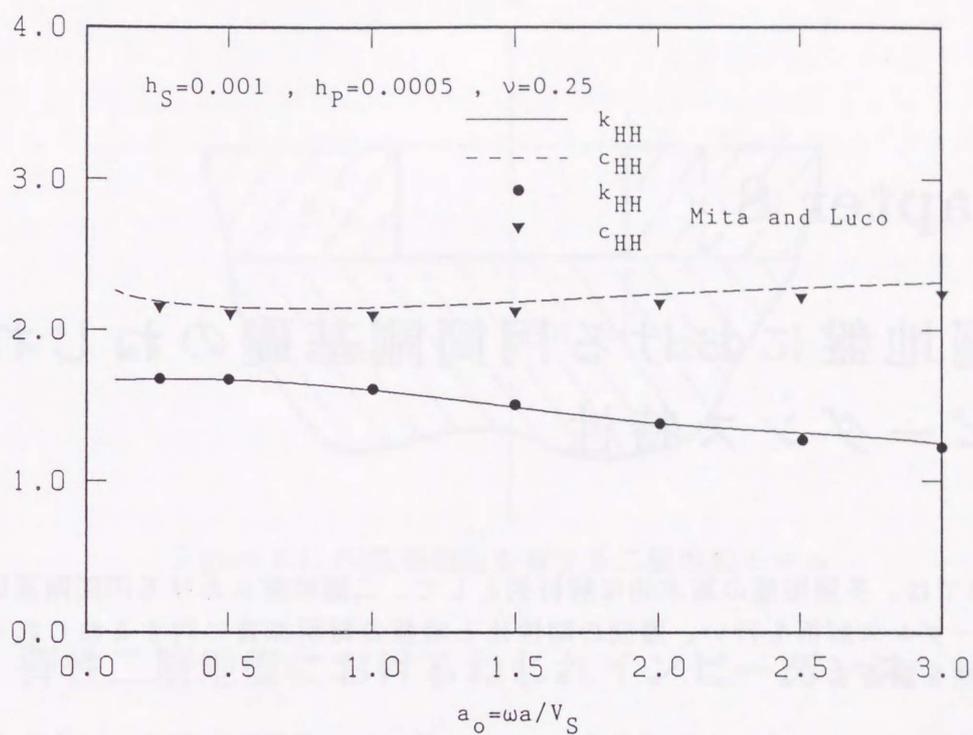


Figure 7.10: 埋込み正方形基礎の水平インピーダンス

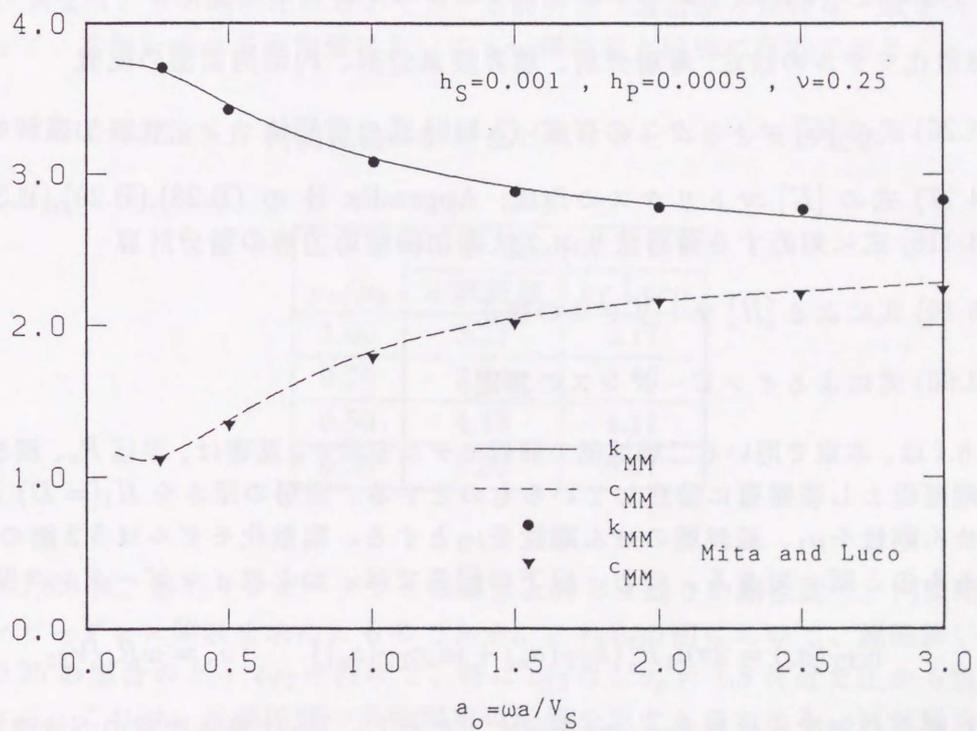


Figure 7.11: 埋込み正方形基礎の回転インピーダンス

# Chapter 8

## 二層地盤における円筒剛基礎のねじれインピーダンス特性

本章では、多層地盤の基本的な解析例として、二層地盤における円筒剛基礎のねじれインピーダンス解析を行い、層間の剛性比と地盤の材料減衰に対するねじれインピーダンス特性を調査する。

### 8.1 解析方法と解析モデルの設定

本章の解析では、4.3節で示した内部共振解の除去法と5.2節で示した応力マトリクスの修正法を用いる。以下参考のためその具体的な解析手順を示しておく。

1. 離散化モデルの設定; 薄層分割、境界要素分割、内部拘束面の配置
2. (4.26) 式の  $[G]$  マトリクスの作成; (3.118) 式の薄層法リング状線加振解の積分計算
3. (4.27) 式の  $[H]$  マトリクスの作成; Appendix B の (B.28),(B.29),(B.31) による (3.118) 式に対応する薄層法リング状線加振解応力解の積分計算
4. (5.16) 式による  $[H]$  マトリクスの修正
5. (2.60) 式によるインピーダンスの算定

Fig.8.1 は、本章で用いる二層地盤の解析モデルを示す。基礎は、半径  $R_o$ 、深さ  $D(=R_o)$  の円筒剛基礎とし基盤層に着底しているものとする。表層の厚さを  $H_1(=D)$  とし、表層地盤のせん剛性を  $\mu_1$ 、基盤層のせん剛性を  $\mu_2$  とする。離散化モデルは5.2節の Fig.5.5 に示されるものと同様である。なお、以下の図表では、ねじれインピーダンス関数  $K_{TT}$  を

$$K_{TT}(a_o) = 2\pi\mu_1 R_o^3 \{k_{TT}(a_o) + ia_o c_{TT}(a_o)\} \quad ; a_o = \omega R_o / V_{S1} \quad (8.1)$$

と表した場合の無次元化量  $k_{TT}$ ,  $c_{TT}$  を示す。ただし、 $V_{S1}$  は表層地盤の  $S$  波速度を表す。

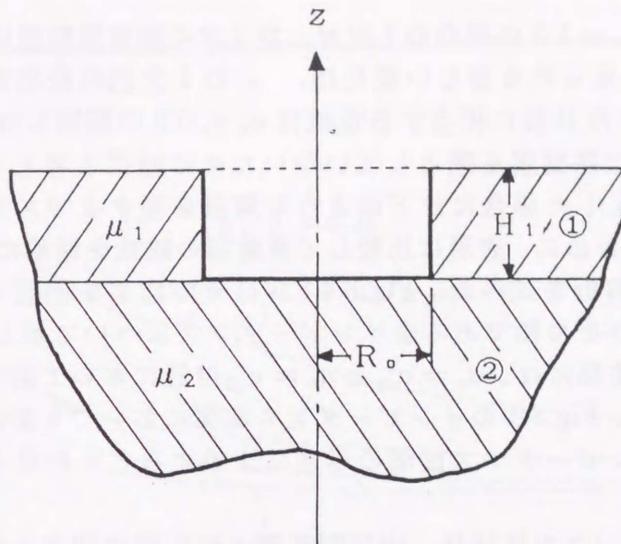


Figure 8.1: 円筒掘削面を有する二層地盤モデル

## 8.2 弾性二層地盤におけるねじれインピーダンス

Table 8.1 は、表層と基盤層の剛性比 $\mu_1/\mu_2$ を 1.0, 0.75, 0.5, 0.25 の 4 通りに変化させた時の円筒剛基礎の静的ねじれインピーダンス値を Luco[61] によって求められた厳密解と比較したものである。ただし、本解析による静的インピーダンス値は、 $a_o = 0.1, 0.2, 0.3$  の  $k_{TT}$  の値から代数補間して定めたものである。なお、剛性比 1.0 は半無限一様地盤に相当する。表より、どの剛性比においても、本解析値は厳密解と良好な一致を示している。したがって、本解析法は多層地盤においても一様地盤と同様に有効であることがわかる。

Table 8.1: 円筒基礎の静的ねじれインピーダンスの比較

$\mu_1/\mu_2$	$k_{TT}(0)$	
	本解析値	by Luco
1.00	3.21	3.17
0.75	3.53	3.49
0.50	4.13	4.11
0.25	5.83	5.87

Fig.8.2,8.3 は、静的インピーダンスの場合と同じ 4 通りの剛性比で、円筒剛基礎のねじれインピーダンス関数を求めたものである。これらの図において、興味深いのは、剛性比が 0.25 の場合の  $k_{TT}, c_{TT}$  の性状で、特に  $c_{TT}$  は、 $a_o = 1.8$  付近で正から負へと著しく変化する。これは、表層地盤の共振現象の影響を示すものである。基盤層を完全に剛とすれば、表層のねじれ振動に関する無次元化  $n$  次固有振動数  $a_{on}^*$  は次式で与えられる。

$$a_{on}^* = (2n - 1) \frac{\pi R_o}{2H_1} \quad ; n = 1, 2, \dots \quad (8.2)$$

したがって、 $H_1/R_0 = 1.0$  の場合の1次および2次の固有振動数は、 $a_{o1}^* = 1.57, a_{o2}^* = 4.71$  となる。Fig.8.3に見られる著しい変化は、この1次固有振動数よりもやや高い振動数で発生しており、2次共振に相当する現象は  $a_o \leq 6.0$  の範囲には現れていない。これは、本解析例においては基盤層を剛としていないための結果と考えられる。それでは、基盤層を剛に近い状態にした場合にはどのような現象を呈するであろうか。

このことを知るために、表層に比較して基盤層の剛性を極端に高くとり、 $\mu_1/\mu_2 = 0.04$  に設定した場合の解析を試みた。Fig.8.4,8.5はその結果を側面インピーダンスと底面インピーダンスおよびその和である全インピーダンスについて示したものである。Fig.8.5のインピーダンス虚部には、 $a_o = a_{o1}^*$  と  $a_o = a_{o2}^*$  付近において明らかな共振現象の影響が現れている。一方、Fig.8.4のインピーダンス実部においても表層の共振現象の影響が若干見られるが、インピーダンス虚部の場合に比較するとそれほど大きな変化は現れていない。

側面インピーダンスの性状は、円筒剛基礎の回転動に関する側面インピーダンスを求めた田治見 [7] の結果に類似している。すなわち、実部は  $a_o = a_{o1}^*$  までやや放物線的に減少し、 $a_o > a_{o1}^*$  ではほぼ一定値を示す。虚部は  $a_o = a_{o1}^*$  まで極めて小さく、それ以降急激に変化した後はほぼ一定値を保ち、 $a_o = a_{o2}^*$  付近でわずかではあるが再び同じ様な変化を生じている。これは  $a_o > a_{o1}^*$  で表層における水平方向への波動逸散性が優勢になるためと解釈できる。底面インピーダンスの実部は、基盤層の剛性が高いために全インピーダンス実部の90%程度を占める支配的要素であり、しかも軟弱な表層の共振の影響をさほど受けない。一方、その虚部は基盤層の剛性が高いために側面のインピーダンス虚部に比べ全体に小さいが、 $a_o = a_{o1}^*$  と  $a_o = a_{o2}^*$  付近においては急激な立ち上がりで正値から負値への逆転現象を示す。このような底面インピーダンス虚部の性状は、半無限一様弾性地盤上の剛円板のねじれインピーダンスの性状と大きく異なっている。

弾性二層地盤におけるねじれインピーダンス関数の振動数に対する性状を剛性比が0.25より大きい場合について見ると次のようなことが言える。1)  $k_{TT}$  は、表層に比較して基盤層の剛性が高くなるほど大きくなる。2)  $c_{TT}$  は、 $a_o = 2.5$  付近では、剛性比によらずほぼ同じ値を示すが、 $a_o < 2.5$  では、表層に比較して基盤層の剛性が高くなるほど  $c_{TT}$  が低くなり、逆に  $a_o > 2.5$  では基盤層の剛性が高くなるほどやや高めとなる。

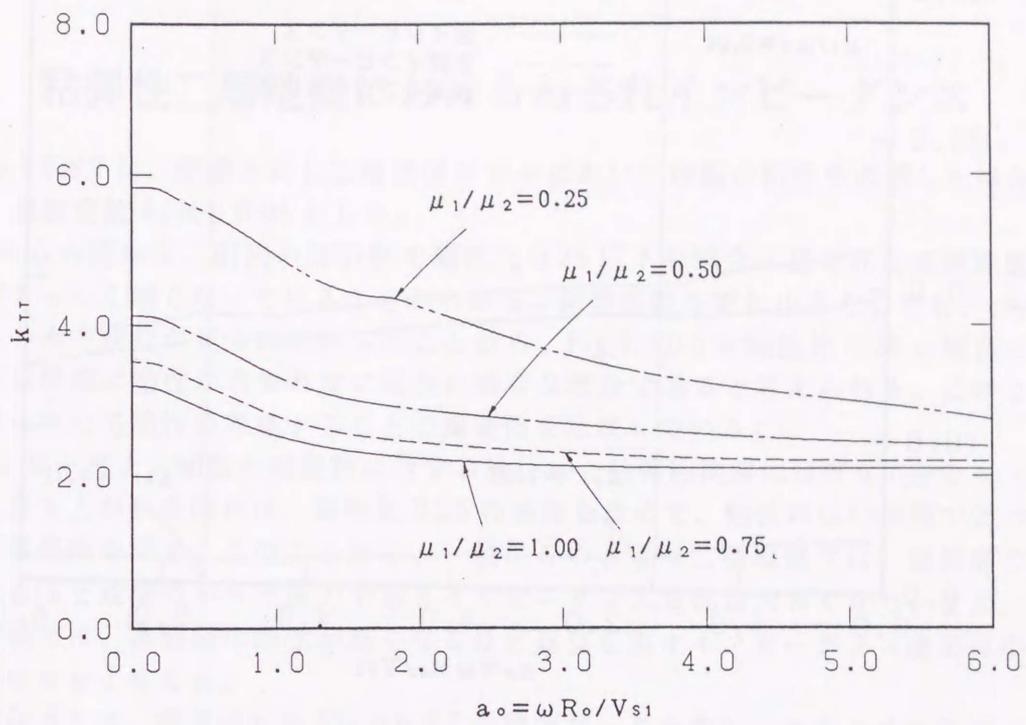


Figure 8.2: 円筒基礎のねじれインピーダンス実部 (弾性二層地盤)

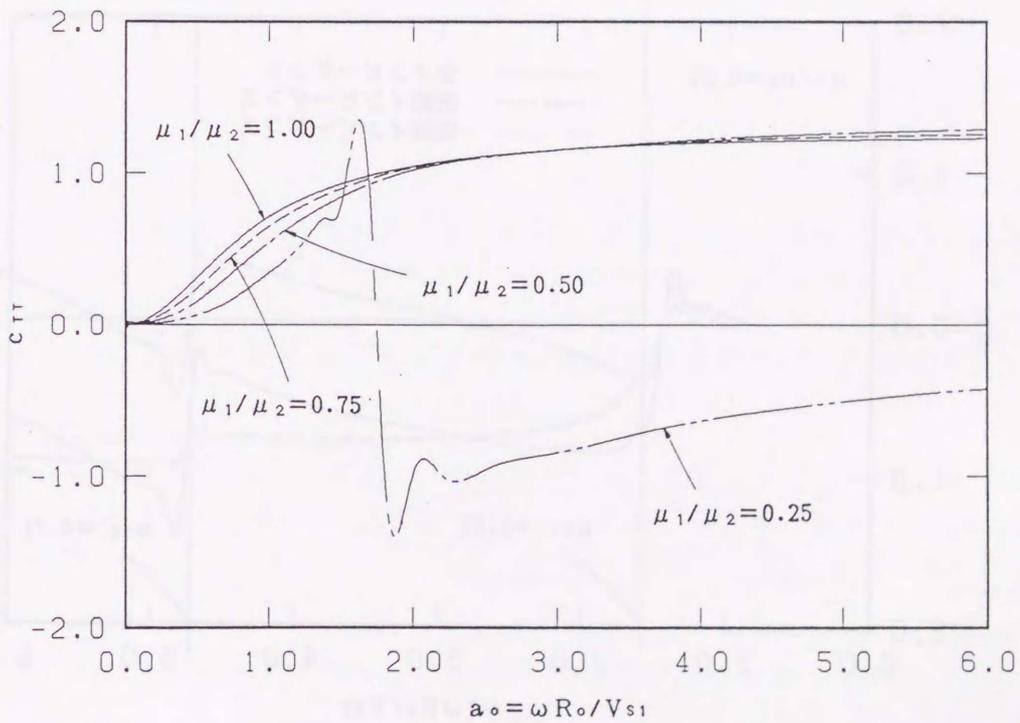


Figure 8.3: 円筒基礎のねじれインピーダンス虚部 (弾性二層地盤)

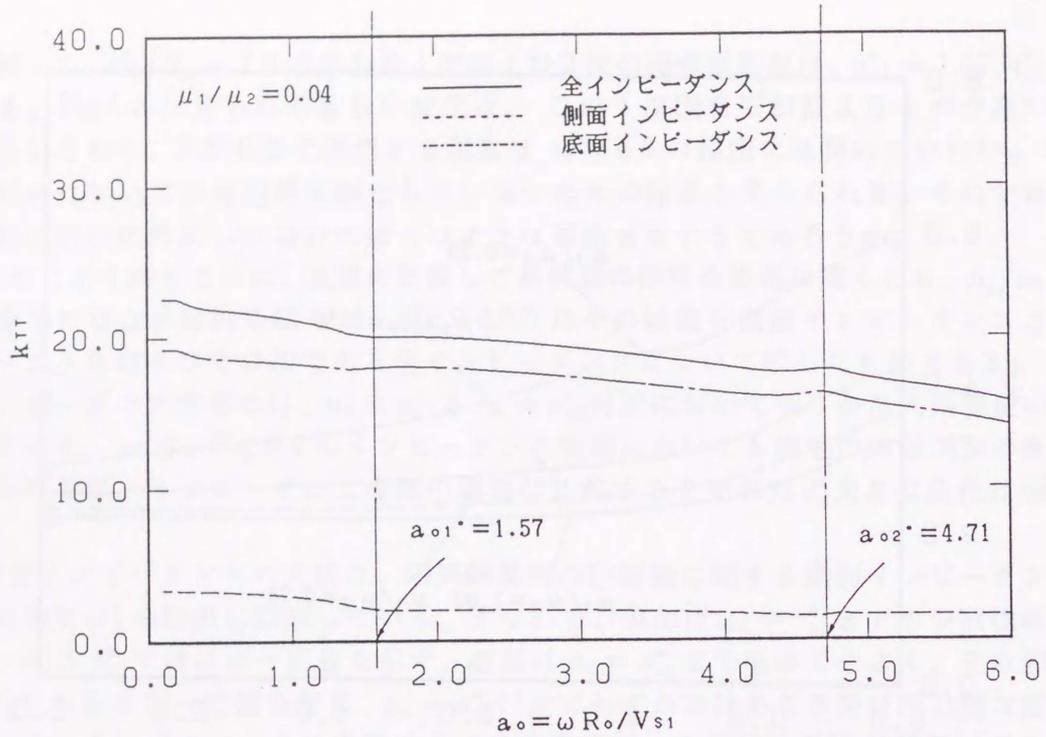


Figure 8.4: 円筒基礎のねじれインピーダンス実部 (軟弱表層+硬質基盤層)

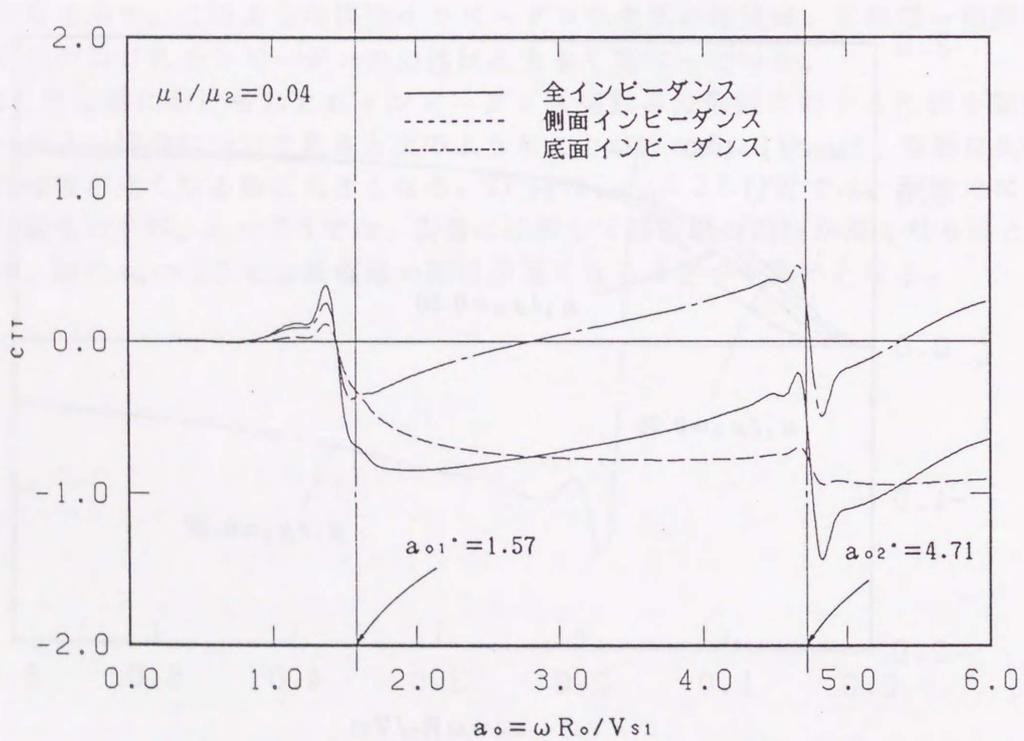


Figure 8.5: 円筒基礎のねじれインピーダンス虚部 (軟弱表層+硬質基盤層)

### 8.3 粘弾性二層地盤におけるねじれインピーダンス

Fig.8.6,8.7 は、前節と同じ二層地盤モデルにおいて地盤の粘性を考慮した場合の例である。減衰定数  $h_s$  は、0.01 とした。

これらの図から、前節の解析例で剛性比 0.25 以下の場合に見られた表層地盤の共振現象がまったく無くなっていることがわかる。減衰定数を更に小さくしても、 $c_{TT}$  の性状にはほとんど変化が見られなかったことから、Fig.8.2,8.3 の剛性比 0.25 の場合に見られた性状は地盤に粘性が含まれない場合に特有な現象であると考えられる。このことは多層地盤において粘性を考慮することの重要性を示唆している。

インピーダンス関数の振動数に対する性状は、粘弾性地盤に特有な  $c_{TT}$  の  $a_0 < 0.5$  における立ち上がりを除けば、剛性比 0.25 の場合も含めて、粘性のない地盤で述べたことと同様な傾向を示す。このことから、一般にこのような二層地盤では、基盤層の剛性が高くなるほど地盤のバネ抵抗力であるインピーダンス実部は大きくなり、また、逆に低振動数域では、基盤層の剛性が高くなるほど減衰を表すインピーダンス虚部は小さくなる傾向にあると言える。

Table 8.2 は、参考のため Fig.8.6,8.7 の数値データを表にしてまとめたものである。

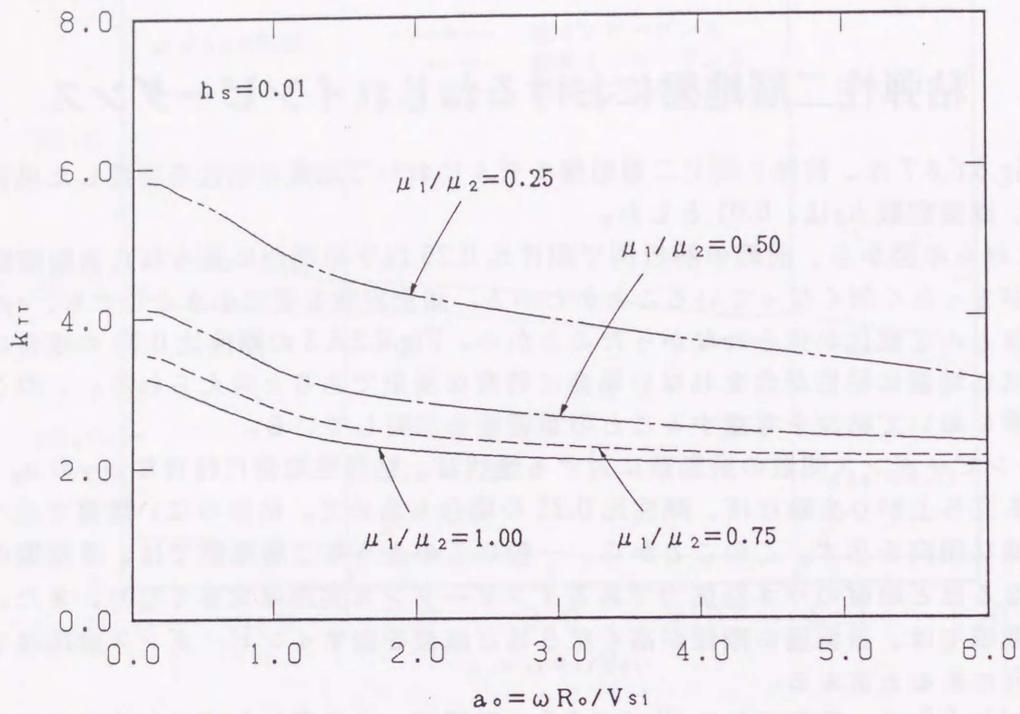


Figure 8.6: 円筒基礎のねじれインピーダンス実部 (粘弾性二層地盤)

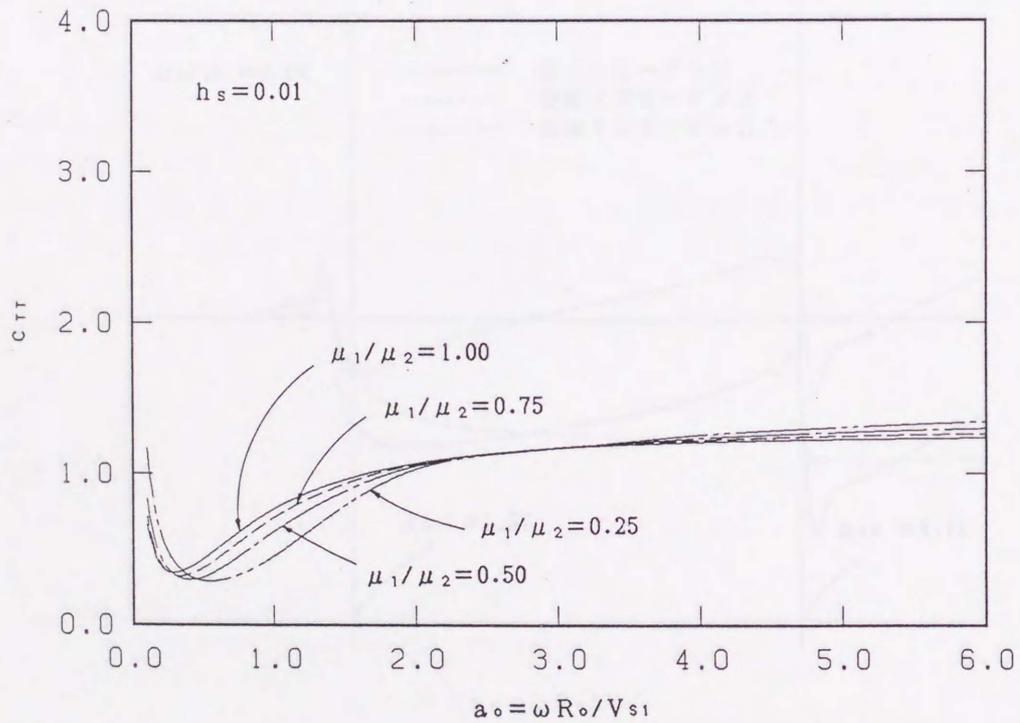


Figure 8.7: 円筒基礎のねじれインピーダンス虚部 (粘弾性二層地盤)

Table 8.2: 円筒基礎のねじれインピーダンス (粘弾性二層地盤)

a。	$\mu_1/\mu_2=1.00$		$\mu_1/\mu_2=0.75$		$\mu_1/\mu_2=0.50$		$\mu_1/\mu_2=0.25$	
	$k_{TT}$	$c_{TT}$	$k_{TT}$	$c_{TT}$	$k_{TT}$	$c_{TT}$	$k_{TT}$	$c_{TT}$
0.1	3.20	0.66	3.52	0.72	4.12	0.83	5.83	1.17
0.2	3.15	0.39	3.48	0.40	4.09	0.44	5.81	0.59
0.3	3.07	0.35	3.40	0.33	4.01	0.33	5.70	0.41
0.5	2.91	0.44	3.22	0.38	3.83	0.32	5.53	0.29
1.0	2.55	0.77	2.81	0.71	3.35	0.62	4.95	0.45
2.0	2.23	1.07	2.44	1.06	2.88	1.05	4.29	1.03
3.0	2.11	1.17	2.28	1.17	2.67	1.17	3.96	1.17
4.0	2.06	1.21	2.19	1.22	2.51	1.24	3.67	1.26
5.0	2.04	1.23	2.14	1.25	2.40	1.28	3.42	1.31
6.0	2.02	1.24	2.13	1.27	2.32	1.30	3.14	1.35

## 8.4 まとめ

本章では、多層地盤の基本的な解析例として、弾性および粘弾性二層地盤における円筒剛基礎のねじれインピーダンス解析を行った。解析には4種類の地盤剛性比を設定し、円筒剛基礎の静的インピーダンスの解析結果と厳密解を比較することにより解析精度を確認した後、振動数に対するねじれインピーダンス特性を調査した。その結果次のようなこと明らかになった。

1. 表層地盤の共振現象は、地盤に材料減衰がなく、表層に比較して基盤層の剛性が相当に高い場合にのみ現れる。地盤に材料減衰を含む場合は、表層の共振の影響は見られない。
2. 基盤層を剛に近いものとする、基礎側面のねじれインピーダンスの性状は、回転インピーダンスに関する田治見 [7] の結果と類似する。
3. ねじれインピーダンス関数の振動数に対する性状は、基盤層の剛性が高くなるほど地盤のバネ抵抗力であるインピーダンス実部は大きくなり、逆に低振動数域では、基盤層の剛性が高くなるほど地下逸散減衰を表すインピーダンス虚部は小さくなる。

## Chapter 9

# 埋込み基礎の動的特性に及ぼすはく離と滑動の影響

本章では、一様地盤浮型基礎、表層浮型基礎、および基盤着底型基礎を対象とした水平・回転動連成系の動的相互作用解析を行い、埋込み円筒剛基礎の動的特性に及ぼす側壁のはく離と滑動の効果を定性的に検討する。

### 9.1 解析方法と解析モデルの設定

埋込み基礎の側壁におけるはく離と滑動は、本来非線形現象であるが、これを線形解析で得られる側壁インピーダンスおよび地震強制力に側壁の寄与率を表すパラメータを乗ずることによって近似的に評価する。

まず、(2.60) 式のインピーダンスマトリクス  $[K]$  を、底板インピーダンスマトリクス  $[K^B]$  と、側壁の法線方向表面力によるインピーダンスマトリクス  $[K^{SN}]$ 、および側壁の接線方向表面力によるインピーダンスマトリクス  $[K^{ST}]$  に分離する。

$$[K] = [K^B] + [K^{SN}] + [K^{ST}] \quad (9.1)$$

次に、側壁インピーダンスの寄与を表すパラメータ  $\zeta_N, \zeta_T$  を、それぞれ  $[K^{SN}], [K^{ST}]$  に乗じ、インピーダンスマトリクス  $[K]$  を次式のように評価する。

$$[K] = [K^B] + \zeta_N [K^{SN}] + \zeta_T [K^{ST}] \quad (9.2)$$

同様に、(2.78) 式によって得られる地震強制力ベクトルも次式によって評価する。

$$\{F\} = \{F^B\} + \zeta_N \{F^{SN}\} + \zeta_T \{F^{ST}\} \quad (9.3)$$

本章の解析では、4.3 節で示した内部共振解の除去法と 5.3 節で示した応力マトリクスの修正法を用いる。解析手順は、8.1 節に示した 1～3 までは同じであるため、それ以降について示しておく。

1～3      8.1 節参照

4. (5.27) 式による  $[H]$  マトリクスの修正

5. (2.60) 式のインピーダンスマトリクス  $[K]$  を、 $[K^B], [K^{SN}], [K^{ST}]$  に分離して算定
6. (2.78) 式の地震強制力ベクトル  $\{F\}$  を、 $\{F^B\}, \{F^{SN}\}, \{F^{ST}\}$  に分離して算定
7. (9.2),(9.3) 式による  $[K], \{F\}$  の算定
8. (2.18) 式による基礎入力動  $\{\Lambda_o\}$  の算定
9. (2.28) 式または (2.29) 式による上部構造物の剛体変位  $\{\Lambda\}$  の算定
10. (2.23) 式による上部構造物の弾性変位  $\{d\}$  の算定
11. (2.21) 式による上部構造物の絶対変位  $\{d_b\}$  の算定

Fig.9.1 は、本章で用いる解析モデルを示す。図の左は地盤モデルを示し、右は基礎構造物モデルを示している。図に示すように、基礎は、半径  $R_o$ 、埋込み深さ  $D$  の円筒剛基礎とし、基礎半径と埋込み深さの比  $D/R_o$  は 1 とする。以下図中の記号について説明しておく。 $H_1$ ; 表層厚、 $V_S$ ;  $S$ 波速度、 $\rho$ ; 地盤密度、 $\nu$ ; ポアソン比、(以上の記号に付加される下添字は、1 は表層、2 は基盤層のものであることを示す)、 $h_S, h_P$ ;  $S$ 波と  $P$ 波に関する減衰定数、 $\rho'$ ; 基礎の密度、 $m$ ; 基礎の質量、 $H_b$ ; 上部構造物の高さ、 $m_b$ ; 上部構造物の質量、 $h_b$ ; 上部構造物の減衰定数。

解析は、 $H_1/D = \infty$  の一様地盤浮型基礎、 $H_1/D = 2.0$  の表層浮型基礎、 $H_1/D = 1.0$  の基盤着底型基礎を対象として行う。(9.2),(9.3) 式の側壁の寄与を表すパラメータは、 $(\zeta_N = \zeta_T = 1.0)$ ,  $(\zeta_N = 1.0, \zeta_T = 0.0)$ ,  $(\zeta_N = \zeta_T = 0.0)$  の 3 種に設定する。ここに、 $\zeta_N = \zeta_T = 1.0$  は基礎側壁と地盤が完全に密着している状態を示し、 $\zeta_N = 1.0, \zeta_T = 0.0$  は側壁全体が滑っている状態を、 $\zeta_N = \zeta_T = 0.0$  は側壁が地盤から完全にはく離している状態を想定している。

離散化モデルは 5.3 節の Fig.5.12 に示されるものと同一である。インピーダンスおよび基礎入力動算出の際の基準点は基礎上端の中央点とする。解析値は、無次元化振動数  $a_o = \omega R_o/V_S$  に関して 6.0 まで求める。水平動、回転動、および水平・回転連成の各インピーダンスは、それぞれ、

$$\begin{aligned}
 K_{HH}(a_o) &= 2\pi\mu R_o \{k_{HH}(a_o) + ia_o c_{HH}(a_o)\} \\
 K_{MM}(a_o) &= 2\pi\mu R_o^3 \{k_{MM}(a_o) + ia_o c_{MM}(a_o)\} \\
 K_{MH}(a_o) &= 2\pi\mu R_o^2 \{k_{MH}(a_o) + ia_o c_{MH}(a_o)\}
 \end{aligned} \tag{9.4}$$

と表した場合の無次元化量  $k_{ij}, c_{ij}$  を示す。水平、回転の各基礎入力動は、それぞれ  $\Delta_H^o, \Phi_M^o$  と表す。

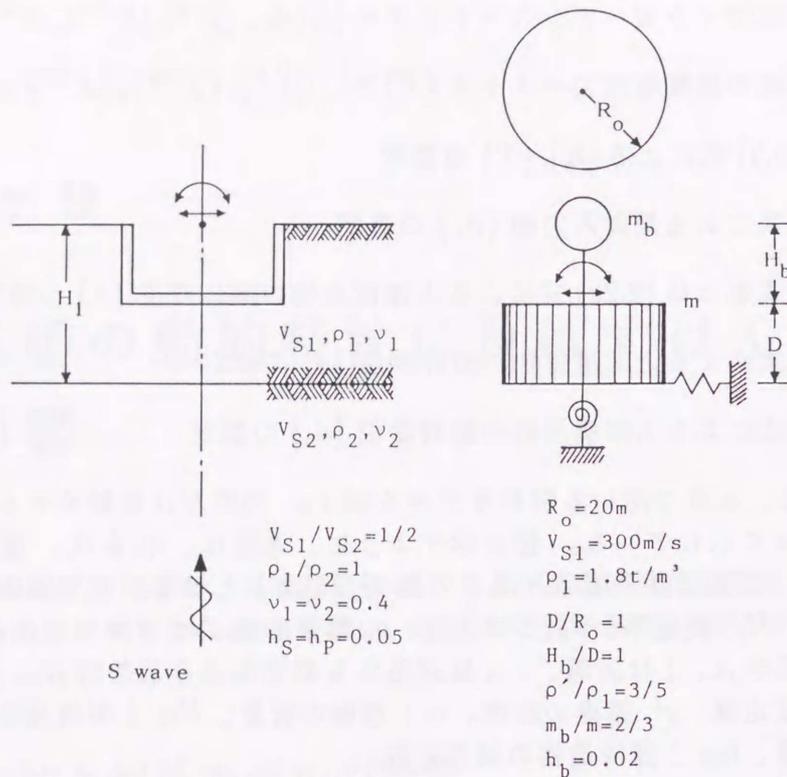


Figure 9.1: 二層地盤における解析モデル

## 9.2 インピーダンスと基礎入力動に及ぼすはく離と滑動の影響

本節では、Fig.9.1の左に示す粘弾性二層地盤モデルにおける無質量の円筒剛基礎の水平・回転動連成系のインピーダンスと、鉛直下方からのS波入射に対する水平、回転基礎入力動を解析し、インピーダンスと基礎入力動に及ぼす側壁のはく離と滑動の影響を調査する。解析に必要な表層と基盤層の地盤定数はFig.9.1に示すとおりである。

Fig.9.2～9.9は、水平、回転および水平・回転連成の各インピーダンスを示す。なお、 $\zeta_N = \zeta_T = 1.0$ 以外では、 $k_{MH}$ と $k_{HM}$ は等しくならないので、ここではその両方の図を示している。図からわかるように、インピーダンスの値は、実部、虚部共に基礎着底型基礎の場合が表層および一様地盤浮型基礎の場合に比較して高い。表層浮型基礎の場合は、表層地盤における重複反射の影響を受けて一様地盤浮型基礎の値の近傍を波うつ。また、表層浮型基礎の $a_0 < 2.0$ 以下のインピーダンス虚部は一様地盤浮型基礎の値に比較してかなり低い値となり、この振動数域ではエネルギーの逸散性が小さいことがわかる。しかし、 $a_0 > 2.0$ では、一様地盤浮型基礎と同様な値となる。この傾向は、完全密着の場合が最も大きく、次に滑動、はく離の順に小さくなる。したがって、これは、7.2節で見たように、 $a_0 > 2.0$ では基礎側壁における水平方向の波動逸散性が優勢になるためと解釈できる。

側壁の寄与率を表すパラメータの変化について見ると、インピーダンス虚部は、完全密着、滑動、はく離の順に比例的に減少する。これは、減衰性の面で基礎側壁は大きな

役割をもつことを示している。水平インピーダンス実部は、はく離の場合は全振動数域にわたってほぼ一定値を示すのに対し、完全密着と滑動の場合は、振動数が高くなるにしたがって減少する。これは、側壁の法線方向のインピーダンスが振動数の増加にともなって減少するためである。したがって、水平方向の運動に対しては、基礎側壁は低振動数域では水平インピーダンス実部を高める役割をするが、高振動数域では逆に水平インピーダンス実部を低下させることになる。回転インピーダンス実部は、完全密着の場合が、はく離、滑動の場合に比較して高い。これは、側壁の接線方向のインピーダンスが回転を抑える役割を果していることを示している。

Fig.9.10,9.11 は、水平、回転基礎入力動の絶対値を示す。図中無次元化に用いた  $u_0$  は半無限層における入射  $S$  波の振幅の 2 倍である。まず、Fig.9.10 の水平基礎入力動の絶対値について見る。完全密着では、基盤着底型基礎の場合は、一様地盤浮型基礎に比較して全振動数域で高い値となり、表層浮型基礎の場合は  $a_0 = 0.6$  付近にピークを持ち、その近傍では非常に高い値となるが、 $a_0 > 1.5$  では一様地盤浮型基礎に近い値となる。表層浮型基礎の  $a_0 = 0.6$  付近の盛り上がりは、表層地盤の第 1 次共振の影響と考えられる。

側壁の寄与率を表すパラメータの変化について見ると、はく離する場合は、表層および一様地盤浮型基礎では  $a_0 = 1.0$  付近、基盤着底型基礎では  $a_0 = 1.5$  付近までは完全密着に比較してかなり低い値となる。これに対して、 $a_0$  がそれ以上の振動数域では、はく離の場合が完全密着に比較して非常に高い値となる。滑動する場合は、表層および一様地盤浮型基礎では、 $a_0$  がほぼ  $1.0 \sim 3.0$  の間で、基盤着底型基礎では、 $a_0 > 1.5$  で完全密着の場合よりも高い値となる。しかし、その値ははく離の場合に比べると小さい。以上から、表層および一様地盤浮型基礎では  $a_0 = 1.0$  付近、基盤着底型基礎では  $a_0 = 1.5$  付近までは、側壁のはく離、滑動によって水平基礎入力動は小さくなり、 $a_0$  がそれ以上では、一般に側壁のはく離や滑動によって水平基礎入力動は大きくなると言える。

Fig.9.11 の回転基礎入力動の絶対値について見ると、完全密着の場合は、全体的に成層構造による違いはあまり見られないが、表層浮型基礎の場合は、 $a_0 = 2.5$  付近に突出が見られ、その付近では一様地盤浮型基礎の値よりもかなり高い値となる。側壁がはく離する場合は、おおむね、一様地盤浮型基礎では、 $a_0$  が  $1.0 \sim 6.0$  で、基盤着底型基礎では、 $0.0 \sim 4.5$  で、表層浮型基礎では、 $0.0 \sim 3.0$  と  $4.5$  以降で完全密着の場合よりも低い値となる。したがって、低振動数域から中振動数域にかけては、側壁のはく離によって回転基礎入力動がかなり低減されることがわかる。これに対して、側壁が滑動する場合は、表層および一様地盤浮型基礎の場合において全体的に非常に高い値となる。これは、基礎側壁の接線方向インピーダンスが存在しない状態で、法線方向地震強制力が作用するため、回転しやすくなったものと考えられる。

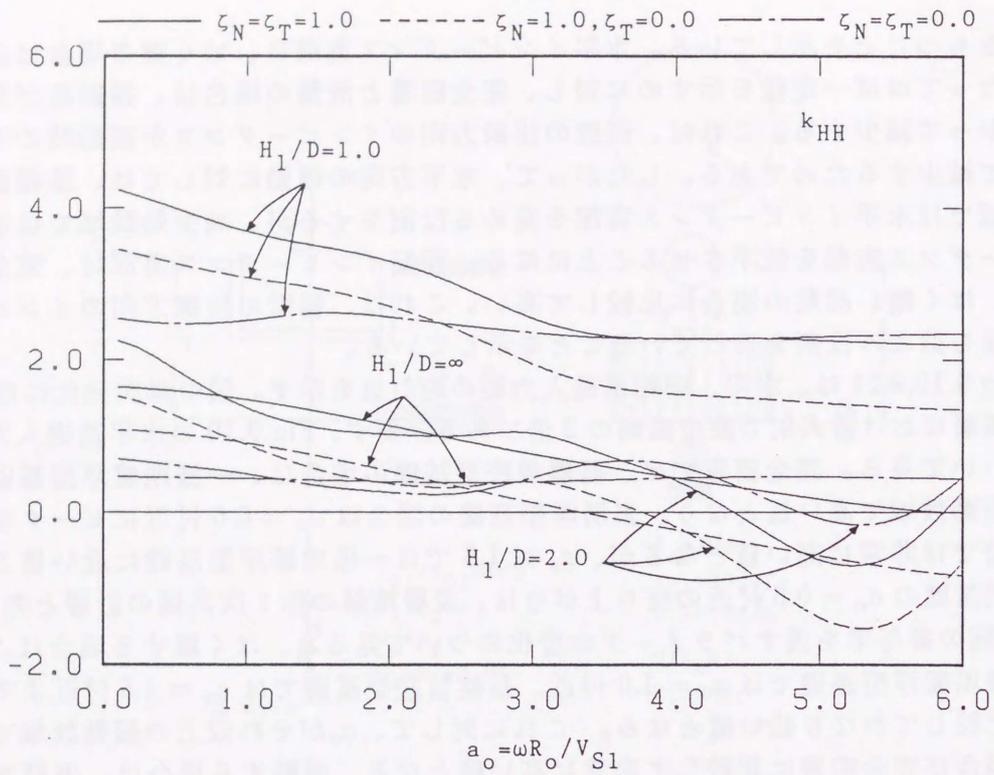


Figure 9.2: 水平インピーダンス実部 ( $k_{HH}$ )

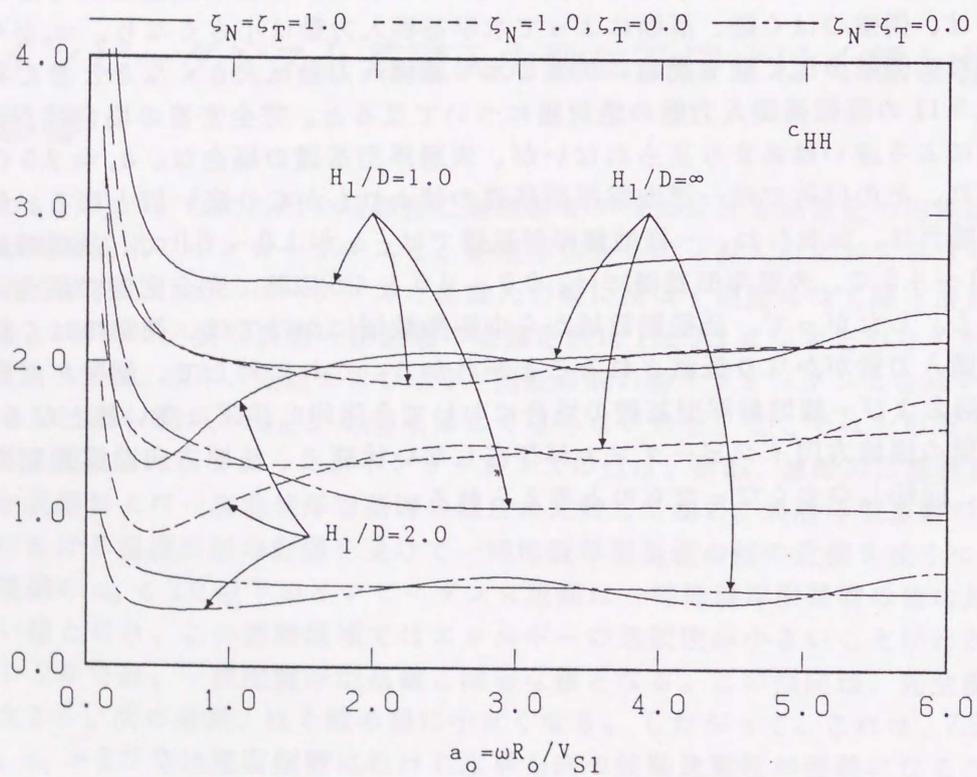


Figure 9.3: 水平インピーダンス虚部 ( $c_{HH}$ )

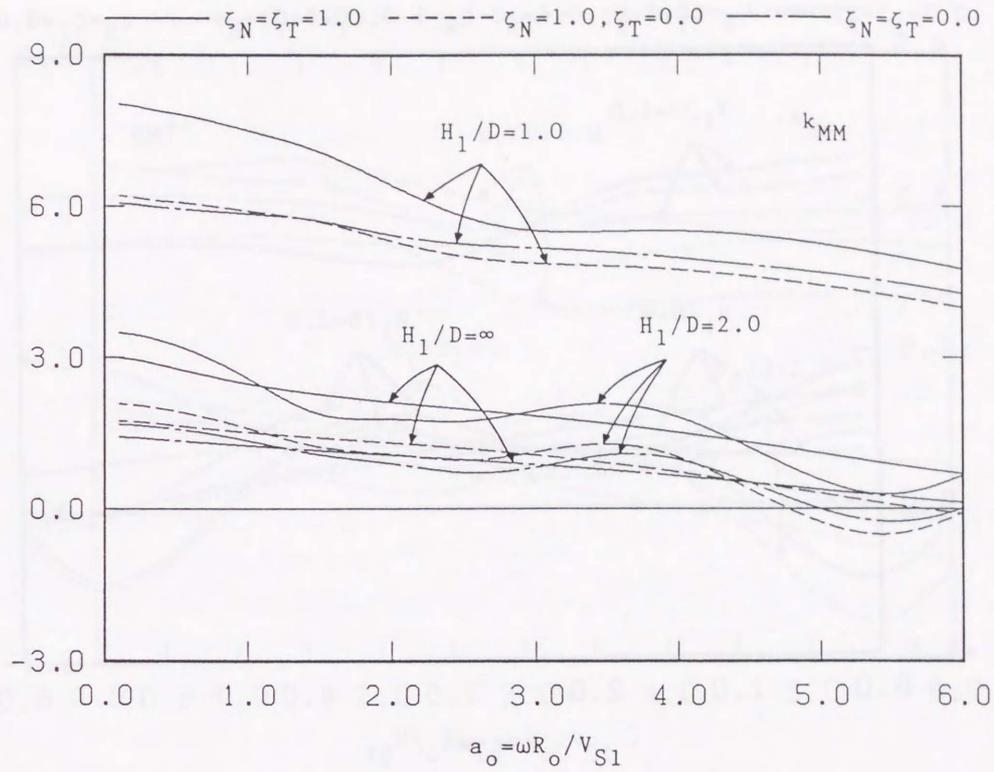


Figure 9.4: 回転インピーダンス実部 ( $k_{MM}$ )

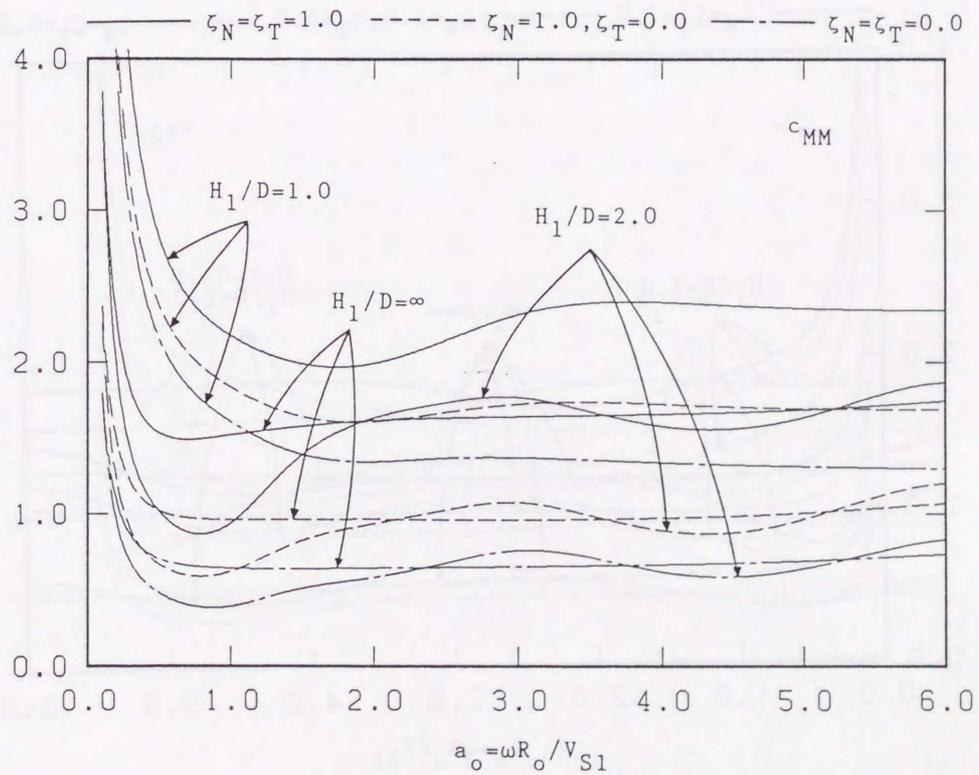


Figure 9.5: 回転インピーダンス虚部 ( $c_{MM}$ )

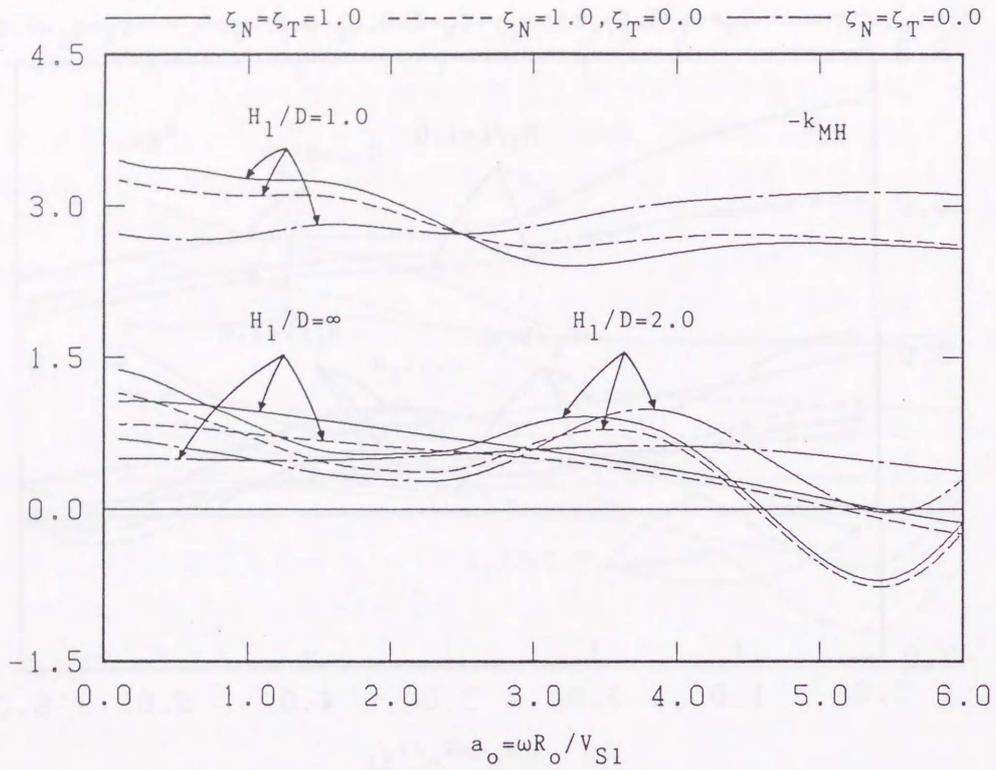


Figure 9.6: 水平-回転連成インピーダンス実部 ( $k_{MH}$ )

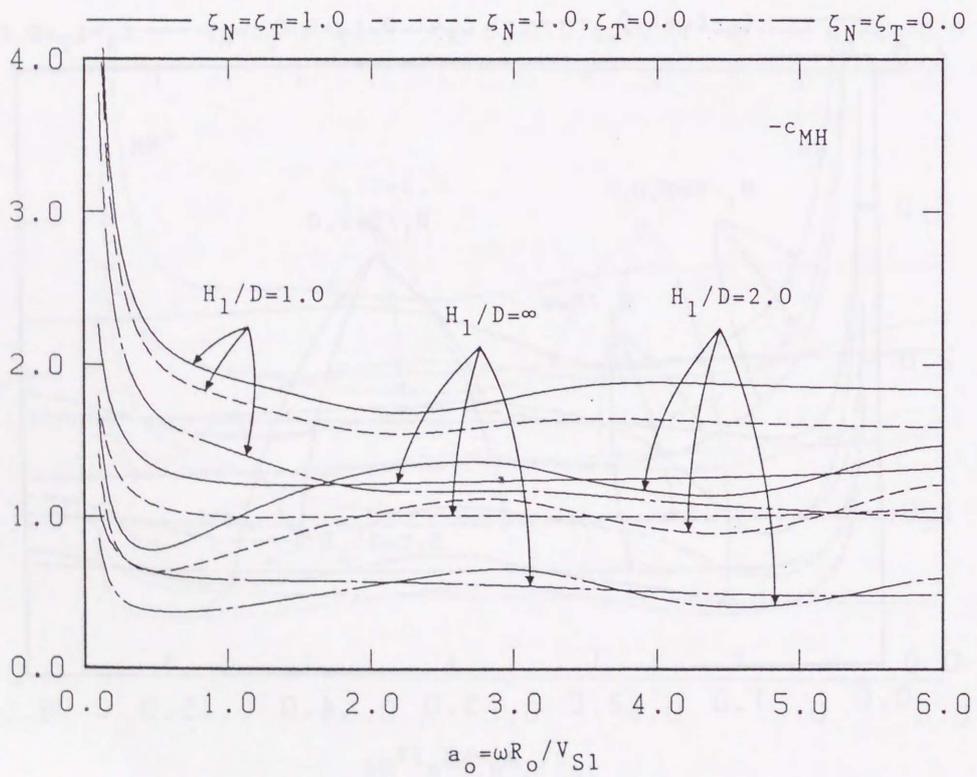


Figure 9.7: 水平-回転連成インピーダンス虚部 ( $c_{MH}$ )

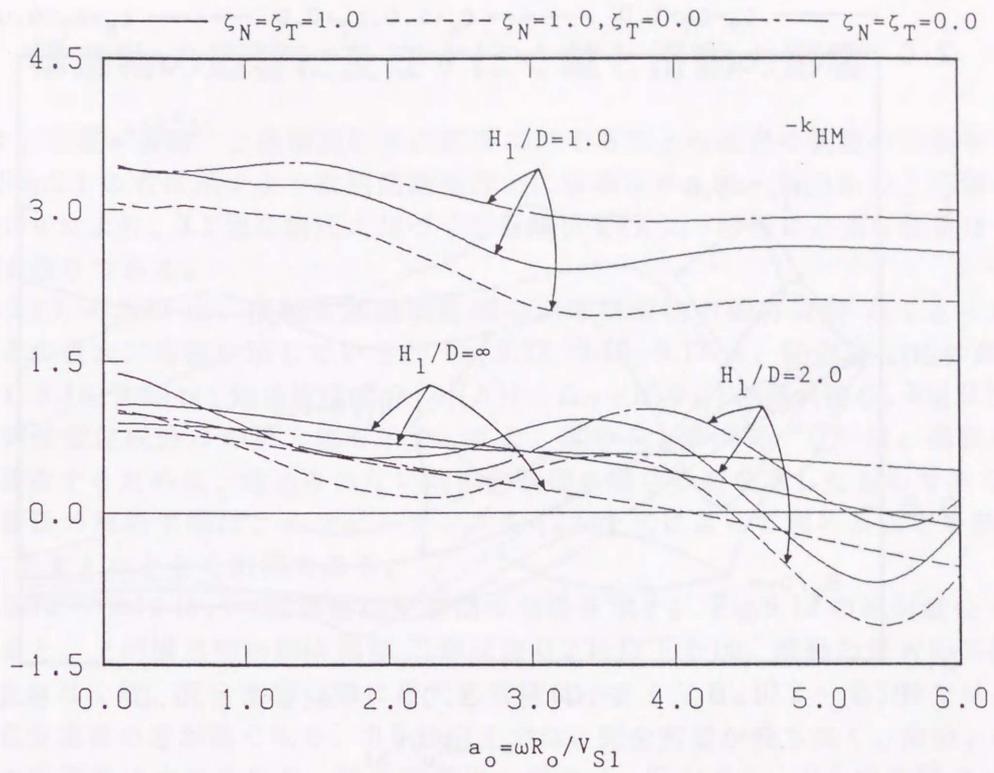


Figure 9.8: 水平-回転連成インピーダンス実部 ( $k_{HM}$ )

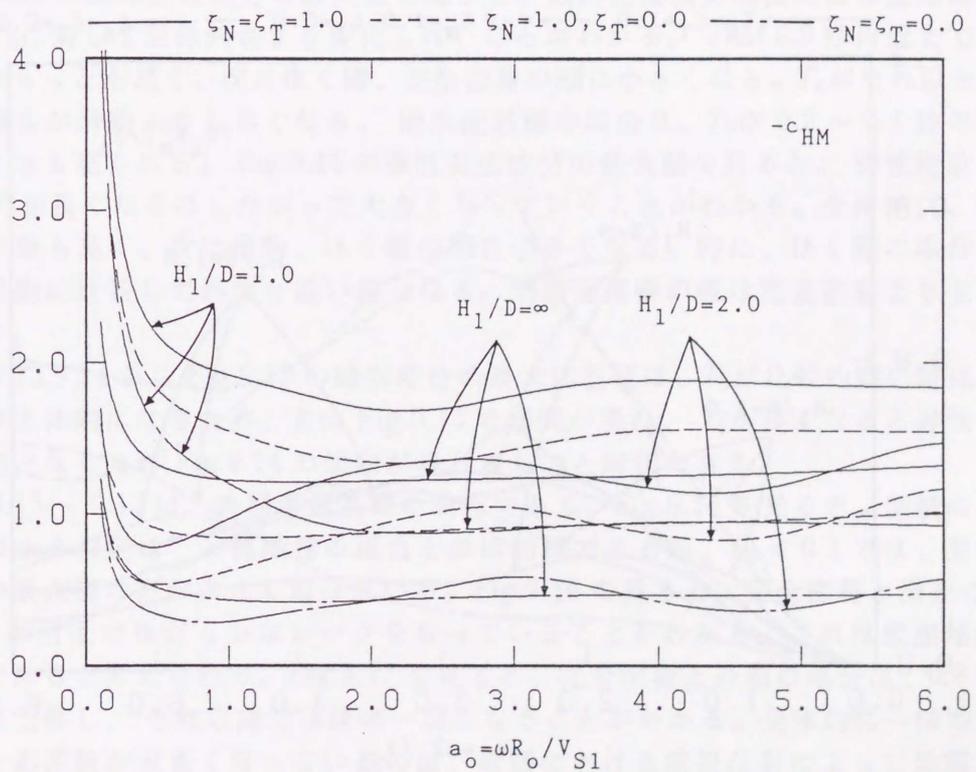


Figure 9.9: 水平-回転連成インピーダンス虚部 ( $c_{HM}$ )

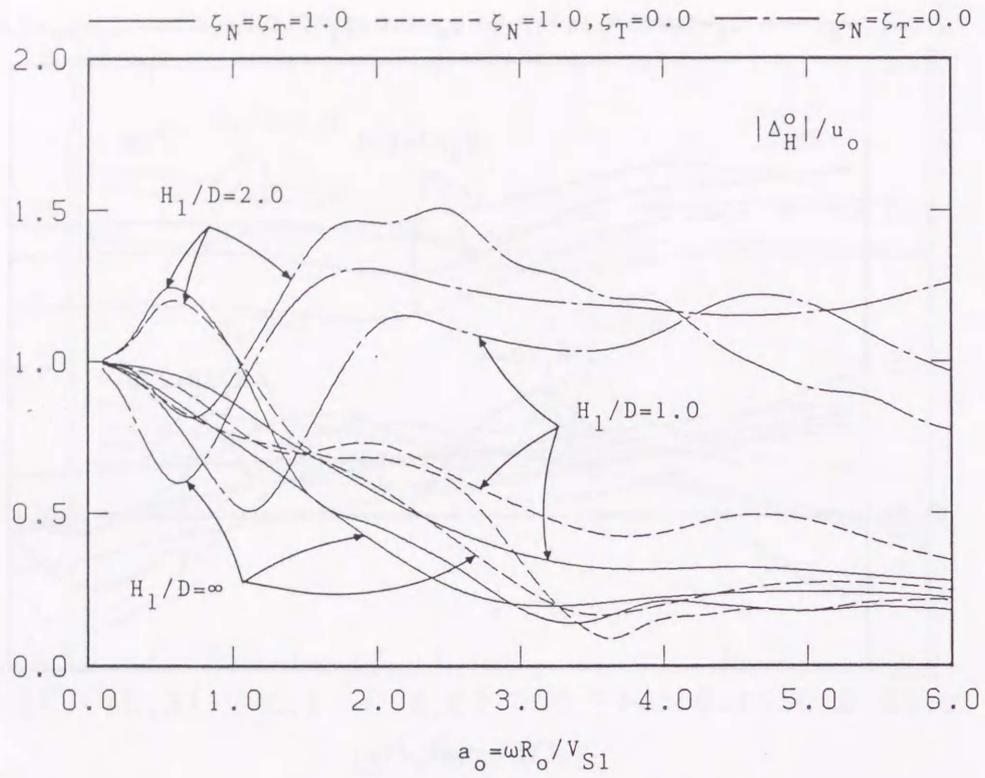


Figure 9.10: 水平基礎入力動の絶対値

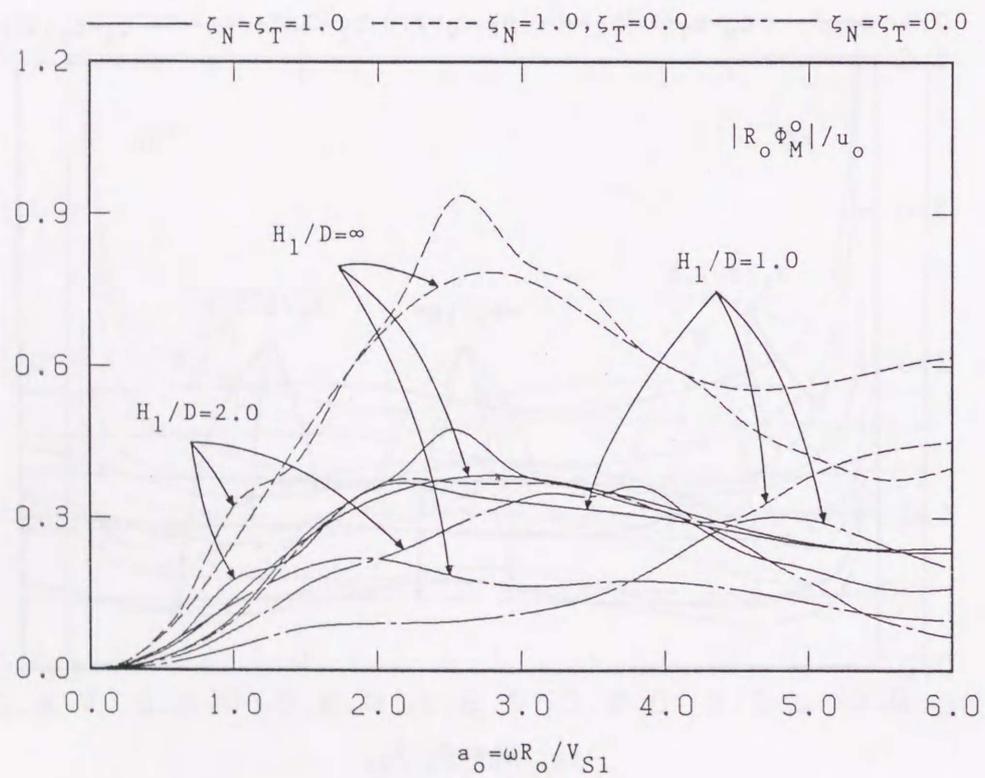


Figure 9.11: 回転基礎入力動の絶対値

### 9.3 構造物の応答に及ぼすはく離と滑動の影響

次に、地盤—基礎—上部構造物系の応答に対する埋込み基礎の側壁の効果を検討するため、Fig.9.1の右に示すような円筒剛基礎上に単純なせん断一質点系の上部構造をもつ解析モデルにより、2.1節の諸式に基づく応答解析を行う。解析に必要な諸量は、Fig.9.1中に示す通りである。

Fig.9.12～9.20は、横軸に基礎固定時の上部構造物の固有周期 $T_b$ をとった場合の上部質点の最大応答値を示している。Fig.9.12, 9.15, 9.17は、絶対変位 $d_b$ の最大値を、Fig.9.13, 9.16, 9.19は、剛体変位成分 $[A]\{\Lambda\} (= \Delta_H + H_b\Phi_M)$ の最大値を、Fig.9.14, 9.17, 9.20は弾性変位成分 $d$ の最大値を示す。また、図のシンボルの“○”は、基礎の埋込み効果を調査するために、埋込みのない地表面基礎の場合の値を示したものである。なお、地表面基礎の解析手順は、インピーダンスを(2.65)式によって求めることを除いては、9.1節に示すものと全く同様である。

Fig.9.12～9.14は、一様地盤浮型基礎の場合を示す。Fig.9.12の絶対変位 $d_b$ の最大値を見ると、上部構造物の固有周期 $T_b$ がほぼ0.2秒以下では、滑動の最大応答値が最も高く、次にはく離、完全密着の順に最大応答値は小さくなる。0.2～0.3秒では、はく離よりも完全密着の方が高くなり、0.3秒以上では、完全密着が最も高く、滑動、はく離の順に最大応答値は小さくなる。地表面基礎の場合は、 $T_b$ が0.2～0.7秒の間では、側壁のパラメータいかんにかかわらず埋込み基礎よりも高くなり、 $T_b < 0.2$ では滑動の場合と、 $T_b > 0.7$ 以上では完全密着の場合とほぼ同等な値を示す。

Fig.9.13の剛体変位成分の最大値を見ると、剛体変位成分の最大値は上部構造物の固有周期 $T_b$ に対して全体的あまり変化しないことがわかる。 $T_b$ が0.9秒付近までは、滑動の場合がもっとも高く、次にはく離、完全密着の順に小さくなる。 $T_b$ がそれ以上では、はく離の場合が滑動よりも高くなる。地表面基礎の場合は、 $T_b$ が0.2～0.7秒の間で埋込み基礎よりも高くなる。Fig.9.14の弾性変位成分の最大値を見ると、弾性変位成分の最大値は $T_b$ が長くなるにしたがって大きくなっていくことがわかる。全体的に、完全密着の場合が最も高く、次に滑動、はく離の順に小さくなる。特に、はく離の場合は、完全密着、滑動に比較してかなり低い値となる。地表面基礎の値は完全密着よりも若干低い値を示す。

Fig.9.13,9.14からFig.9.12の絶対変位の最大応答値は、 $T_b$ が比較的短い時は、剛体変位成分が主体的になるため、主にFig.9.13の傾向が現れ、 $T_b$ が長くなると弾性変位成分が主体的となるためFig.9.14の傾向が現れるものと解釈できる。

Fig.9.15～9.17は、表層浮型基礎の場合である。Fig.9.15を見ると、側壁のはく離と滑動に対する傾向は、一様地盤の場合とほぼ同様であるが、 $T_b < 0.1$ では、滑動よりもはく離の最大値の方が大きくなっている。Fig.9.16を見ると、完全密着と滑動の場合は、 $T_b$ が0.5秒付近になだらかなピークをもっていることがわかる。これは表層地盤の共振の影響であると考えられる。Fig.9.17を見ると、完全密着と滑動の場合は、0.8秒付近まで急激に上昇し、それ以降ではほぼ一定となることがわかる。全体的に一様地盤に比較して最大応答値が大きくなっているのは、表層における重複反射によって地震力が増幅されたためと考えられる。

Fig.9.18～9.20は、基盤着底型基礎の場合である。Fig.9.18から、この場合は、全固有周期にわたって、はく離の最大応答値が最も小さくなることがわかる。滑動の最大応

答値は、 $T_b$ が0.2秒以下では、完全密着よりも高くなるが、 $T_b$ がそれ以上では、完全密着よりも低くなる。 $T_b$ が比較的長い時の、完全密着および滑動とはく離の差は他の地盤構成に比較するとかなり小さいことがわかる。Fig.9.19 から、地表面基礎の場合の剛体変位成分は、 $T_b$ が0.8秒以下で埋込み基礎に比較して非常に高い値を示すことがわかる。

成層構造の違いについて比較すると、側壁の条件の等しいもので比較すれば一様地盤浮型基礎の最大応答値が最も低い値となる。側壁の条件も考慮すると、上部構造物の固有周期が0.2秒以下の時は、一様地盤浮型基礎の完全密着の場合の最大応答値が最も低く、表層浮型基礎のはく離または滑動の場合が最も高くなる。0.2秒以上では一様地盤浮型基礎のはく離の場合が最も低く、0.2～0.6秒付近までは、基盤着底型基礎の完全密着の場合が、それ以上では表層浮型基礎の完全密着の場合が最も高くなる。

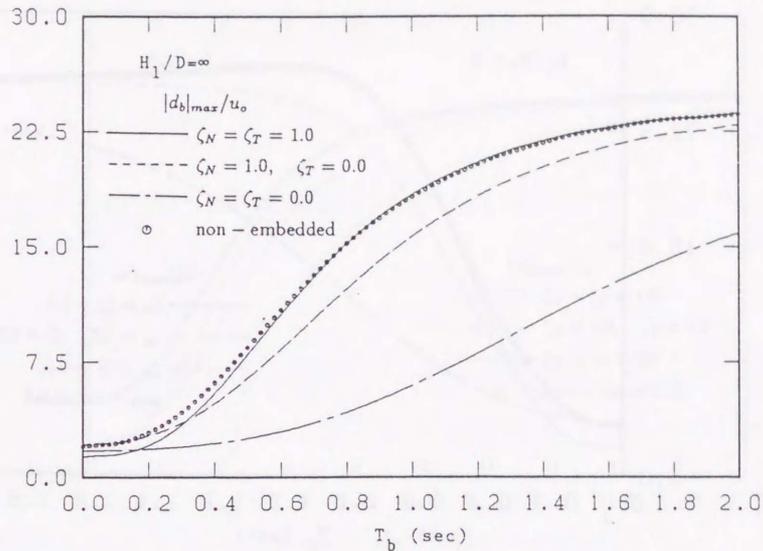


Figure 9.12: 絶対変位の最大値に及ぼす基礎側壁の効果（一様地盤浮型基礎）

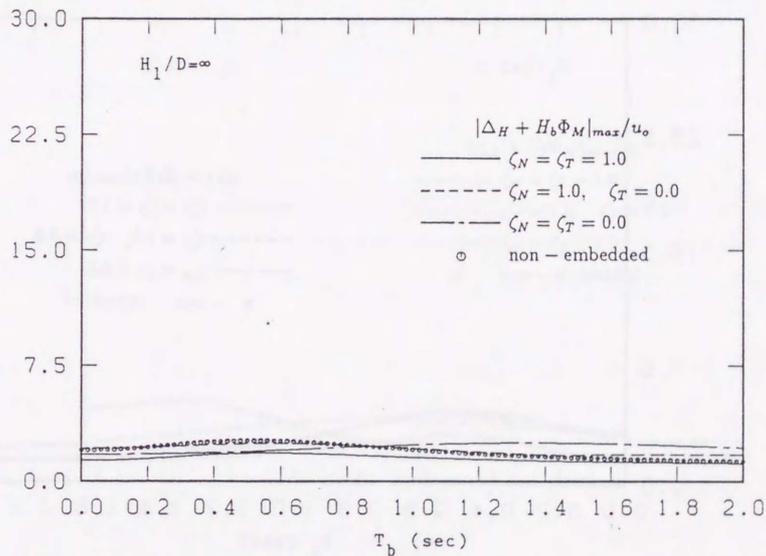


Figure 9.13: 剛体変位の最大値に及ぼす基礎側壁の効果（一様地盤浮型基礎）

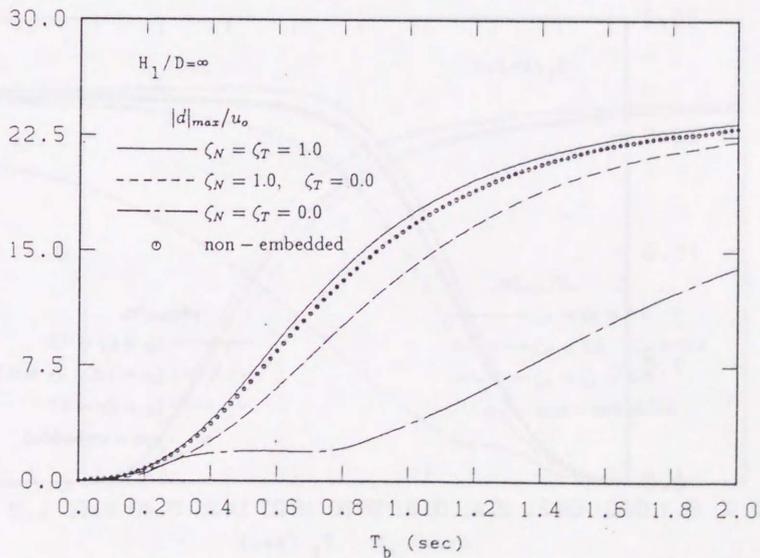


Figure 9.14: 弾性変位の最大値に及ぼす基礎側壁の効果（一様地盤浮型基礎）

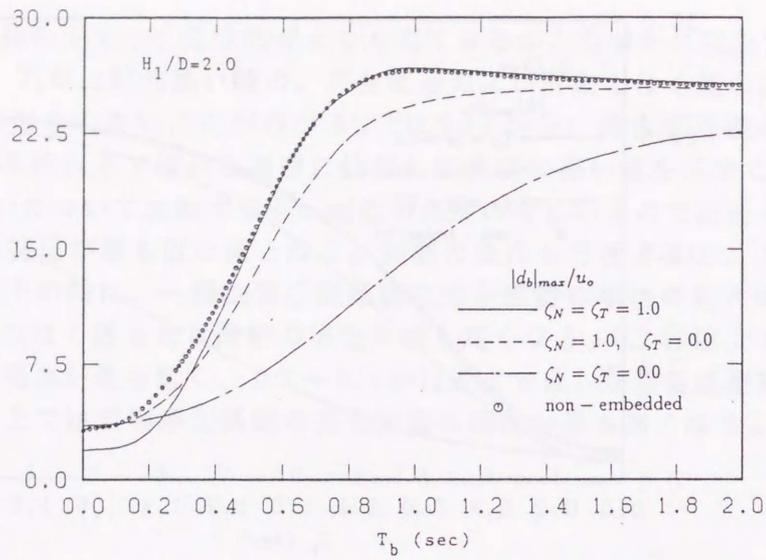


Figure 9.15: 絶対変位の最大値に及ぼす基礎側壁の効果 (表層浮型基礎)

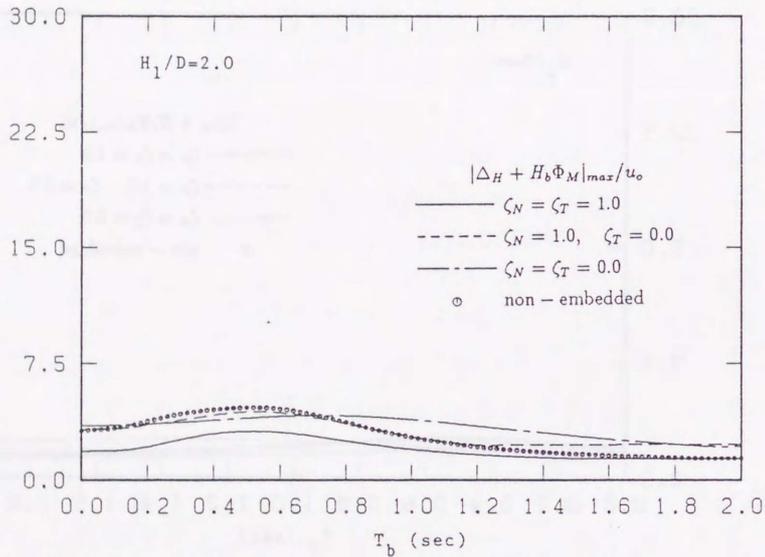


Figure 9.16: 剛体変位の最大値に及ぼす基礎側壁の効果 (表層浮型基礎)

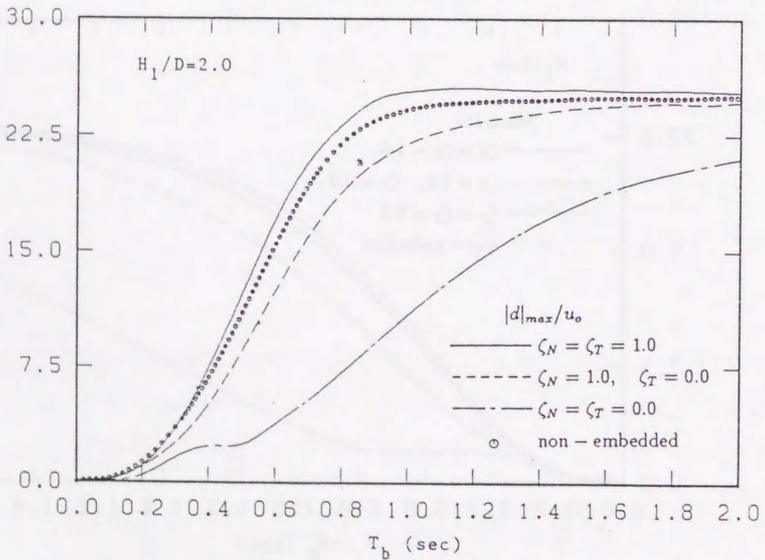


Figure 9.17: 弾性変位の最大値に及ぼす基礎側壁の効果 (表層浮型基礎)

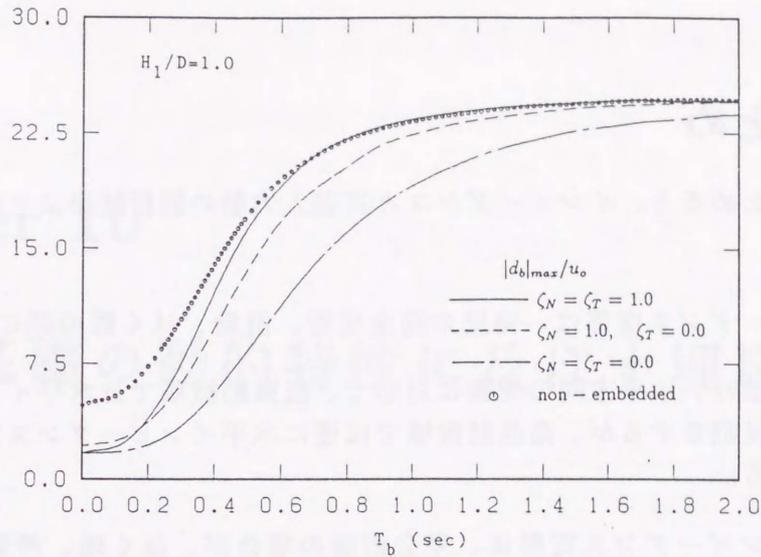


Figure 9.18: 絶対変位の最大値に及ぼす基礎側壁の効果 (基盤着底型基礎)

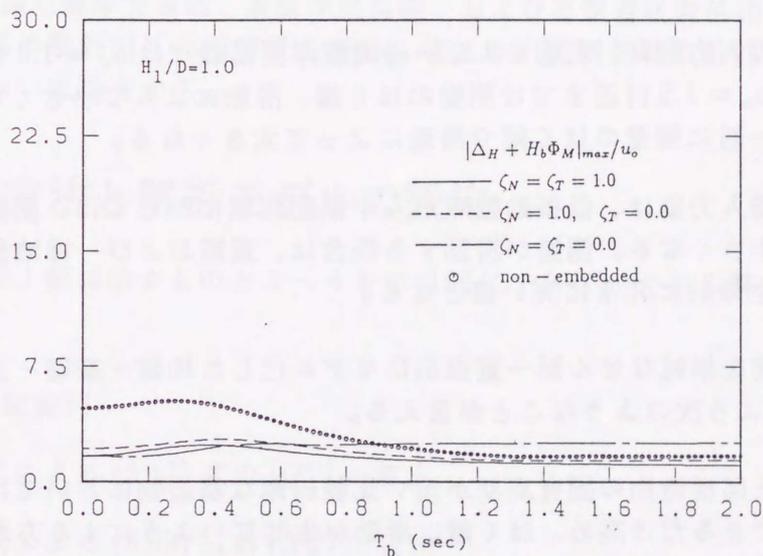


Figure 9.19: 剛体変位の最大値に及ぼす基礎側壁の効果 (基盤着底型基礎)

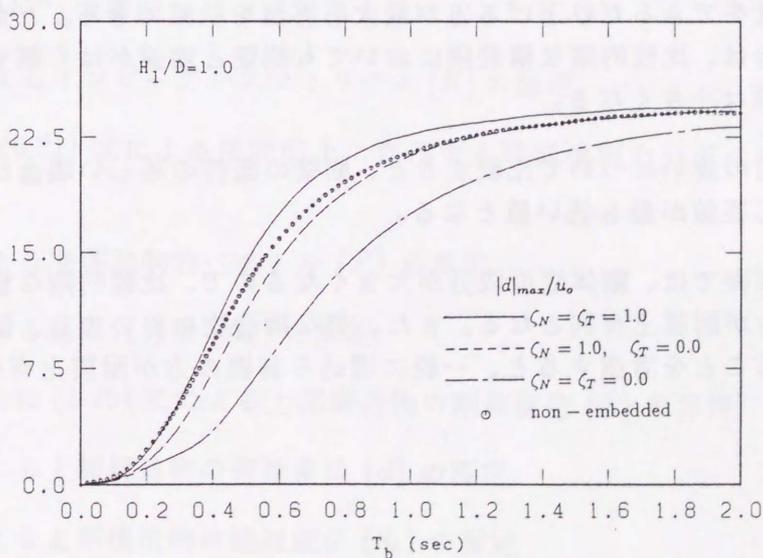


Figure 9.20: 弾性変位の最大値に及ぼす基礎側壁の効果 (基盤着底型基礎)

## 9.4 まとめ

以上をまとめると、インピーダンスと基礎入力動の解析結果より次のようなことが言える。

1. インピーダンス虚部は、側壁の完全密着、滑動、はく離の順に比例的に減少する。
2. 基礎側壁は、水平方向の運動に対して、低振動数域では水平インピーダンス実部を高める役割をするが、高振動数域では逆に水平インピーダンス実部を低下させることになる。
3. 回転インピーダンス実部は、完全密着の場合が、はく離、滑動の場合に比較して高い。
4. 水平基礎入力動は、表層および一様地盤浮型基礎では  $a_0 = 1.0$  付近、基盤着底型基礎では  $a_0 = 1.5$  付近までは側壁のはく離、滑動によって小さくなり、 $a_0$  がそれ以上では、一般に側壁のはく離や滑動によって大きくなる。
5. 回転基礎入力動は、低振動数域から中振動数域にかけては、側壁のはく離によってかなり小さくなる。側壁が滑動する場合は、表層および一様地盤浮型基礎の場合において全体的に非常に高い値となる。

上部構造物を単純なせん断一質点系にモデル化した地盤-基礎-上部構造物連成系の応答解析結果より次のようなことが言える。

1. 一般に上部構造物の固有周期が短い比較的剛な構造物においては、側壁と地盤の密着度をできるだけ高め、はく離、滑動が生じないようにする方が最大応答値を低減できる。これに対して、上部構造物の固有周期が長い柔な構造物では、側壁と地盤の密着度をできるだけ下げる方が最大応答値を低減できる。ただし、基盤着底型基礎の場合は、比較的剛な構造物においても側壁と地盤がはく離する方がわずかに最大応答値は小さくなる。
2. 成層構造の違いについて比較すると、側壁の条件の等しい場合は一様地盤浮型基礎の最大応答値が最も低い値となる。
3. 地表面基礎では、剛体変位成分が大きくなるので、比較的剛な構造物では、基礎を埋込む方が耐震上有利となる。また、柔な構造物においても、側壁のはく離や滑動の起こることを考慮すると、一般に埋込み基礎の方が耐震上有利であると言える。

# Chapter 10

## 埋込み基礎の動的特性に及ぼす埋戻し土の影響

本章では、一様地盤浮型基礎、表層浮型基礎、および基盤着底型基礎を対象とした水平・回転動連成系の動的相互作用解析を行い、埋込み円筒剛基礎の動的特性に及ぼす埋戻し土の影響について調査する。

### 10.1 解析方法と解析モデルの設定

解析手順は、9.1節に示すものと1～4までは同じであり、それ以降は以下のようになる。

- 1～4 9.1節参照
5. 6.1節の諸式による(6.17)式の $[Q^m]$ の算出
6. 6.2節の諸式による(6.23)式の $[K_B^m]$ の算出
7. (6.24)式の $[K^m]$ の算出
8. (6.26)式によるインピーダンスマトリクス $[K]$ の算定
9. (6.29)式と(6.21)式による接続面上に作用する地震強制力分布ベクトル $\{f_g^m\}$ の算出
10. (6.31)式による地震強制力ベクトル $\{F\}$ の算定。
11. (2.18)式による基礎入力動 $\{\Lambda_o\}$ の算定
12. (2.28)式または(2.29)式による上部構造物の剛体変位 $\{\Lambda\}$ の算定
13. (2.23)式による上部構造物の弾性変位 $\{d\}$ の算定
14. (2.21)式による上部構造物の絶対変位 $\{d_b\}$ の算定

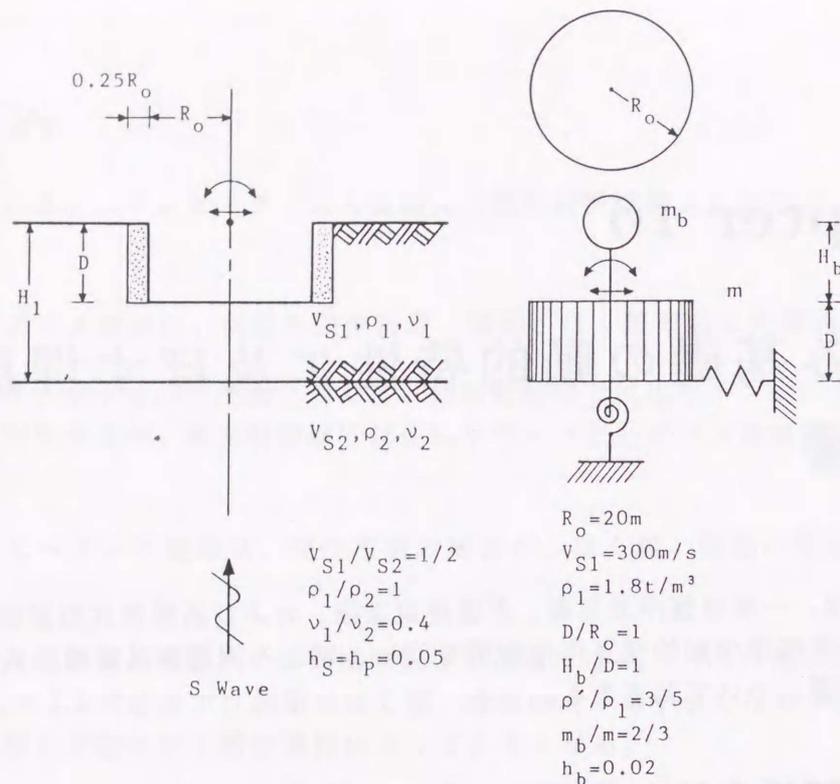


Figure 10.1: 解析モデル

Fig.10.1 は、本章で用いる解析モデルを示す。図の左は地盤モデルを示し、右は基礎構造物モデルを示している。図に示すように、基礎は、半径  $R_o$ 、埋込み深さ  $D$  の円筒剛基礎とし、基礎の周囲に沿って、幅が基礎半径の 0.25 倍、深さが  $D$  の領域に埋戻し土が存在するものとする。基礎半径と埋込み深さの比  $D/R_o$  は 1 とする。以下図中の記号について説明しておく。 $H_1$ ; 表層厚、 $V_S$ ;  $S$  波速度、 $\rho$ ; 地盤密度、 $\nu$ ; ポアソン比、(以上の記号に付加される下添字は、1 は表層、2 は基盤層のものであることを示す)、 $h_S, h_P$ ;  $S$  波と  $P$  波に関する減衰定数、 $\rho'$ ; 基礎の密度、 $m$ ; 基礎の質量、 $H_b$ ; 上部構造物の高さ、 $m_b$ ; 上部構造物の質量、 $h_b$ ; 上部構造物の減衰定数。

解析は、 $H_1/D = \infty$  の一様地盤浮型基礎、 $H_1/D = 2.0$  の表層浮型基礎、 $H_1/D = 1.0$  の基盤着底型基礎を対象として行う。埋戻し土の性状は、硬軟度のみによって評価する。埋戻し土の硬軟度は、埋戻し土の  $S$  波速度  $V_S^r$  と表層の  $S$  波速度  $V_{S1}$  との比  $V_S^r/V_{S1}$  で表す。ここでは、 $V_S^r/V_{S1} = 1.0, 0.75, 0.5, 0.25$  の 4 種類の場合について解析する。

離散化モデルは 6.2 節の Fig.6.2 に示されるものと同一である。ただし、Fig.6.2 の左に示される有限要素の内、基礎側壁に接する 4 要素を埋戻し土部分とし、埋戻し土の硬軟度は、この 4 要素の剛性 ( $S$  波速度) を変化させることによって評価する。インピーダンスおよび基礎入力動算出の際の基準点は基礎上端の中央点とする。解析値は、無次元化振動数  $a_o = \omega R_o/V_S$  に関して 6.0 まで求める。水平動、回転動、および水平・回転連成の各インピーダンスは、それぞれ (8.4) 式の  $k_{ij}, c_{ij}$  を示す。水平、回転の各基礎入力動は、それぞれ  $\Delta_H^o, \Phi_M^o$  と表す。

## 10.2 インピーダンスと基礎入力動に及ぼす埋戻し土の影響

本節では、Fig.10.1の左に示す粘弾性二層地盤モデルにおける無質量の円筒剛基礎の水平・回転動連成系のインピーダンスと、鉛直下方からのS波入射に対する水平、回転基礎入力動を解析し、インピーダンスと基礎入力動に及ぼす埋戻し土の影響を調査する。解析に必要な表層と基盤層の地盤定数はFig.10.1中に示すとおりである。

Fig.10.2～10.10は、それぞれ $H_1/D$ が $\infty, 2.0, 1.0$ の場合の、埋戻し土と表層の速度比 $V_S^r/V_{S1}$ をパラメータとした水平、回転および水平・回転連成の各インピーダンスを示す。図からインピーダンス実部は、低振動数域では、埋戻し土の剛性低下に比例して減少し、振動数が上昇するにしたがってその差は小さくなる。そして、水平インピーダンスでは $a_0 = 1.0$ 、回転インピーダンスでは $a_0 = 2.0$ 、水平・回転連成インピーダンスでは $a_0 = 0.7$ 付近でその傾向は逆転する。これは、埋戻し土の剛性が高いほど土塊の慣性効果によるインピーダンス実部の低減が大きいと考えられる。 $a_0$ がそれ以上の振動数域では埋戻し土の固有振動現象に関係した波うちが見られる。インピーダンス虚部は、どのパラメータ値に対しても振動数の依存傾向はあまり変化せず、埋戻し土の剛性低下に比例して減少するが、実部の傾向が逆転する振動数以降で若干その減少率が大きくなる。

Fig.10.11～10.16は、水平、回転基礎入力動の絶対値を示す。図中無次元化に用いた $u_0$ は半無限層における入射S波の振幅の2倍である。Fig.10.11～10.13の水平基礎入力動においては、おおむね $a_0$ が2.0～3.0以下では埋戻し土の剛性が低くなるほど基礎入力動は小さくなり、 $a_0$ がそれ以上では逆に埋戻し土の剛性が低くなるほど基礎入力動は大きくなる傾向にある。Fig.10.14～10.16の回転基礎入力動においては地盤構成によってかなり傾向が異なる。表層および一様地盤浮型基礎においては、 $a_0$ が1.0～1.5以下の低振動数域では、埋戻し土の剛性によって基礎入力動はほとんど変化せず、 $a_0$ がそれ以上では、埋戻し土の剛性が低いほど基礎入力動は大きくなる。そして、 $a_0$ が2.0から3.0の間で、埋戻し土の剛性が低いほど、より低い振動数においてより高いピーク値をもつ。 $a_0$ が4.0以上では、埋戻し土の剛性による差は一般に小さくなる。これに対して基盤着底型基礎では、全体的にそれほど大きな値をもたず、 $a_0 < 2.5$ の低振動数域では、埋戻し土の剛性が低いほど基礎入力動は小さくなる。

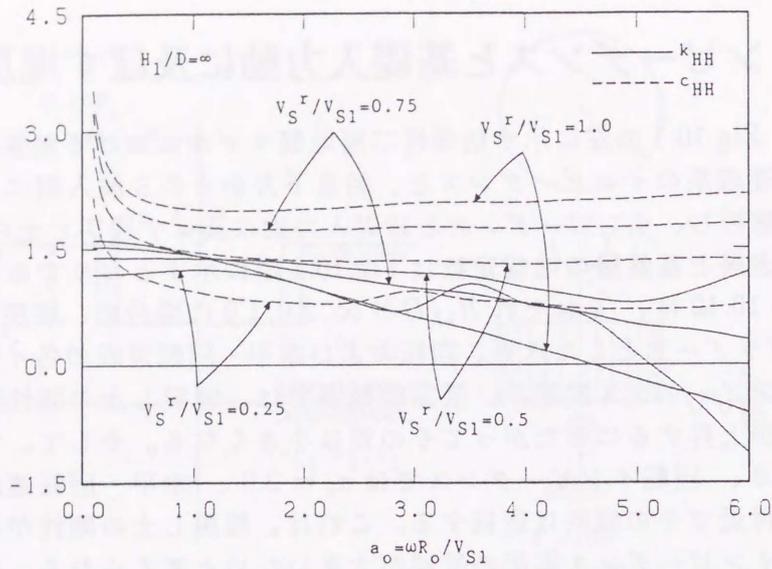


Figure 10.2: 水平インピーダンス (一様地盤浮型基礎)

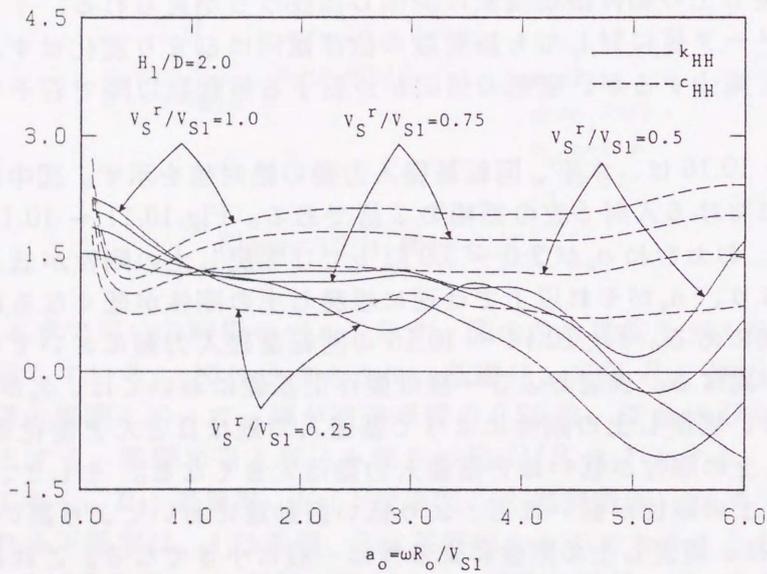


Figure 10.3: 水平インピーダンス (表層浮型基礎)

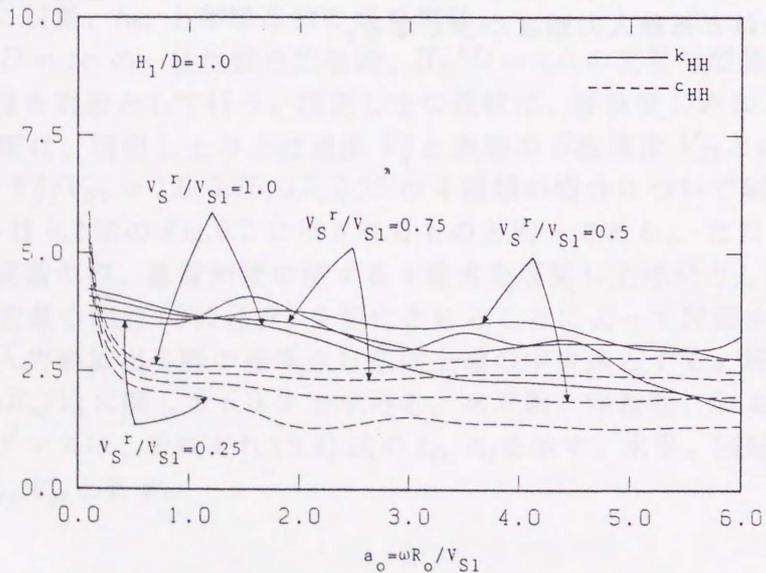


Figure 10.4: 水平インピーダンス (基盤着底型基礎)

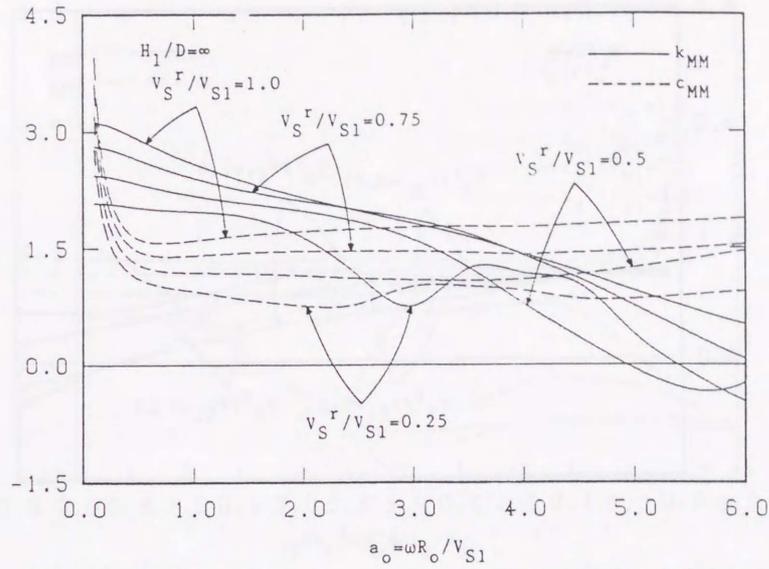


Figure 10.5: 回転インピーダンス (一様地盤浮型基礎)

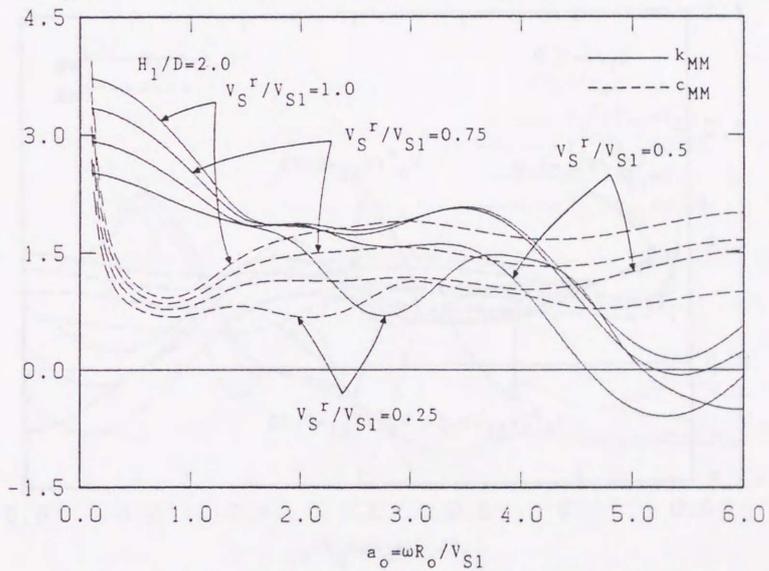


Figure 10.6: 回転インピーダンス (表層浮型基礎)

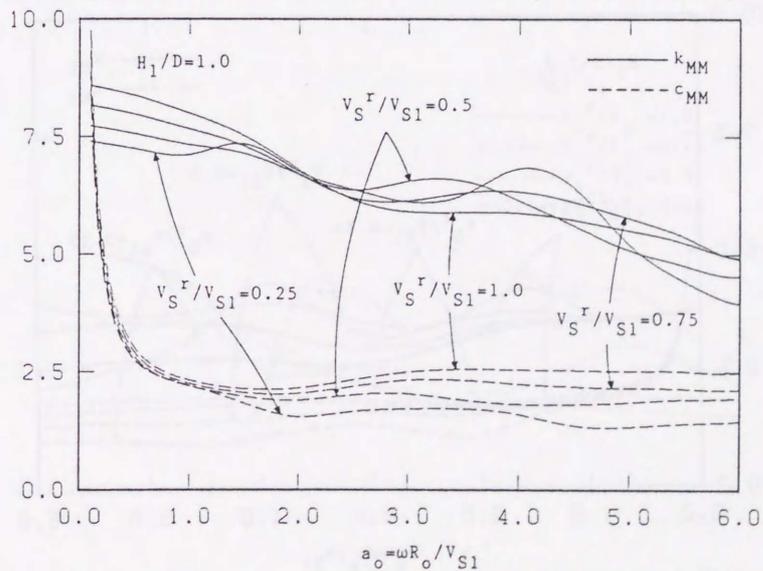


Figure 10.7: 回転インピーダンス (基盤着底型基礎)

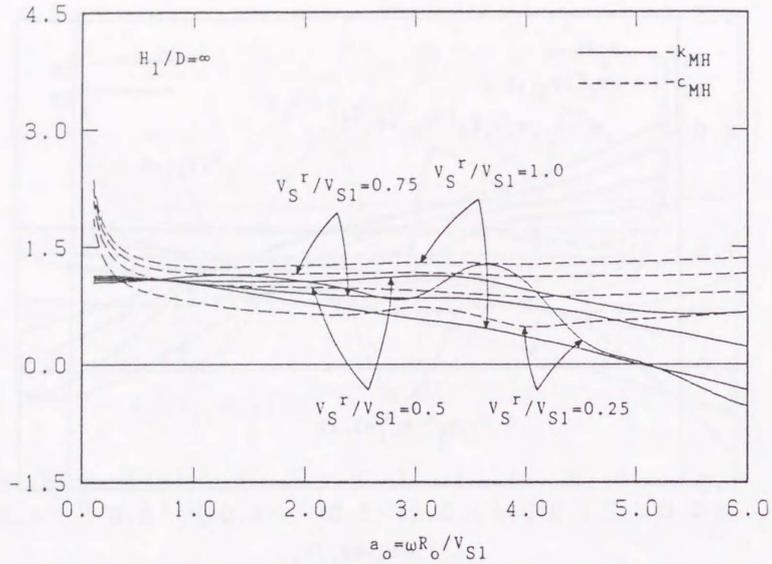


Figure 10.8: 水平-回転連成インピーダンス (一様地盤浮型基礎)

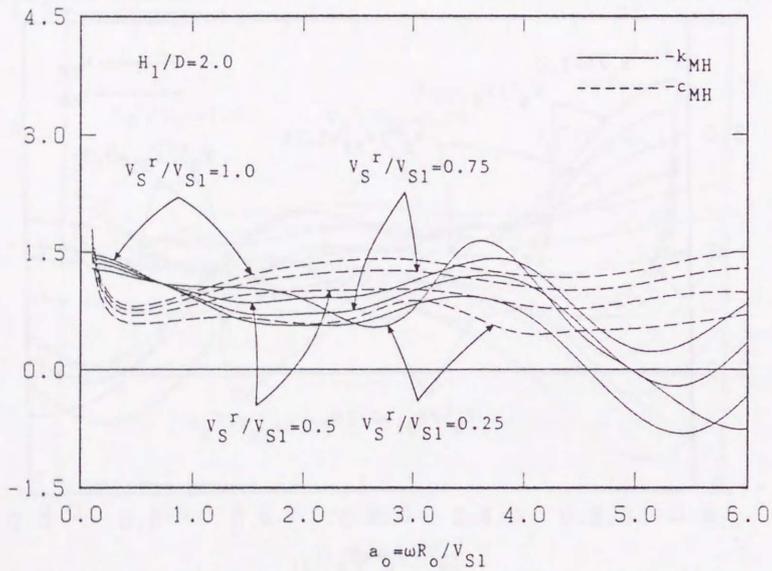


Figure 10.9: 水平-回転連成インピーダンス (表層浮型基礎)

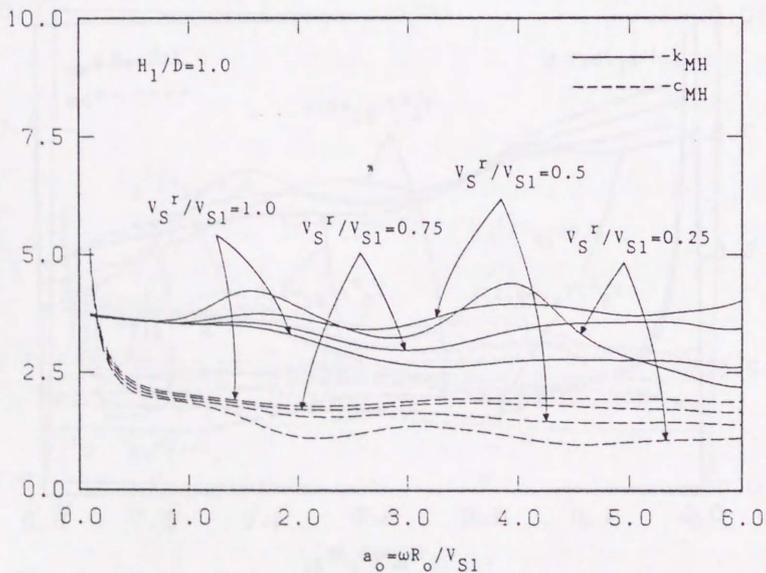


Figure 10.10: 水平-回転連成インピーダンス (基盤着底型基礎)

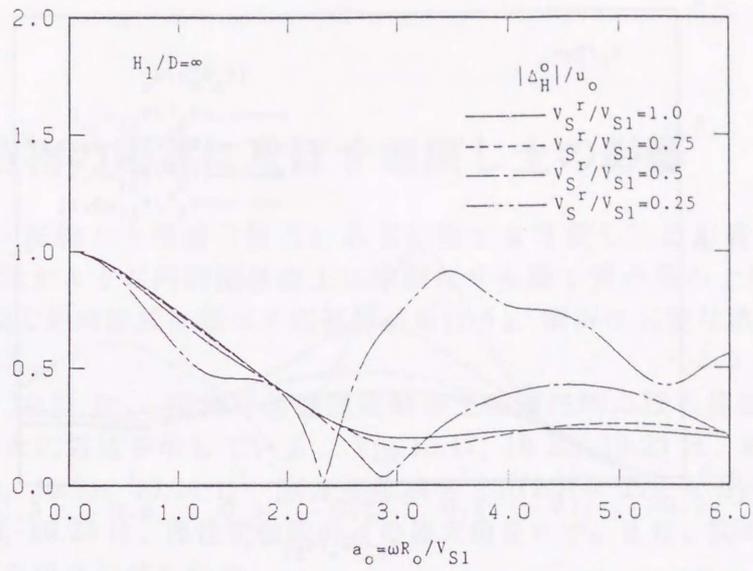


Figure 10.11: 水平基礎入力動 (一樣地盤浮型基礎)

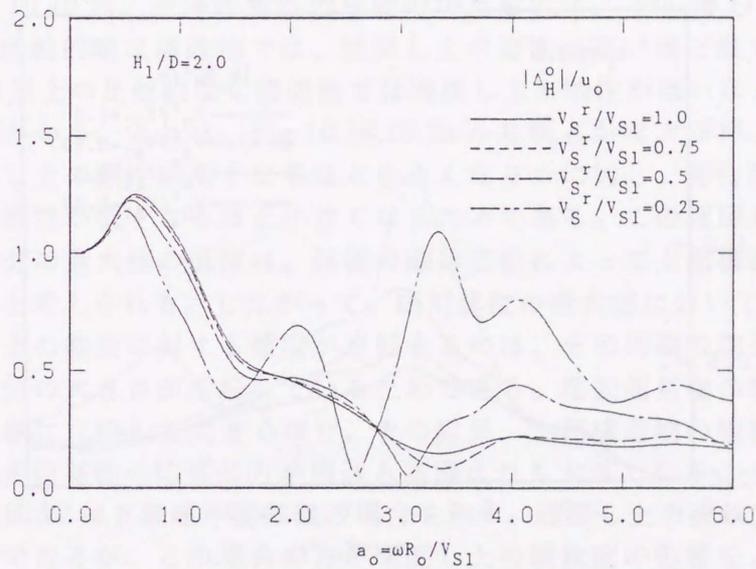


Figure 10.12: 水平基礎入力動 (表層浮型基礎)

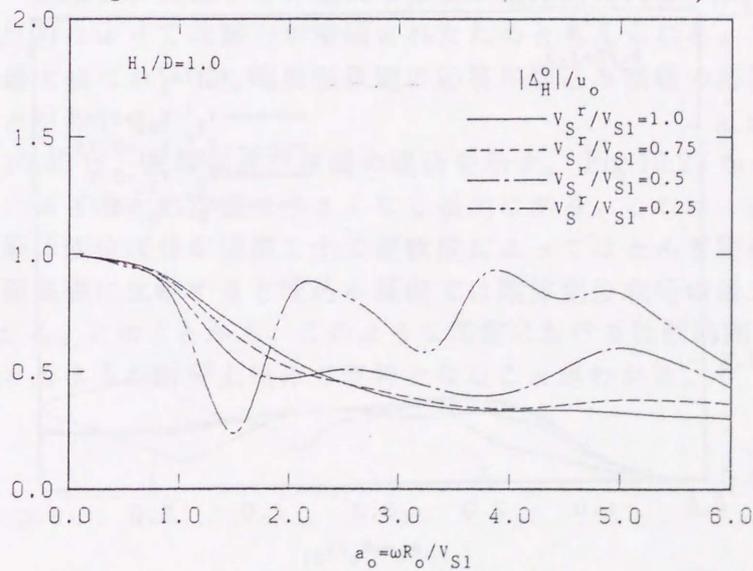


Figure 10.13: 水平基礎入力動 (基盤着底型基礎)

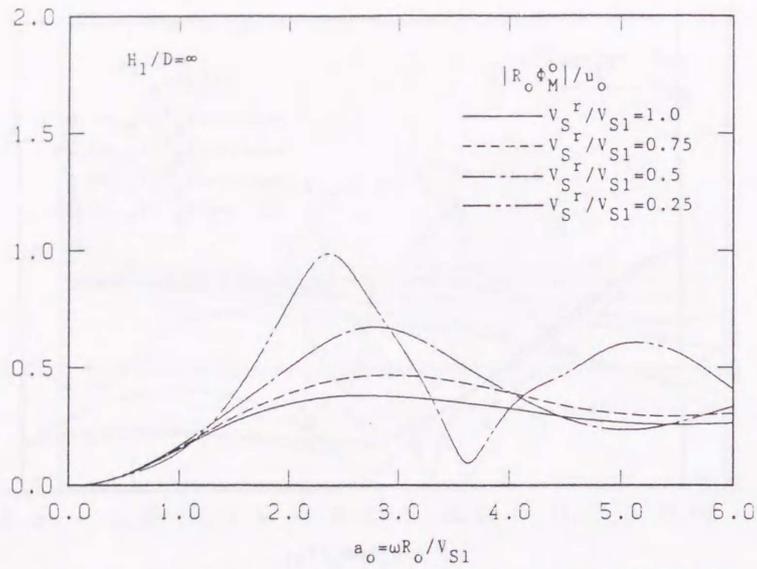


Figure 10.14: 回轉基礎入力動 (一樣地盤浮型基礎)

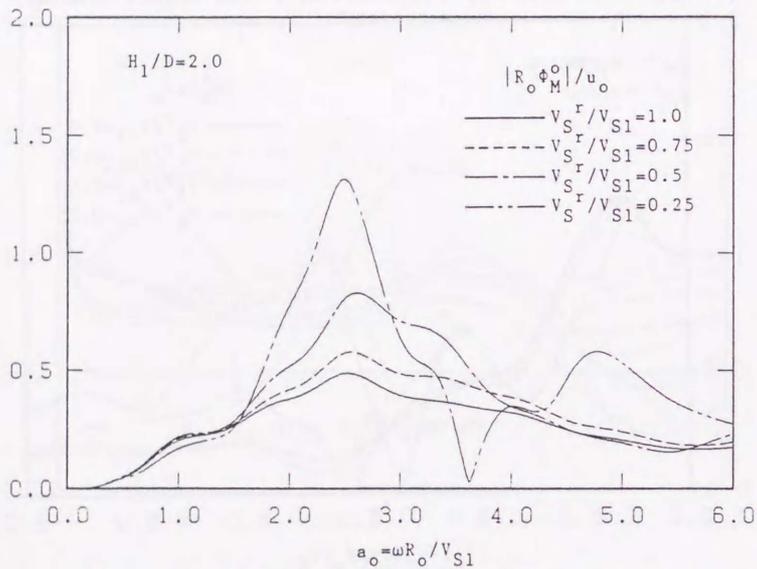


Figure 10.15: 回轉基礎入力動 (表層浮型基礎)

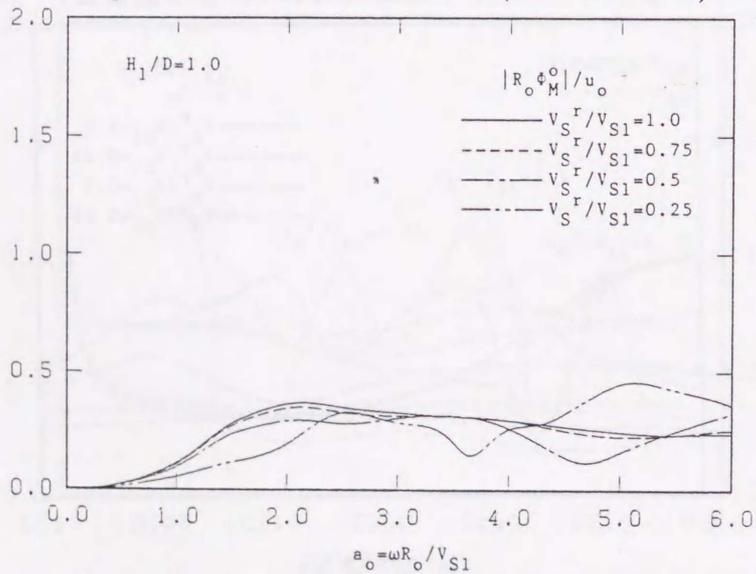


Figure 10.16: 回轉基礎入力動 (基盤着底型基礎)

### 10.3 構造物の応答に及ぼす埋戻し土の影響

次に、地盤－基礎－上部構造物系の応答に対する埋戻し土の影響を調査するため、Fig.10.1の右に示すような円筒剛基礎上に単純なせん断1質点系の上部構造をもつ解析モデルにより、2.1節の諸式に基づく応答解析を行う。解析に必要な諸量は、Fig.10.1中に示す通りである。

Fig.10.17～10.25は、横軸に基礎固定時の上部構造物の固有周期 $T_b$ をとった場合の上部質点の最大応答値を示している。Fig.10.17, 10.20, 10.23は、絶対変位 $d_b$ の最大値を、Fig.10.18, 10.21, 10.24は、剛体変位成分 $[A]\{\Delta\} (= \Delta_H + H_b\Phi_M)$ の最大値を、Fig.10.19, 10.22, 10.25は、弾性変位成分 $d$ の最大値を示す。また、図のシンボルの“○”は、地表面基礎の場合の値を示す。

Fig.10.17～10.19は、一様地盤浮型基礎の場合を示す。Fig.10.17から固有周期 $T_b$ が0.4秒以下の比較的剛な構造物では、埋戻し土の剛性が高いほど最大応答値は小さくなり、 $T_b$ がそれ以上の比較的柔な構造物では埋戻し土の剛性が低いほど最大応答値は小さくなるのがわかる。これは、Fig.10.18, 10.19から明らかなように、剛体変位成分の最大値は、埋戻し土の剛性が高くなるほど小さくなるのに対し、弾性変位成分の最大値は、埋戻し土の剛性が低くなるほど小さくなるためである。この埋戻し土の剛性低下による弾性変位成分の最大値の低減は、基礎の剛体変位によって上部構造物の共振現象が緩和されるためと考えられる。したがって、絶対変位の最大値において、固有周期が0.4秒付近で埋戻し土の剛性に対する傾向が逆転するのは、その周期の前後で、剛体変位成分と弾性変位成分の大きさが逆転しているためである。地表面基礎の場合は、剛体変位成分が埋込み基礎に比較して大きくなり、その結果、上部構造物の固有周期が比較的短い場合には、地表面基礎の応答の方が埋込み基礎よりも大きくなるのがわかる。

Fig.10.20～10.22は、表層浮型基礎の場合を示す。埋戻し土の硬軟度に対する傾向は一様地盤と同様であるが、この場合の方が埋戻し土の硬軟度の影響をより顕著に受けるのがわかる。一様地盤に比較して、最大応答値が全体的に大きくなっているのは、表層における重複反射によって地震力が増幅されたためと考えられる。また、この場合も特に剛体変位の最大値において、地表面基礎の応答が埋込み基礎の応答に比較して大きくなっているのがわかる。

Fig.10.23～10.25は、基盤着底型基礎の場合を示す。Fig.10.23から、全体的に埋戻し土の剛性が低いほど最大応答値は小さくなる傾向にある。これは、基礎が基盤層に着底しているため剛体変位成分が埋戻し土の硬軟度によってほとんど変化しないためである。また、地表面基礎に比較すると埋込み基礎では剛体変位成分の最大値は著しく低減されることがわかる。このことから、このような地盤における比較的剛な構造物では、基礎を基盤に着底するほうが耐震上極めて有利となるのがわかる。

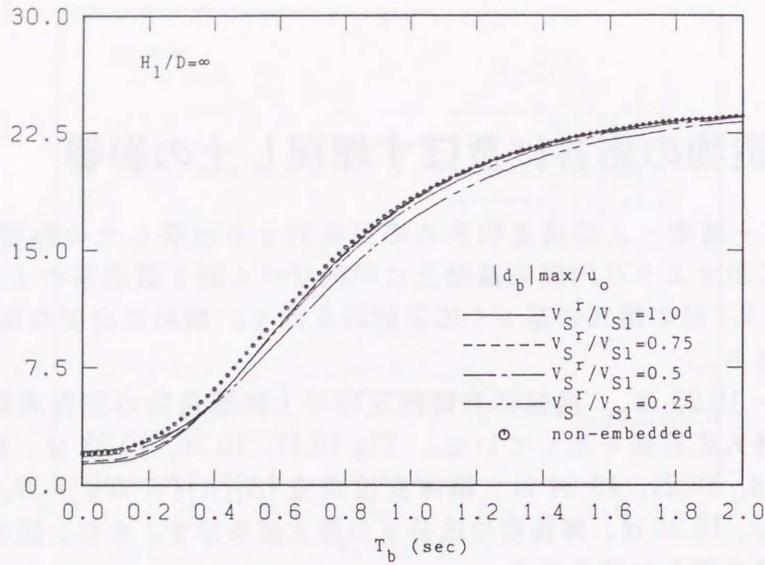


Figure 10.17: 絶対変位の最大値に及ぼす埋戻し土の影響 (一様地盤浮型基礎)

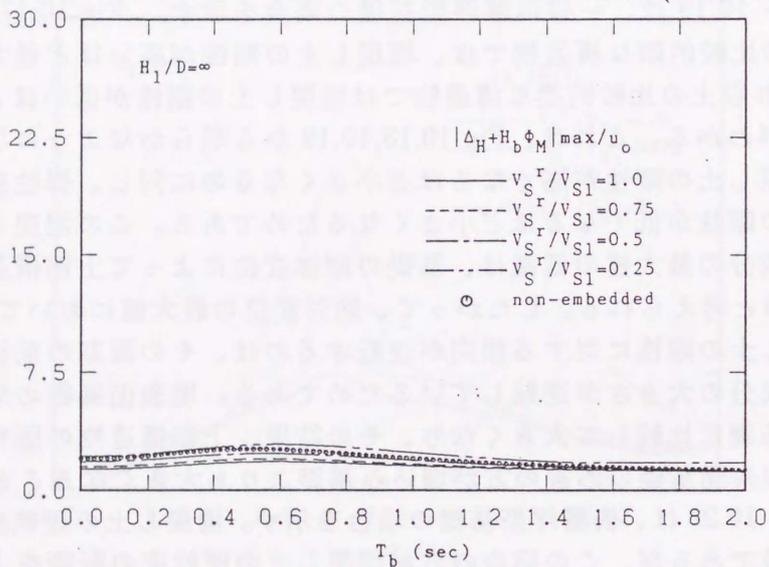


Figure 10.18: 剛体変位の最大値に及ぼす埋戻し土の影響 (一様地盤浮型基礎)

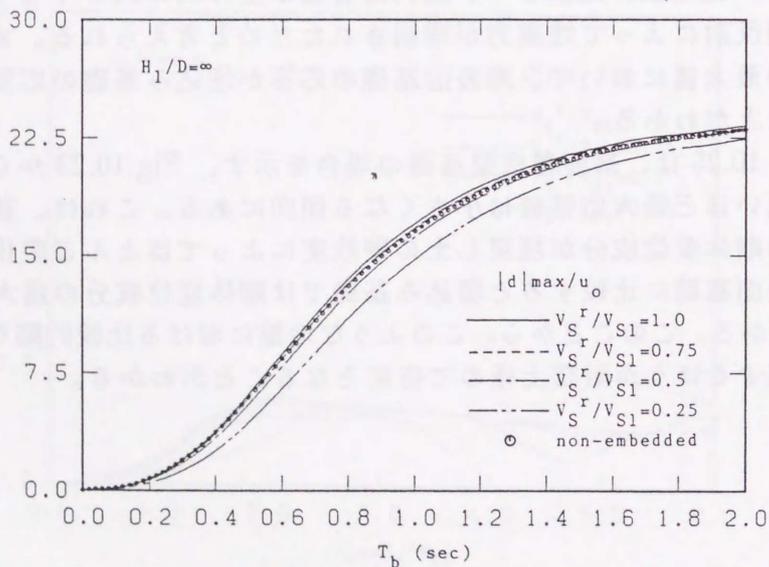


Figure 10.19: 弾性変位の最大値に及ぼす埋戻し土の影響 (一様地盤浮型基礎)

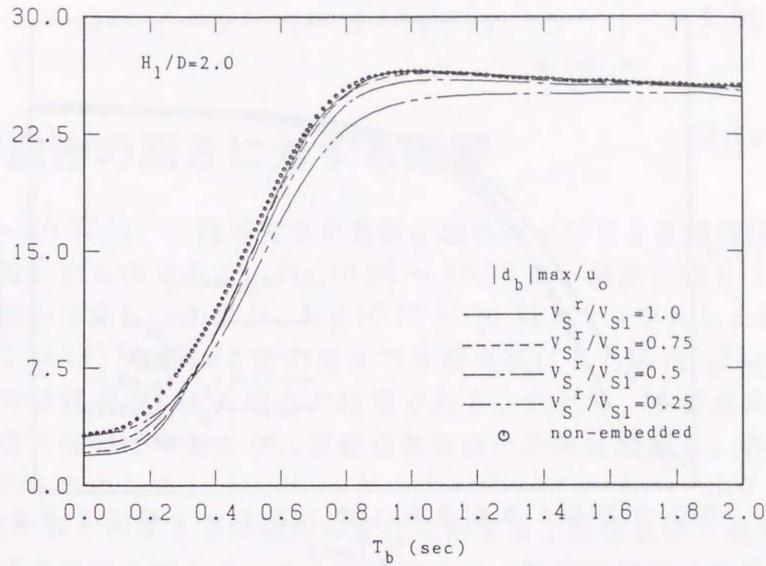


Figure 10.20: 絶対変位の最大値に及ぼす埋戻し土の影響 (表層浮型基礎)

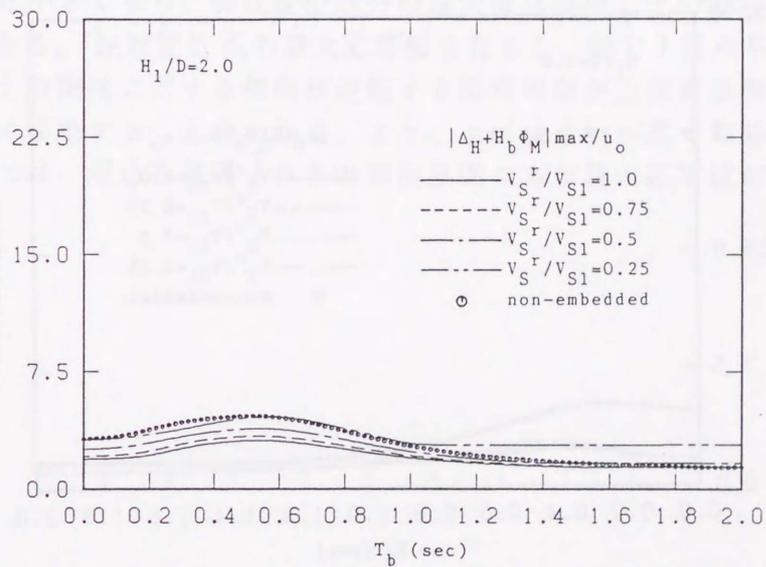


Figure 10.21: 剛体変位の最大値に及ぼす埋戻し土の影響 (表層浮型基礎)

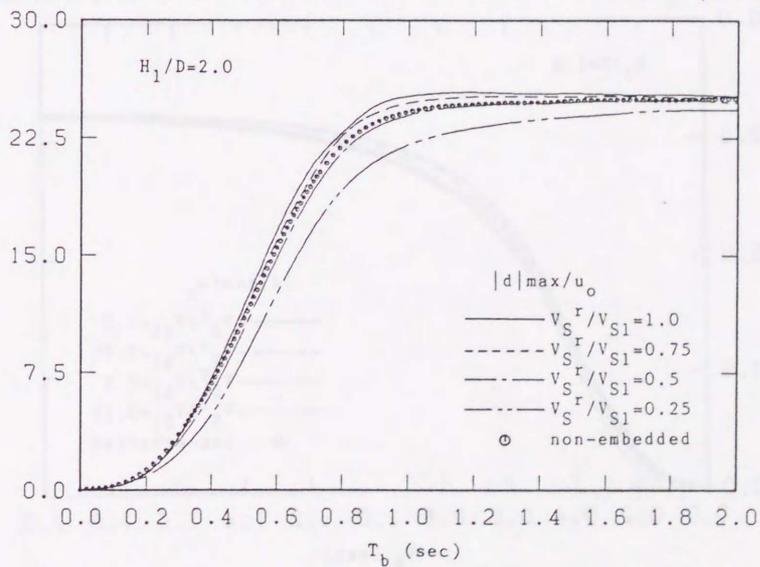


Figure 10.22: 弾性変位の最大値に及ぼす埋戻し土の影響 (表層浮型基礎)

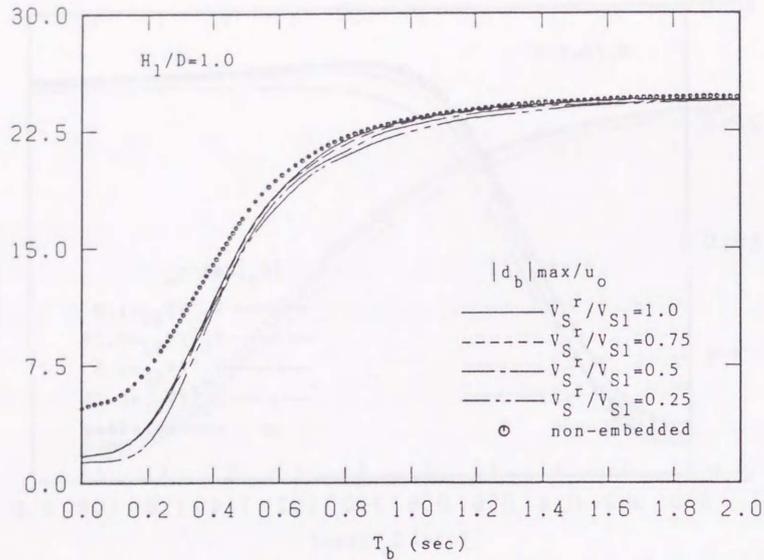


Figure 10.23: 絶対変位の最大値に及ぼす埋戻し土の影響 (基盤着底型基礎)

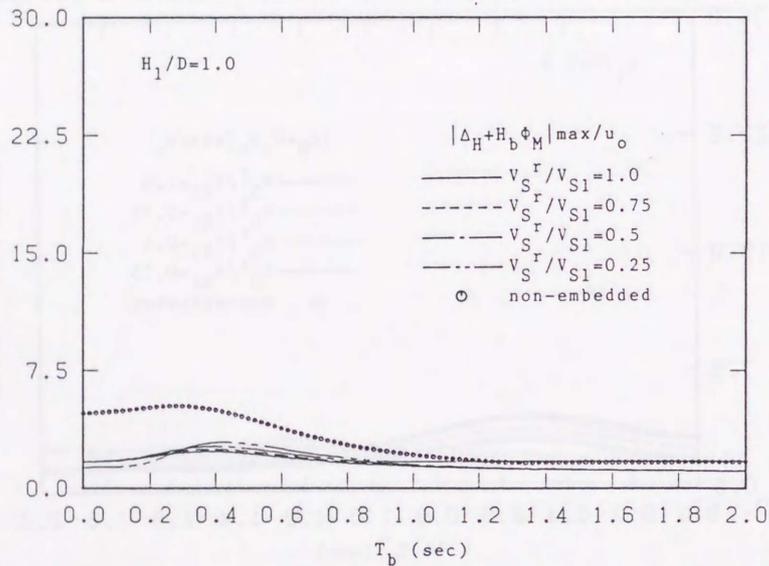


Figure 10.24: 剛体変位の最大値に及ぼす埋戻し土の影響 (基盤着底型基礎)

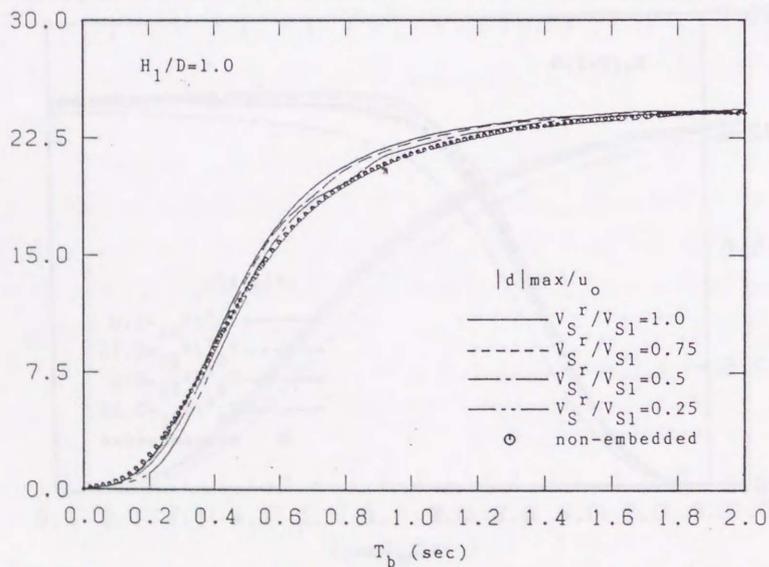


Figure 10.25: 弾性変位の最大値に及ぼす埋戻し土の影響 (基盤着底型基礎)

## 10.4 構造物の高さに対する影響

Fig.10.26 ~ 10.37 は、一様地盤浮型基礎の場合について上部構造物の高さの変化に対する影響を調査したものである。Fig.10.26 ~ 10.28 は、前節と同じ1質点系で上部構造物の高さを前節の2倍にした場合、Fig.10.29 ~ 10.31 は、3倍にした場合である。また、Fig.10.32 ~ 10.34 は、前節の2倍の高さで2質点系にした場合、Fig.10.35 ~ Fig.10.37 は3倍の高さで3質点系にした場合の結果である。ただし、多質点系の場合は、総質量が1質点の場合と等しくなるように質量を各質点に均等に分配し、各階の剛性は1質点の場合と等しいものとした。

これらの図から、埋戻し土の剛性の変化に対する上部構造物の最大応答値の傾向は、上部構造物の高さを変えてもまったく同様であり、剛体変位成分の最大値は埋戻し土の剛性が高いほど小さくなり、弾性変位成分の最大値は埋戻し土の剛性が低いほど小さくなるのがわかる。絶対変位  $d_b$  の最大応答値を見ると、同じ1質点系で高さを変えた場合は、埋戻し土の剛性に対する傾向が逆転する固有周期が上部構造物の高さが高くなるほど長周期側に移動することがわかる。また、上部構造物が高くなると、固有周期の長い柔な構造物では、埋込み基礎よりも地表面基礎の方が最大応答値が小さくなるのがわかる。

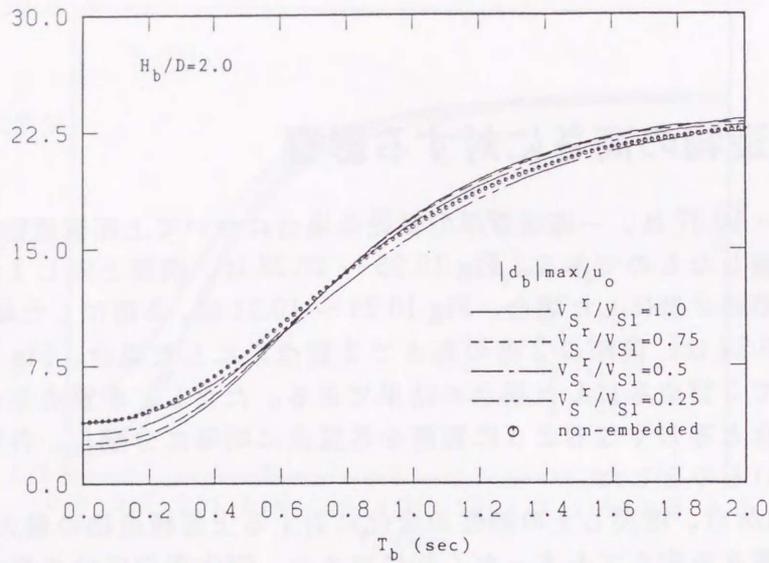


Figure 10.26: 絶対変位の最大値に及ぼす埋戻し土の影響 (上部構造物が2倍の高さ)

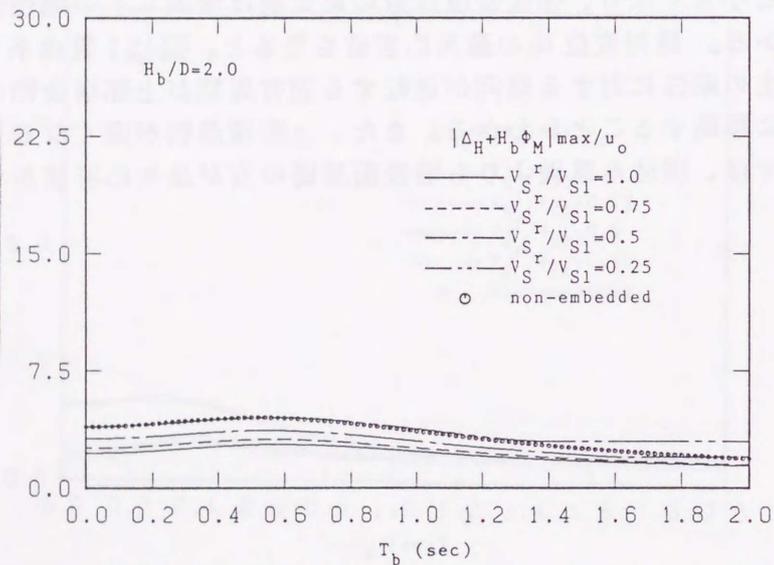


Figure 10.27: 剛体変位の最大値に及ぼす埋戻し土の影響 (上部構造物が2倍の高さ)

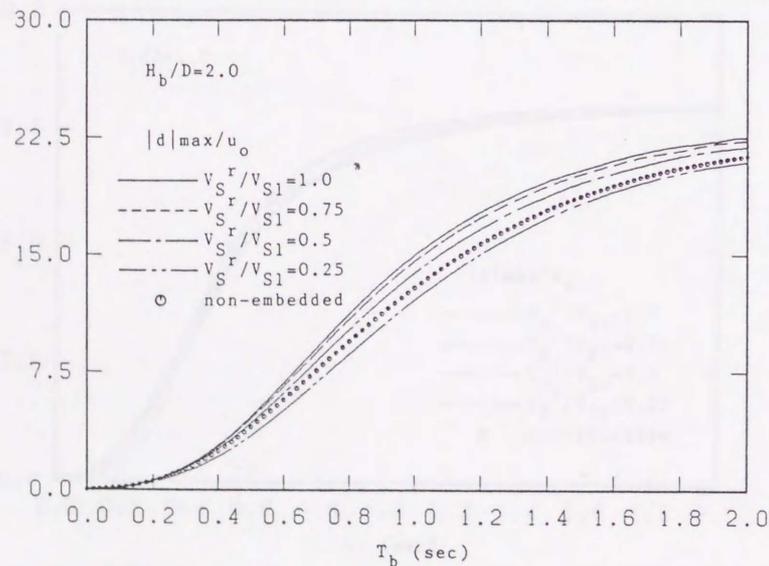


Figure 10.28: 弾性変位の最大値に及ぼす埋戻し土の影響 (上部構造物が2倍の高さ)

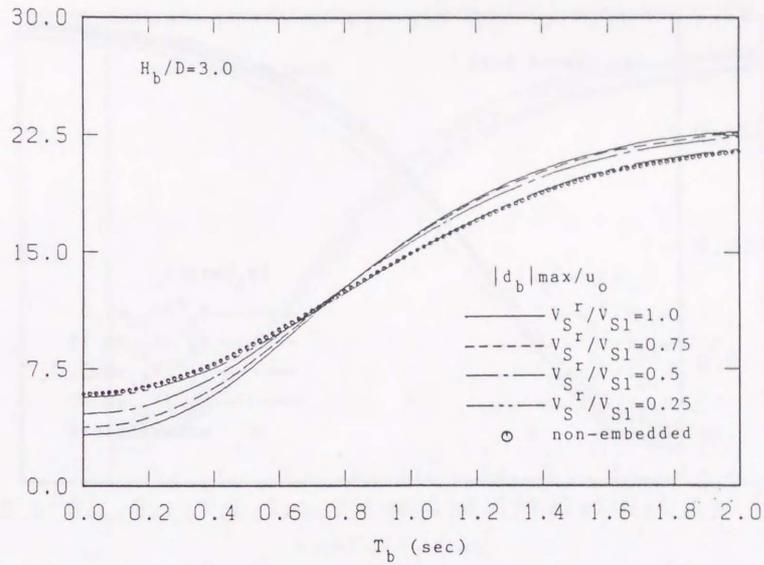


Figure 10.29: 絶対変位の最大値に及ぼす埋戻し土の影響 (上部構造物が3倍の高さ)

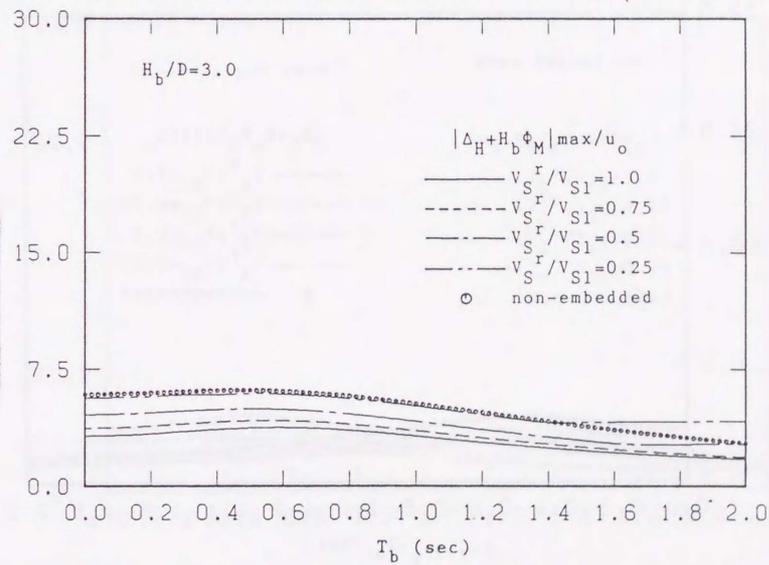


Figure 10.30: 剛体変位の最大値に及ぼす埋戻し土の影響 (上部構造物が3倍の高さ)

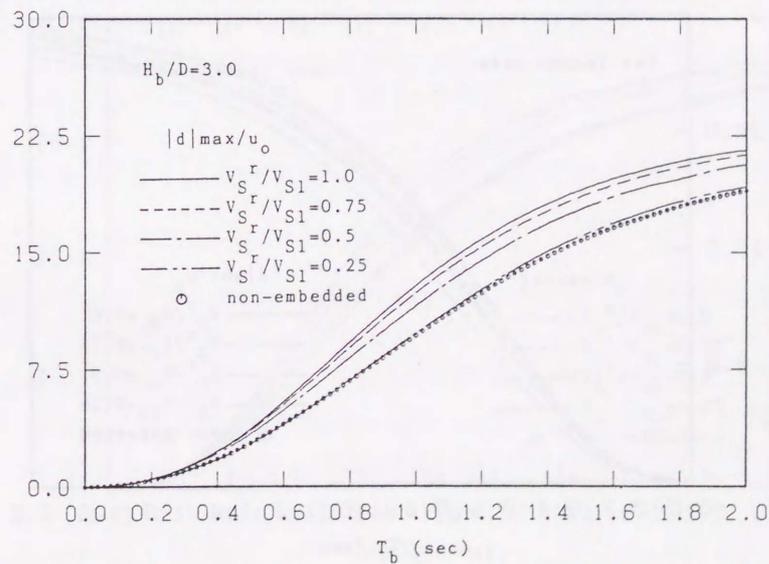


Figure 10.31: 弾性変位の最大値に及ぼす埋戻し土の影響 (上部構造物が3倍の高さ)

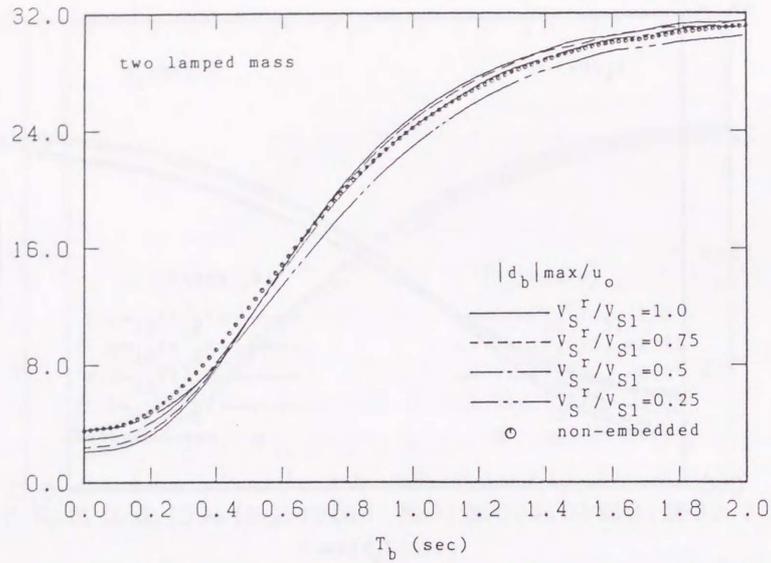


Figure 10.32: 絶対変位の最大値に及ぼす埋戻し土の影響 (2 質点系)

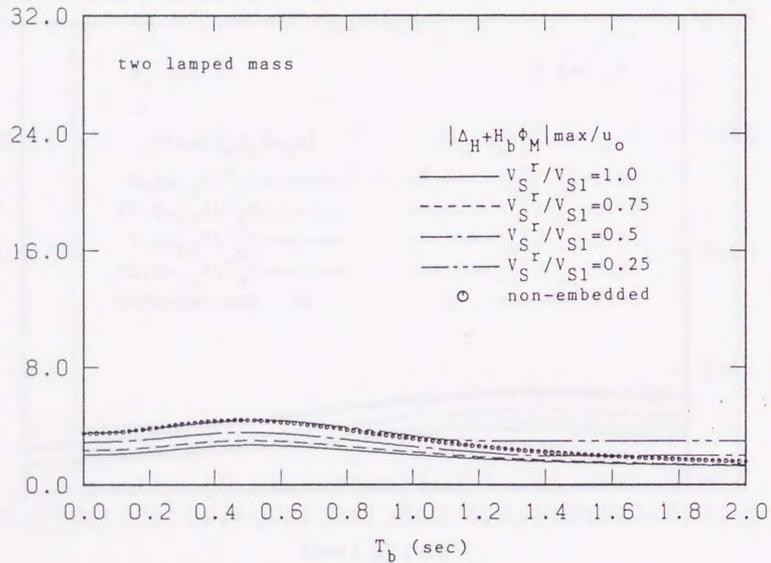


Figure 10.33: 剛体変位の最大値に及ぼす埋戻し土の影響 (2 質点系)

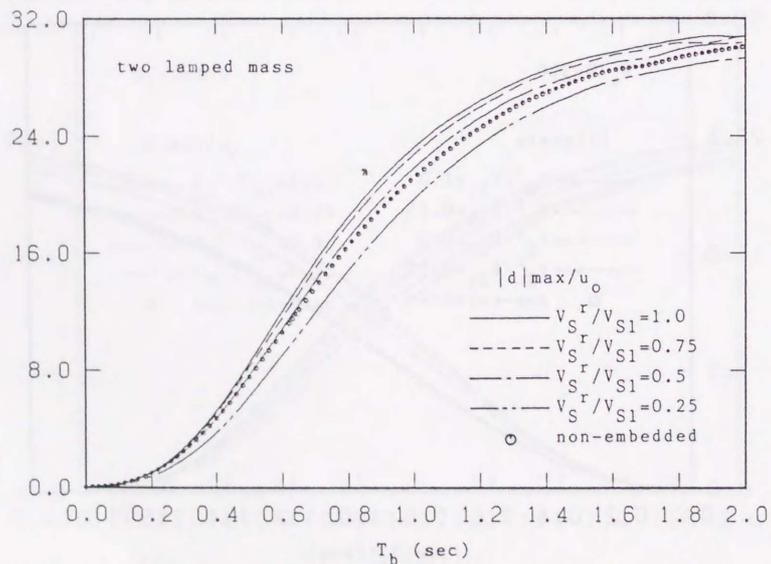


Figure 10.34: 弾性変位の最大値に及ぼす埋戻し土の影響 (2 質点系)

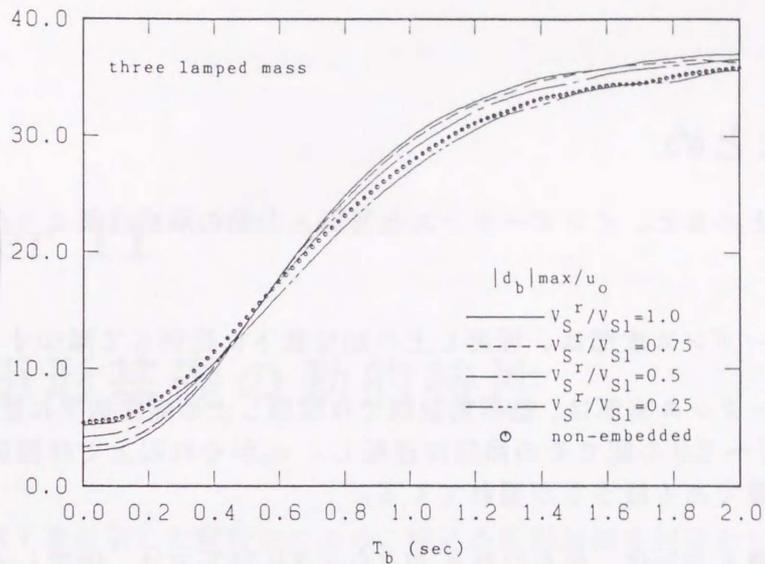


Figure 10.35: 絶対変位の最大値に及ぼす埋戻し土の影響 (3 質点系)

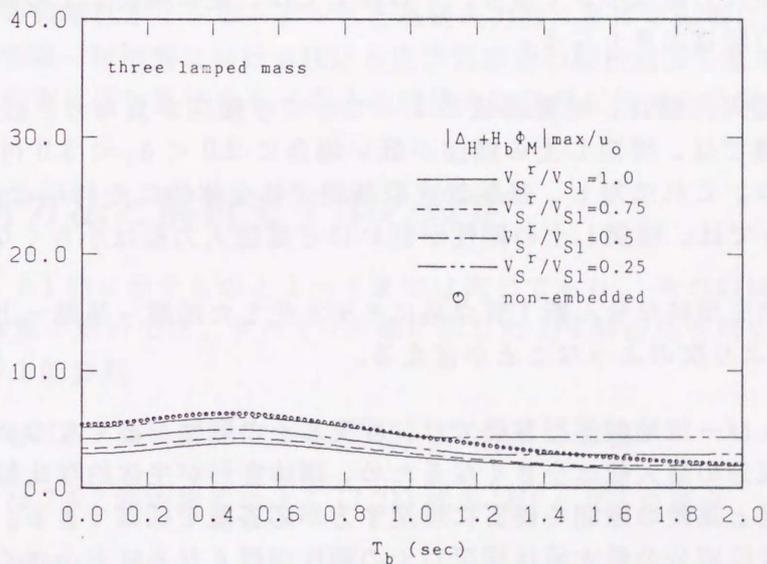


Figure 10.36: 剛体変位の最大値に及ぼす埋戻し土の影響 (3 質点系)

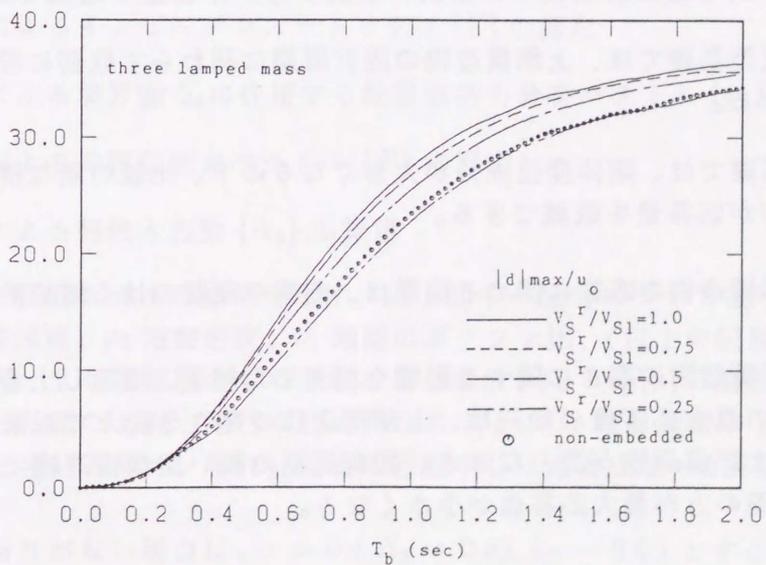


Figure 10.37: 弾性変位の最大値に及ぼす埋戻し土の影響 (3 質点系)

## 10.5 まとめ

以上をまとめると、インピーダンスと基礎入力動の解析結果より次のようなことが言える。

1. インピーダンス虚部は、埋戻し土の剛性低下に比例して減少する。
2. インピーダンス実部は、低振動数域では埋戻し土の剛性低下に比例して減少するが、 $a_0$ が0.7～2.0の間でその傾向は逆転し、 $a_0$ がそれ以上では埋戻し土の固有振動現象の影響である波うちが現れてくる。
3. 水平基礎入力動は、おおむね $a_0$ が2.0～3.0以下では、埋戻し土の剛性が低くなるほど基礎入力動は小さくなり、それ以上では、逆に埋戻し土の剛性が低くなるほど基礎入力動は大きくなる。
4. 回転基礎入力動は、地盤構成によってかなり傾向が異なり、表層および一様地盤浮型基礎では、埋戻し土の剛性が低い場合に $2.0 < a_0 < 3.0$ 付近で非常に大きな値をもつ。これに対し、基盤着底型基礎では全体的にそれほど大きな値をもたず、 $a_0 < 2.5$ では、埋戻し土の剛性が低いほど基礎入力動は小さくなる傾向にある。

上部構造物を単純なせん断1質点系にモデル化した地盤－基礎－上部構造物連成系の応答解析結果より次のようなことが言える。

1. 表層および一様地盤浮型基礎では、埋戻し土の剛性が高くなるほど上部構造物の剛体変位成分の最大値は小さくなるため、剛体変形が主体的な比較的剛な構造物では表層地盤と基礎の隙間を硬質に埋戻す方が応答量を低減できる。一方、上部構造物の弾性変位成分の最大値は埋戻し土の剛性が低くなるほど小さくなるため、弾性変形が主体的な柔な構造物では軟弱に埋戻す方が応答量を低減できる。
2. 基盤着底型基礎では、上部構造物の固有周期に関わらず軟弱に埋戻す方が応答量を低減できる。
3. 地表面基礎では、剛体変位成分が大きくなるので、比較的剛な構造物では、基礎を埋込む方が応答量を低減できる。

以上の上部構造物の応答に関する結果は、前章の側壁のはく離や滑動を考慮した結果と呼応する。

最後に上部構造物の高さに関する影響を調査した結果、埋戻し土の剛性の変化に対する上部構造物の最大応答値の傾向は、上部構造物の高さを変えてもまったく同様であること、また、上部構造物が高くなると、固有周期の長い柔な構造物では、埋込み基礎よりも地表面基礎の方が最大応答値が小さくなる。

# Chapter 11

## 埋込み矩形基礎の動的特性

本章では、第7章に示した解析法により、埋込み矩形基礎を対象として、水平・回転動連成系の基礎の地反力分布、インピーダンスの基礎側壁と底面との分担度、アスペクト比および地盤の成層性がインピーダンスと基礎入力動に及ぼす影響について、Fig.11.2に示すような半無限一様地盤における埋込み正方形基礎の解析結果を基準にして比較、考察を行い、より現実に近い形状をもつ埋込み基礎の動的相互作用の効果を明らかにする。

### 11.1 解析方法と解析モデルの設定

解析手順は、9.1節に示すものと1～4までは同じであり、それ以降は以下のようになる。なお、本章の解析では、すべて7.5節に示した1/4解析法を用いている。

1～4 9.1節参照

5. 7.1節および7.5.1節の諸式による(7.15)式の $[Q]$ の算出
6. 7.2節および7.5.2節の諸式による(7.21)式の $[H]$ と $[G]$ の算出
7. (7.48)式の算出
8. (7.54)式によるインピーダンスマトリクス $[K]$ の算定
9. (7.46)式による境界面 $S_d$ に作用する地震強制力分布ベクトル $\{p_g\}$ の算出
10. (7.56)式による地震強制力ベクトル $\{F\}$ の算定
11. (7.57)式による基礎入力動 $\{\Lambda_o\}$ の算定

Fig.11.1は、解析モデルの概略を示す。以下図中の記号について説明しておく。 $H_1$ ; 表層厚、 $V_S$ ; S波速度、 $\rho$ ; 地盤密度、 $\nu$ ; 地盤のポアソン比、(以上の記号に付加される下添字は、1は表層、2は基盤層のものであることを示す)、 $h_S, h_P$ ; S波とP波に関する減衰定数、 $B$ ; 矩形基礎の $x$ 軸と平行な辺の長さの1/2、 $C$ ; 矩形基礎の $y$ 軸と平行な辺の長さの1/2、 $D$ ; 埋込み深さ。また、基礎の回転中心は基礎上端(地表面)の中央部としている。

以下、特に断りがない場合は、 $\nu = 0.4, h_S = 0.05, h_P = 0.05$ とする。外部領域におけるフーリエ波数は5までとし、地盤の薄層分割および内部領域における各部の分割は

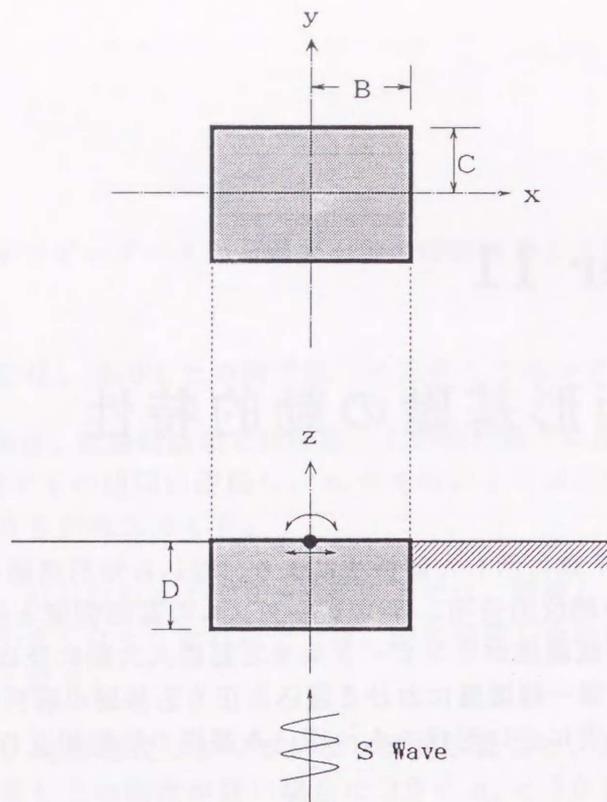


Figure 11.1: 解析モデルの概略

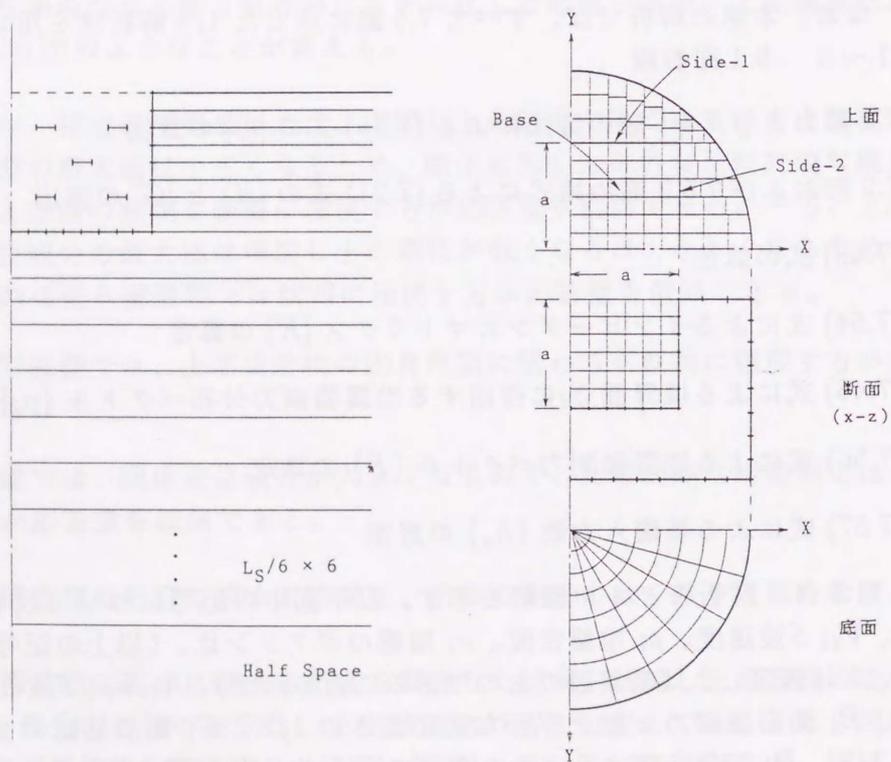


Figure 11.2: 埋込み正方形基礎の解析モデル

Fig.11.2 に示すものとする。解析は無次元化振動数  $a_0 = 3.0$  までの範囲において行う。なお、本章では、水平-回転連成インピーダンスの結果は割愛する。

## 11.2 埋込み正方形基礎の地反力分布

本節では、Fig.11.2 に示すような半無限一様地盤における埋込み正方形基礎に水平および回転振動を与えた時の地反力分布について調査する。

Fig.11.3 ~ 11.10 は、振動数が  $a_0 = 1.0$  と  $a_0 = 3.0$  の場合の各基礎面における地反力の実部および虚部の分布である。図中の Side-1、Side-2、Base は、それぞれ、第1象限における  $x-z$ 面に平行な基礎側面、 $y-z$ 面に平行な基礎側面および基礎底面を表し、ダッシュ(′)は、各基礎面における  $x, y, z$ 軸に平行な軸を表す。Fig.11.3 ~ 11.6 は  $y$ 軸方向に水平振動を与えたときの各基礎面における  $y$ 軸方向の地反力分布であり、Fig.11.7 ~ 11.10 は  $x$ 軸回りに回転振動を与えたときの Side-1 における  $y$ 軸方向の地反力分布および Side-2、Base における  $z$ 軸方向の地反力分布である。

これらの図より、水平振動による地反力の実部は、 $a_0 = 1.0$  の場合には、各基礎面において中央部で小さく、端部、特に隅角部で大きな値を示し、Boussinesq 型の分布形状になっている。これに対し、 $a_0 = 3.0$  の場合には  $a_0 = 1.0$  の場合とほぼ同じ形状ではあるが、各基礎面の縁辺部と中央部付近では逆位相を生じている。一方、水平振動による地反力の虚部は、各基礎面において、振動数が高くなるほど面全体で大きな値を示し、実部と同様端部および隅角部で特に大きな値を示している。また、振動数が高い場合には、実部、虚部ともに地表面付近で大きな値をとる傾向がある。

回転振動における地反力の実部は、Side-1 では、地表面付近では大きく負方向の値を示し、基礎面下端付近では大きく正方向の値を示している。Side-2 では、基礎面中央部 ( $Z'$ 軸付近) ではほとんど0で、そこから  $Y'$ 軸に沿って徐々に大きくなり、隅角部で特に大きな値を示している。このような傾向は、どの振動数においても同様で、その大きさにもほとんど差がない。また、Base では、 $a_0 = 1.0$  の場合には、基礎面中央部 ( $X'$ 軸付近) ではほとんど0で、そこから  $Y'$ 軸に沿って徐々に大きくなり、基礎端部、特に隅角部において大きな値を示している。 $a_0 = 3.0$  の場合も同様であるが、縁辺部と中央部付近で逆位相を生じている部分がある。回転振動による地反力の虚部は、実部と似た形状となり、振動数が高くなるほど大きな値をとる。

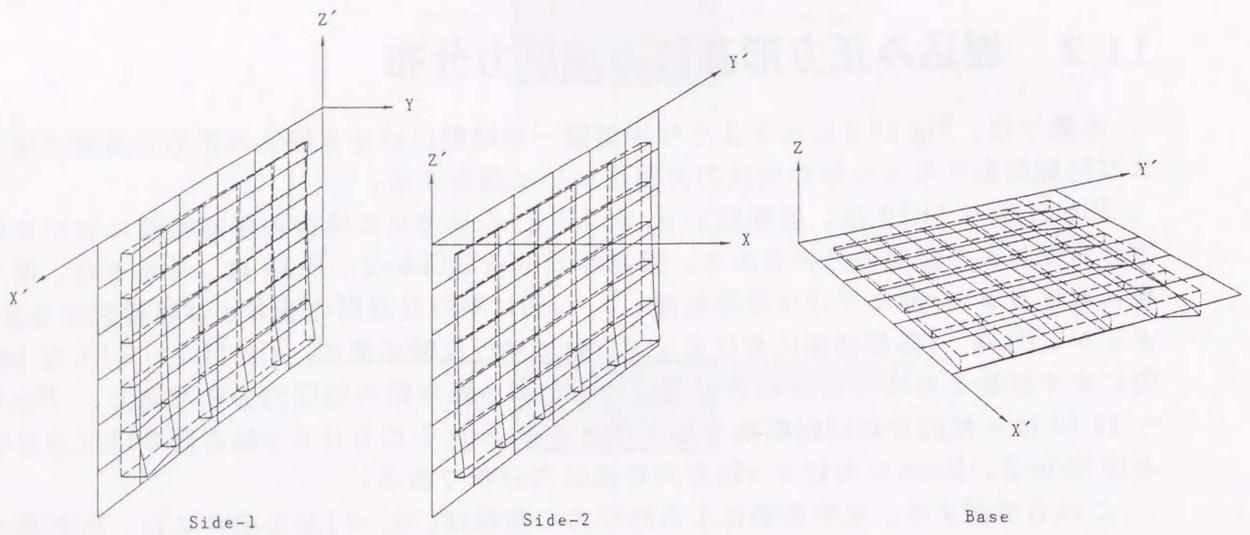


Figure 11.3: 水平振動による地反力分布実部 ( $a_0 = 1.0$ )

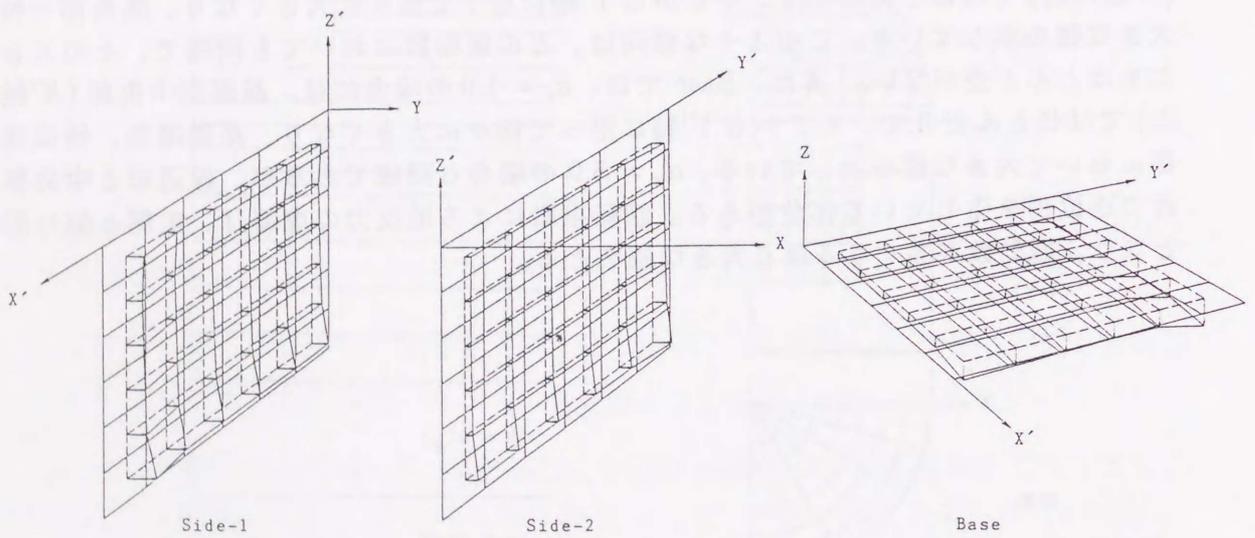


Figure 11.4: 水平振動による地反力分布虚部 ( $a_0 = 1.0$ )

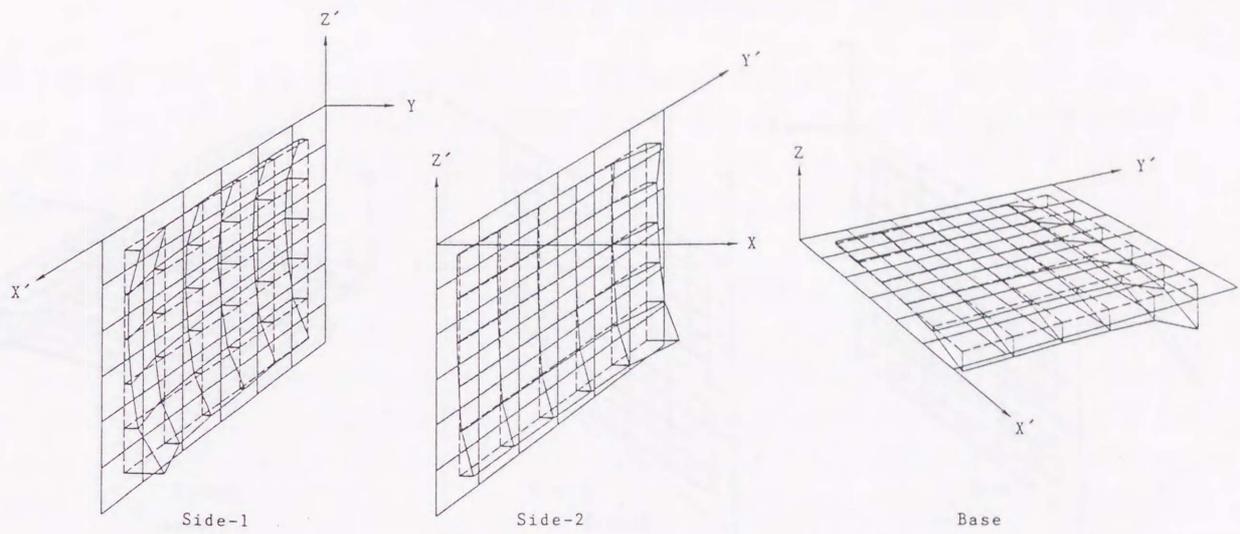


Figure 11.5: 水平振動による地反力分布実部 ( $a_o = 3.0$ )

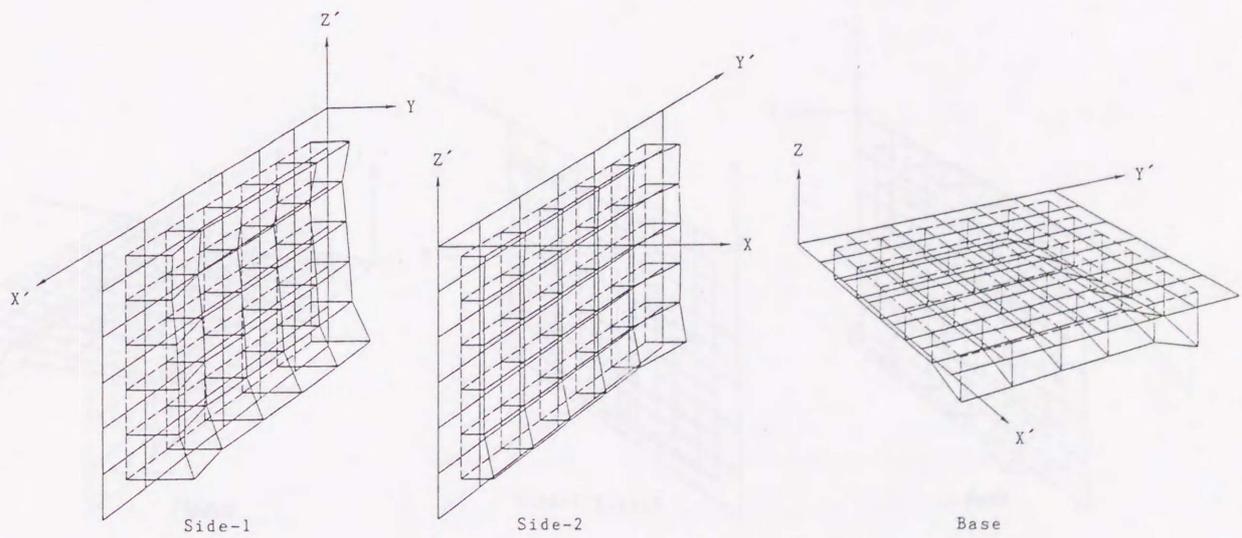


Figure 11.6: 水平振動による地反力分布虚部 ( $a_o = 3.0$ )

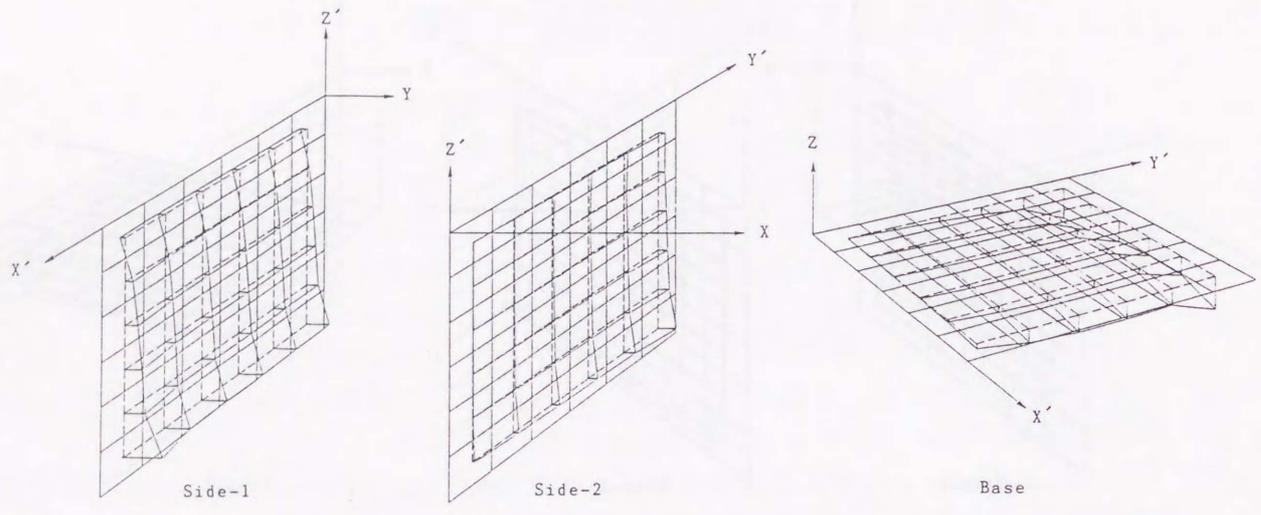


Figure 11.7: 回転振動による地反力分布実部 ( $a_o = 1.0$ )

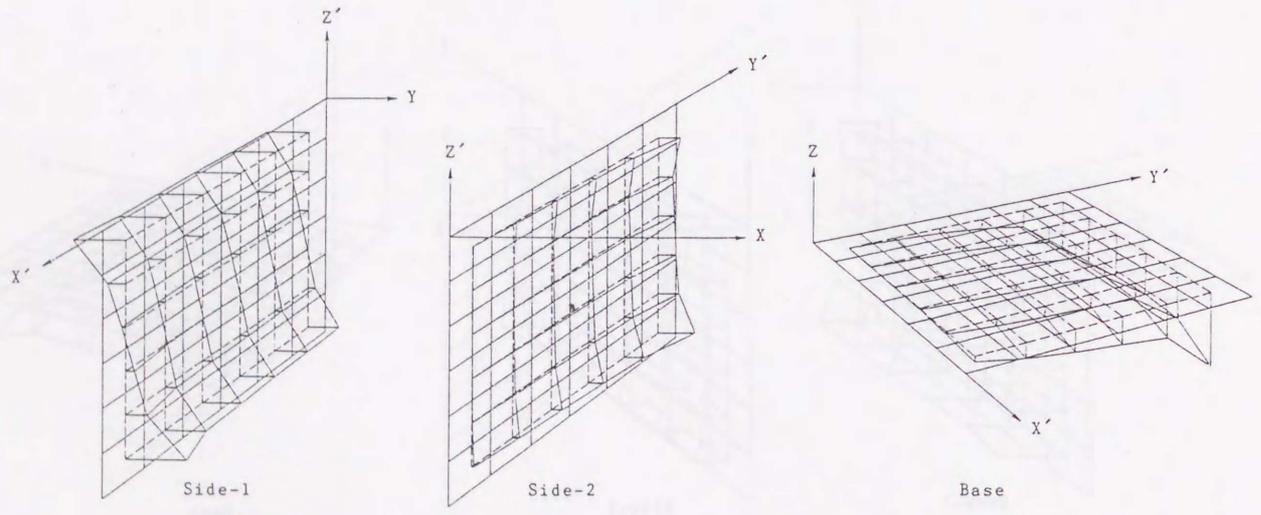


Figure 11.8: 回転振動による地反力分布虚部 ( $a_o = 1.0$ )

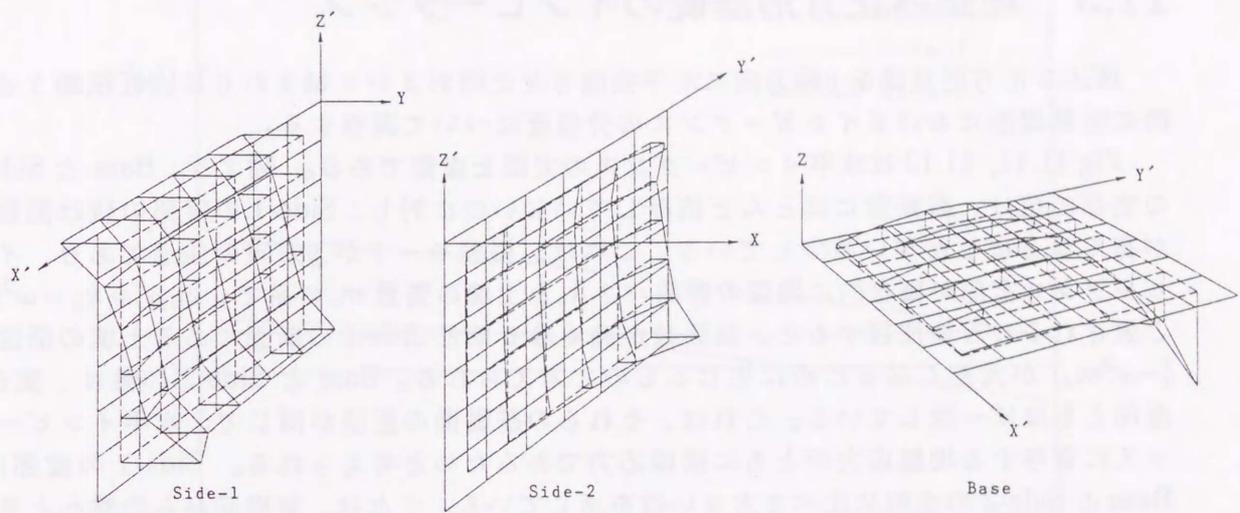


Figure 11.9: 回転振動による地反力分布実部 ( $a_o = 3.0$ )

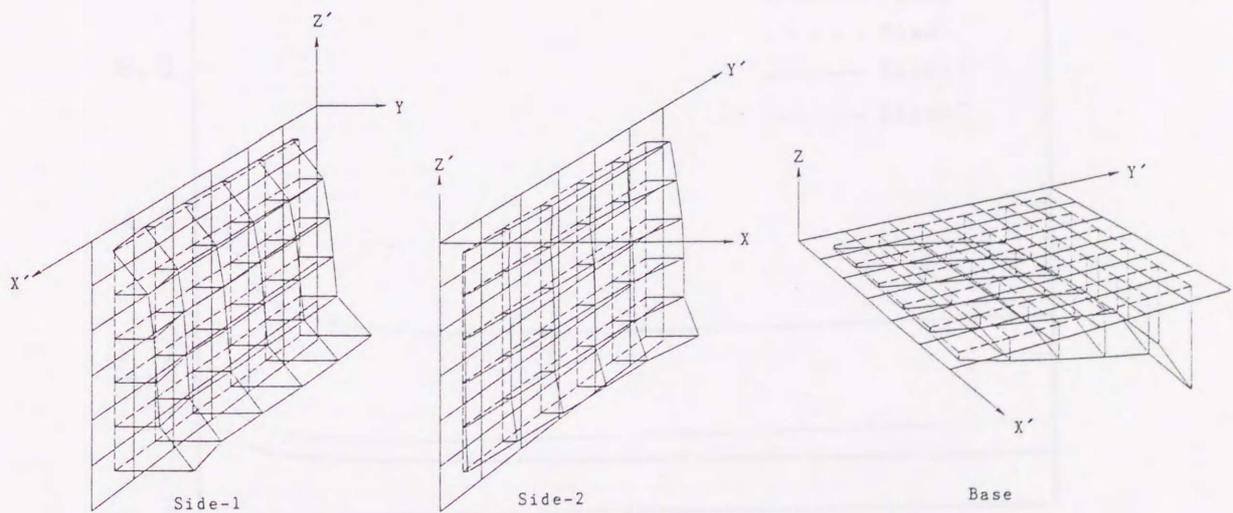


Figure 11.10: 回転振動による地反力分布虚部 ( $a_o = 3.0$ )

### 11.3 埋込み正方形基礎のインピーダンス

埋込み正方形基礎を  $y$  軸方向に水平振動させた時および  $x$  軸まわりに回転振動させた時の各基礎面におけるインピーダンスの分担度について調査する。

Fig.11.11, 11.12 は水平インピーダンスの実部と虚部である。図より、Base と Side-2 の実部の値は、振動数にほとんど依存していないのに対し、Side-1 の実部の値は振動数が高くなるにしたがい減少している。これは、振動モードが  $y$  方向の並進であり、インピーダンス実部が概念的に地盤の静的バネ  $k_0$  と土塊の質量  $m_0$  の系で、 $k_{HH} = k_0 - \omega^2 m_0$  と表されることに注目すると、振動数が高くなるほど Side-1 の前面にある土塊の慣性項 ( $-\omega^2 m_0$ ) が大きくなるために生じるものと考えられる。Base と Side-2 の値は、実部、虚部ともほぼ一致している。これは、それらの基礎面の面積が同じで、水平インピーダンスに寄与する地盤応力がともに接線応力であるためと考えられる。Side-1 の虚部は、Base と Side-2 の虚部に比べて大きい値を示している。これは、基礎面から地盤へと逸散していく主要な波が、Side-1 では  $P$  波、Base と Side-2 では  $S$  波であり、このような逸散波による減衰効果が平面波の速度に比例することによる [14]。

Fig.11.13, 11.14 は回転インピーダンスの実部、虚部である。図より、実部は Base, Side-1, Side-2 の順に大きい値を示しているのに対し、虚部は水平インピーダンス虚部の場合と同じ理由から、Side-1, Base に比べ、Side-2 が低い値を示している。

現実の地盤においては、はく離、滑動等の現象が生じるため、完全密着下のインピーダンスを低減する必要がある [12]。以上のデータによれば、Side-1、Side-2、Base のそれぞれに低減率を掛けることができるので、実際の現象をより正確に解析に取り込むことができる。

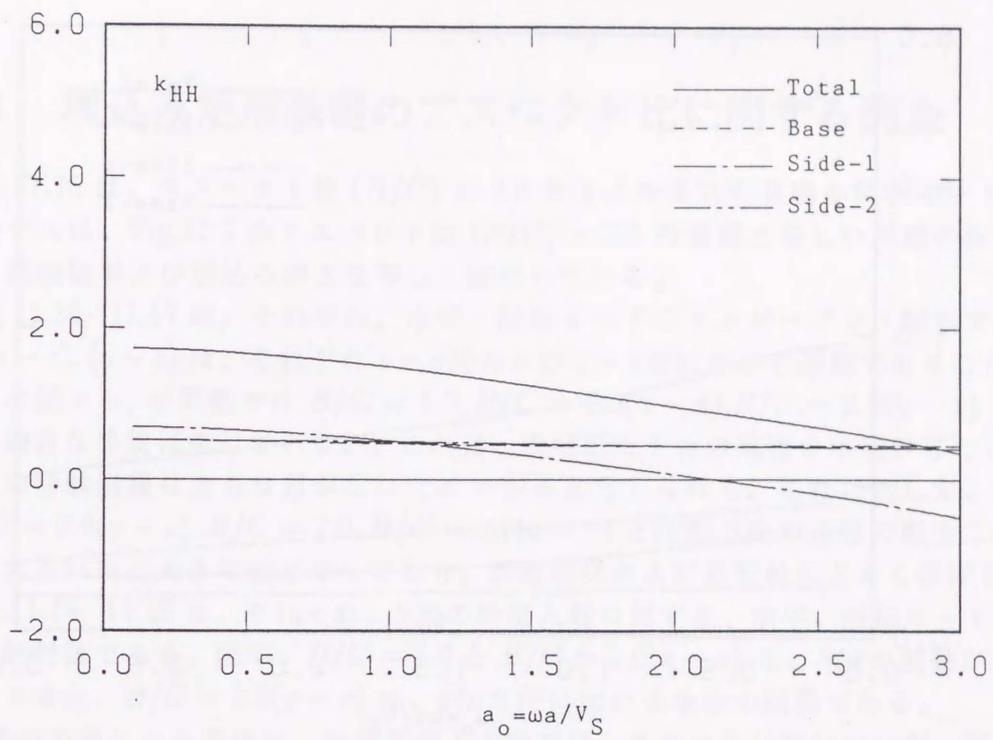


Figure 11.11: 各基礎面の水平インピーダンス実部の分担度

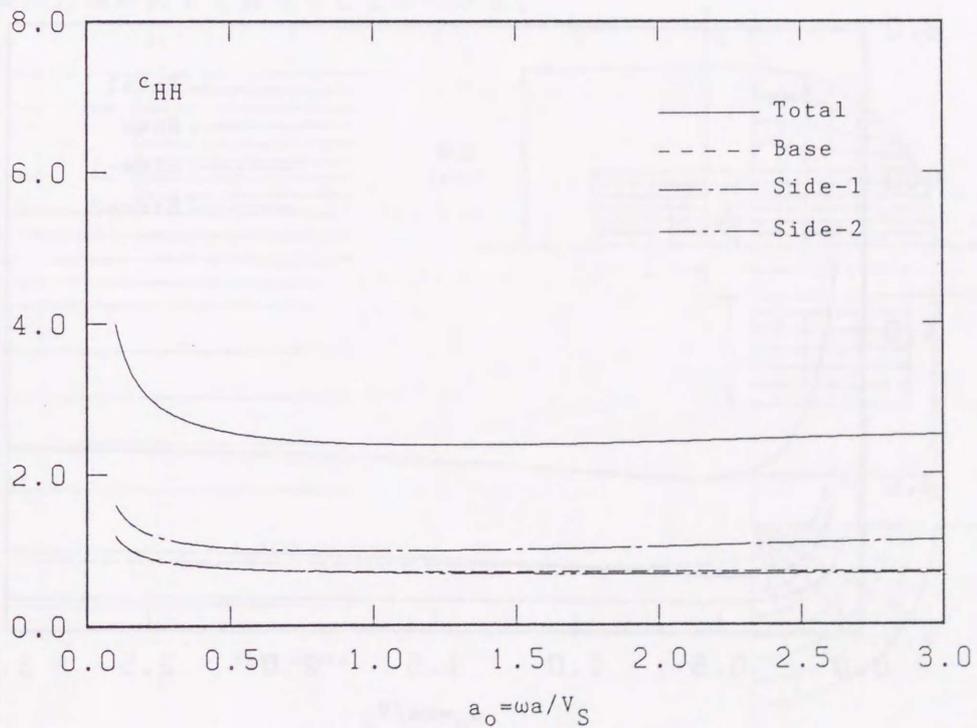


Figure 11.12: 各基礎面の水平インピーダンス虚部の分担度

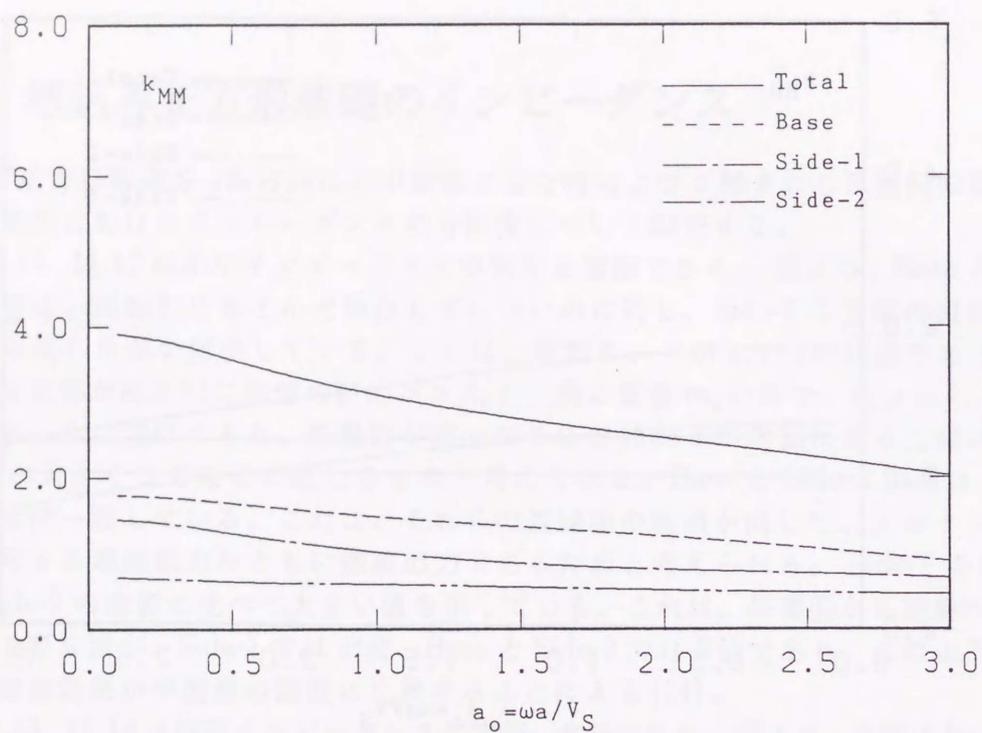


Figure 11.13: 各基礎面の回転インピーダンス実部の分担度

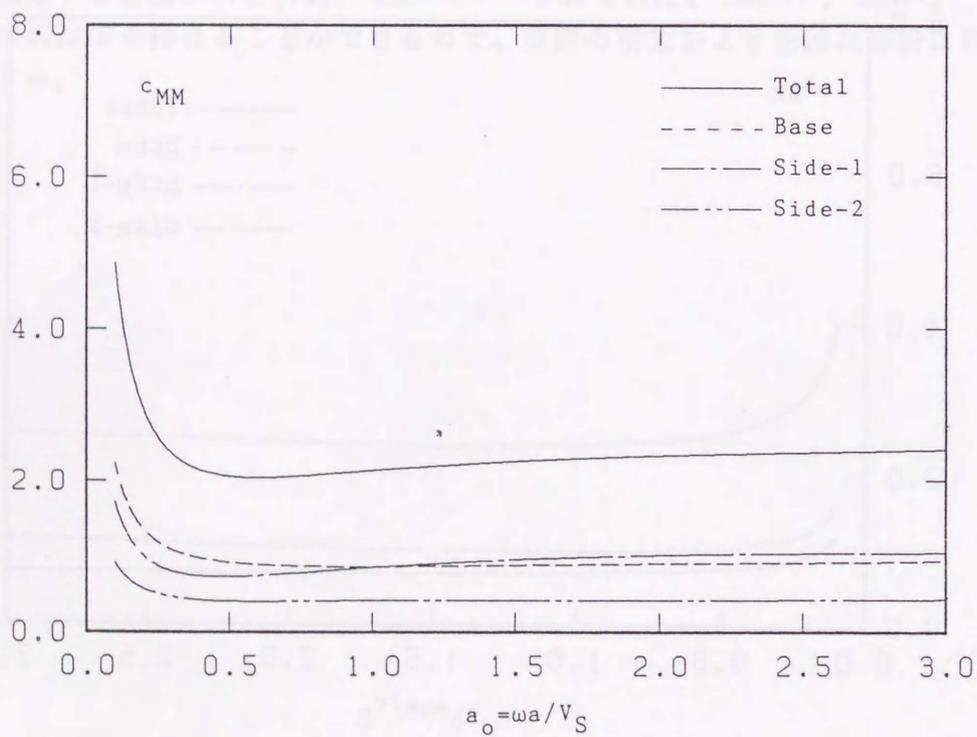


Figure 11.14: 各基礎面の回転インピーダンス虚部の分担度

## 11.4 埋込み矩形基礎のアスペクト比に関する調査

Fig.11.15 は、アスペクト比  $(B/C) = 2.0$  の埋込み長方形基礎の解析モデルである。このモデルは、Fig.11.2 のアスペクト比  $(B/C) = 1.0$  の基礎と等しい基礎の体積を有するよう底面積および埋込み深さを等しく設定している。

Fig.11.16, 11.17 は、それぞれ、水平、回転モードのインピーダンス関数である。図中の  $(x-z)$ ,  $(y-z)$  は、それぞれ  $x-z$  面および  $y-z$  面における運動であることを示す。これらの図より、水平動では  $B/C = 1.0, B/C = 2.0(x-z), B/C = 2.0(y-z)$  の値ともあまり顕著な差異は生じていない。これは、両解析モデルの基礎の体積が等しく、また、地盤との接触面積に大きな差がないためであると考えられる。これに対して、回転動では  $B/C = 2.0(y-z), B/C = 1.0, B/C = 2.0(x-z)$  と振動方向の基礎の断面二次モーメントが大きいほど大きな値となっており、基礎形状および回転軸に大きく依存している。

Fig.11.18, 11.19 は、それぞれ、 $S$ 波の鉛直入射に対する、水平、回転モードの基礎入力動の絶対値である。図中、 $B/C = 1.0$  と  $B/C = 2.0(x-z)$  は、 $S$ 波の波動が  $x$  軸方向に加わる場合、 $B/C = 2.0(y-z)$  は、 $y$  軸方向に加わる場合の結果である。

波動の方向による差異は、水平基礎入力動では、あまり生じていないが、回転基礎入力動では、 $B/C = 2.0(x-z), B/C = 1.0, B/C = 2.0(y-z)$  と振動方向に基礎が長いほど値が大きくなっており、その差異は無視しえない。以上のことより、埋込み長方形基礎においては、同じ鉛直  $S$ 波が入射する場合でも、その波動の方向によって回転に関する基礎入力動が大きく異なることがわかる。

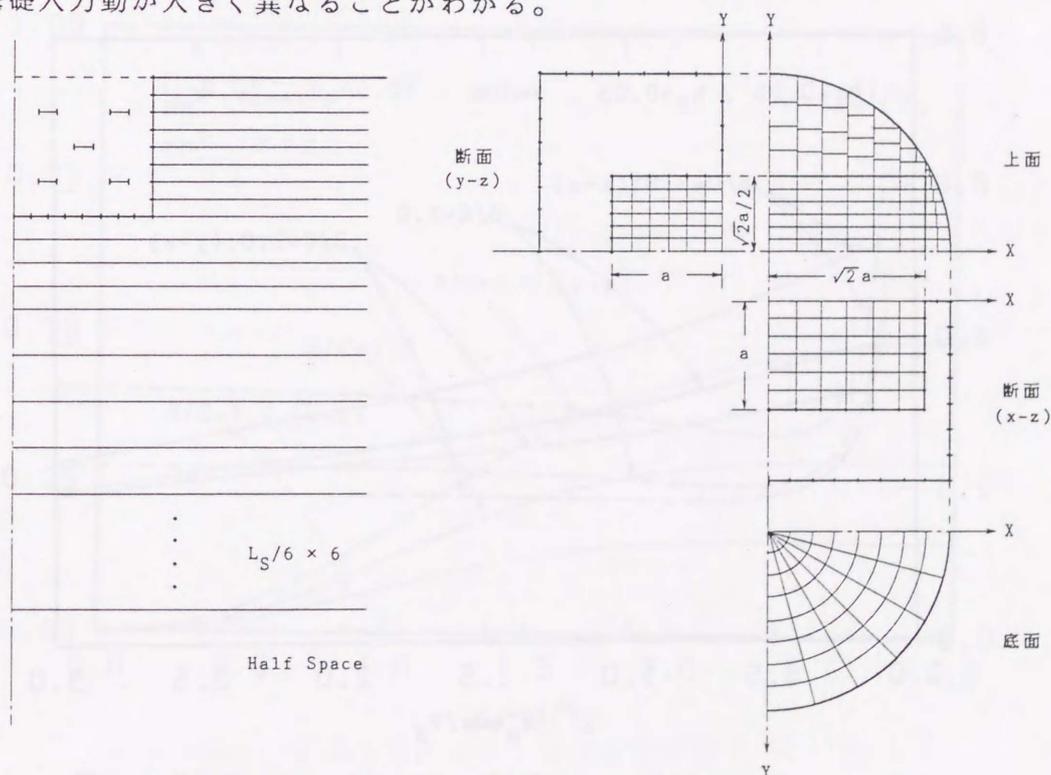


Figure 11.15: 埋込み長方形基礎の解析モデル

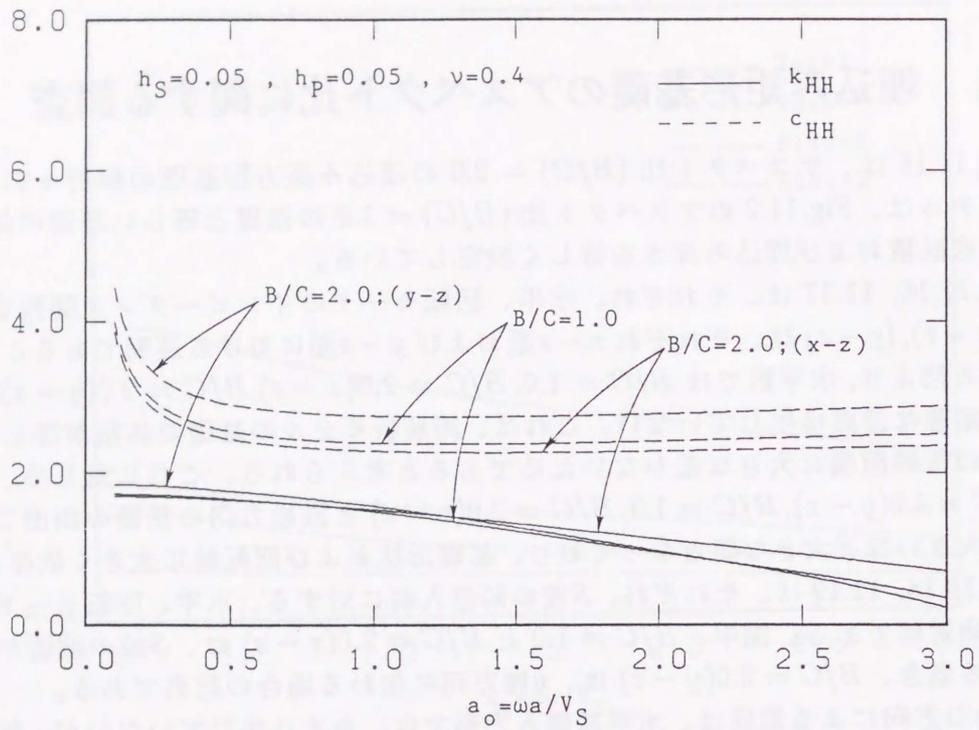


Figure 11.16: アスペクト比の影響 (水平インピーダンス)

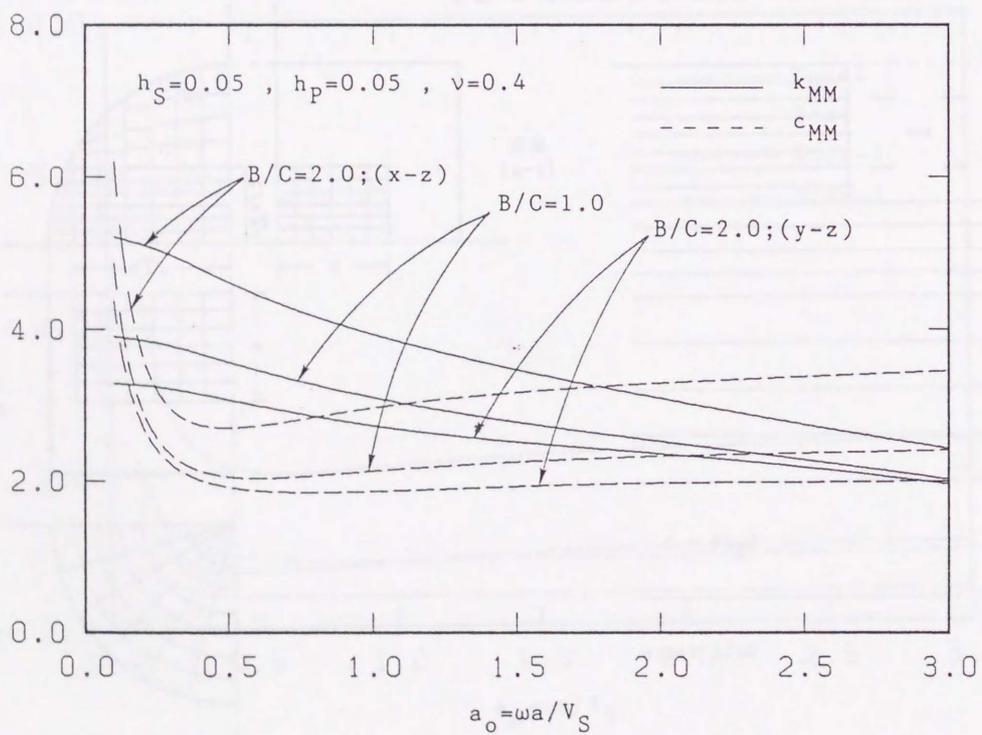


Figure 11.17: アスペクト比の影響 (回転インピーダンス)

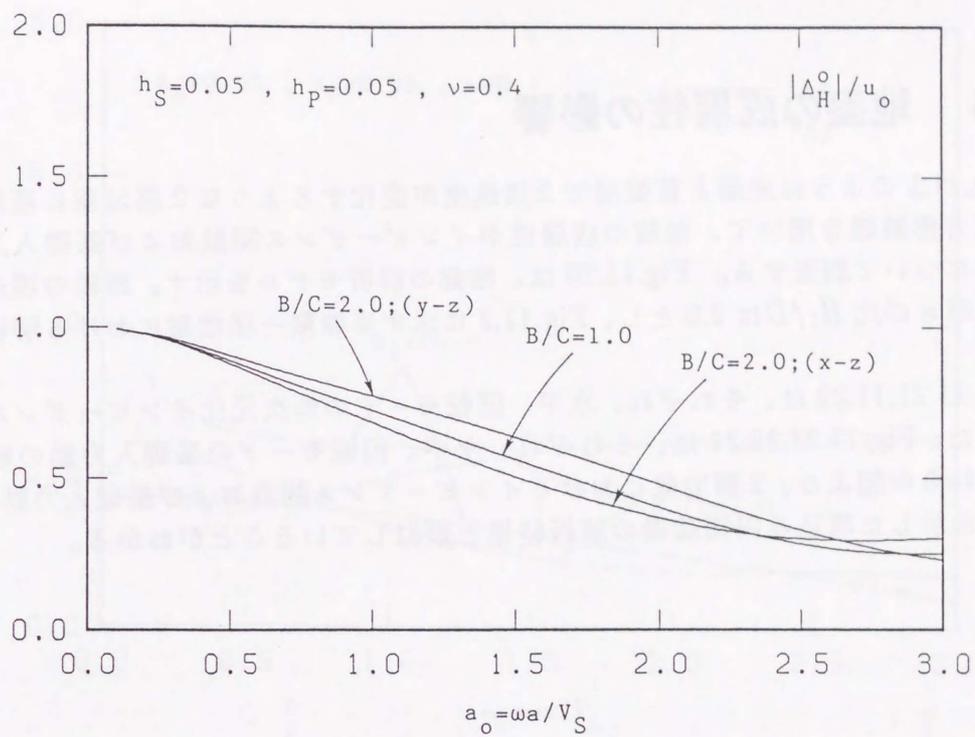


Figure 11.18: アスペクト比の影響（水平基礎入力動の絶対値）

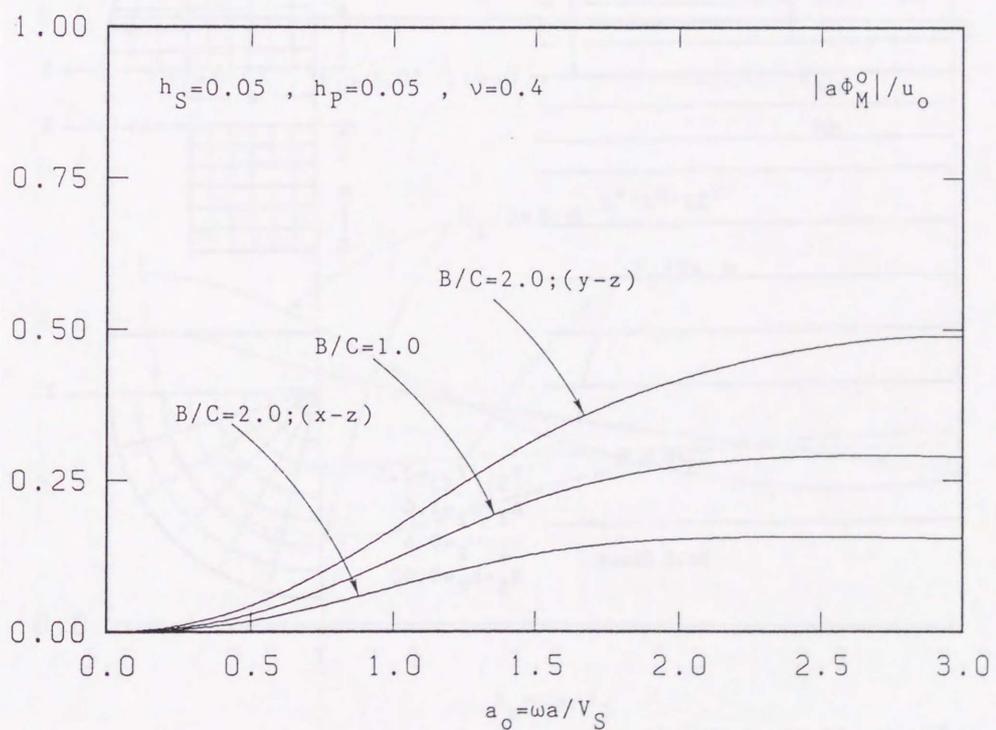


Figure 11.19: アスペクト比の影響（回転基礎入力動の絶対値）

## 11.5 地盤の成層性の影響

Fig.11.1 のように表層と基盤層で  $S$  波速度が変化するような 2 層地盤に埋設された埋込み正方形基礎を用いて、地盤の成層性がインピーダンス関数および基礎入力動に及ぼす影響について調査する。Fig.11.20 は、地盤の解析モデルを示す。基礎の埋込み深さと表層の厚さの比  $H_1/D$  は 2.0 とし、Fig.11.2 に示す半無限一様地盤における解析値と比較する。

Fig.11.21,11.22 は、それぞれ、水平、回転モードの無次元化インピーダンス関数である。また、Fig.11.23,11.24 は、それぞれ、水平、回転モードの基礎入力動の絶対値である。これらの図より、2 層地盤におけるインピーダンス関数および基礎入力動の性状は、第 9 章に示した埋込み円筒基礎の解析結果と類似していることがわかる。

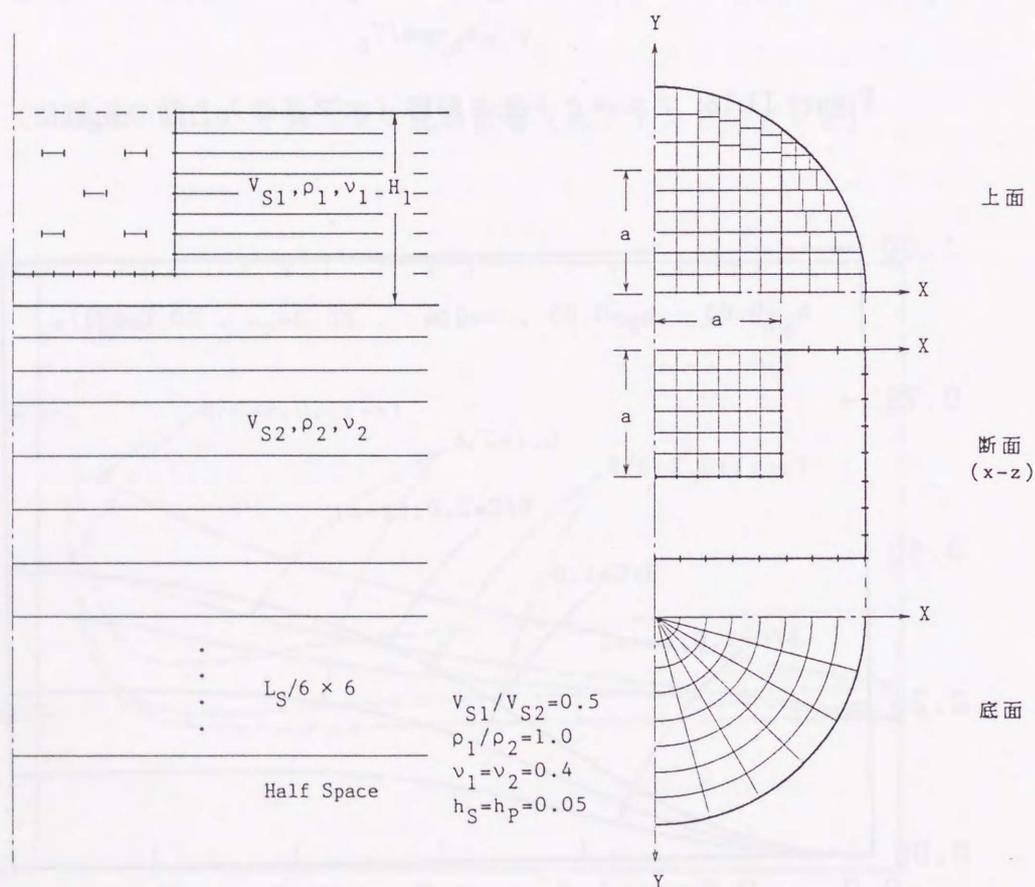


Figure 11.20: 2 層地盤における埋込み正方形基礎の解析モデル

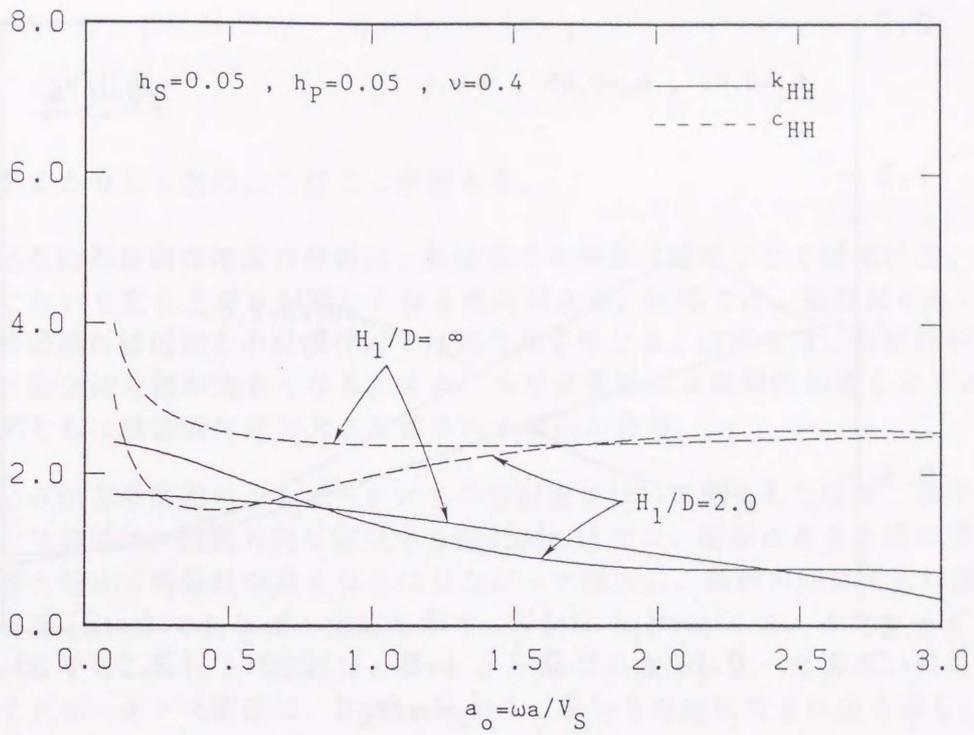


Figure 11.21: 2層地盤における埋込み正方形基礎の水平インピーダンス

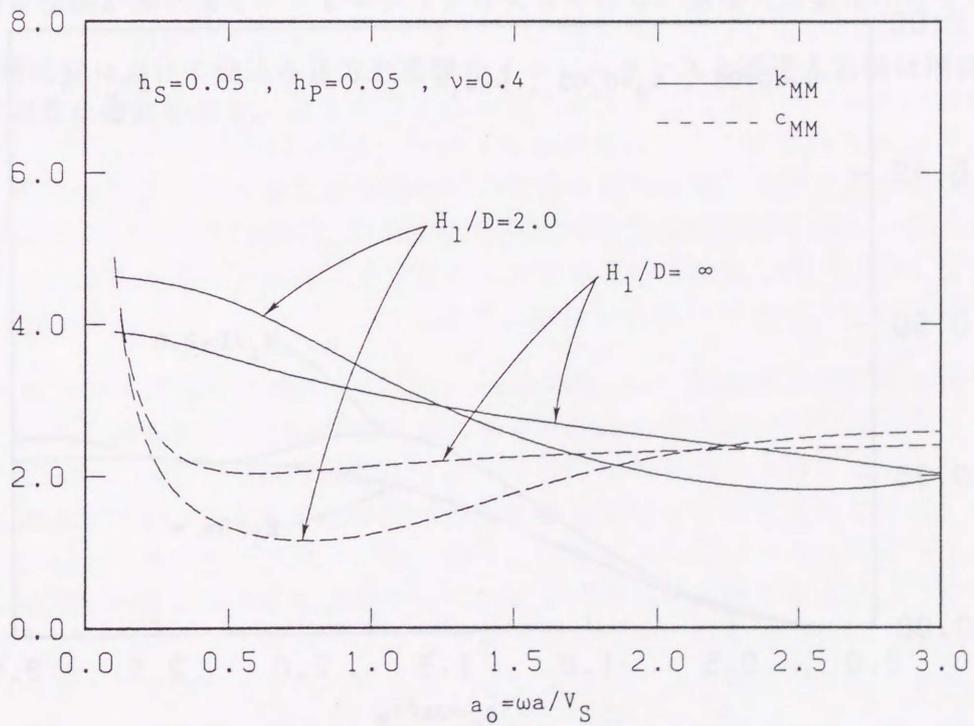


Figure 11.22: 2層地盤における埋込み正方形基礎の回転インピーダンス

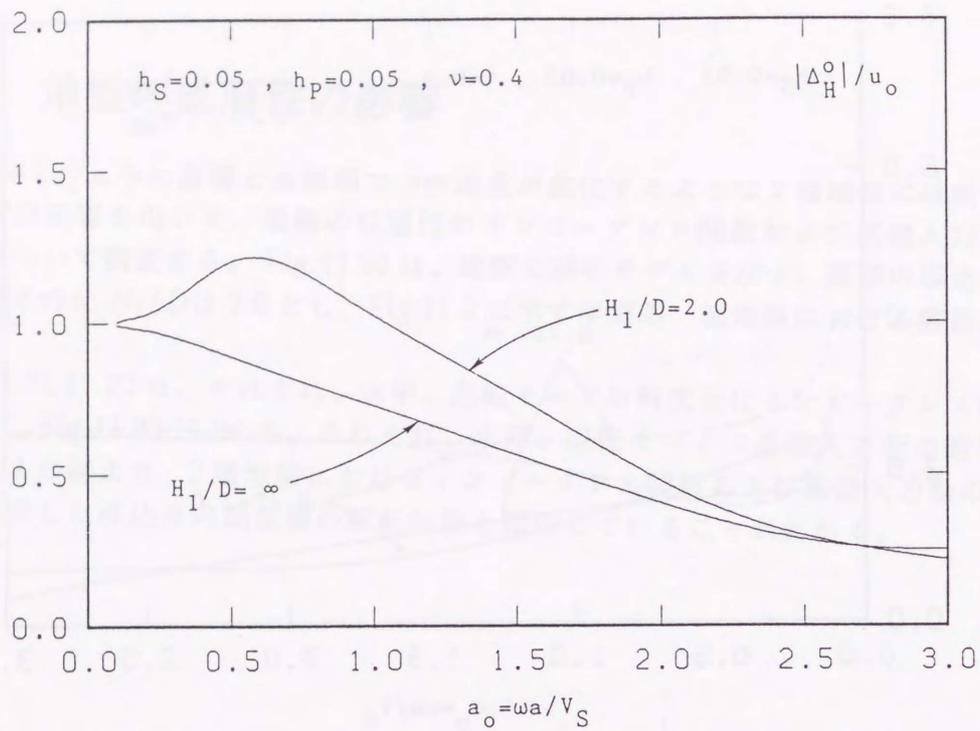


Figure 11.23: 2層地盤における埋込み正方形基礎の水平基礎入力動の絶対値

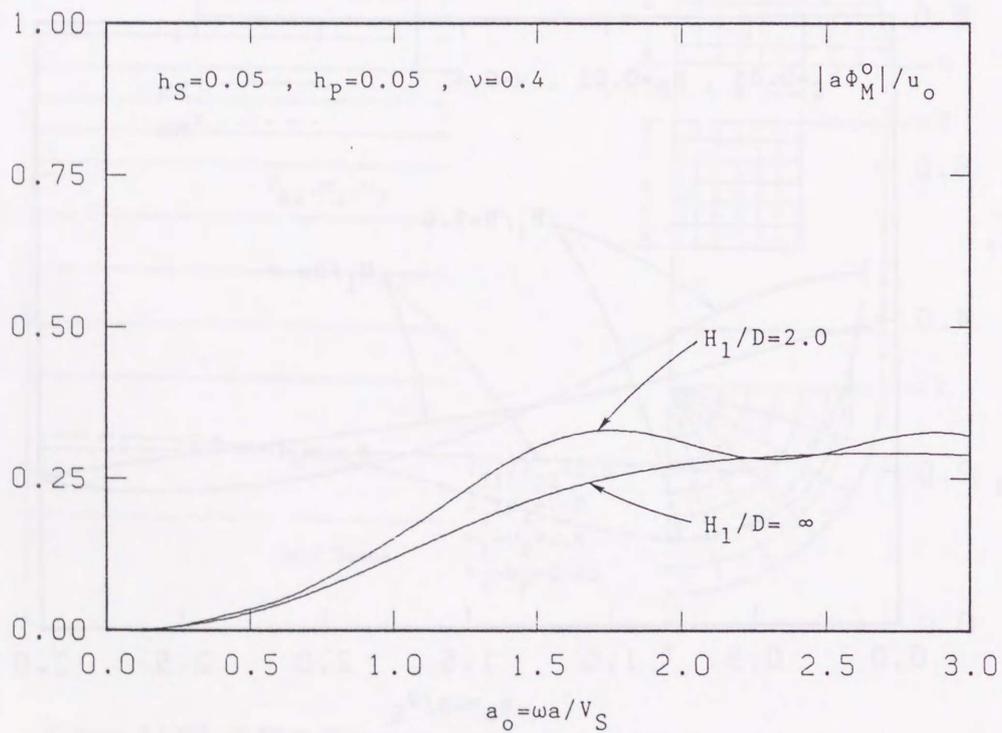


Figure 11.24: 2層地盤における埋込み正方形基礎の回転基礎入力動の絶対値

## 11.6 まとめ

以上をまとめると次のようなことが言える。

1. 埋込み矩形基礎の地反力分布は、基礎面の中央部付近で小さく端部付近、特に隅角部において立ち上がりが増激する傾向がある。実部では、振動数が高いときに、各基礎面の縁辺部と中央部付近では逆位相を生じる。虚部では、振動数が高くなるほど面全体で値が大きくなる。また、水平振動時には振動数が高くなると、実部、虚部ともに地表面付近で大きな値を示す傾向がある。
2. 埋込み正方形基礎のインピーダンスの分担度について調査した結果、水平インピーダンス実部は、振動方向に直交する面 (Side-1) では、前面にある土塊の慣性効果の影響を受けて振動数が高くなるにしたがって減少し、振動方向に平行な面 (Side-2) と底面 (Base) ではほぼ一定値を示す。Side-2 と Base では、インピーダンスがほぼ一致する。Side-1 の虚部は、Base と Side-2 の虚部に比べて大きい値を示す。回転インピーダンス実部は、Base、Side-1、Side-2 の順に大きい値を示し、虚部は、Side-1、Base に比べ、Side-2 が低い値を示す。
3. アスペクト比の影響について調査した結果、水平動ではインピーダンスおよび基礎入力動の値ともあまり顕著な差異は生じない。これに対して、回転動では、振動方向に基礎が長いほどインピーダンスは大きくなり、基礎入力動は小さくなる。
4. 2層地盤における埋込み正方形基礎のインピーダンスと基礎入力動は円筒基礎とほぼ同様な傾向を示す。

# Chapter 12

## 結論

本研究は、多層成層地盤における埋込み基礎の動的相互作用を精度と計算効率よく解析できる手法を開発し、埋込み基礎の動的特性を一端を論じたものである。

本研究では、動的相互作用解析法として、計算効率がよく多層地盤への拡張が容易である薄層法グリーン関数を利用した境界積分方程式法を採用した。本論文第2章では、境界積分方程式法を用いた動的相互作用解析について説明を加え、第3章で薄層法グリーン関数（点加振解、リング状線加振解）の導出法を示した。この解析法においては、薄層法グリーン関数が地盤の深さ方向に有限要素法的な手法を用いて得られる近似解であるため、内部共振現象とグリーン関数応力解の精度低下という二つの重要な問題が発生する。本論文第4章では、内部共振現象の問題を明らかにし、その解決法を示した。第5章では、グリーン関数応力解の精度低下の問題を解決した。これらの概要を述べると以下のようなになる。

1. 薄層法グリーン関数を用いた境界積分方程式法では、内部領域の共振が外部領域の解析にも影響を与え、この影響幅はグリーン関数の精度低下に比例して広がる。この内部共振解は、内部領域に蓋および内部空孔面あるいは内部拘束面を設けることによって解析対象振動数の外へ上昇させることができる。内部拘束面の採用は、配置の分散と設定個数の自由度を高め、蓋および内部空孔面に比較してより少ない要素数で内部共振解の除去が可能となる。
2. 薄層法グリーン関数を用いた境界積分方程式法において問題となる応力場の精度は、グリーン関数応力解の加振点を含む要素上の積分値をある修正条件を用いて再評価することにより改善することができる。弾性多層地盤においては、内部領域の応力が実数であることを修正条件として利用できる。地盤に材料減衰を含む粘弾性多層地盤においては、内部拘束面を加振させても境界面を静止させれば外部応力は発生しないという事実、あるいは外部領域に加振点をもつグリーン関数が内部領域で満足すべき境界積分方程式を修正条件として利用することができる。前者の修正条件は、軸対称基礎のねじれ動に対しては非常に良好な精度を与えるが、水平、回転動に対しては若干精度が減ずる傾向にある。後者の修正条件は、水平、回転動に対しても良好な精度を与える。

本論文第6章では、基礎周辺の地盤性状をさらに詳しく解析できるように、軸対称問題において境界積分方程式法と有限要素法の結合法を示し、その有効性を論じた。第7

章では、軸対称な基礎だけでなく、任意形状基礎、あるいは複数基礎の解析に対応できるように、軸対称な境界面において、薄層法リング状線加振解を用いた境界積分方程式法と動的 Kelvin 解を用いた 3 次元境界要素法を結合する新たな解法を提案し、その有効性を検証した。

3. 本論文第 4 章と第 5 章に示した改良と、第 6 章と第 7 章に示した結合解法により、本論文で開発した解析法は、以下の条件を満足しうる有効な解析法となった。

- (a) 地盤の成層性が考慮できること。
- (b) 埋込み基礎の解析が可能なこと。
- (c) 地盤の半無限性を考慮していること。
- (d) 高振動数においても精度よく、安定した結果が得られること。
- (e) 計算速度が早く、計算費用が安価なこと。
- (f) 境界面での変位境界条件あるいは応力境界条件のいずれもが取り扱えること。
- (g) 基礎周辺の埋戻し土の影響を考慮できること。
- (h) 任意形状基礎の解析ができること。
- (i) 複数基礎の動的相互作用を解析できること。

第 8 章～第 11 章までは、以上の解析法を利用して、多層地盤における埋込み基礎の動的特性について調査を行った。

第 8 章では、多層地盤の基本的な解析例として、弾性および粘弾性二層地盤における基盤着底型円筒剛基礎のねじれインピーダンス解析を行った。解析には 4 種類の地盤剛性比を設定し、振動数に対するねじれインピーダンス特性を調査した。その結果次のようなこと明らかになった。

4. 表層地盤の共振現象は、地盤に材料減衰がなく、表層に比較して基盤層の剛性が相対的に高い場合にのみ現れ、地盤に材料減衰を含む場合は、表層の共振の影響は現れない。したがって、多層地盤の解析においては地盤の粘性を考慮することが重要である。

第 9 章では、基礎側壁におけるはく離、滑動等の非線形現象を側壁の寄与率を表す簡単なパラメータを導入した線形解析によって近似的に評価し、動的相互作用に及ぼす基礎側壁の効果を検討した。地盤構成は、一様地盤浮型基礎、表層浮型基礎、および基盤着底型基礎の基本的な 3 種を選び、円筒剛基礎の水平・回転動連成系の動的相互作用解析を行った。インピーダンス、基礎入力動、および上部構造物を単純なせん断一質点系にモデル化した場合の上部質点の最大応答値を解析した結果をまとめると次のようなことが言える。

5. インピーダンス虚部は、側壁の密着度が高いほど大きくなる。水平基礎入力動は、低振動数域では、側壁のはく離、滑動によって小さくなり、中振動数域以上では、一般に側壁のはく離や滑動によって大きくなる。回転基礎入力動は、低振動数域から中振動数域にかけては、側壁のはく離によって小さくなり、一方、側壁が滑動する場合は、表層および一様地盤浮型基礎の場合において全体的に非常に大きくなる。

6. 一般に上部構造物の固有周期が短い比較的剛な構造物においては、側壁と地盤の密着度をできるだけ高め、はく離、滑動が生じないようにする方が最大応答値を低減できる。これに対して、上部構造物の固有周期が長い柔な構造物では、側壁と地盤の密着度をできるだけ下げる方が最大応答値を低減できる。ただし、基盤着底型基礎の場合は、比較的剛な構造物においても側壁と地盤がはく離する方がわずかに最大応答値は小さくなる。成層構造の違いについて比較すると、側壁の条件の等しい場合は一様地盤浮型基礎の最大応答値が最も低い値となる。地表面基礎では、上部構造物の剛体変位成分が大きくなるので、比較的剛な構造物では、基礎を埋込む方が耐震上有利である。

第10章では、第6章の解析法を利用し、基礎側壁周辺における埋戻し土の硬軟度が動的相互作用に及ぼす影響について調査を行った。解析対象地盤は第9章と同様とし、基礎半径の0.25倍の埋戻し土をもつ円筒剛基礎の水平・回転動連成系の動的相互作用解析を行った。インピーダンス、基礎入力動、および上部構造物を単純なせん断一質点系にモデル化した場合の上部質点の最大応答値を解析した結果をまとめると次のようなことが言える。

7. インピーダンス虚部は、埋戻し土の剛性低下に比例して減少する。インピーダンス実部は、低振動数域では埋戻し土の剛性低下に比例して減少するが、振動数が高くなるとその傾向は逆転する。水平基礎入力動は、低振動数域では、概ね埋戻し土の剛性が低くなるほど小さくなり、中振動数域以上では、逆に埋戻し土の剛性が低くなるほど大きくなる。回転基礎入力動は、地盤構成によってかなり傾向が異なり、表層および一様地盤浮型基礎では、埋戻し土の剛性が低い場合に中振動数域で大きなピーク値をもつ。これに対し、基盤着底型基礎では全体的にそれほど大きな値をもたず、低振動数域では、埋戻し土の剛性が低いほど回転基礎入力動は小さくなる。
8. 表層および一様地盤浮型基礎では、埋戻し土の剛性が高くなるほど上部構造物の剛体変位成分の最大値は小さくなるため、剛体変形が主体的な比較的剛な構造物では表層地盤と基礎の隙間を硬質に埋戻す方が応答量を低減できる。一方、上部構造物の弾性変位成分の最大値は埋戻し土の剛性が低くなるほど小さくなるため、弾性変形が主体的な柔な構造物では軟弱に埋戻す方が応答量を低減できる。基盤着底型基礎では、上部構造物の固有周期に関わらず軟弱に埋戻す方が応答量を低減できる。
9. 上部構造物の高さに関する影響を調査した結果、埋戻し土の剛性の変化に対する上部構造物の最大応答値の傾向は、上部構造物の高さを変えてもまったく変わらない。また、上部構造物が高くなると、固有周期の長い柔な構造物では、埋込み基礎よりも地表面基礎の方が最大応答値が小さくなる。

第9章、第10章の結果より埋込み基礎の動的特性として、次のことが結論づけられる。

10. 構造物全体が比較的剛な場合は、基礎を埋込み、基礎の側壁部分と地盤との密着度を高め、埋戻し土をよく締め固める方が応答量を低減できる。これに対して、構造物が柔な場合は、側壁部分はむしろ地盤との密着度を下げ、基礎の運動の自由度を高める方が応答量を小さくできる。また、柔でかつ高い構造物においては、応答の側面からのみ見れば、地表面基礎で十分であり、基礎を埋め込む必要性はない。

第 11 章では、第 7 章の解析法を利用し、水平・回転動連成系における埋込み矩形基礎の地反力分布、インピーダンスの基礎側壁と底面との分担度、アスペクト比および地盤の成層性がインピーダンスと基礎入力動に及ぼす影響について、半無限一様地盤における埋込み正方形基礎の解析結果を基準にして比較、考察を行った。その結果、以下のような主要な知見を得た。

11. 埋込み正方形基礎の水平インピーダンス実部は、振動方向に直交する面では、前面にある土塊の慣性効果の影響を受けて振動数が高くなるにしたがって減少し、振動方向に平行な面と底面ではほぼ一定値を示す。振動方向に平行な面と底面ではインピーダンスがほぼ一致する。振動方向に直交する面の虚部は、底面と振動方向に平行な面の虚部に比べて大きい値を示す。回転インピーダンス実部は、底面、振動方向に直交する面、振動方向に平行な面の順に大きい値を示し、虚部は、直交する面、底面に比べ、平行な面が低い値を示す。
12. 埋込み長方形基礎では同じ鉛直  $S$  波が入射する場合でも、波動の方向によって回転基礎入力動の値が大きく異なる。

以上総括すると、本研究では、周方向をフーリエ展開した薄層法リング状線加振解を用いた境界積分方程式法を中心に一連の動的相互作用解析法を開発し、多層地盤における埋込み基礎の動特性について論じた。特に、埋込み基礎が地表面基礎に比較して耐震上有利であるのかという問題について、基礎の側壁に生ずるはく離や滑動、あるいは基礎周辺の埋戻し土の影響などを考慮に入れて検討を行った。

本研究で開発した解析法は、線形問題の範囲においては非常に有効なものであり、また、解析結果も埋込み基礎の重要な特性を示唆しているものと思われる。

しかし、本研究で得られた結果は、あくまで弾性論に基づく数値解析によるものであり、これらの結果が実際の耐震設計に取り入れられるには、さらに実験及び実測データと解析値の比較・照合、あるいは非線形解析による詳しい検討などが必要であろう。このような現段階では扱えなかった事象については、今後さらに研究を進めてゆきたい。

## 謝辞

本論文は、博士課程前期、後期の約6年間を通して行った研究をまとめたものである。この研究を進めるにあたって、藤谷義信先生には懇切丁寧な御指導と御助言を賜り、不勉強な筆者を常に温かく見守っていただいた。吉田長行先生には、卒業論文から終始一貫した指導をしていただき、研究の方法を一から十まで徹底的に教えていただいた。両先生には、学問上のみならず人間形成の面においても多くの御配慮をいただき、病気がちであった筆者をいつも励まして下さった。

椋代仁朗先生（現広島工業大学教授）、花井正實先生、嶋津孝之先生をはじめとする広島大学建設構造工学の諸先生方には講義その他を通して幅広いご指導をいただいた。また、花井正實先生、嶋津孝之先生、佐藤 誠先生には、論文審査を通じて貴重なご助言を賜わった。

大学および大学院生時代の多くの先輩や学友にお世話になった。特に、水津育男君（現、熊谷組）には、友達としてそして1年先輩として随分色々なことを教えていただいた。本研究を学位論文としてまとめ得るまでには、同研究室の瀬戸裕君（現、鹿島建設）、中川太郎君（現、フジタ）に大変お世話になった。

ここに、記して深く感謝いたします。

平成4年5月  
藤井大地

# Bibliography

- [1] 田治見 宏:土と構造物の動的相互作用, 第 35 回応力連合講演論文抄録集, pp.19-24, 1985 年 12 月
- [2] 井口道雄:動的相互作用解析の現状と問題点, 建築構造力学の最近の発展, 丸善, pp.767-786, 1987 年 11 月
- [3] 山原 浩:地震の入力機構, 土と構造物の動的相互作用, 土質工学会, pp.135-149
- [4] 妹沢克惟, 金井 清: Decay in the Seismic Vibration of a Simple or Tall Structure by Dissipation of Their Energy into the Ground, 地震研究所彙報, 第 13 号, 第 3 冊, pp.681-697, 1935
- [5] 妹沢克惟, 金井 清: Improved Theory of Energy Dissipation in Seismic Vibrations on a Structure, 地震研究所彙報, 第 14 号, 第 2 冊, pp.164-168, 1936
- [6] Reissner, E. : Stationare, axialsymmetrische durch eine Schüttelnde Masse erregte Schwingungen eines homogenen elastischen Halbraumes, Ingenieur-Archiv, 7 Band, pp.381-396, 1936
- [7] 田治見宏:深い基礎を有する構造物の地震応答について, 第 2 回日本地震工学シンポジウム講演集, pp.255-260, 1966
- [8] Tajimi, H. : Dynamic Analysis of a Structure Embedded in an Elastic Stratum, Proceedings of the 4th World Conference on Earthquake Engineering, Santiago, Chile, Vol.3, Session A-6, pp.53-69, 1969
- [9] Novak. M. and Beredugo, Y.O. : Vertical Vibration of Embedded Footings, Journal of the Soil Mechanics and Foundations Division, ASCE, Vol.98, No.SM12, pp.1291-1310, 1972
- [10] Beredugo, Y.O. and Novak, M. : Coupled Horizontal and Rocking Vibration of Embedded Footings, Canadian Geotechnical Journal, Vol.9, Nov., pp.477-497, 1972
- [11] Novak, M. and Sachs, K. : Torsional and Coupled Vibrations of Embedded Footings, International Journal of Earthquake Engineering and Structural Dynamics, Vol.2, pp.11-33, 1973
- [12] 三浦賢治:長方形に近い断面を持つ地中基礎構造物の振動特性について(その 1), 日本建築学会論文報告集, 第 232 号, pp.71-80, 1975.6

- [13] 三浦賢治：地中基礎構造物の振動特性に及ぼす埋戻土の影響について，日本建築学会論文報告集，第 237 号，pp.87-97，1975.11
- [14] Luco, J.E. : Torsional Response of Structures for SH Waves: the case of hemispherical foundations, Bulletin of the Seismological Society of America, Vol.66, No.1, pp.109-123, 1976
- [15] Apsel, R.J. and Luco, J.E. : Torsional Response of Rigid Embedded Foundation, Journal of the Engineering Mechanics Division, ASCE, Vol.102, No.EM6, pp.957-970, 1976
- [16] Lee, V.W. and Trifunac, M.D. : Body Wave Excitation of Embedded Hemisphere, Proceedings of ASCE, Journal of the Engineering Mechanics Division, Vol.108, No.EM3, pp.546-563, 1982
- [17] Lysmer, J. and Kuhlemeyer, R.L. : Finite Dynamic Model for Infinite Media, Journal of the Engineering Mechanics Division, ASCE, Vol.95, No.EM4, pp.959-977, 1969
- [18] Urlich, C.M. and Kuhlemeyer, R.L. : Coupled Rocking and Lateral Vibrations of Embedded Footings, Canadian Geotechnical Journal, Vol.10, No.145, pp.145-160, 1973
- [19] Kausel, E., Roesset, J.M. and Wass, G. : Dynamic Analysis of Footings on Layered Media, Journal of Engineering Mechanics Division, ASCE, Vol.101, No.EM5, pp.679-693, 1975
- [20] Kausel, E. and Roesset, J.M. : Dynamic Stiffness of Circular Footings, Journal of the Engineering Mechanics Division, ASCE, Vol.101, No.EM6, pp.771-785, 1975
- [21] 田治見宏, 下村幸男：3次元薄層要素による建物—地盤系の動的解析，日本建築学会論文報告集，第 243 号，pp.41-51，1976.5
- [22] Day, S.M. : Finite Element Analysis of Seismic Scattering Problems, thesis presented to the University of California, at San Diego, Calif., in 1977, in partial fulfillment of the requirements for the degree of Doctor of Philosophy
- [23] Day, S.M. and Frazier, G.A. : Seismic Responses of Hemispherical Foundation, Journal of the Engineering Mechanics Division, ASCE, Vol.105, No.EM1, pp.29-41, 1979
- [24] Dasgupta, G. : Foundation Impedance Matrices by Substructure Deletion, ASCE Journal of the Engineering Mechanics Division, Vol.EM3, pp.517-523, 1980
- [25] 上島輝幸, 花田和史, 江刺靖行：地盤—構造物連成系の3次元振動応答解析プログラムの開発と検証，電力中央研究所研究報告：382009，1982

- [26] Kausel, E., Waas, G. et al. : Dynamic Analysis of Footings on Layered Media, ASCE EM5, 1975
- [27] Werkle, H. : Dynamic Finite Element Analysis of Three-Dimensional Soil Models with a Transmitting Element, Earthquake Engineering and Structural Dynamics, Vol.14, pp.41-60, 1986
- [28] Dominguez, J. : Response of Embedded Foundations to Travelling Waves, Rept. R78-24, Department of Civil Engineering, Massachusetts Institute of Technology, Cambridge, MA, 1978
- [29] Karabalis, D.L. and Beskos, D.E. : Dynamic Response of 3-D Embedded Foundations by the Boundary Element Method, Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering Vol.56, pp.91-119, 1986
- [30] Apsel, R.J. : Dynamic Green's Functions for Layered Media and Applications to Boundary-Value Problem, PhD dissertation, Univ. of California, San Diego, La Jolla, California, 1979
- [31] Luco, J.E. and Wong, H.L. : Dynamic Response of a Hemispherical Foundation Embedded in Viscoelastic Half-space, ASCE Journal of Engineering Mechanics, Vol.112, No.12, pp.1363-1374, 1986
- [32] Apsel, R.J. and Luco, J.E. : Impedance Functions for Foundations Embedded in a Layered Medium, An Integral Equation Approach, Earthquake Engineering and Structural Dynamics, Vol.15, pp.213-231, 1987
- [33] Maeda, T. : A Study on the Dynamic Interaction of a Rigid Embedded Foundation and Soil by the Boundary Element Method in 3-Dimensions, Proceedings of the 6th Japan Earthquake Engineering Symposium, pp.1761-1768, 1982
- [34] 松岡理, 八幡夏恵子 : 三次元均質等方弾性体動問題の基本解とその応用 - Mindlin 問題 - その 1, 日本建築学会論文報告集, 第 288 号, pp.73-84, 1980.2
- [35] 松岡理, 八幡夏恵子 : 三次元均質等方弾性体動問題の基本解とその応用 - Mindlin 問題 鉛直方向に点加振が作用する場合 - その 2, 日本建築学会論文報告集, 第 293 号, pp.35-44, 1980.7
- [36] 松岡理, 八幡夏恵子 : 三次元均質等方弾性体動問題の基本解とその応用 - Mindlin 問題 水平方向に点加振が作用する場合 - その 3, 日本建築学会論文報告集, 第 298 号, pp.43-53, 1980.12
- [37] Rizzo, F.J., Shippy, D.J. and Rezaayat, M. : Boundary Integral Equation Analysis for a class of Earth-Structure Interaction Problems, Final Report on NSF Grant CEE-8013461, 1985

- [38] Luco, J.E. and Apsel, R.J. : On the Green's Functions for a Layered Half-Space. Part 1, Bulletin of the Seismological Society of America, Vol.73, No.4, pp.909-929, 1983
- [39] Apsel, R.J. and Luco, J.E. : On the Green's Functions for a Layered Half-Space. Part 2, Bulletin of the Seismological Society of America, Vol.73, No.4, pp.931-951, 1983
- [40] 井口道雄, 涌井栄治: 面内等方性地盤に埋込まれた基礎の動特性に関する研究 (Anti-Plane 状態の Impedance 関数), 日本建築学会関東支部研究報告集, pp.37-40, 1986
- [41] Mita, A. and Luco, J.E. : Dynamic Response of Embedded Foundations, A Hybrid Approach, Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering Vol.63, pp.233-259, 1987
- [42] 吉田一博, 高橋郁夫: 成層地盤中に埋込まれた剛基礎の振動特性について, 日本建築学会大会学術講演梗概集 (関東), pp.791-792, 1988
- [43] Tajimi, H. : A Contribution to Theoretical Prediction of Dynamic Stiffness of Surface Foundations, Proceedings of the 7th World Conference on Earthquake Engineering, Istanbul, Turkey, Vol.5, pp.105-112, 1980
- [44] Waas, G. : Dynamisch Belastete Fundamente auf Geshichtetem Baugrund , VDI Berichte, Nr., Vol.381, pp.185-189, 1980
- [45] Kausel, E. : An Explicit Solution for the Green Functions for Dynamic Loads in Layered Media, Research Report R81-13, Publication No.699, Department of Civil Engineering, M.I.T., Cambridge, Massachusetts, 1981
- [46] Kausel, E. and Peek, R. : Dynamic Loads in the Interior of a Layered Stratum: An Explicit Solution, Bulletin of the Seismological Society of America, Vol.72, No.5, pp.1459-1481, 1982
- [47] Kausel, E. and Peek, R. : Boundary Integral Method for Stratified Soils, Research Report R82-50, MIT, Cambridge, Massachusetts, 1982
- [48] Tajimi, H. and Izumikawa, M. : Dynamic Analysis of Embedded Mat Foundations by Application of Point-Load Solution in a Thin Layered Medium, Proceedings of the 6th Japan Earthquake Engineering Symposium, pp.1745-1752, 1982
- [49] Hull, S. and Kausel, E. : Dynamic Loads in Layered Halfspaces, Proc. 5th EM Division Specialty Conference, ASCE, pp.201-204, 1984
- [50] 増田 潔, 佐々木文夫: 半無限層を考慮した薄層法による点加振解の検討, 日本建築学会大会学術講演梗概集 (東海), pp.221-222, 1985

- [51] Waas, G., Riggs, H.R. and Werkle, H. : Displacement Solutions for Dynamic Loads in Transversely-Isotropic Stratified Media, Earthquake Engineering and Structural Dynamics , Vol.13, pp.173-193, 1985
- [52] 松本 崇, 戸村英正, 濱本卓司, 高野真一郎 : 成層地盤における任意形状埋込剛基礎の動的ばねの評価について, 日本建築学会関東支部研究報告集, pp.29-32, 1986
- [53] Gazetas, G. : Analysis of Machine Foundation Vibrations-State of the Art, Soil Dynamics and Earthquake Engineering, Vol.2, No.2, pp.2-42, 1983
- [54] Luco, J.E. : Seismic Safety Margines Research Program (Phase I), Linear Soil-Structure Interaction, Lawrence Livermore Laboratory, California, UCRL-15272, July, 1980
- [55] 三田彰, 高梨和光 : ハイブリッド法による波動解析 (その 1, その 2), 日本建築学会大会学術講演梗概集 (北陸), pp.815-818, 1983.9
- [56] Thau, S.A. : Radiation and Scattering from a Rigid Inclusion in an Elastic Medium, Journal of Applied Mechanics, Transactions of the ASME, Vol.34, pp.509-511, 1967
- [57] Watson, G.N. : Theory of Bessel Functions, Cambridge University Press, London, pp.358-361, 384, 406, 1922
- [58] 吉田長行, 藤谷義信 : 弾性地盤におけるリング状線加振解, 構造工学論文集, Vol.31B, pp.22-34, 1985
- [59] Wong, H.L. and Luco, J.E. : Tables of Impedance Functions and Input Motions for Rectangular Foundations, USC Report No.CE 78-15, 1978
- [60] Mita, A. and Luco, J.E. : Impedance Functions and Input Motions for Embedded Square Foundations, Journal of Geotechnical Engineering, Vol.115, No.4, pp.491-503, 1989
- [61] Luco, J.E. : Torsion of a Rigid Cylinder Embedded in an Elastic Half Space, Journal of Applied Mechanics, Transactions of the ASME, Vol.43, pp.419-423, 1976
- [62] Morse, P.M. and Feshbach, H. : Methods of Theoretical Physics (Part 1), McGraw-Hill Book Company Inc., New York, pp.372, 1953
- [63] 寺沢寛一編 : 自然科学者のための数学概論 応用編, 岩波書店, pp.542-554, 1979
- [64] たとえば, 数学公式 3 - 特殊関数 -, 岩波書店, pp.211
- [65] 吉田長行, 藤谷義信, 藤井大地 : 基本物理量の相互関係に基づく地盤と基礎の動的相互作用解析, 日本建築学会構造系論文報告集, 第 367 号, pp.103-110, 1986

- [66] 吉田長行：地盤と基礎の動的相互作用問題における基本物理量の相互関係，博士論文，1986
- [67] 佐藤 誠：平行多層地盤に対する調和 SV 波の伝播解析，土木学会論文報告集，第 328 号，pp.57-68，1982
- [68] C.A. プレビア：境界要素法入門，神谷紀生，田中正隆，田中喜久昭共訳，培風館，pp.108，1980

# Appendix A

## 相反定理による境界積分方程式の定式化

境界積分方程式法直接法の基本式の導出法について述べる。これは、境界要素法の基本ともなる式であるが、その導出について詳しく記してある文献が少ないため、ここでは相反定理から出発した導出法を示しておく。

Fig.A.1は、境界積分方程式法の解析モデルを示している。ここに、図中の記号は以下のものを表す。 $V$ : 外部領域、 $V'$ : 内部領域、 $S_f$ : 自由地表面、 $S_d$ : 外部領域と内部領域の境界面、 $n$ : 領域  $V'$ 内に向かう法線ベクトル。

加振点  $x$  が領域  $V$ 内にあるとする。領域  $V$ 内で定義される  $i$  方向の変位と表面力をそれぞれ  $u_i, p_i$  とする。このとき、Fig.A.1 に示すような積分経路を考えると、領域  $V$ 内では次の相反定理が成立する。

$$\int_{S_d+S_e+S_f+S_\infty} \{p_{ij}(x; \xi)u_j(\xi) - u_{ij}(x; \xi)p_j(\xi)\} dS(\xi) = 0 \quad (\text{A.1})$$

ここで、 $S_f$ 上では、 $p_{ij}(x; \xi) = p_i(\xi) = 0$  であるから、

$$\int_{S_d+S_e+S_\infty} \{p_{ij}(x; \xi)u_j(\xi) - u_{ij}(x; \xi)p_j(\xi)\} dS(\xi) = 0 \quad (\text{A.2})$$

また、 $S_\infty(r \rightarrow \infty, z \rightarrow -\infty)$  上では放射条件(進行波の条件)が満足されるので、時間項を  $e^{i\omega t}$  ( $\omega$ : 円振動数) とすると、

$$\begin{aligned} u_{ij}(x; \xi) &\rightarrow A_j \frac{1}{\sqrt{r}} \begin{pmatrix} e^{i(\omega t + \alpha z)} \cdot e^{-\beta r} \\ e^{i(\omega t - \beta r)} \cdot e^{\alpha z} \end{pmatrix} \\ p_{ij}(x; \xi) &\rightarrow A_j D_j(r, z) \frac{1}{\sqrt{r}} \begin{pmatrix} e^{i(\omega t + \alpha z)} \cdot e^{-\beta r} \\ e^{i(\omega t - \beta r)} \cdot e^{\alpha z} \end{pmatrix} \\ u_j(\xi) &\rightarrow B_j \frac{1}{\sqrt{r}} \begin{pmatrix} e^{i(\omega t + \alpha z)} \cdot e^{-\beta r} \\ e^{i(\omega t - \beta r)} \cdot e^{\alpha z} \end{pmatrix} \\ p_j(\xi) &\rightarrow B_j D_j(r, z) \frac{1}{\sqrt{r}} \begin{pmatrix} e^{i(\omega t + \alpha z)} \cdot e^{-\beta r} \\ e^{i(\omega t - \beta r)} \cdot e^{\alpha z} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

ここに、 $A_j, B_j$  は定数、 $D_j(r, z)$  は  $r$  と  $z$  に関する微分演算子、 $\alpha, \beta$  は波数であり、カッコの上側は実体波、下側は表面波を表す。これらを (A.2) 式に代入すると、

$$\int_{S_d+S_e} \{p_{ij}(x; \xi)u_j(\xi) - u_{ij}(x; \xi)p_j(\xi)\} dS(\xi) = 0 \quad (\text{A.3})$$

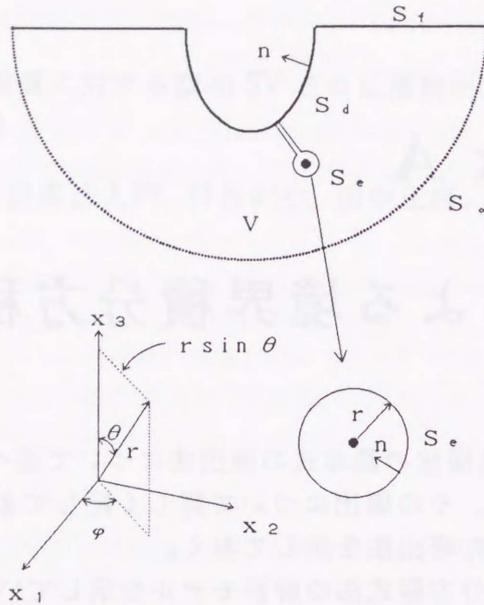


Figure A.1: 境界積分方程式法の解析モデル

次に、 $S_e$ 上の積分を考える。グリーン関数  $u_{ij}(x; \xi)$  は、 $x = \xi$ で特異性を含む静的成分  $u_{ij}^S(x; \xi)$  と特異性を含まない動的成分  $u_{ij}^D(x; \xi)$  に分解できる。

$$u_{ij}(x; \xi) = u_{ij}^S(x; \xi) + u_{ij}^D(x; \xi) \quad (\text{A.4})$$

さらに、静的成分  $u_{ij}^S(x; \xi)$  は、特異性を含む静的 Kelvin 解  $u_{ij}^K(x; \xi)$  とそれ以外の斉次解  $u_{ij}^A(x; \xi)$  に分解できる。

$$u_{ij}^S(x; \xi) = u_{ij}^K(x; \xi) + u_{ij}^A(x; \xi) \quad (\text{A.5})$$

表面力  $p_{ij}(x; \xi)$  についても同様な分解ができるので、 $r = |x - \xi| \rightarrow 0$ としたときの  $S_e$ 上の積分の寄与は静的 Kelvin 解から生じる。

ところで、3次元等方弾性体における静的 Kelvin 解は次式で示される。

$$u_{ij}^K = \frac{1}{16\pi\mu(1-\nu)r} \left[ (3-4\nu)\delta_{ij} + \frac{\partial r}{\partial x_i} \frac{\partial r}{\partial x_j} \right] \quad (\text{A.6})$$

$$p_{ij}^K = -\frac{1}{8\pi(1-\nu)r^2} \left[ \frac{\partial r}{\partial n} \left\{ (1-2\nu)\delta_{ij} + 3\frac{\partial r}{\partial x_i} \frac{\partial r}{\partial x_j} \right\} - (1-2\nu) \left\{ \frac{\partial r}{\partial x_i} n_j - \frac{\partial r}{\partial x_j} n_i \right\} \right] \quad (\text{A.7})$$

ここで、 $\nu$ はポアソン比、 $n$ は法線、 $n_i$ は  $i$ 方向の方向余弦、

$$r = |x - \xi| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}, \quad \frac{\partial r}{\partial x_i} = \frac{x_i}{r} \quad (\text{A.8})$$

である。また、 $S_e$ 上では、

$$x_1 = r \sin \theta \cos \varphi, \quad x_2 = r \sin \theta \sin \varphi, \quad x_3 = r \cos \theta \quad (\text{A.9})$$

となる。\$S\_e\$上の積分素は、\$dS = r^2 \sin \theta d\theta d\varphi\$ であるから、(A.6) 式より、

$$\lim_{r \rightarrow 0} \int_{S_e} u_{ij}^K(x; \xi) p_j(\xi) dS(\xi) = 0 \quad (\text{A.10})$$

一方、\$S\_e\$上では、\$\partial r / \partial n = -1\$ であることと \$i\$ と \$j\$ が一致しないときは、\$\varphi\$ 方向の積分値が 0 になることを考慮すると、(A.7) 式より、

$$\begin{aligned} & \int_{S_e} p_{ij}^K(x; \xi) u_j(\xi) dS(\xi) \\ &= \int_0^\pi d\theta \int_0^{2\pi} d\varphi \frac{1}{8\pi(1-\nu)} \left\{ (1-2\nu) + 3 \begin{Bmatrix} \sin^2 \theta \cos^2 \varphi \\ \sin^2 \theta \sin^2 \varphi \\ \cos^2 \theta \end{Bmatrix} \right\} \sin \theta u_i(\xi) \quad (\text{A.11}) \end{aligned}$$

上式の積分を実行し、\$r = |x - \xi| \rightarrow 0\$ とすると、

$$\lim_{r \rightarrow 0} \int_{S_e} p_{ij}^K u_j(\xi) dS(\xi) = u_i(x) \quad (\text{A.12})$$

したがって、(A.3) 式は次式となる。

$$u_i(x) + \int_{S_d} p_{ij}(x; \xi) u_j(\xi) dS(\xi) = \int_{S_d} u_{ij}(x; \xi) p_j(\xi) dS(\xi) \quad (\text{A.13})$$

上式における \$x\$ 点を \$S\_d\$ 上に移動すれば、境界積分方程式法直接法の基礎式が得られる。

# Appendix B

## 境界積分方程式の軸対称表現

本論では、境界積分方程式の表現を簡略にするため直交デカルト座標系の表現により理論を展開している。そこで、ここでは、実際の解析に使用する境界積分方程式の軸対称表現を導出する。なお、本論でも述べたように、最終的な式の形は直交デカルト座標系のものと同じになる。

### B.1 変位表現

まず、(2.39) 式の両辺の諸量を直交デカルト座標系  $(x, y, z)$  から円筒座標系  $(\rho, \varphi, z)$  に座標変換する。変位  $u_i$  は次式によって変換される。

$$\begin{Bmatrix} u_x \\ u_y \\ u_z \end{Bmatrix} = [T_r(\varphi)] \begin{Bmatrix} u_\rho \\ u_\varphi \\ u_z \end{Bmatrix} \quad (\text{B.1})$$

ここに、

$$[T_r(\varphi)] = \begin{bmatrix} \cos \varphi & -\sin \varphi & 0 \\ \sin \varphi & \cos \varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

同様に、

$$\begin{Bmatrix} \eta_x \\ \eta_y \\ \eta_z \end{Bmatrix} = [T_r(\varphi_e)] \begin{Bmatrix} \eta_\rho \\ \eta_\varphi \\ \eta_z \end{Bmatrix} \quad (\text{B.2})$$

ただし、 $\varphi_e$  は  $\xi$  点の赤道角を表す。また、 $u_{ji}$  は次式によって変換される。

$$[u_{ji}] = [T_r(\varphi)][u_{kl}][T_r(\varphi_e)]^T \quad (\text{B.3})$$

$$; i, j = x, y, z \quad k, l = \rho, \varphi, z$$

(B.1), (B.2), (B.3) 式を (2.39) 式に代入すると、

$$\begin{aligned} [T_r(\varphi)]u_l &= \int_{S_d} [T_r(\varphi)][u_{kl}][T_r(\varphi_e)]^T [T_r(\varphi_e)] \{\eta_k\} dS \\ &= \int_{S_d} [T_r(\varphi)][u_{kl}] \{\eta_k\} dS \end{aligned}$$

したがって、(2.39) 式の円筒座標系の表現は次式のようになる。

$$u_l(x) = \int_{S_d} u_{kl}(\xi; x) \eta_k(\xi) dS \quad (\text{B.4})$$

;  $k, l = \rho, \varphi, z$

また、(B.4) 式は次式のようにも表せる。

$$u_l(\rho, \varphi, z) = \int_{S_d} u_{kl}(\rho_e, \varphi_e, z_e; \rho, \varphi, z) \eta_k(\rho_e, \varphi_e, z_e) dS \quad (\text{B.5})$$

(B.5) 式の諸量を周方向にフーリエ展開表示すると次式のようになる。ただし、以後添字として  $\rho, \varphi, z$  を用いるときはそれぞれに代えて 1, 2, 3 と表記する。

$$u_1 = \sum_{m=0}^{\infty} u_1^m D_m(\varphi), \quad u_2 = \sum_{m=0}^{\infty} u_2^m E_m(\varphi), \quad u_3 = \sum_{m=0}^{\infty} u_3^m D_m(\varphi) \quad (\text{B.6})$$

$$\eta_1 = \sum_{m=0}^{\infty} \eta_1^m D_m(\varphi_e), \quad \eta_2 = \sum_{m=0}^{\infty} \eta_2^m E_m(\varphi_e), \quad \eta_3 = \sum_{m=0}^{\infty} \eta_3^m D_m(\varphi_e) \quad (\text{B.7})$$

ここに、

$$D_m(\varphi) = \begin{pmatrix} \cos m\varphi \\ \sin m\varphi \end{pmatrix}, \quad E_m(\varphi) = \begin{pmatrix} \sin m\varphi \\ -\cos m\varphi \end{pmatrix} \quad ; \text{上下同順}$$

また、 $\bar{\varphi} = \varphi - \varphi_e$  と置くと、

$$\begin{aligned} u_{11} &= \sum_{m=0}^{\infty} \varepsilon_m \cdot u_{11}^m \cos m\bar{\varphi} \\ u_{12} &= \sum_{m=0}^{\infty} \varepsilon_m \cdot u_{12}^m \sin m\bar{\varphi} \\ u_{13} &= \sum_{m=0}^{\infty} \varepsilon_m \cdot u_{13}^m \cos m\bar{\varphi} \\ u_{21} &= -\sum_{m=0}^{\infty} \varepsilon_m \cdot u_{21}^m \sin m\bar{\varphi} \\ u_{22} &= \sum_{m=0}^{\infty} \varepsilon_m \cdot u_{22}^m \cos m\bar{\varphi} \\ u_{23} &= -\sum_{m=0}^{\infty} \varepsilon_m \cdot u_{23}^m \sin m\bar{\varphi} \\ u_{31} &= \sum_{m=0}^{\infty} \varepsilon_m \cdot u_{31}^m \cos m\bar{\varphi} \\ u_{32} &= \sum_{m=0}^{\infty} \varepsilon_m \cdot u_{32}^m \sin m\bar{\varphi} \\ u_{33} &= \sum_{m=0}^{\infty} \varepsilon_m \cdot u_{33}^m \cos m\bar{\varphi} \end{aligned} \quad (\text{B.8})$$

ただし、

$$\varepsilon_m = 2 - \delta_{m0} = \begin{cases} 1 & (m = 0) \\ 2 & (m \geq 1) \end{cases}$$

(B.6),(B.7),(B.8) 式を (B.5) 式に代入すると、

$$u_1^m D_m(\varphi) = \int_{C_d} \int_0^{2\pi} [\varepsilon_m u_{11}^m \cos m\bar{\varphi} D_m(\varphi_e) \eta_1^m - \varepsilon_m u_{21}^m \sin m\bar{\varphi} E_m(\varphi_e) \eta_2^m + \varepsilon_m u_{31}^m \cos m\bar{\varphi} D_m(\varphi_e) \eta_3^m] d\varphi_e \rho_e dC$$

ただし、 $C_d$ は軸対称断面の母線を表す。ここで、

$$\int_0^{2\pi} \cos m\bar{\varphi} D_m(\varphi_e) d\varphi_e = \frac{2\pi}{\varepsilon_m} D_m(\varphi) \quad (\text{B.9})$$

$$\int_0^{2\pi} \sin m\bar{\varphi} E_m(\varphi_e) d\varphi_e = -\frac{2\pi}{\varepsilon_m} D_m(\varphi) \quad (\text{B.10})$$

を考慮すると、

$$u_1^m(\rho, z) = 2\pi \int_{C_d} [u_{11}^m(\rho_e, z_e; \rho, z) \eta_1^m(\rho_e, z_e) + u_{21}^m(\rho_e, z_e; \rho, z) \eta_2^m(\rho_e, z_e) + u_{31}^m(\rho_e, z_e; \rho, z) \eta_3^m(\rho_e, z_e)] \rho_e dC \quad (\text{B.11})$$

同様に、

$$u_3^m(\rho, z) = 2\pi \int_{C_d} [u_{13}^m(\rho_e, z_e; \rho, z) \eta_1^m(\rho_e, z_e) + u_{23}^m(\rho_e, z_e; \rho, z) \eta_2^m(\rho_e, z_e) + u_{33}^m(\rho_e, z_e; \rho, z) \eta_3^m(\rho_e, z_e)] \rho_e dC \quad (\text{B.12})$$

また、

$$\int_0^{2\pi} \sin m\bar{\varphi} D_m(\varphi_e) d\varphi_e = \frac{2\pi}{\varepsilon_m} E_m(\varphi) \quad (\text{B.13})$$

$$\int_0^{2\pi} \cos m\bar{\varphi} E_m(\varphi_e) d\varphi_e = -\frac{2\pi}{\varepsilon_m} E_m(\varphi) \quad (\text{B.14})$$

を考慮すると、

$$u_2^m(\rho, z) = 2\pi \int_{C_d} [u_{12}^m(\rho_e, z_e; \rho, z) \eta_1^m(\rho_e, z_e) + u_{22}^m(\rho_e, z_e; \rho, z) \eta_2^m(\rho_e, z_e) + u_{32}^m(\rho_e, z_e; \rho, z) \eta_3^m(\rho_e, z_e)] \rho_e dC \quad (\text{B.15})$$

以上をまとめると、

$$u_l^m(\rho, z) = 2\pi \int_{C_d} u_{kl}^m(\rho_e, z_e; \rho, z) \eta_k^m(\rho_e, z_e) \rho_e dC \quad (\text{B.16})$$

$$; k, l = \rho, \varphi, z$$

ここに、 $u_{kl}^m$ は  $m$  波のリング状線加振解を表す。

## B.2 表面力表現

円筒座標系の歪-変位関係式に (B.5) 式を代入すると、歪が次式のように得られる。

$$\begin{aligned}\varepsilon_{11} &= \int_{S_d} \varepsilon_{k11} \eta_k dS, & 2\varepsilon_{12} &= \int_{S_d} 2\varepsilon_{k12} \eta_k dS \\ \varepsilon_{22} &= \int_{S_d} \varepsilon_{k22} \eta_k dS, & 2\varepsilon_{23} &= \int_{S_d} 2\varepsilon_{k23} \eta_k dS \\ \varepsilon_{33} &= \int_{S_d} \varepsilon_{k33} \eta_k dS, & 2\varepsilon_{31} &= \int_{S_d} 2\varepsilon_{k31} \eta_k dS\end{aligned}\quad (\text{B.17})$$

ここに、

$$\begin{aligned}\varepsilon_{k11} &= \frac{\partial u_{k1}}{\partial \rho}, & 2\varepsilon_{k12} &= \frac{\partial u_{k2}}{\partial \rho} - \frac{u_{k2}}{\rho} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial u_{k1}}{\partial \varphi} \\ \varepsilon_{k22} &= \frac{1}{\rho} \frac{\partial u_{k2}}{\partial \varphi} + \frac{u_{k1}}{\rho}, & 2\varepsilon_{k23} &= \frac{1}{\rho} \frac{\partial u_{k3}}{\partial \varphi} + \frac{\partial u_{k2}}{\partial z} \\ \varepsilon_{k33} &= \frac{\partial u_{k3}}{\partial z}, & 2\varepsilon_{k31} &= \frac{\partial u_{k1}}{\partial z} + \frac{\partial u_{k3}}{\partial \rho}\end{aligned}\quad (\text{B.18})$$

応力-歪関係式により、応力は次式となる。

$$\sigma_{ij} = \int_{S_d} \sigma_{kij} \eta_k dS \quad (\text{B.19})$$

ここに、

$$\sigma_{kij} = \lambda \Delta_k \delta_{ij} + 2\mu \varepsilon_{kij} \quad (\text{B.20})$$

ただし、 $\Delta_k = \varepsilon_{k11} + \varepsilon_{k22} + \varepsilon_{k33}$ 、 $\delta_{ij}$  はクロネッカのデルタ記号。

$S_d$  上の加振点近傍の積分に注意すれば、表面力は次式となる。

$$\begin{aligned}p_l(\rho, \varphi, z) &= c_{kl} \eta_l(\rho, \varphi, z) + \int_{S_d} p_{kl}(\rho_e, \varphi_e, z_e; \rho, \varphi, z) \eta_k(\rho_e, \varphi_e, z_e) dS \\ &\quad ; k, l = \rho, \varphi, z\end{aligned}\quad (\text{B.21})$$

ここに、

$$p_{kl} = \sigma_{kl1} n_1 + \sigma_{kl2} n_2 + \sigma_{kl3} n_3 \quad (\text{B.22})$$

ただし、 $c_{kl} = (\pm 1/2) \delta_{kl}$ 。(B.21) 式は (2.41) 式の円筒座標系の表現である。

次に、(B.21) 式の軸対称表現を求める。軸対称問題では  $n_2 = 0$  であるから、(B.22) 式は、

$$p_{kl} = \sigma_{kl1} n_1 + \sigma_{kl3} n_3 \quad (\text{B.23})$$

となる。上式に (B.20) 式を代入する。

$$\begin{aligned}p_{k1} &= (\lambda \Delta_k + 2\mu \varepsilon_{k11}) n_1 + 2\mu \varepsilon_{k31} n_3 \\ p_{k2} &= 2\mu \varepsilon_{k12} n_1 + 2\mu \varepsilon_{k23} n_3 \\ p_{k3} &= (\lambda \Delta_k + 2\mu \varepsilon_{k33}) n_3 + 2\mu \varepsilon_{k31} n_1\end{aligned}\quad (\text{B.24})$$

上式に (B.18) 式を代入する。

$$\begin{aligned}
 p_{k1} &= \left\{ \lambda \left( \frac{\partial u_{k1}}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial u_{k2}}{\partial \varphi} + \frac{u_{k1}}{\rho} + \frac{\partial u_{k3}}{\partial z} \right) + 2\mu \frac{\partial u_{k1}}{\partial \rho} \right\} n_1 + \mu \left( \frac{\partial u_{k1}}{\partial z} + \frac{\partial u_{k3}}{\partial \rho} \right) n_3 \\
 p_{k2} &= \mu \left( \frac{\partial u_{k2}}{\partial \rho} - \frac{u_{k2}}{\rho} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial u_{k1}}{\partial \varphi} \right) n_1 + \mu \left( \frac{1}{\rho} \frac{\partial u_{k3}}{\partial \varphi} + \frac{\partial u_{k2}}{\partial z} \right) n_3 \\
 p_{k3} &= \left\{ \lambda \left( \frac{\partial u_{k1}}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial u_{k2}}{\partial \varphi} + \frac{u_{k1}}{\rho} + \frac{\partial u_{k3}}{\partial z} \right) + 2\mu \frac{\partial u_{k3}}{\partial z} \right\} n_3 + \mu \left( \frac{\partial u_{k1}}{\partial z} + \frac{\partial u_{k3}}{\partial \rho} \right) n_1
 \end{aligned} \tag{B.25}$$

(B.25) 式に (B.8) 式を代入する。

$$\begin{aligned}
 p_{k1} &= \begin{Bmatrix} p_{11} \\ p_{21} \\ p_{31} \end{Bmatrix} = \sum_{m=0}^{\infty} \varepsilon_m \left[ \left\{ \lambda \left( \frac{\partial u_{k1}^m}{\partial \rho} + \frac{m}{\rho} u_{k2}^m + \frac{u_{k1}^m}{\rho} + \frac{\partial u_{k3}^m}{\partial z} \right) \right. \right. \\
 &\quad \left. \left. + 2\mu \frac{\partial u_{k1}^m}{\partial \rho} \right\} n_1 + \mu \left( \frac{\partial u_{k1}^m}{\partial z} + \frac{\partial u_{k3}^m}{\partial \rho} \right) n_3 \right] \begin{Bmatrix} \cos m\bar{\varphi} \\ -\sin m\bar{\varphi} \\ \cos m\bar{\varphi} \end{Bmatrix} \\
 p_{k2} &= \begin{Bmatrix} p_{12} \\ p_{22} \\ p_{32} \end{Bmatrix} = \sum_{m=0}^{\infty} \varepsilon_m \left[ \mu \left( \frac{\partial u_{k2}^m}{\partial \rho} - \frac{u_{k2}^m}{\rho} + \frac{m}{\rho} u_{k1}^m \right) n_1 \right. \\
 &\quad \left. + \mu \left( -\frac{m}{\rho} u_{k3}^m + \frac{\partial u_{k2}^m}{\partial z} \right) n_3 \right] \begin{Bmatrix} \sin m\bar{\varphi} \\ \cos m\bar{\varphi} \\ \sin m\bar{\varphi} \end{Bmatrix} \\
 p_{k3} &= \begin{Bmatrix} p_{13} \\ p_{23} \\ p_{33} \end{Bmatrix} = \sum_{m=0}^{\infty} \varepsilon_m \left[ \left\{ \lambda \left( \frac{\partial u_{k1}^m}{\partial \rho} + \frac{m}{\rho} u_{k2}^m + \frac{u_{k1}^m}{\rho} + \frac{\partial u_{k3}^m}{\partial z} \right) \right. \right. \\
 &\quad \left. \left. + 2\mu \frac{\partial u_{k3}^m}{\partial z} \right\} n_3 + \mu \left( \frac{\partial u_{k1}^m}{\partial z} + \frac{\partial u_{k3}^m}{\partial \rho} \right) n_1 \right] \begin{Bmatrix} \cos m\bar{\varphi} \\ -\sin m\bar{\varphi} \\ \cos m\bar{\varphi} \end{Bmatrix}
 \end{aligned} \tag{B.26}$$

表面力の周方向展開表示を次式とする。

$$p_1 = \sum_{m=0}^{\infty} p_1^m D_m(\varphi), \quad p_2 = \sum_{m=0}^{\infty} p_2^m E_m(\varphi), \quad p_3 = \sum_{m=0}^{\infty} p_3^m D_m(\varphi) \tag{B.27}$$

(B.7),(B.26),(B.27) 式を (B.21) 式に代入し、周方向の積分を行うと次式を得る。

$$p_l^m(\rho, z) = c_{kl} \eta_l^m(\rho, z) + 2\pi \int_{C_d} p_{kl}^m(\rho_e, z_e; \rho, z) \eta_k^m(\rho_e, z_e) \rho_e dC \tag{B.28}$$

ここに、

$$\begin{aligned}
 p_{k1}^m &= (\lambda \Delta_k^m + 2\mu \varepsilon_{k11}^m) n_1 + 2\mu \varepsilon_{k31}^m n_3 \\
 p_{k2}^m &= 2\mu \varepsilon_{k12}^m n_1 + 2\mu \varepsilon_{k23}^m n_3 \\
 p_{k3}^m &= (\lambda \Delta_k^m + 2\mu \varepsilon_{k33}^m) n_3 + 2\mu \varepsilon_{k31}^m n_1
 \end{aligned} \tag{B.29}$$

$$\Delta_k^m = \varepsilon_{k11}^m + \varepsilon_{k22}^m + \varepsilon_{k33}^m$$

$$\begin{aligned} \varepsilon_{k11}^m &= \frac{\partial u_{k1}^m}{\partial \rho}, & 2\varepsilon_{k12}^m &= \frac{\partial u_{k2}^m}{\partial \rho} - \frac{u_{k2}^m}{\rho} + \frac{m}{\rho} u_{k1}^m \\ \varepsilon_{k22}^m &= \frac{m}{\rho} u_{k2}^m + \frac{u_{k1}^m}{\rho}, & 2\varepsilon_{k23}^m &= -\frac{m}{\rho} u_{k3}^m + \frac{\partial u_{k2}^m}{\partial z} \\ \varepsilon_{k33}^m &= \frac{\partial u_{k3}^m}{\partial z}, & 2\varepsilon_{k31}^m &= \frac{\partial u_{k1}^m}{\partial z} + \frac{\partial u_{k3}^m}{\partial \rho} \end{aligned} \quad (\text{B.30})$$

(B.16) 式および (B.28) 式が、(2.39),(2.41) 式の軸対称表現である。いま、 $\xi = (\rho_e, z_e)$ ,  $x = (\rho, z)$ ,  $2\pi\rho_e dC = dS$  と置けば、(B.16),(B.28) 式は、

$$u_i^m(x) = \int_{S_d} u_{ji}^m(\xi; x) \eta_j^m(\xi) dS(\xi) \quad (\text{B.31})$$

$$p_i^m(x) = c_{ji} \eta_j^m(x) + \int_{S_d} p_{ji}(\xi; x) \eta_j^m(\xi) dS(\xi) \quad (\text{B.32})$$

$; i, j = \rho, \varphi, z$

となり、これは、(2.39),(2.41) 式と同一の形式となる。

# Appendix C

## インピーダンスの実部と虚部の関係

インピーダンスの実部と虚部の関係について、文献 [65],[66] から必要な部分を引用しておく。

調和運動する基礎は、一つの振動源である。したがって、インピーダンスの実部と虚部の間に因果律が存在する可能性がある。複素振動数  $z = \omega + iy$  の関数  $H(z)$  が  $z$  の下半平面 (または上半平面) において正則で、かつ  $H(z) \rightarrow 0$  ( $|z| \rightarrow \infty$ ) であれば、下半平面 (または上半平面) を囲む積分路に Cauchy の積分定理を適用して、次のような実軸上の積分式が得られる。

$$H(\omega_0) = \frac{i}{\pi} P \int_{-\infty}^{\infty} \frac{H(\omega)}{\omega - \omega_0} d\omega \quad (C.1)$$

$P$  は Cauchy の主値積分を意味する。

ここで、関数  $H(\omega)$  を実部と虚部に分ける。

$$H(\omega) = H^r(\omega) + iH^c(\omega) \quad (C.2)$$

これを (C.1) 式に代入して実部と虚部に関し整理すると次式を得る。ただし、 $\omega$  と  $\omega_0$  の表記を交換する。

$$H^r(\omega) = -\frac{1}{\pi} P \int_{-\infty}^{\infty} \frac{H^c(\omega_0)}{\omega_0 - \omega} d\omega_0 \quad (C.3)$$

$$H^c(\omega) = \frac{1}{\pi} P \int_{-\infty}^{\infty} \frac{H^r(\omega_0)}{\omega_0 - \omega} d\omega_0 \quad (C.4)$$

上式を、ヒルベルト (Hilbert) の関係、またはヒルベルト変換という [62]。

ここで、関数  $H(\omega)$  が実時間上の実関数を周波数領域へ Fourier 変換した量であるならば、関数  $H(\omega)$  の実部は  $\omega$  に関し偶関数、その虚部は奇関数である。

$$H^r(-\omega) = H^r(\omega), \quad H^c(-\omega) = -H^c(\omega) \quad (C.5)$$

この関係を用いて (C.3),(C.4) 式を変形すると次式を得る。

$$H^r(\omega) = -\frac{2}{\pi} P \int_0^{\infty} \frac{\omega_0 H^c(\omega_0)}{\omega_0^2 - \omega^2} d\omega_0 \quad (C.6)$$

$$H^c(\omega) = \frac{2\omega}{\pi} P \int_0^{\infty} \frac{H^r(\omega_0)}{\omega_0^2 - \omega^2} d\omega_0 \quad (C.7)$$

上式は波動の散乱場理論において極めて有用な式となっている。しかし、インピーダンス関数のように  $|\omega| \rightarrow \infty$  のとき虚部が発散する場合には適用されない。文献 [63] によれば、“こういう場合にも、もし  $\{H(\omega) - H(0)\}/\omega^2$  が  $\omega = 0$  でも有界” で、この関数が (C.1) 式の成立条件を満たしていれば、この関数に対して (C.6), (C.7) 式の関係が成立する。

そこで、関数  $H(\omega)$  を次のように置く。

$$H(\omega) = \frac{k_{ij}(\omega) - k_{ij}(0) + i\omega\{c_{ij}(\omega) - c_{ij}(0)\}}{\omega^2} \quad (\text{C.8})$$

(C.8) 式を (C.6), (C.7) 式に代入すると、インピーダンスの実部と虚部に関する次の関係式が得られる。

$$k_{ij}(\omega) = -\frac{2\omega^2}{\pi} \text{P} \int_0^\infty \frac{c_{ij}(\omega_0)}{\omega_0^2 - \omega^2} d\omega_0 + k_{ij}(0) \quad (\text{C.9})$$

$$c_{ij}(\omega) = \frac{2\omega^2}{\pi} \text{P} \int_0^\infty \frac{k_{ij}(\omega_0) - k_{ij}(0)}{\omega_0^2(\omega_0^2 - \omega^2)} d\omega_0 + c_{ij}(0) \quad (\text{C.10})$$

上式によれば、インピーダンスの虚部と静的インピーダンスが知られていれば、インピーダンス実部を、またインピーダンスの実部と振動数 0 の減衰係数が知られていれば、インピーダンスの虚部をそれぞれ積分変換によって求めることができる。

## Appendix D

### 多層地盤における入反射場解析

多層地盤における入反射場変位および応力の導出法を示す。なお、以下の導出法は文献 [67] を参考にしている。

#### D.1 平面波の波動方程式

直交デカルト座標系  $(x, y, z)$  における 3 次元弾性体の運動方程式は、現象が  $y$  方向に一様で変化がないとすれば、次式のように書ける。

$$\rho \frac{\partial^2 u_x}{\partial t^2} = (\lambda + \mu) \frac{\partial \Delta}{\partial x} + \mu \nabla^2 u_x \quad (\text{D.1})$$

$$\rho \frac{\partial^2 u_y}{\partial t^2} = \mu \nabla^2 u_y \quad (\text{D.2})$$

$$\rho \frac{\partial^2 u_z}{\partial t^2} = (\lambda + \mu) \frac{\partial \Delta}{\partial z} + \mu \nabla^2 u_z \quad (\text{D.3})$$

ここに、

$$\Delta = \frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial u_z}{\partial z}, \quad \nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

$\rho$  は地盤密度、 $\lambda, \mu$  はラーメの定数を表す。(D.2) 式からわかるように、変位の  $y$  成分  $u_y$  についての式には他の変位成分が含まれていないので、他の変位成分とは独立に取り扱うことができる。

つぎに、

$$u_x = \frac{\partial \phi}{\partial x} + \frac{\partial \psi}{\partial z} \quad (\text{D.4})$$

$$u_z = \frac{\partial \phi}{\partial z} - \frac{\partial \psi}{\partial x} \quad (\text{D.5})$$

で定義される変位ポテンシャル  $\phi, \psi$  を用いると、 $\phi, \psi$  は、波動方程式

$$\frac{1}{V_S^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} = \nabla^2 \psi \quad (\text{D.6})$$

$$\frac{1}{V_P^2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} = \nabla^2 \phi \quad (\text{D.7})$$

の解となる。ただし、 $V_S, V_P$ は、それぞれ  $S$ 波と  $P$ 波の速度を表す。波動方程式 (D.2) の変位  $u_y$ は  $SH$ 波を表し、(D.6),(D.7) 式から導かれる変位はそれぞれ  $SV$ 波と  $P$ 波を表す。

波動方程式 (D.2),(D.6),(D.7) の解の時間項を  $e^{i\omega t}$ と仮定すると、次のような Helmholtz 方程式が得られる。

$$\nabla^2 u_y + k_S^2 u_y = 0 \quad (D.8)$$

$$\nabla^2 \psi + k_S^2 \psi = 0 \quad (D.9)$$

$$\nabla^2 \phi + k_P^2 \phi = 0 \quad (D.10)$$

ここに、 $k_S, k_P$ は、それぞれ  $S$ 波と  $P$ 波の波数を表し、

$$k_S^2 = \frac{\rho\omega^2}{\mu} = \frac{\omega^2}{V_S^2}, \quad k_P^2 = \frac{\rho\omega^2}{\lambda + 2\mu} = \frac{\omega^2}{V_P^2} \quad (D.11)$$

である。

## D.2 $SH$ 波入射の場合

まず、 $SH$ 波入射の場合の入反射場変位と表面力の解析法について述べる。

Fig.D.1 に示す第  $n$  層内の変位  $u_{yn}$ は、上昇波および下降波の振幅を  $A_n, B_n$ 、入射角を  $\beta_n$ とすると次式のように表せる。なお、以下では時間項  $e^{i\omega t}$ は省略する。

$$u_{yn} = U_n(z_n) e^{-ik_{Sn} \sin \beta_n x} \quad (D.12)$$

ここに、

$$U_n(z_n) = A_n e^{-ik_{Sn} \cos \beta_n z_n} + B_n e^{ik_{Sn} \cos \beta_n z_n}$$

ただし、 $z_n$ は第  $n$  層内の局所座標を表す。(D.12) 式は (D.8) 式を満足している。

また、第  $n$  層内のせん断応力  $\tau_{yzn}$ は、次式のように表せる。

$$\tau_{yzn} = T_n(z_n) e^{-ik_{Sn} \sin \beta_n x} \quad (D.13)$$

ここに、

$$T_n(z_n) = \mu_n \frac{\partial U_n(z_n)}{\partial z_n} = i\mu_n k_{Sn} \cos \beta_n \{-A_n e^{-ik_{Sn} \cos \beta_n z_n} + B_n e^{ik_{Sn} \cos \beta_n z_n}\}$$

(D.12),(D.13) 式の  $U_n$ と  $T_n$ をマトリクス重複反射法によって導出する。 $U_n$ と  $T_n$ は、 $A_n, B_n$ と次の関係にある。

$$\begin{Bmatrix} U_n(z_n) \\ T_n(z_n) \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} e^{-ik_{Sn} \cos \beta_n z_n} & e^{ik_{Sn} \cos \beta_n z_n} \\ -i\mu_n k_{Sn} \cos \beta_n e^{-ik_{Sn} \cos \beta_n z_n} & i\mu_n k_{Sn} \cos \beta_n e^{ik_{Sn} \cos \beta_n z_n} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} A_n \\ B_n \end{Bmatrix} \quad (D.14)$$

第  $n$  層の上面 ( $z_n = 0$ ) においては、

$$\begin{Bmatrix} U_n(0) \\ T_n(0) \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -i\mu_n k_{Sn} \cos \beta_n & i\mu_n k_{Sn} \cos \beta_n \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} A_n \\ B_n \end{Bmatrix} \quad (D.15)$$

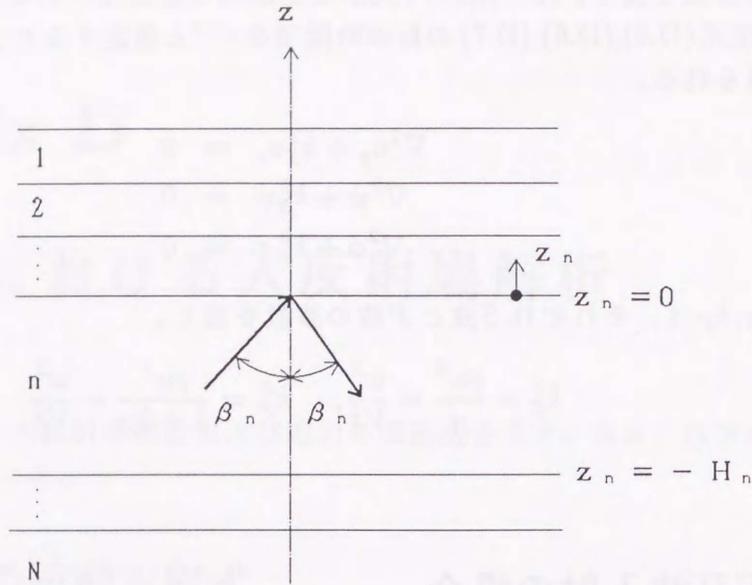


Figure D.1:  $SH$ 波の入射場

上式より、

$$\begin{Bmatrix} A_n \\ B_n \end{Bmatrix} = \frac{1}{2i\mu_n k_{Sn} \cos \beta_n} \begin{bmatrix} i\mu_n k_{Sn} \cos \beta_n & -1 \\ i\mu_n k_{Sn} \cos \beta_n & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} U_n(0) \\ T_n(0) \end{Bmatrix} \quad (\text{D.16})$$

(D.16) 式を (D.14) 式に代入すると、

$$\begin{Bmatrix} U_n(z_n) \\ T_n(z_n) \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(k_{Sn} \cos \beta_n z_n) & \frac{\sin(k_{Sn} \cos \beta_n z_n)}{\mu_n k_{Sn} \cos \beta_n} \\ -\mu_n k_{Sn} \cos \beta_n \sin(k_{Sn} \cos \beta_n z_n) & \cos(k_{Sn} \cos \beta_n z_n) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} U_n(0) \\ T_n(0) \end{Bmatrix} \quad (\text{D.17})$$

したがって、第  $n$  層の上面 ( $z_n = 0$ ) と下面 ( $z_n = -H_n$ ) の関係は次式のようになる。

$$\begin{Bmatrix} U_n(-H_n) \\ T_n(-H_n) \end{Bmatrix} = [S_n] \begin{Bmatrix} U_n(0) \\ T_n(0) \end{Bmatrix} \quad (\text{D.18})$$

ここに、

$$[S_n] = \begin{bmatrix} \cos(k_{Sn} \cos \beta_n H_n) & -\frac{\sin(k_{Sn} \cos \beta_n H_n)}{\mu_n k_{Sn} \cos \beta_n} \\ \mu_n k_{Sn} \cos \beta_n \sin(k_{Sn} \cos \beta_n H_n) & \cos(k_{Sn} \cos \beta_n H_n) \end{bmatrix}$$

一方、第  $n$  層と第  $n-1$  層との境界面で成り立つべき境界条件式は、

$$\begin{Bmatrix} U_n(0) \\ T_n(0) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} U_{n-1}(-H_{n-1}) \\ T_{n-1}(-H_{n-1}) \end{Bmatrix} \quad (\text{D.19})$$

(D.18) 式より、

$$\begin{Bmatrix} U_n(0) \\ T_n(0) \end{Bmatrix} = [S_{n-1}] \begin{Bmatrix} U_{n-1}(0) \\ T_{n-1}(0) \end{Bmatrix} \quad (\text{D.20})$$

上式は、一つの漸化式であるから、 $n$ を順次下げると結局次式のようになる。

$$\begin{Bmatrix} U_n(0) \\ T_n(0) \end{Bmatrix} = [R_{n-1}] \begin{Bmatrix} U_1(0) \\ T_1(0) \end{Bmatrix} \quad (\text{D.21})$$

ここに、

$$[R_{n-1}] = [S_{n-1}][S_{n-2}] \cdots [S_1]$$

地表面 ( $z_1 = 0$ ) では、 $T_1(0) = 0$  であるから、(D.21) 式は次式のようになる。

$$\begin{Bmatrix} U_n(0) \\ T_n(0) \end{Bmatrix} = [R_{n-1}] \begin{Bmatrix} U_1(0) \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (\text{D.22})$$

一方、(D.16) 式において、 $n$ を  $N$  とすれば、

$$\begin{Bmatrix} A_N \\ B_N \end{Bmatrix} = \frac{1}{2i\mu_N k_{SN} \cos \beta_N} \begin{bmatrix} i\mu_N k_{SN} \cos \beta_N & -1 \\ i\mu_N k_{SN} \cos \beta_N & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} U_N(0) \\ T_N(0) \end{Bmatrix} \quad (\text{D.23})$$

また、(D.22) 式より、最下層  $N$  の上面での振幅  $U_N(0)$  と応力  $T_N(0)$  は、

$$U_N(0) = R_{N-1}(1, 1)U_1(0) \quad (\text{D.24})$$

$$T_N(0) = R_{N-1}(2, 1)U_1(0) \quad (\text{D.25})$$

で与えられる。ここに、 $R_{N-1}(1, 1)$ ,  $R_{N-1}(2, 1)$  は、それぞれ  $[R_{N-1}]$  の 1 行 1 列および 2 行 1 列である。(D.24), (D.25) 式を (D.23) 式に代入することによって、第  $N$  層の入射波振幅  $A_N$  は次式のように表される。

$$A_N = \frac{U_1(0)}{2} \left\{ R_{N-1}(1, 1) + \frac{iR_{N-1}(2, 1)}{\mu_N k_{SN} \cos \beta_N} \right\} \quad (\text{D.26})$$

したがって、 $A_N$  が既知の場合は上式より  $U_1(0)$  が求まり、(D.22) 式と (D.17) 式により任意地点での  $U_n(z_n)$  と  $T_n(z_n)$  が定まる。

また、第  $n$  層の入射角  $\beta_n$  は、Snell の法則

$$\frac{\sin \beta_n}{V_{Sn}} = \frac{\sin \beta_N}{V_{SN}} \quad (\text{D.27})$$

により求めることができる。

次に、(D.12) 式の周方向フーリエ展開表現を導出する。(D.12) 式の  $x$  を円筒座標系  $(\rho, \varphi, z)$  の表現、 $x = \rho \cos \varphi$  で表すと、

$$u_{yn} = U_n(z_n) e^{-ik_{Sn} \sin \beta_n \rho \cos \varphi} \quad (\text{D.28})$$

Neumann 展開といわれる次の公式 [64]

$$e^{-i\alpha \cos \varphi} = \sum_{m=0}^{\infty} \varepsilon_m (-i)^m J_m(\alpha) \cos m\varphi \quad (\text{D.29})$$

$$; \varepsilon_m = 1 - \delta_{m0} = \begin{cases} 1 & (m = 0) \\ 2 & (m \geq 1) \end{cases}$$

を用いると、

$$u_{yn} = U_n \sum_{m=0}^{\infty} \varepsilon_m (-i)^m J_m(k_{Sn} \rho \sin \beta_n) \cos m\varphi \quad (\text{D.30})$$

と表される。ここに、 $J_m$ は、 $m$ 次の第1種 Bessel 関数。

直交デカルト座標系から円筒座標系への変換は次式で表現される。

$$\begin{Bmatrix} u_\rho \\ u_\varphi \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \varphi & \sin \varphi \\ -\sin \varphi & \cos \varphi \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_x \\ u_y \end{Bmatrix} \quad (\text{D.31})$$

上式に (D.30) 式を代入する。ただし、以後添字として  $\rho, \varphi, z$  を用いるときはそれぞれに変えて 1, 2, 3 と表記する。

$$\begin{aligned} u_{1n} &= \frac{U_n}{2} \sum_{m=0}^{\infty} \varepsilon_m (-i)^m J_m(k_{Sn} \rho \sin \beta_n) \{\sin(m+1)\varphi - \sin(m-1)\varphi\} \\ u_{2n} &= \frac{U_n}{2} \sum_{m=0}^{\infty} \varepsilon_m (-i)^m J_m(k_{Sn} \rho \sin \beta_n) \{\cos(m+1)\varphi + \cos(m-1)\varphi\} \end{aligned} \quad (\text{D.32})$$

若干の演算により上式の周方向展開を統一すると次式を得る。

$$\begin{aligned} u_{1n} &= -U_n \sum_{m=0}^{\infty} \varepsilon_m (-i)^{m+1} J_m^p(k_{Sn} \rho \sin \beta_n) \sin m\varphi \\ u_{2n} &= U_n \sum_{m=0}^{\infty} \varepsilon_m (-i)^{m+1} J_m^s(k_{Sn} \rho \sin \beta_n) (-\cos m\varphi) \\ u_{3n} &= 0 \end{aligned} \quad (\text{D.33})$$

ここに、

$$\begin{aligned} J_m^s(x) &= \{J_{m-1}(x) - J_{m+1}(x)\}/2 \\ J_m^p(x) &= \{J_{m-1}(x) + J_{m+1}(x)\}/2 \end{aligned} \quad (\text{D.34})$$

(D.33) 式から表面力を導出する。第  $n$  層内における円筒座標系の歪-変位関係式は、

$$\begin{aligned} \varepsilon_{11n} &= \frac{\partial u_{1n}}{\partial \rho}, & 2\varepsilon_{12n} &= \frac{\partial u_{2n}}{\partial \rho} - \frac{u_{2n}}{\rho} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial u_{1n}}{\partial \varphi} \\ \varepsilon_{22n} &= \frac{1}{\rho} \frac{\partial u_{2n}}{\partial \varphi} + \frac{u_{1n}}{\rho}, & 2\varepsilon_{23n} &= \frac{1}{\rho} \frac{\partial u_{3n}}{\partial \varphi} + \frac{\partial u_{2n}}{\partial z} \\ \varepsilon_{33n} &= \frac{\partial u_{3n}}{\partial z}, & 2\varepsilon_{31n} &= \frac{\partial u_{1n}}{\partial z} + \frac{\partial u_{3n}}{\partial \rho} \end{aligned} \quad (\text{D.35})$$

上式に (D.33) 式を代入して若干の演算を行うと、

$$\begin{aligned} \varepsilon_{11n} &= -\frac{U_n}{2} k_{Sn} \sin \beta_n \sum_{m=0}^{\infty} \varepsilon_m (-i)^{m+1} J_m^{ss}(k_{Sn} \rho \sin \beta_n) \sin m\varphi \\ \varepsilon_{22n} &= \frac{U_n}{2} k_{Sn} \sin \beta_n \sum_{m=0}^{\infty} \varepsilon_m (-i)^{m+1} J_m^{ss}(k_{Sn} \rho \sin \beta_n) \sin m\varphi \\ \varepsilon_{33n} &= 0, \quad \Delta_n = \varepsilon_{11n} + \varepsilon_{22n} + \varepsilon_{33n} = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
2\varepsilon_{12n} &= U_n k_{Sn} \sin \beta_n \sum_{m=0}^{\infty} \varepsilon_m (-i)^{m+1} J_m^{pp}(k_{Sn} \rho \sin \beta_n) (-\cos m\varphi) \\
2\varepsilon_{23n} &= U'_n \sum_{m=0}^{\infty} \varepsilon_m (-i)^{m+1} J_m^s(k_{Sn} \rho \sin \beta_n) (-\cos m\varphi) \\
2\varepsilon_{31n} &= -U'_n \sum_{m=0}^{\infty} \varepsilon_m (-i)^{m+1} J_m^p(k_{Sn} \rho \sin \beta_n) \sin m\varphi
\end{aligned} \tag{D.36}$$

ただし、 $U'_n$ は、

$$U'_n = \frac{\partial U_n}{\partial z_n} = \frac{T_n}{\mu_n} \tag{D.37}$$

また、

$$\begin{aligned}
J_m^{ss}(x) &= \{J_{m-2}(x) - J_{m+2}(x)\}/2 \\
J_m^{pp}(x) &= \{J_{m-2}(x) + J_{m+2}(x)\}/2
\end{aligned} \tag{D.38}$$

応力-歪関係式は、

$$\sigma_{ijn} = \lambda_n \Delta_n \delta_{ij} + 2\mu \varepsilon_{ijn} \tag{D.39}$$

ただし、 $\delta_{ij}$ はクロネッカのデルタ記号。また、法線  $n$  を有する面の  $k$  方向の表面力は次式となる。

$$p_{kn} = \sigma_{k1n}n_1 + \sigma_{k2n}n_2 + \sigma_{k3n}n_3 \quad ; k = 1, 2, 3 \tag{D.40}$$

軸対称問題では、 $n_2 = 0$  であるから

$$p_{kn} = \sigma_{k1n}n_1 + \sigma_{k3n}n_3 \quad ; k = 1, 2, 3 \tag{D.41}$$

(D.41) 式に、(D.39) 式および (D.36) 式の表現を代入することにより、周方向をフーリエ展開表示された  $SH$  波の表面力を得ることができる。

### D.3 $SV$ 波, $P$ 波入射の場合

次に、 $SV$ 波、 $P$ 波入射の場合の解析法について述べる。

Fig.D.2 に示すように、第  $n$  層内において、 $SV$ 波と  $P$ 波の入射波振幅、反射波振幅をそれぞれ  $A_{Sn}, B_{Sn}, A_{Pn}, B_{Pn}$  とし、 $SV$ 波の入射角を  $\beta_n$ 、 $P$ 波の入射角を  $\alpha_n$  とする。このとき、(D.9),(D.10) 式を満足するポテンシャルは次のように置くことができる。

$$\begin{aligned}
\psi_n &= i \frac{1}{k_{Sn}} \Psi_n(z_n) e^{-ik_{Sn} \sin \beta_n x} \\
\phi_n &= i \frac{1}{k_{Pn}} \Phi_n(z_n) e^{-ik_{Pn} \sin \alpha_n x}
\end{aligned} \tag{D.42}$$

ここに、

$$\begin{aligned}
\Psi_n(z_n) &= A_{Sn} e^{-ik_{Sn} \cos \beta_n z_n} + B_{Sn} e^{ik_{Sn} \cos \beta_n z_n} \\
&= (A_{Sn} + B_{Sn}) \cos(k_{Sn} \cos \beta_n z_n) - (A_{Sn} - B_{Sn}) i \sin(k_{Sn} \cos \beta_n z_n) \\
\Phi_n(z_n) &= A_{Pn} e^{-ik_{Pn} \cos \alpha_n z_n} + B_{Pn} e^{ik_{Pn} \cos \alpha_n z_n} \\
&= (A_{Pn} + B_{Pn}) \cos(k_{Pn} \cos \alpha_n z_n) - (A_{Pn} - B_{Pn}) i \sin(k_{Pn} \cos \alpha_n z_n)
\end{aligned} \tag{D.43}$$

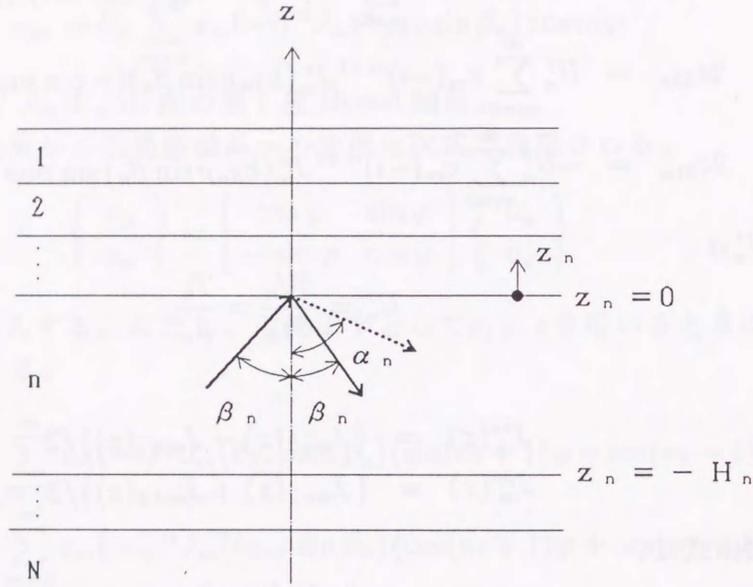


Figure D.2: SV, P波の入射場

(D.42) 式を (D.4), (D.5) 式に代入すると、

$$\begin{aligned} u_{xn} &= \Phi_n \sin \alpha_n e^{-ik_{Pn} \sin \alpha_n x} + \Psi_n^* \cos \beta_n e^{-ik_{Sn} \sin \beta_n x} \\ u_{zn} &= \Phi_n^* \cos \alpha_n e^{-ik_{Pn} \sin \alpha_n x} - \Psi_n \sin \beta_n e^{-ik_{Sn} \sin \beta_n x} \end{aligned} \quad (D.44)$$

ただし、

$$\begin{aligned} \Psi_n^*(z_n) &= A_{Sn} e^{-ik_{Sn} \cos \beta_n z_n} - B_{Sn} e^{ik_{Sn} \cos \beta_n z_n} \\ &= (A_{Sn} - B_{Sn}) \cos(k_{Sn} \cos \beta_n z_n) - (A_{Sn} + B_{Sn}) i \sin(k_{Sn} \cos \beta_n z_n) \\ \Phi_n^*(z_n) &= A_{Pn} e^{-ik_{Pn} \cos \alpha_n z_n} - B_{Pn} e^{ik_{Pn} \cos \alpha_n z_n} \\ &= (A_{Pn} - B_{Pn}) \cos(k_{Pn} \cos \alpha_n z_n) - (A_{Pn} + B_{Pn}) i \sin(k_{Pn} \cos \alpha_n z_n) \end{aligned} \quad (D.45)$$

Snell の法則より

$$\frac{\sin \beta_n}{V_{Sn}} = \frac{\sin \alpha_n}{V_{Pn}} = \delta \quad (D.46)$$

とおくと (D.44) 式は、

$$\begin{aligned} u_{xn} &= U_{xn}(z_n) e^{-i\omega \delta x} \\ u_{zn} &= U_{zn}(z_n) e^{-i\omega \delta x} \end{aligned} \quad (D.47)$$

ここに、

$$\begin{aligned} U_{xn}(z_n) &= \Phi_n \sin \alpha_n + \Psi_n^* \cos \beta_n \\ U_{zn}(z_n) &= \Phi_n^* \cos \alpha_n - \Psi_n \sin \beta_n \end{aligned} \quad (D.48)$$

と書ける。

境界面に作用する応力は、

$$\begin{aligned}\sigma_{zn} &= \lambda_n \left( \frac{\partial u_{xn}}{\partial x} + \frac{\partial u_{zn}}{\partial z} \right) + 2\mu_n \frac{\partial u_{zn}}{\partial z} \\ \tau_{zxn} &= \mu_n \left( \frac{\partial u_{xn}}{\partial z} + \frac{\partial u_{zn}}{\partial x} \right)\end{aligned}\quad (D.49)$$

(D.49) 式に (D.47) 式を代入すると次式を得る。

$$\begin{aligned}\sigma_{zn} &= T_{zn}(z_n)e^{-i\omega\delta x} \\ \tau_{zxn} &= T_{zxn}(z_n)e^{-i\omega\delta x}\end{aligned}\quad (D.50)$$

ここに、

$$\begin{aligned}T_{zn}(z_n) &= -i\{k_{Pn}(\lambda_n + 2\mu_n \cos^2 \alpha_n)\Phi_n - 2\mu_n k_{Sn} \sin \beta_n \cos \beta_n \Psi_n^*\} \\ T_{zxn}(z_n) &= -i\mu_n\{2k_{Pn} \sin \alpha_n \cos \alpha_n \Phi_n^* + k_{Sn}(\cos^2 \beta_n - \sin^2 \beta_n)\Psi_n\}\end{aligned}\quad (D.51)$$

(D.48),(D.51) 式より、第  $n$  層内の  $U_{xn} \sim T_{zxn}$  は次のように書ける。

$$\begin{Bmatrix} U_{xn}(z_n) \\ U_{zn}(z_n) \\ T_{zn}(z_n) \\ T_{zxn}(z_n) \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} A_{Pn} + B_{Pn} \\ A_{Pn} - B_{Pn} \\ A_{Sn} - B_{Sn} \\ A_{Sn} + B_{Sn} \end{Bmatrix}\quad (D.52)$$

ここに、

$$\begin{aligned}a_{11} &= \sin \alpha_n \cos P_n, & a_{12} &= -i \sin \alpha_n \sin P_n \\ a_{13} &= \cos \beta_n \cos Q_n, & a_{14} &= -i \cos \beta_n \sin Q_n \\ a_{21} &= -i \cos \alpha_n \sin P_n, & a_{22} &= \cos \alpha_n \cos P_n \\ a_{23} &= i \sin \beta_n \sin Q_n, & a_{24} &= -\sin \beta_n \cos Q_n \\ a_{31} &= -ik_{Pn}(\lambda_n + 2\mu_n \cos^2 \alpha_n) \cos P_n \\ a_{32} &= -k_{Pn}(\lambda_n + 2\mu_n \cos^2 \alpha_n) \sin P_n \\ a_{33} &= 2i\mu_n k_{Sn} \sin \beta_n \cos \beta_n \cos Q_n \\ a_{34} &= 2\mu_n k_{Sn} \sin \beta_n \cos \beta_n \sin Q_n \\ a_{41} &= -2\mu_n k_{Pn} \sin \alpha_n \cos \alpha_n \sin P_n \\ a_{42} &= -2i\mu_n k_{Pn} \sin \alpha_n \cos \alpha_n \cos P_n \\ a_{43} &= -\mu_n k_{Sn}(\cos^2 \beta_n - \sin^2 \beta_n) \sin Q_n \\ a_{44} &= -i\mu_n k_{Sn}(\cos^2 \beta_n - \sin^2 \beta_n) \cos Q_n \\ & ; P_n = k_{Pn} \cos \alpha_n z_n, & Q_n &= k_{Sn} \cos \beta_n z_n\end{aligned}$$

第  $n$  層の上面  $z_n = 0$  においては、

$$\begin{Bmatrix} U_{xn}(0) \\ U_{zn}(0) \\ T_{zn}(0) \\ T_{zxn}(0) \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} b_{11} & 0 & b_{13} & 0 \\ 0 & b_{22} & 0 & b_{24} \\ b_{31} & 0 & b_{33} & 0 \\ 0 & b_{42} & 0 & b_{44} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} A_{Pn} + B_{Pn} \\ A_{Pn} - B_{Pn} \\ A_{Sn} - B_{Sn} \\ A_{Sn} + B_{Sn} \end{Bmatrix}\quad (D.53)$$

ここに、

$$\begin{aligned} b_{11} &= \sin \alpha_n, & b_{13} &= \cos \beta_n, & b_{22} &= \cos \alpha_n, & b_{24} &= -\sin \beta_n \\ b_{31} &= -ik_{Pn}(\lambda_n + 2\mu_n \cos^2 \alpha_n), & b_{33} &= 2i\mu_n k_{Sn} \sin \beta_n \cos \beta_n \\ b_{42} &= -2i\mu_n k_{Pn} \sin \alpha_n \cos \alpha_n, & b_{44} &= -i\mu_n k_{Sn}(\cos^2 \beta_n - \sin^2 \beta_n) \end{aligned}$$

(D.53) 式において逆行列をとると、

$$\begin{pmatrix} A_{Pn} + B_{Pn} \\ A_{Pn} - B_{Pn} \\ A_{Sn} - B_{Sn} \\ A_{Sn} + B_{Sn} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} c_{11} & 0 & c_{13} & 0 \\ 0 & c_{22} & 0 & c_{24} \\ c_{31} & 0 & c_{33} & 0 \\ 0 & c_{42} & 0 & c_{44} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} U_{xn}(0) \\ U_{zn}(0) \\ T_{zn}(0) \\ T_{zx}(0) \end{pmatrix} \quad (\text{D.54})$$

ここに、

$$\begin{aligned} c_{11} &= \frac{2\mu_n \sin \alpha_n}{\lambda_n + 2\mu_n}, & c_{13} &= \frac{i}{k_{Pn}(\lambda_n + 2\mu_n)} \\ c_{22} &= \frac{\cos^2 \beta_n - \sin^2 \beta_n}{\cos \alpha_n}, & c_{23} &= \frac{i \sin \beta_n}{\mu_n k_{Sn} \cos \alpha_n} \\ c_{31} &= \frac{\lambda_n + 2\mu_n \cos^2 \alpha_n}{(\lambda_n + 2\mu_n) \cos \beta_n}, & c_{33} &= \frac{-i \sin \alpha_n}{(\lambda_n + 2\mu_n) k_{Pn} \cos \beta_n} \\ c_{42} &= -2 \sin \beta_n, & c_{44} &= \frac{i}{\mu_n k_{Sn}} \end{aligned}$$

(D.54) 式を (D.52) 式に代入し、 $z_n = -H_n$  とすると、第  $n$  層の上面 ( $z_n = 0$ ) と下面 ( $z_n = -H_n$ ) の関係が次式のように得られる。

$$\begin{pmatrix} U_{xn}(-H_n) \\ U_{zn}(-H_n) \\ T_{zn}(-H_n) \\ T_{zx}(-H_n) \end{pmatrix} = [S_n] \begin{pmatrix} U_{xn}(0) \\ U_{zn}(0) \\ T_{zn}(0) \\ T_{zx}(0) \end{pmatrix} \quad (\text{D.55})$$

ここで、マトリクス  $[S_n]$  の成分は次のようになる。

$$\begin{aligned} s_{11} &= 2 \sin^2 \beta_n \cos P_n + \cos 2\beta_n \cos Q_n \\ s_{12} &= -i(\tan \alpha_n \cos 2\beta_n \sin P_n - \sin 2\beta_n \sin Q_n) \\ s_{13} &= \frac{1}{i\omega \rho_n V_{Sn}} \sin \beta_n (\cos Q_n - \cos P_n) \\ s_{14} &= \frac{1}{\omega \rho_n V_{Sn}} (\tan \alpha_n \sin \beta_n \sin P_n + \cos \beta_n \sin Q_n) \\ s_{21} &= -i(\gamma_n^2 \sin 2\alpha_n \sin P_n - \cos 2\beta_n \tan \beta_n \sin Q_n) \\ s_{22} &= \cos 2\beta_n \cos P_n + 2 \sin^2 \beta_n \cos Q_n \\ s_{23} &= \frac{1}{\omega \rho_n V_{Pn}} (\cos \alpha_n \sin P_n + \tan \beta_n \sin \alpha_n \sin Q_n) \\ s_{24} &= s_{13} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
s_{31} &= 2i\omega\rho_n V_{S_n} \sin \beta_n \cos 2\beta_n (\cos Q_n - \cos P_n) \\
s_{32} &= -\omega\rho_n V_{S_n} \left\{ \frac{\cos^2 2\beta_n \sin P_n}{\gamma_n \cos \alpha_n} + 2 \sin 2\beta_n \sin \beta_n \sin Q_n \right\} \\
s_{33} &= s_{22}, \quad s_{34} = s_{12} \\
s_{41} &= -\omega\rho_n V_{S_n} \left( 4\gamma_n \cos \alpha_n \sin^2 \beta_n \sin P_n + \frac{\cos^2 2\beta_n \sin Q_n}{\cos \beta_n} \right) \\
s_{42} &= s_{31}, \quad s_{43} = s_{21}, \quad s_{44} = s_{11} \\
&; P_n = k_{P_n} \cos \alpha_n (-H_n), \quad Q_n = k_{S_n} \cos \beta_n (-H_n)
\end{aligned}$$

ただし、 $\gamma_n = V_{S_n}/V_{P_n}$ 。一方、第  $n$  層と第  $n-1$  層との境界面で成り立つべき境界条件式は、

$$\begin{Bmatrix} U_{xn}(0) \\ U_{zn}(0) \\ T_{zn}(0) \\ T_{zxn}(0) \end{Bmatrix} = [S_{n-1}] \begin{Bmatrix} U_{xn-1}(0) \\ U_{zn-1}(0) \\ T_{zn-1}(0) \\ T_{zxn-1}(0) \end{Bmatrix} \quad (\text{D.56})$$

$n$  を順次下げると、

$$\begin{Bmatrix} U_{xn}(0) \\ U_{zn}(0) \\ T_{zn}(0) \\ T_{zxn}(0) \end{Bmatrix} = [R_{n-1}] \begin{Bmatrix} U_{x1}(0) \\ U_{z1}(0) \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (\text{D.57})$$

ここに、

$$[R_{n-1}] = [S_{n-1}][S_{n-2}] \cdots [S_1]$$

最下層の入射波振幅がわかっている場合は、(D.57) 式の  $n$  を  $N$  とした式に (D.53) 式の  $n$  を  $N$  とした式を代入した後、 $A_{S_N}, A_{P_N}$  を既知として方程式を解けばよい。すなわち、

$$\begin{bmatrix} -b_{11} & b_{13} & R_{11} & R_{12} \\ b_{22} & -b_{24} & R_{21} & R_{22} \\ -b_{31} & b_{33} & R_{31} & R_{32} \\ b_{42} & -b_{44} & R_{41} & R_{42} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} B_{P_n} \\ B_{S_n} \\ U_{x1}(0) \\ U_{z1}(0) \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{13} \\ b_{22} & b_{24} \\ b_{31} & b_{33} \\ b_{42} & b_{44} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} A_{P_n} \\ A_{S_n} \end{Bmatrix} \quad (\text{D.58})$$

ここに、 $R_{i1}, R_{i2}$  は、 $[R_{N-1}]$  の  $i$  行 1 列および  $i$  行 2 列の成分である。

(D.58) 式より、 $U_{x1}(0), U_{z1}(0)$  が求まれば、(D.57) 式および (D.55) 式より任意地点での振幅と応力が定まる。また、第  $n$  層の入射角  $\alpha_n, \beta_n$  は、Snell の法則

$$\frac{\sin \beta_n}{V_{S_n}} = \frac{\sin \beta_N}{V_{S_N}} = \frac{\sin \alpha_n}{V_{P_n}} = \frac{\sin \alpha_N}{V_{P_N}} \quad (\text{D.59})$$

により求めることができる。ただし、例えば、 $(V_{S_n}/V_{S_N}) \sin \beta_N > 1$  の場合は、 $\sin \beta_n > 1$  となり、 $\beta_n$  は複素数となる。この場合は、 $\beta_n = \pi/2 - i\xi_n$ 、すなわち、 $\sin \beta_n = \cosh \xi_n$  と置いて双曲線関数に変換すればよい。

(D.47) 式に対して、(D.28) ~ (D.33) 式と同様な式の誘導を行えば、周方向にフーリエ展開された円筒座標系の変位  $u_{1n}, u_{2n}, u_{3n}$  を次のように求めることができる。

$$u_{1n} = -U_{xn} \sum_{m=0}^{\infty} \varepsilon_m (-i)^{m+1} J_m^s(\rho\omega\delta) \cos m\varphi$$

$$u_{2n} = U_{xn} \sum_{m=0}^{\infty} \varepsilon_m (-i)^{m+1} J_m^p(\rho\omega\delta) \sin m\varphi \quad (\text{D.60})$$

$$u_{3n} = U_{zn} \sum_{m=0}^{\infty} \varepsilon_m (-i)^m J_m(\rho\omega\delta) \cos m\varphi$$

(D.60) 式を歪-変位関係式 (D.35) に代入して、若干の演算を行うと、

$$\varepsilon_{11n} = -U_{xn}\omega\delta \sum_{m=0}^{\infty} \varepsilon_m (-i)^{m+1} J_m^{sp}(\rho\omega\delta) \cos m\varphi$$

$$\varepsilon_{22n} = U_{xn}\omega\delta \sum_{m=0}^{\infty} \varepsilon_m (-i)^{m+1} J_m^{ps}(\rho\omega\delta) \cos m\varphi$$

$$\varepsilon_{33n} = iU'_{zn} \sum_{m=0}^{\infty} \varepsilon_m (-i)^{m+1} J_m(\rho\omega\delta) \cos m\varphi$$

$$2\varepsilon_{12n} = U_{xn}\omega\delta \sum_{m=0}^{\infty} \varepsilon_m (-i)^{m+1} J_m^{ss}(\rho\omega\delta) \sin m\varphi$$

$$2\varepsilon_{23n} = (U'_{xn} - i\omega\delta U_{zn}) \sum_{m=0}^{\infty} \varepsilon_m (-i)^{m+1} J_m^p(\rho\omega\delta) \sin m\varphi$$

$$2\varepsilon_{31n} = -(U'_{xn} - i\omega\delta U_{zn}) \sum_{m=0}^{\infty} \varepsilon_m (-i)^{m+1} J_m^s(\rho\omega\delta) \cos m\varphi$$

$$\Delta_n = (\omega\delta U_{xn} + iU'_{zn}) \sum_{m=0}^{\infty} \varepsilon_m (-i)^{m+1} J_m(\rho\omega\delta) \cos m\varphi$$

ただし、

$$\begin{aligned} J_m^{sp}(x) &= \{J_{m-2}(x) - 2J_m(x) + J_{m+2}(x)\}/4 \\ J_m^{ps}(x) &= \{J_{m-2}(x) + 2J_m(x) + J_{m+2}(x)\}/4 \end{aligned} \quad (\text{D.61})$$

また、 $U'_{xn}, U'_{zn}$  は、(D.48) 式より、

$$\begin{aligned} U_{xn}' &= -i\{k_{Pn} \cos \alpha_n \sin \alpha_n \Phi_n^* + k_{Sn} \cos^2 \beta_n \Psi_n\} \\ U_{zn}' &= -i\{k_{Pn} \cos^2 \alpha_n \Phi_n - k_{Sn} \cos \beta_n \sin \beta_n \Psi_n^*\} \end{aligned} \quad (\text{D.62})$$

(D.61) 式を (D.39), (D.41) 式に代入すれば、周方向をフーリエ展開表示された  $SV$  波、 $P$  波の表面力を得ることができる。

## D.4 直交デカルト座標系における変位と表面力

直交デカルト座標系における  $SH$  波の入射場変位は、(D.12) 式によって与えられる。(D.12) 式から直交デカルト座標系における第  $n$  層の表面力を導出すると、

$$\begin{aligned} p_{xn} &= \tau_{xyn} n_y \\ p_{yn} &= \tau_{xyn} n_x + \tau_{yzn} n_z \\ p_{zn} &= \tau_{yzn} n_y \end{aligned} \quad (\text{D.63})$$

ここに、

$$\tau_{xyn} = -i\mu_n k_{Sn} \sin \beta_n u_{yn} \quad (\text{D.64})$$

また、 $\tau_{yzn}$ は、(D.13) 式より得られる。

同様に、直交デカルト座標系における  $SV, P$ 波の入反射場変位は、(D.44) 式によって与えられる。(D.44) 式から直交デカルト座標系における第  $n$  層の表面力を導出すると、

$$\begin{aligned} p_{xn} &= \sigma_{xn} n_x + \tau_{zxn} n_z \\ p_{yn} &= \sigma_{yn} n_y \\ p_{zn} &= \tau_{zxn} n_x + \sigma_{zn} n_z \end{aligned} \quad (\text{D.65})$$

ここに、

$$\begin{aligned} \sigma_{xn} &= (\lambda_n + 2\mu_n)\varepsilon_{xn} + \lambda_n \varepsilon_{zn} \\ \sigma_{yn} &= \lambda_n(\varepsilon_{zn} + \varepsilon_{xn}) \end{aligned} \quad (\text{D.66})$$

ただし、

$$\begin{aligned} \varepsilon_{xn} &= -i\omega\delta u_{xn} \\ \varepsilon_{zn} &= -i\{k_{Pn} \cos^2 \alpha_n \Phi_n - k_{Sn} \cos \beta_n \sin \beta_n \Psi_n^*\} e^{-i\omega\delta x} \end{aligned} \quad (\text{D.67})$$

また、 $\sigma_{zn}, \tau_{zxn}$ は、(D.50) 式より得られる。

# Appendix E

## 動のおよび静的 Kelvin 解の変位と表面力

動的 Kelvin 解および静的 Kelvin 解 [68] の変位と表面力の表現を示しておく。

### E.1 動的 Kelvin 解の変位と表面力

$$u_{ij} = \frac{1}{4\pi\mu}(\Psi\delta_{ij} - \chi r_{,i} r_{,j}) \quad (\text{E.1})$$

$$p_{ij} = \frac{1}{4\pi r} \left[ \{(\delta_{ij} - 2r_{,i} r_{,j})r_{,n} + r_{,i} n_j\}(-iN_S r - 1) \frac{e^{-iN_S r}}{r} \right. \\ \left. + \{2\frac{N_P^2}{N_S^2} r_{,i} r_{,j} r_{,n} + (1 - 2\frac{N_P^2}{N_S^2}) r_{,i} n_j\}(-iN_P r - 1) \frac{e^{-iN_P r}}{r} \right. \\ \left. - 2\{r_{,i} n_j + r_{,j} n_i + (\delta_{ij} - 5r_{,i} r_{,j})r_{,n}\} \chi \right] \quad (\text{E.2})$$

ただし,

$$\Psi = \frac{e^{-iN_S r}}{r} - \left( \frac{1}{N_S^2 r^2} + \frac{i}{N_S r} \right) \frac{e^{-iN_S r}}{r} + \frac{N_P^2}{N_S^2} \left( \frac{1}{N_P^2 r^2} + \frac{i}{N_P r} \right) \frac{e^{-iN_P r}}{r}$$

$$\chi = -\left( \frac{3}{N_S^2 r^2} + \frac{3i}{N_S r} - 1 \right) \frac{e^{-iN_S r}}{r} + \frac{N_P^2}{N_S^2} \left( \frac{3}{N_P^2 r^2} + \frac{3i}{N_P r} - 1 \right) \frac{e^{-iN_P r}}{r}$$

$$N_P = \omega/V_P, \quad N_S = \omega/V_S$$

$$r_{,i} = r_i/r, \quad r_i = x_i(x_p) - x_i(x_q)$$

$$r_{,n} = r_{,i} n_i = r_{,1} n_1 + r_{,2} n_2 + r_{,3} n_3$$

### E.2 静的 Kelvin 解の変位と表面力

$$u_{ij}^K = \frac{1}{16\pi\mu(1-\nu)r} \{(3-4\nu)\delta_{ij} + r_{,i} r_{,j}\} \quad (\text{E.3})$$

$$p_{ij}^K = \frac{1}{8\pi(1-\nu)r^2} [r_{,n} \{(1-2\nu)\delta_{ij} + 3r_{,i} r_{,j}\} - (1-2\nu)\{r_{,i} n_j - r_{,j} n_i\}] \quad (\text{E.4})$$