

①

学位論文

題目

「暗騒音混入下の音環境システムに対する静的及び動的状態推定法」

1990年3月

広島大学大学院工学研究科  
博士課程後期システム工学専攻

張 兵

## 內容梗概

## 内 容 梗 概

実環境下でわれわれが遭遇するほとんどの信号は、物理的要因はもちろん、社会的要因から人間の自由意志に基づく主体的行動までが絡み合って、しばしば非ガウス型の複雑多様な確率変動を示し、しかもそのメカニズムを公知の法則的關係で説明できないことが多い。そして、任意変動分布型の外来雑音が混入し、厳密には非定常性を示すのが常である。しかし、いくら複雑な音環境とはいえ、一定した制御や予測目的のためには何らかの形で予測への法則性や関連様式を事前に見出す必要がある。特に、外来雑音の混入下で、上述の複雑さにできるだけもれなく対応できる統一的な静的及び動的な状態推定法を設定することが不可欠である。本研究は、このような実際的背景から、任意分布形状の暗騒音混入下において、分布予測に整合した情報欠損の少ない一回帰分析法と任意のゆらぎ変動形態を示す対象の未知信号波形を動的に推定できる広義デジタルフィルタのプログラム論理を考察したものである。

本論文は、緒論、2部4章、結論からなっており、各章においてそれぞれ新たな研究成果が含まれている。

具体的に、緒論では、本研究の工学的背景、目的ならびに研究の概要について述べている。

第一部では、音環境システムにおいて、システムの入出力関係を回帰関係として捉え、静的な立場から、状態推定問題を考察している。そこで、任意の確率分布形状を許す説明変数をもとに目的変数をもつ任意のゆらぎ分布全体が予測できる、新たな一回帰分析法を提案している。そして、暗騒音の混入下で、新たに提案した回帰の

関係様式に内在する各種相関特性を反映した未知パラメータを、種々の誤差評価規範に従って同定している。

第1章では、実現象のゆらぎが示す複雑多様さに対し、あらかじめ情報欠損を招くことのないよう、分布予測に整合した新たな回帰分析の一試みを見出している。具体的には、ベイズ定理を基盤にして、説明変数と目的変数間での回帰モデルを、線形・非線形のあらかじめ一定した関数様式の枠組で与えず、現象がもつ複雑多様さのさまざまな程度を秩序ある姿で逐次反映できるよう、その回帰モデルには級数展開型の階層表現を計画的に導入している。特に、各変量の振幅変動が正負両領域にわたる場合に対し統計的エルミート展開型の回帰モデルを、その変動が非負の領域内にのみ留まる場合には、統計的ラゲール展開型の回帰モデルを提案している。最後に、回帰モデルの設定にとって、最も本質的な情報の抽出のみに目を向け、2変量間における線形・非線形の各種相関情報のみを、浮き彫りに反映できる新たな回帰モデルを具体的に提案している。そして、本手法の一スペシャルケースに公知の標準路線におけるガウス分布形変数、線形回帰モデル、最小自乗誤差評価に基づく回帰分析法が含まれ得ることも合わせ示している。さらに、本手法がもつ実際的有效性の一端も検証するために、音環境で観測した実データに本手法を適用して実験的にも確認している。

第2章では、回帰関係としての一般化した関係様式をまず第1章に沿ってあらかじめ設定した後、これに内在する各種相関特性は未知パラメータとみなして同定する新たな手法を提案している。しかし、実環境システムにおいては、観測雑音が混入してくるのが避けられないために、この雑音対策も考慮する必要がある。そこで、以

下の種々の誤差評価規範に従って、いくつかの同定法を提案している。まず、任意暗騒音混入下において、入力と出力間の線形・非線形の各種相関情報に基づくパラメータ同定法を考察している。つぎに、入力と出力間の相互情報量を最大にするパラメータが最良の推定値となることから、Minimum エントロピー評価に基づく同定法を提案している。また、人間の主観的な要求によって、公知の最小自乗型誤差規範を襲用できる方向へ新たに变形した一同定法も提案している。さらに本手法の有効性を実験的に検証するため、室内外及び室内音響システムにおいて、暗騒音の混入下で、このシステムに関する回帰パラメータを具体的に同定する手法と同定時とは異なった他の異種実騒音入力を相加した場合の応答分布予測を行なっている。

第二部では、独立した任意変動分布の外来雑音が混入することにより汚された実確率システムに着目し、その逐次観測データの内から、潜在する対象の未知信号波形を動的に推定できる広義デジタルフィルタのプログラム論理を考察している。まず、状態変量の振幅変動が正負両領域にわたる場合に対し、特に、カルマンフィルタを階層的に一般化した形態で、状態推定理論を導出する。そして、考察対象として、任意非ガウス形音確率環境のエネルギーシステムに着目し、特にエネルギーシステムに整合した広義デジタルフィルタの一設計理論を導出している。

第3章では、非ガウスの任意変動分布を示す独立した外来雑音が混入する実状況下での確率システムに着目する。そしてこの外来雑音により汚された線形・非線形の実確率システムに対する逐次の観測データをもとに、潜在する対象の未知信号を動的に推定してゆく

広義デジタルフィルタのプログラム論理を導出する。具体的には、変動の任意非ガウス分布特性に対処でき、しかも、公知のカルマンフィルタを展開初項の基幹に取って、パラメータ微分の逐次形式で表された階層構造をもつ状態推定アルゴリズムの一般化表現を新たに導出している。ここに導出した推定理論はカルマンフィルタに比べると同様観測値との一次相関情報を利用すること以外に、非ガウス性の高次相関情報も積極的に利用している。もちろん、従来のカルマンフィルタも一スペシャルケースに含んでいる。さらに、本手法のもつ実際の有効性の一端を検証するため、実際の室内外におけるさまざまな住環境の音響データに本手法を適用し、その実際の有効性も確認している。

第4章では、騒音環境を一旦エネルギーシステムとして把握し、任意の分布形状を示す暗騒音の混入下で、実音響システムの逐次計測データから対象とする未知騒音のみを動的に推定する新たな手法を設定する。具体的には、変動の非ガンマ分布特性に対処でき、しかも、パラメータ微分形で表された階層構造を持つデジタルフィルタの状態推定に関する新たなプログラム論理を提案している。さらに、本手法の持つ実際の有効性の一端を検証するため、室内音響分野の実問題に着目し、暗騒音が混入する実状況下で、残響曲線を推定したり、遮音システムの音響パラメータを推定したりする実際的问题に本手法を適用している。

結論では、本論文で新たに得られた研究成果をまとめるとともに今後に残された研究課題について述べている。

## 目次

緒論	1
第一部 情報欠損を招かない暗騒音混入下の静的な一状態推定法	
第1章 音環境システムの応答分布に整合した一回帰分析法	
1.1 緒言	7
1.2 理論的考察	9
1.2.1 2種変量間の回帰分析	9
1.2.2 展開型分布表現に基づく回帰分析と出力分布予測	10
[1] 一般理論	10
[2] 具体化	13
[A] 統計的エルミート展開表示形の回帰表現と出力分布の予測	13
[B] 統計的ラゲール展開表示形の回帰表現と出力分布の予測	19
1.2.3 周辺分布を基幹とした分布展開形の回帰表現と出力分布の予測	21
1.2.4 従来の回帰分析法(最小自乗誤差評価との関連)	23
1.3 実験的考察	25
1.4 結言	32
第2章 暗騒音混入下における回帰分析法の一般化	
2.1 緒言	36
2.2 理論的考察	37
2.2.1 入出力相関情報に基づく回帰パラメータの同定	37

[1]	統計的エルミート展開型分布表示による具体化	38
[2]	統計的ラゲール展開型分布表示による具体化	42
2.2.2	Minimum エントロピー評価に基づく	
	回帰パラメータの同定	46
2.2.3	最小自乗誤差規範からの同定法	49
2.3	実験的考察	50
2.3.1	室内音響システムへの実際的適用	51
2.3.2	室内外音響システムへの実際的適用	57
2.4	結言	65

## 第二部 階層化した広義デジタルフィルタに基づく

### 動的な一状態推定法

## 第3章 非ガウス確率システムの動的な一状態推定法

3.1	緒言	66
3.2	理論的考察	67
3.2.1	状態推定問題の定式化	67
3.2.2	パラメータ微分形の階層表現	68
3.2.3	状態推定に関する広義デジタルフィルタの アルゴリズム論理	72
3.3	実験的考察	80
3.3.1	遮音パラメータの推定と出力応答分布の予測	80
3.3.2	室の残響時間推定	83
3.3.3	暗騒音に埋もれた対象騒音の推定	84
3.4	結言	86
3.5	付録	90
1.	離散型特性関数 (3.14) 式の算出	90



2	結合階乗キュムラント表示	92
3.	カルマンフィルタとの一致	93
第4章 エネルギー確率システムの動的な一状態推定法		
4.1	緒言	96
4.2	理論的考察	97
4.2.1	状態推定問題の定式化	97
4.2.2	パラメータ微分形に基づくパワー変動分布の 階層表現	99
4.2.3	状態推定に関する広義デジタルフィルタの アルゴリズム論理	102
4.3	実験的考察	109
4.3.1	暗騒音下の室内における残響曲線の推定	109
4.3.2	任意遮音システムの同定と応答分布の予測	112
4.4	結言	118
	結論	120
	謝辞	124
	参考文献	125



音環境システムに限らず、広範な分野において、膨大なデータから必要な情報を抽出する方法として、統計学的な解析法、いわゆる回帰分析法が発達し、多くの場合に用いられている。しかし、これまでによく使われている回帰分析法では、あらかじめ変動分布のガウス性を前提としたり、両変数間に線形または適当な型の回帰関数をあらかじめ人為的に設定して、これに公知の最小自乗法を適用し、人為的操作面上の簡便さを優先させるのが通常である。このことはとりもなおさず、回帰まわりの揺らぎ情報を一方的に誤差のほうへ位置付けて人為的に処理してしまう恐れのあることを意味している。もちろん、実環境で遭遇する現象は常にこのような人為的単純化を超えた複雑多様さをもともと客観的に多く持ち合わせている。従って、あらかじめ人為的に設定したこの回帰まわりのばらつきの中にも互いの高次的相関関係を反映したゆらぎの有効情報がなお潜在している。この高次的な有効情報をできるだけ多く正確に抽出するためには、まず現象が示す複雑多様さを単純な人為操作を通して情報欠損を招くことのないよう、積極的に把握する必要がある。

実際、現実の音環境システムでは、自然、社会、人間の介在する問題の複合体として、状態変量のゆらぎはもちろん、外来雑音も混入し、しばしば非ガウス形の複雑多様な確率変動を示し、しかもそのメカニズムを公知の法則的關係で説明できないことが多い。さらに環境騒音の対策においても、各種複雑な遮音システムの特性改善を行なうためには、そのシステムの入出力の關係様式をより正確に知ることが重要である。従って、音環境システムにおける現象を既成の理論的枠組みの内に無理にはめ込む人為性をいくらかでも和らげ、操作優先でなく現象優先の姿勢こそが本来的であるとの立場をとる。たとえ操作面で複雑化しても複雑多様な実現象に整合した理

論の設定を望むのであれば、上述の複雑さにできるだけもれなく対応できる統一的な方法論を設定することが不可欠である。

一方、対象信号の変動形態を外來雑音の混入下で刻々逐次、推定してゆく研究において、代表的なものの一つに公知のカルマンによるデジタル・フィルタがある。しかし、このフィルタは状態変量のガウス分布特性、あるいは最小自乗型の評価法を前提としている。その評価姿勢も平均のみを推定の主目的にとり、(共)分散をその誤差評価の目安に位置付けるといった単純理想化した評価姿勢を始めからとっている。従って、動的な状態推定問題においても複雑な実システムにより適合した一般化形態での状態推定理論を、あらかじめ設定しておくことが必要になろう。

以上の実際的背景を考慮し、本研究では実音響システムの逐次計測データに基づき、静的および動的な立場から情報欠損の少ない一状態推定法を考察したものである。

本論文は、緒論、2部4章、結論からなっている。第一部第1章、第2章では、静的立場から、第二部第1章、第2章では、動的な立場から、暗騒音混入下の確率システムに対する状態推定法を不規則過程の非ガウス性をも正確に把握できる分布表現を基礎に考察する。以下、具体的に各章における研究内容を概説する。

第一部では、音環境システムにおいて、システムの入出力関係を回帰関係として捉え、静的な立場から、状態推定問題を考察している。そこで、任意の確率分布形状を許す説明変数をもとに目的変数もつ任意の揺らぎ分布全体が予測できる、新たな一回帰分析法を提案している。そして、暗騒音の混入下で、新たに提案した回帰の関係様式に内在する各種相関特性を反映した未知パラメータを、種

々の誤差評価規範に従って同定している。

第1章では、実現象のゆらぎが示す複雑さに対し、あらかじめ情報欠損を招くことのないよう、分布予測に整合した新たな回帰分析の一試みを見出している。具体的には、説明変量と目的変量間でその回帰モデルを線形・非線形のあらかじめ一定した関数様式の枠組みで与えず、また、誤差評価においても最小自乗法などのような評価法をあらかじめ採用しない。その上、応答分布の予測においても、この回帰関数を説明変数から目的変数への変換関係とみなし所与の異種入力から変換してゆく通常のやり方を捨てた。そして、できる限り人為的単純化を避けようとする、これら問題点の改善に柔軟かつ普遍的に対処できるベイズ原理を研究の当初から導入している。さらにできるだけ任意の入力状態と任意の実システムに広く適用できるよう、方法論上の普遍性を目ざしながらもなお、現象がもつ複雑多様さのさまざまな程度を秩序ある姿で逐次反映できるよう、その回帰モデルには級数展開型の階層表現を計画的に導入している。特に、各変量の振幅変動が正負両領域にわたる場合に対し統計的エルミート展開型の回帰モデルを、その変動が非負の領域内にのみ留まる場合には統計的ラゲール展開型の回帰モデルを提案している。最後に、回帰モデルの設定にとって、最も本質的な情報の抽出のみに目を向け、2変量間における線形、非線形の各種相関情報のみを、浮き彫りに反映できる新たな回帰モデルを具体的に提案している。そして、本手法の一スペシャルケースに公知の標準路線におけるガウス分布形変量、線形回帰モデル、最小自乗誤差評価に基づく回帰分析法が含まれ得ることも合わせ示している。さらに、本手法がもつ実際の有効性の一端をも検証するために、住環境における室内外の実遮音システムを具体例として採り上げ、実験的確認を行なっている。

第2章では、回帰関係としての一般化した関係様式をまず第1章に沿ってあらかじめ設定した後、これに内在する各種相関特性は未知パラメータとみなして同定する新たな手法を提案している。しかし、実環境システムにおいては、観測雑音が混入してくるのが避けられないために、この雑音対策も考慮する必要がある。そこで、以下の種々の誤差評価規範に従って、いくつかの同定法を提案している。まず、任意暗騒音混入下において、入力と出力間の線形・非線形の各種相関情報に基づくパラメータ同定法を考察している。つぎに、入力と出力間の相互情報量を最大にするパラメータが最良の推定値となることから、Minimum エントロピー評価に基づく同定法を提案している。また、人間の主観的な要求によって、公知の最小自乗型誤差規範を襲用できる方向へ新たに変形した一同定法も提案している。さらに本手法の有効性を実験的に検証するため、室内外および室内音響システムにおいて、暗騒音の混入下で、このシステムに関する回帰パラメータを具体的に同定する手法と同定時とは異なった他の異種実騒音入力を相加した場合の応答分布予測を行なっている。

第二部では、独立した任意変動分布の外来雑音が混入することにより汚された実確率システムに着目し、その逐次観測データの内から、潜在する対象の未知信号波形を動的に推定できる広義デジタルフィルタのプログラム論理を考察している。まず、状態変量の振幅変動が正負両領域にわたる場合に対し、特に、カルマンフィルタを階層的に一般化した形態で、状態推定理論を導出する。そして、考察対象として、任意非ガウス形音確率環境のエネルギーシステムに着目し、特にエネルギーシステムに整合した広義デジタルフィルタの一設計理論を導出している。

第3章では、非ガウスの任意変動分布を示す独立した外来雑音が混入する実状況下での確率システムに着目する。そしてこの外来雑音により汚された線形・非線形の実確率システムに対する逐次の観測データをもとに、潜在する対象の未知信号を動的に推定してゆく広義デジタルフィルタのプログラム論理を導出する。具体的には、変動の任意非ガウス分布特性に対処でき、しかも、公知のカルマンフィルタを展開初項の基幹に採って、パラメータ微分の逐次形式で表された階層構造をもつ状態推定アルゴリズムの一般化表現を新たに導出している。ここに導出した推定理論はカルマンフィルタに比べると同様観測値との一次相関情報を利用すること以外に、非ガウス性の高次相関情報も積極的に利用している。もちろん、従来のカルマンフィルタも一スペシャルケースに含んでいる。さらに、本手法のもつ実際的有効性の一端を検証するため、室内外音響分野の実問題に着目する。すなわち、遮音システムの音響パラメータを推定したり、暗騒音が混入する実状況下で残響時間を推定したり、暗騒音に埋もれた対象騒音を推定したりする実際問題に本手法を適用している。

第4章では、騒音環境を一旦エネルギーシステムとして把握し、任意の分布形状を示す暗騒音の混入下で、実音響システムの逐次計測データから対象とする未知騒音のみを動的に推定する新たな手法を設定する。実際の音環境ではもともとの音圧変動が標準的なガウス分布（音圧変動では、直流が存在せず交流的変動のみで、その周波数帯域の広さからも変動の自由度に富む）から外れるのが常である。そのうえ、騒音計やレベル・レコーダを用いて計測されるので、計器時定数や対数変換の影響を受けて計測データはますます複雑な変動分布を示す。従って、この計測データに対応したもとのパワー尺度での受音の強さに対しては、標準的なガンマ分布からずれるの

が常となる。そこで、ここでは、特にエネルギーシステムに整合した広義デジタルフィルタの一設計理論を、現象の非ガンマ性に沿い、階層的に逐次処理できる一般化形態で導出する。具体的には、変動の非ガンマ分布特性に対処でき、しかも、パラメータ微分形で表された階層構造をもつデジタルフィルタの状態推定に関する新たなプログラム論理を具体的に提案している。さらに、本手法の持つ実際的有効性の一端を検証するため、室内音響分野の実問題に着目し、暗騒音が混入する実状況下で、残響曲線を推定したり、遮音システムの音響パラメータを推定したりする実際的問題に本手法を適用している。

結論では、本論文で新たに得られた研究成果をまとめるとともに今後に残された研究課題について述べている。



第一部 情報欠損を招かない暗騒音混入下の静的な一状態推定法



# 第1章 音環境システムの応答分布に整合した一回帰分析法

## 1.1 緒言

音環境分野は自然、社会、人間の介在する問題の複合体である。このような複雑多様さに富む分野では、通常目的変数と説明変数間で実測データに基づく公知の回帰分析法 [1-4] がよく適用される [5-7]。しかし、従来の回帰分析法では、あらかじめ変動分布をガウス分布特性に標準化したり、両変数間にあらかじめ線形または適当な型の回帰関数を設定して公知の最小自乗法を適用するのが方法論上の標準路線 [1-4] であろう。このことはとりもなおさず、回帰まわりのゆらぎ情報を一方的に誤差のほうへ位置付けて人為的に処理してしまう恐れのあることを意味している。勿論、実環境で遭遇する現象は、常にこのような人為的単純化を超えた複雑多様さをもとと客観的に多く持ち合わせている。従って、あらかじめ人為的に設定したこの回帰まわりのばらつきの中にも互いの高次的相関関係を反映したゆらぎの有効情報がなお潜在している。この高次的な有効情報もできるだけ多く正確に抽出するためには、まず現象が示す複雑多様さを単純な人為操作を通して情報欠損を招くことのないよう、積極的に把握する必要がある。すなわち、平均、分散（ガウス性）などの低次モーメントのみにでなく、高次モーメントにも併せ目を向けた解析を進めなければならない。しかも、目的変数や説明変数が工学的要求に直接対応させて選定され、その要求が複雑化すればするほどゆらぎの中から非線形回帰や高次相関を抽出する必要性が益々増加するといえる。特に、応答分布の予測を目ざし、これに整合させた新たな回帰分析法を見出すためには、単に分析のみのためにでなく、実現象がもつ複雑多様さに整合させながらも、工学的要求の分布予測に目的志向型に奉仕する新たな方法論を設定す

る必要がある。しかし、実現象の複雑多様さに足場をおきながら分布予測への整合性に研究の中心をおくとはいっても、実現象のゆらぎ形態や工学的要求にはさまざまなものがある。現実には、データの摂取方法やその要求いかんによって、説明変数と目的変数間におけるあらゆる回帰関連情報を洩れなくしかも精度よく抽出する必要のないこともある。従って問題自体がもつ多様さと現実的妥協の問題にも対処できる柔軟さを方法論上でもたせるためには、その多様さを逐次階層的に反映でき、しかも利用上適当な項数で打ち切ることのできる展開表現形式を導入することが方法論上の事前計画が必要になる。

以上の観点から、本章では、任意の確率分布形状を許す説明変数をもとに目的変数がもつ任意のゆらぎ分布全体が予測できる、新たな一方法論を見出すことに研究の焦点をおく。すなわち、変量のガウス形ゆらぎ分布、回帰の線形性、誤差の最小自乗評価など、公知の回帰分析における方法論上の標準路線を基盤にしながらも、分布予測といった目的志向型の立場をとるためには、この上にどのような高次処理を導入すべきかにまず注目する。すなわち、従来におけるような人為的単純化をあらかじめ施さぬ応答分布の予測法と現象の複雑さに整合した回帰分析の一試みを提案している。具体的には、ベイズ定理[8,9]を基盤にして、各変量間における線形、非線形の各種相関情報を洩れなく階層的に反映させることができ、かつ目的変数と説明変数間の回帰の関数型をあらかじめ人為的に仮定しない一方法論を提案している。

最後に、本手法で提案した回帰分析の新たな一試みと応答分布の予測法が持つ実際的な有効性を検証するため、住環境における室内外の実遮音システムを具体例として採り上げ、実験的確認を行なっている。

## 1.2 理論的考察

### 1.2.1 2種変量間の回帰分析

N次元の説明変数ベクトル  $\mathbf{X}$  ( $\triangleq (x_1, x_2, \dots, x_N)$ ) を入力、目的変数  $y$  を出力とみなせる実システムに着目する時、 $\mathbf{X}$  と  $y$  間の回帰 (すなわちシステム特性) に関するあらゆる相関情報は、 $\mathbf{X}$  を条件づけたときの条件付確率密度関数  $P(y | \mathbf{X})$  の中にすべて含まれる。そして、この  $\mathbf{X}$ 、 $y$  間における回帰関係の代表的なものは  $\mathbf{X}$  で条件づけた時の  $y$  の期待値:

$$\hat{y}(\mathbf{X}) = \int y P(y | \mathbf{X}) dy \quad (1.1)$$

で与えることができる [10]。

一般に、工学的に要求されるのは直接観測される変量  $\mathbf{X}$ 、 $y$  間の回帰関係ではなく、むしろこれらをスケールまたは変数変換した変量間についての関係である場合がしばしばある。その変換を

$$\eta = g(y) \quad (1.2)$$

$$\xi = f(\mathbf{X}) \quad (1.3)$$

で表わすと、 $\xi$  と  $\eta$  間の回帰関係  $\hat{\eta}(\xi)$  は

$$\hat{\eta}(\xi) = \int g(y) P(y | f^{-1}(\xi)) dy \quad (1.4)$$

となる。ただし、 $\mathbf{X} = f^{-1}(\xi)$  ( $\triangleq (f_1^{-1}(\xi), f_2^{-1}(\xi), \dots, f_N^{-1}(\xi))$ ) である。また、 $g(y)$ 、 $f(\mathbf{X})$  はボレル可測関数であり、さらに単調性を仮定する。

### 1.2.2 展開型分布表現に基づく回帰分析と出力分布予測

#### [ 1 ] 一般理論

まず、多変量入力  $\mathbf{X}$  と出力  $y$  の結合確率分布  $P(\mathbf{X}, y)$  を、 $\mathbf{X}$ 、 $y$  が個々に示すゆらぎ形態の支配的な姿を近似表現できる標準分布  $P_{\mathbf{a}}(\mathbf{X})$  (多次元分布)、 $P_{\mathbf{a}}(y)$  (一次元分布) を基幹として、次のように直交展開表現しておく。

$$P(\mathbf{X}, y) = P_{\mathbf{a}}(\mathbf{X}) P_{\mathbf{a}}(y) \sum_{\mathbf{m}=\mathbf{0}}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} A_{\mathbf{m}n} \phi_{\mathbf{m}}^{(1)}(\mathbf{X}) \phi_n^{(2)}(y) \quad (1.5)$$

$$A_{\mathbf{m}n} = \langle \phi_{\mathbf{m}}^{(1)}(\mathbf{X}) \phi_n^{(2)}(y) \rangle \quad (1.6)$$

ただし、 $\langle \rangle$  は変数  $\mathbf{X}$ 、 $y$  に関する平均操作を意味し、 $\mathbf{m} \triangleq (m_1, m_2, \dots, m_N)$ 、 $\sum_{\mathbf{m}=\mathbf{0}}^{\infty} \triangleq \sum_{m_1=0}^{\infty} \sum_{m_2=0}^{\infty} \dots \sum_{m_N=0}^{\infty}$  である。また、

$\phi_{\mathbf{m}}^{(1)}(\mathbf{X})$  は具体的に  $x_i$  につき  $m_i$  次 ( $i = 1, 2, \dots, N$ ) の多変量

多項式  $\phi_{m_1, m_2, \dots, m_N}^{(1)}(x_1, x_2, \dots, x_N)$  を意味する。さらに、関

数  $\phi_{\mathbf{m}}^{(1)}(\mathbf{X})$ 、 $\phi_n^{(2)}(y)$  は直交条件:

$$\int \int \dots \int P_{\mathbf{a}}(\mathbf{X}) \phi_{\mathbf{m}}^{(1)}(\mathbf{X}) \phi_{\mathbf{n}}^{(1)}(\mathbf{X}) d\mathbf{X} = \delta_{\mathbf{m}n} \quad (\mathbf{n} \triangleq (n_1, n_2, \dots, n_N)) \quad (1.7)$$

$$\int P_{\mathbf{a}}(y) \phi_m^{(2)}(y) \phi_n^{(2)}(y) dy = \delta_{mn} \quad (1.8)$$

を満足する直交多項式で、 $\mathbf{X}$  と  $y$  間の回帰に必要なあらゆる相関情報は各展開係数  $A_{\mathbf{m}n}$  の中に階層的に洩れなく反映されている。さ

らに、 $X$  の確率分布  $P(X)$  は (1.5) 式の周辺分布をとることにより、容易に

$$P(X) = \int P(X, y) dy$$

$$= P_{\theta}(X) \sum_{m=0}^{\infty} A_{m0} \phi_m^{(1)}(X) \quad (1.9)$$

で与えられる。従って、さまざまな回帰関係を算定する上で、基本となる条件付確率分布  $P(y | X)$  は、公知のベイズ定理に着目するならば、(1.5)、(1.9) 式より次のごとく展開表現される。

$$P(y | X) = \frac{P(X, y)}{P(X)}$$

$$= \frac{P_{\theta}(y) \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} A_{mn} \phi_m^{(1)}(X) \phi_n^{(2)}(y)}{\sum_{m=0}^{\infty} A_{m0} \phi_m^{(1)}(X)} \quad (1.10)$$

かくて、目的の回帰関係  $\hat{\eta}(\xi)$  は (1.4) 式より

$$\hat{\eta}(\xi) = \frac{\sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} A_{mn} \phi_m^{(1)}(f^{-1}(\xi))}{\sum_{m=0}^{\infty} A_{m0} \phi_m^{(1)}(f^{-1}(\xi))} \cdot \int g(y) \phi_n^{(2)}(y) P_{\theta}(y) dy \quad (1.11)$$

となる。ここで、関数  $g(y)$  は直交多項式系列:  $\{\phi_j^{(2)}(y)\}$  を用いてあらかじめ次のごとく展開表現される。

$$g(y) = \sum_{j=0}^{\infty} C_j \phi_j^{(2)}(y) \quad (1.12)$$

このとき、(1.11) 式は(1.8) 式の直交条件を用いて、

$$\hat{\eta}(\xi) = \frac{\sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} A_{m n} C_n \phi_m^{(1)}(f^{-1}(\xi))}{\sum_{m=0}^{\infty} A_{m 0} \phi_m^{(1)}(f^{-1}(\xi))} \quad (1.13)$$

のごとく展開表現される。上式より、 $X$ 、 $y$  の観測データに基づき、関数  $f(\cdot)$ 、 $g(\cdot)$  により変換された変量  $\xi$ 、 $\eta$  間の回帰関係が評価される。

次に、上記の回帰関係はもともとシステム特性を反映するので、これを基盤にするならば、任意入力 $x$ が考察対象の実システムに印加された場合の出力応答分布を予測することが可能となる。すなわち、任意入力に対する出力応答分布  $P_s(y)$  の予測が  $P_s(y) = \langle P(y | X) \rangle_X$  として評価される。予測におけるこの評価法は一見単純平均に基づくが、最小自乗法から得られた公知の回帰関数を入出力間の変換関係とみて、予測でこれに新たな入力値を代入する通例のやり方とは大きく異なっている。従って、(1.10) 式を用いるならば、任意入力に対する出力応答分布  $P_s(y)$  は次式となる。

$$P_s(y) = P_g(y) \sum_{n=0}^{\infty} \left\langle \frac{\sum_{m=0}^{\infty} A_{m n} \phi_m^{(1)}(X)}{\sum_{m=0}^{\infty} A_{m 0} \phi_m^{(1)}(X)} \right\rangle_X \phi_n^{(2)}(y) \quad (1.14)$$

また、 $\eta$  に関する予測分布は、 $y$  と  $\eta$  間の変換関係：(1.2)式を用いて次のごとく与えられる。

$$P_s(\eta) = P_s(y) \left| \frac{dy}{d\eta} \right| \Bigg|_{y = g^{-1}(\eta)}$$



$$\begin{aligned}
&= P_{\eta}(g^{-1}(\eta))_n \sum_{m=0}^{\infty} \left\langle \frac{\sum_{m=0}^{\infty} A_{m n} \phi_m^{(1)}(X)}{\sum_{m=0}^{\infty} A_{m 0} \phi_m^{(1)}(X)} \right\rangle_X \\
&\quad \cdot \phi_n^{(2)}(g^{-1}(\eta)) \left| \frac{1}{g'(y)} \right| \Bigg|_{y=g^{-1}(\eta)}
\end{aligned} \tag{1.15}$$

さらに、任意入力に対する出力  $\eta$  の各種モーメント情報  $\langle \eta^i \rangle$  ( $i = 1, 2, \dots$ ) を予測するために、まず関数  $\{g(y)\}^i (= \eta^i)$  を次のごとく直交多項式の系列:  $\{\phi_n^{(2)}(y)\}$  を用いてあらかじめ展開表現しておく。

$$\{g(y)\}^i = \sum_{j=0}^{\infty} d_{ij} \phi_j^{(2)}(y) \tag{1.16}$$

このとき、第  $i$  次モーメント統計量に関する予測値  $M_i \triangleq \langle \eta^i \rangle$  は次のように評価できる。

$$\begin{aligned}
M_i &= \left\langle \int \{g(y)\}^i P(y | X) dy \right\rangle_X \\
&= \left\langle \frac{\sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} A_{m n} d_{in} \phi_m^{(1)}(X)}{\sum_{m=0}^{\infty} A_{m 0} \phi_m^{(1)}(X)} \right\rangle_X
\end{aligned} \tag{1.17}$$

## [2] 具体化

### [A] 統計的エルミート展開表示形 [11,12] の回帰表現 と出力分布の予測

2 種変数  $X$  と  $y$  が夫々正負にわたる振幅変動領域をもつとした一般的な場合をまず考察する。このとき、よく知られた基幹の多次元分布  $P_{\theta}(X)$  として一次元ガウス分布の積を、 $P_{\theta}(y)$  として一次元ガウス分布を採用するのが合理的であろう。

$$P_{\theta}(X) = \prod_{i=1}^N \frac{1}{\sqrt{2\pi} \sigma_{x_i}} \exp\left(-\frac{(x_i - \mu_{x_i})^2}{2\sigma_{x_i}^2}\right) \quad (1.18)$$

$$P_{\theta}(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi} \sigma_y} \exp\left(-\frac{(y - \mu_y)^2}{2\sigma_y^2}\right) \quad (1.19)$$

ここで、 $\mu_{x_i}$ 、 $\sigma_{x_i}$ 、 $\mu_y$ 、 $\sigma_y$  はそれぞれ  $x_i$ 、 $y$  の各平均、各標準偏差を表わす。この場合、(1.7)、(1.8) 式より直交多項式  $\phi_m^{(1)}(X)$ 、 $\phi_n^{(2)}(y)$  はそれぞれ直ちに次のエルミート多項式 [11-13] で与えられる。

$$\phi_m^{(1)}(X) = \prod_{i=1}^N \frac{1}{\sqrt{m_i!}} H_{m_i}\left(\frac{x_i - \mu_{x_i}}{\sigma_{x_i}}\right) \quad (1.20)$$

$$\phi_n^{(1)}(y) = \frac{1}{\sqrt{n!}} H_n\left(\frac{y - \mu_y}{\sigma_y}\right) \quad (1.21)$$

ここで、 $H_n(Z)$  は次のように定義されたものを採用する [13]。

$$H_n(Z) = (-1)^n \exp\left(\frac{1}{2} Z^2\right) \left(\frac{\partial}{\partial Z}\right)^n \exp\left(-\frac{1}{2} Z^2\right) \quad (1.22)$$

従って、 $\xi$  と  $\eta$  間の回帰関係：(1.11) 式は次のごとく具体化される。

$$\hat{\eta}(\xi) = \frac{\sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} A_{m n i} \prod_{i=1}^N \frac{1}{\sqrt{m_i!}} H_{m_i} \left( \frac{f_i^{-1}(\xi) - \mu_{x_i}}{\sigma_{x_i}} \right)}{\sum_{m=0}^{\infty} A_{m 0 i} \prod_{i=1}^N \frac{1}{\sqrt{m_i!}} H_{m_i} \left( \frac{f_i^{-1}(\xi) - \mu_{x_i}}{\sigma_{x_i}} \right)} \cdot \int g(y) \phi_n^{(2)}(y) P_g(y) dy \quad (1.23)$$

ただし、

$$A_{m n} = \left\{ \prod_{i=1}^N \frac{1}{\sqrt{m_i!}} \right\} \frac{1}{\sqrt{n!}} < \left\{ \prod_{i=1}^N H_{m_i} \left( \frac{x_i - \mu_{x_i}}{\sigma_{x_i}} \right) \right\} \cdot H_n \left( \frac{y - \mu_y}{\sigma_y} \right) > \quad (1.24)$$

である。また、 $g(\cdot)$  および  $f(\cdot)$  としては、例えば、実際の音、振動環境において次のような関数の採用が考えられる。

i) 観測データそのものでの回帰関係を求める場合

この場合、(1.2) (1.3) 式は次のごとく限定される：

$$g(y) = y$$

$$f(X) = X$$

このとき、 $y$  は  $\phi_n^{(2)}(y)$  を用いてあらかじめ次のように直交展開表  
現される。

$$y = \sigma_y \phi_1^{(2)}(y) + \mu_y \phi_0^{(2)}(y) \quad (1.25)$$

従って、(1.23) 式は (1.8) 式の直交条件を用いて、

$$\hat{y}(X) = \frac{\sum_{m=0}^{\infty} \prod_{i=1}^N \frac{1}{\sqrt{m_i!}} H_{m_i} \left( \frac{x_i - \mu_{x_i}}{\sigma_{x_i}} \right) (\mu_y A_{m_0} + \sigma_y A_{m_1})}{\sum_{m=0}^{\infty} A_{m_0} \prod_{i=1}^N \frac{1}{\sqrt{m_i!}} H_{m_i} \left( \frac{x_i - \mu_{x_i}}{\sigma_{x_i}} \right)} \quad (1.26)$$

のごとく具体化される。

i i) デシベル変量の観測データをもとにパワー変量での回帰関係を求める場合

この場合、(1.2) (1.3) 式は次のごとく限定される [14]。

$$g(y) = 10^{\frac{y}{10} - 12}$$

$$f(X) = (10^{\frac{x_1}{10} - 12}, 10^{\frac{x_2}{10} - 12}, \dots, 10^{\frac{x_N}{10} - 12})$$

このとき、(1.23) 式に基づき、パワー変量  $\xi$ 、 $\eta$  間の回帰関係は、デシベル変量  $X$ 、 $y$  の回帰関係により、次式のように与えられる。

$$\hat{\eta}(\xi) = \frac{\sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} A_{m,n} \phi_m^{(1)}(10 \log \left( \frac{\xi}{10^{-12}} \right))}{\sum_{m=0}^{\infty} A_{m,0} \phi_m^{(1)}(10 \log \left( \frac{\xi}{10^{-12}} \right))} \cdot \int 10^{\frac{y}{10} - 12} \phi_n^{(2)}(y) P_{\theta}(y) dy \quad (1.27)$$

ここで、 $10^{(y/10) - 12} = 10^{-12} e^{(1/10) y} = k e^{\theta y}$  ( $k \cong 10^{-12}$ ,

$\theta \cong (1/10) / 10$ ) により表されることから、(1.27) 式の積分部分は次のようになる。

$$I_n \cong \int 10^{\frac{y}{10} - 12} \phi_n^{(2)}(y) P_{\theta}(y) dy$$

$$= \int k e^{\Theta y} \phi_n^{(2)}(y) P_a(y) dy \quad (1.28)$$

また、 $\phi_n^{(2)}(y)$  は  $y$  の多項式であることから、必ず次式のごとく、べき級数展開で表現できる。

$$\phi_n^{(2)}(y) = \sum_{i=0}^n a_i y^i \quad (1.29)$$

従って、(1.28) 式は (1.29) 式を用いて、

$$I_n = \sum_{i=0}^n (k a_i) \int y^i e^{\Theta y} P_a(y) dy \quad (1.30)$$

となる。 $I_n$  の値を求めるにあたり、まず (Laplace変換型) 特性関数に着目する [9, 15]。

$$m_x(\theta) \triangleq \int e^{\Theta x} P(x) dx \quad (1.31)$$

上式を  $\theta$  に関して  $l$  階微分すると、公知の次の関係式が得られる。

$$\left( \frac{\partial}{\partial \theta} \right)^l m_x(\theta) = \int x^l e^{\Theta x} P(x) dx \quad (1.32)$$

従って、 $I_n$  は次式のように表現される。

$$I_n = \sum_{i=0}^n k a_i \left( \frac{\partial}{\partial \theta} \right)^i m_{y\theta}(\theta) \\ (m_{y\theta}(\theta) \triangleq \int e^{\Theta y} P_a(y) dy) \quad (1.33)$$

結局、(1.27) 式は (1.33) 式を用いて、

$$\hat{\eta}(\xi) = \frac{\sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} A_{m n} \phi_m^{(1)}(10^1 \circ g(\frac{\xi}{10^{-12}}))}{\sum_{m=0}^{\infty} A_{m 0} \phi_m^{(1)}(10^1 \circ g(\frac{\xi}{10^{-12}}))}$$

$$\cdot \sum_{i=0}^n 10^{-12} a_i \left( \frac{\partial}{\partial \theta} \right)^i m_{y\theta}(\theta) \Big|_{\theta = \frac{1}{10} \frac{n}{10}} \quad (1.34)$$

となる。また  $P_{\theta}(y)$  にガウス分布を採用するため、ガウス分布に対する公知の特性関数を用いて (1.33) 式は具体的に次のように表わされる。

$$\begin{aligned} I_n &= \sum_{i=0}^n k a_i \left( \frac{\partial}{\partial \theta} \right)^i \exp\left(\frac{\theta^2}{2}\right) \\ &= \sum_{i=0}^n \frac{[i/2]}{j=0} \frac{k a_i \theta^{i-2j} i!}{j! (i-2j)! 2^j} \exp\left(\frac{\theta^2}{2}\right) \end{aligned} \quad (1.35)$$

上式を (1.34) 式に代入すると、 $\xi$  と  $\eta$  間の回帰関係が具体的に次のごとく表現される。

$$\begin{aligned} \hat{\eta}(\xi) &= \frac{\sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} A_{m n} \phi_m^{(1)}(10 \log\left(\frac{\xi}{10^{-12}}\right))}{\sum_{m=0}^{\infty} A_{m 0} \phi_m^{(1)}(10 \log\left(\frac{\xi}{10^{-12}}\right))} \\ &\cdot \sum_{i=0}^n \frac{[i/2]}{j=0} \frac{10^{-12} i! a_i}{j! (i-2j)! 2^j} \left(\frac{1}{10} \frac{n}{10}\right)^{i-2j} \\ &\cdot \exp\left(\frac{1}{200} \frac{n^2}{10}\right) \end{aligned} \quad (1.36)$$

かくて、他種の任意入力をこの同じ実システムに印加した時、その出力分布は次式のごとく予測される。

$$P_s(y) = P_{\theta}(y) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{B_n}{\sqrt{n!}} H_n\left(\frac{y - \mu_y}{\sigma_y}\right) \quad (1.37)$$

$$B_n \triangleq \left\langle \frac{\sum_{m=0}^{\infty} A_{m n} \prod_{i=1}^N \frac{1}{\sqrt{m_i!}} H_{m_i}\left(\frac{x_i - \mu_{x_i}}{\sigma_{x_i}}\right)}{\sum_{m=0}^{\infty} A_{m 0} \prod_{i=1}^N \frac{1}{\sqrt{m_i!}} H_{m_i}\left(\frac{x_i - \mu_{x_i}}{\sigma_{x_i}}\right)} \right\rangle_X \quad (1.38)$$

[ B ] 統計的ラゲール展開表示形 [ 11, 13 ] の回帰表現と出力分布  
の予測

この節では、2種変量  $X$  と  $y$  がそれぞれ半無限区間  $[ 0, \infty )$  内でのみ不規則に変動する場合（例えばエネルギー変量）を考察する。このとき、基幹の多次元分布  $P_{\theta}(X)$  として一次元ガンマ分布の積を、 $P_{\theta}(y)$  として一次元ガンマ分布 [ 9 ] [ 11, 12 ] を採用するのが合理的であろう。

$$P_{\theta}(X) = \frac{\prod_{i=1}^N x_i^{m_{X_i}-1} \exp\left(-\frac{x_i}{s_{X_i}}\right)}{\Gamma(m_{X_i}) s_{X_i}^{m_{X_i}}} \quad (1.39)$$

$$P_{\theta}(y) = \frac{y^{m_y-1} \exp\left(-\frac{y}{s_y}\right)}{\Gamma(m_y) s_y^{m_y}} \quad (1.40)$$

ここで、積率法から2種パラメータ  $m_{X_i}$ 、 $m_y$  と  $s_{X_i}$ 、 $s_y$  が次のように算定される。

$$\begin{aligned} m_{X_i} &\triangleq \mu_{X_i}^2 / \sigma_{X_i}^2, & s_{X_i} &\triangleq \sigma_{X_i}^2 / \mu_{X_i}, \\ \mu_{X_i} &\triangleq \langle x_i \rangle, & \sigma_{X_i}^2 &\triangleq \langle (x_i - \mu_{X_i})^2 \rangle, \\ m_y &\triangleq \mu_y^2 / \sigma_y^2, & s_y &\triangleq \sigma_y^2 / \mu_y, \\ \mu_y &\triangleq \langle y \rangle, & \sigma_y^2 &\triangleq \langle (y - \mu_y)^2 \rangle \end{aligned} \quad (1.41)$$

この場合、(1.7) (1.8) 式から直交多項式  $\phi_m^{(1)}(X)$ 、 $\phi_n^{(2)}(y)$  がそれぞれ次式で与えられる。

$$\phi_{\mathbf{m}}^{(1)}(\mathbf{X}) = \prod_{i=1}^N \sqrt{\frac{\Gamma(m_{x_i}) m_i!}{\Gamma(m_{x_i} + m_i)}} L_{m_i}^{(m_{x_i}-1)}\left(\frac{x_i}{s_{x_i}}\right) \quad (1.42)$$

$$\phi_n^{(2)}(y) = \sqrt{\frac{\Gamma(m_y) n!}{\Gamma(m_y + n)}} L_n^{(m_y-1)}\left(\frac{y}{s_y}\right) \quad (1.43)$$

ここで、 $L_n^{(m-1)}(Z)$  はラゲール多項式で次のように定義され

ている [11-13] :

$$L_n^{(m-1)}(Z) = \sum_{r=0}^n \frac{(-1)^r}{n!} \binom{n}{r} \frac{\Gamma(n+m)}{\Gamma(r+m)} Z^r \quad (1.44)$$

従って、 $\xi$  と  $\eta$  間の回帰関係: (1.11) 式は次のごとく具体化される。

$$\hat{\eta}(\xi) = \frac{\sum_{\mathbf{m}=\mathbf{0}}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} A_{\mathbf{m}n} C_n \prod_{i=1}^N \sqrt{\frac{\Gamma(m_{x_i}) m_i!}{\Gamma(m_{x_i} + m_i)}} L_{m_i}^{(m_{x_i}-1)}\left(\frac{f_i^{-1}(\xi)}{s_{x_i}}\right)}{\sum_{\mathbf{m}=\mathbf{0}}^{\infty} A_{\mathbf{m}0} \prod_{i=1}^N \sqrt{\frac{\Gamma(m_{x_i}) m_i!}{\Gamma(m_{x_i} + m_i)}} L_{m_i}^{(m_{x_i}-1)}\left(\frac{f_i^{-1}(\xi)}{s_{x_i}}\right)} \quad (1.45)$$

$$A_{\mathbf{m}n} = \left\{ \prod_{i=1}^N \sqrt{\frac{\Gamma(m_{x_i}) m_i!}{\Gamma(m_{x_i} + m_i)}} \right\} \sqrt{\frac{\Gamma(m_y) n!}{\Gamma(m_y + n)}} \cdot \left\langle \prod_{i=1}^N L_{m_i}^{(m_{x_i}-1)}\left(\frac{x_i}{s_{x_i}}\right) \right\rangle L_n^{(m_y-1)}\left(\frac{y}{s_y}\right) \quad (1.46)$$

である。ここで、(1.45) 式における定数  $C_n$  はあらかじめ次のように決定される。まず、関数  $g(y)$  に任意定数  $y_0$  を中心として公知のテーラー展開を施した後、二項定理を適用すると、



$$g(y) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{n!} (-y/a)^{n-m} \binom{n}{m} \cdot \left. \frac{d}{dy^n} g(y) \right|_{y=y_a} \cdot y^n \quad (1.47)$$

となる。一方、(1.43) (1.44) 式より

$$\begin{aligned} \sum_{j=0}^{\infty} C_j \phi_j^{(2)}(y) &= C_0 + C_1 \sqrt{m_y} + C_2 \sqrt{2m_y(m_y-1)} \\ &- \left[ \frac{C_1}{s_y \sqrt{m_y}} + 2C_2 \sqrt{\frac{2(m_y+1)}{m_y}} \right] y \\ &+ C_2 \sqrt{\frac{1}{2m_y(m_y+1)}} \frac{y^2}{s_y^2} + \dots \end{aligned} \quad (1.48)$$

が得られる。y のべき乗に関する係数について、(1.12) 式のもとに (1.47) (1.48) 両式を比較することにより  $C_n$  の値が具体的に決定される。

かくて、他種の任意入力をこの同じ実システムに印加した時の出力分布は次式のごとく予測される。

$$\begin{aligned} P_s(y) &= \frac{y^{m_y-1} \exp(-\frac{y}{s_y})}{\Gamma(m_y) s_y^{m_y}} \sum_{n=0}^{\infty} B_n \sqrt{\frac{\Gamma(m_y) n!}{\Gamma(m_y+n)}} \\ &\cdot L_n^{(m_y-1)}\left(\frac{y}{s_y}\right) \\ B_n &= \left\langle \frac{\sum_{m=0}^{\infty} A_{mni} \prod_{i=1}^N \sqrt{\frac{\Gamma(m_{x_i}) m_i!}{\Gamma(m_{x_i} + m_i)}} L_{m_i}^{(m_{x_i}-1)}\left(\frac{x_i}{s_{x_i}}\right)}{\sum_{m=0}^{\infty} A_{m0i} \prod_{i=1}^N \sqrt{\frac{\Gamma(m_{x_i}) m_i!}{\Gamma(m_{x_i} + m_i)}} L_{m_i}^{(m_{x_i}-1)}\left(\frac{x_i}{s_{x_i}}\right)} \right\rangle_X \end{aligned} \quad (1.49)$$

### 1.2.3 周辺分布を基幹とした分布展開形の回帰表現 と出力分布の予測

1.2.2 [1] 節における基準分布  $P_0(X)$ 、 $P_0(y)$  として、ここでは、 $X$ 、 $y$  個々が示す各周辺分布  $P(X)$ 、 $P(y)$  を採用する。かくて、 $P(X)$  と  $P(y)$  の積を基幹にして、結合分布  $P(X, y)$  が次のように展開表現される。

$$P(X, y) = P(X)P(y) \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} E_{m n} \theta_m^{(1)}(X) \theta_n^{(2)}(y)$$

$$E_{m n} = \langle \theta_m^{(1)}(X) \theta_n^{(2)}(y) \rangle \quad (1.50)$$

ただし、 $\theta_m^{(1)}(X)$ 、 $\theta_n^{(2)}(y)$  は次式を満足する直交多項式である。

$$\int \int \cdots \int P(X) \theta_m^{(1)}(X) \theta_n^{(1)}(X) dX = \delta_{m n} \quad (1.51)$$

$$\int P(y) \theta_m^{(2)}(y) \theta_n^{(2)}(y) dy = \delta_{m n} \quad (1.52)$$

このとき、条件付確率分布  $P(y | X)$  は

$$P(y | X) = P(y) \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} E_{m n} \theta_m^{(1)}(X) \theta_n^{(2)}(y) \quad (1.53)$$

となる。各周辺分布を分布展開の基幹に採用したことから、

(1.51) (1.52) 式をもとにこの回帰モデルにおいては  $E_{m 0} = 0$

( $m \neq 0$ )、 $E_{0 n} = 0$  ( $n \neq 0$ ) となる。すなわち、 $X$  と  $y$  間の回

帰にとり最も本質的な、互いの線形・非線形各相関情報のみが浮き彫り反映される。この点特に留意を要する。(1.53) 式を基盤にし、1.2.2 [1] 節と全く同様な計算過程を経ることにより、 $\xi$  と  $\eta$  間の回帰関係が次式で与えられる。

$$\hat{\eta}(\xi) = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} E_{m n} b_n \theta_m^{(1)}(f^{-1}(\xi)) \quad (1.54)$$

ただし、 $b_n$ は (1.12) 式に対応した展開表現:

$$g(y) = \sum_{j=0}^{\infty} b_j \theta_j^{(2)}(y) \quad (1.55)$$

における展開係数であり、事前に算定しておくことができる。さらに、他種の任意入力に対する出力応答分布  $P_s(y)$  は次のごとく予測される。

$$P_s(y) = P(y)_n \sum_{n=0}^{\infty} \left\langle \sum_{m=0}^{\infty} E_{m n} \theta_m^{(1)}(X) \right\rangle_X \theta_n^{(2)}(y) \quad (1.56)$$

#### 1.2.4 従来の回帰分析法 (最小自乗誤差評価との関連)

いま、 $X$ 、 $y$  間における回帰の型を事前に次のように枠ぎめしてみる。

$$\hat{y}(X) = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^1 E_{m n} b_n \theta_m^{(1)}(X) \quad (1.57)$$

ただし、 $g(y) = y$  とし (1.55) 式にエルミート展開を採用する場合、直ちに  $b_0 = \mu_y$ 、 $b_1 = \sigma_y$  が得られる。そして、この回帰パラメータを公知の最小自乗誤差評価により評価してみる [1-4] [9]。ただし、 $X$ 、 $y$  間の回帰に寄与する未知パラメータは互いの相関情報:

$$E_{m n} \quad (m \neq 0, n \neq 0)$$

のみで、 $E_{m 0}$  や  $E_{0 n}$  は  $X$ 、 $y$  個々に関する各統計パラメータで

あることから互いの相関には関与せず、既知量としてあらかじめ

(1.50) 式をもとに摂取可能である。このとき、誤差評価規範は次式のように与えられる。

$$J = \left\langle \left( y - \sum_{m=0}^{\infty} E_{m0} \theta_m^{(1)}(X) \right)^2 \right\rangle \rightarrow \min \quad (1.58)$$

すなわち、パラメータ  $E_{i1}$  に関して微分した式：

$$\begin{aligned} \frac{\partial J}{\partial E_{i1}} &= \left\langle \left( y - \sum_{m=0}^{\infty} E_{m0} \theta_m^{(1)}(X) \right) \mu_y \right. \\ &\quad \left. - \sum_{m=0}^{\infty} E_{m1} \theta_m^{(1)}(X) \sigma_y \right\rangle = 0 \end{aligned} \quad (1.59)$$

に (1.51) 式の直交条件を適用して、次式が容易に得られる。

$$\left\langle y \theta_i^{(1)}(X) \right\rangle - E_{i0} \mu_y - E_{i1} \sigma_y = 0 \quad (1.60)$$

また、 $X$  のみに関する既知の統計パラメータ  $E_{i0} = \left\langle \theta_i^{(1)}(X) \right\rangle$

を上式に代入すれば、

$$E_{i1} = \left\langle \left( \frac{y - \mu_y}{\sigma_y} \right) \theta_i^{(1)}(X) \right\rangle = \left\langle \theta_1^{(2)}(y) \theta_i^{(1)}(X) \right\rangle \quad (1.61)$$

となる。これは  $E_{mn}$  ( $m=i, n=1$ ) の統計表現 (1.50) 式と完全に一致している。すなわち、本手法は回帰関数の型があらかじめ (1.57) 式のごとく事前に枠ぎめされる時、ここで提案した新たな回帰分析法が最小自乗誤差評価に基づく公知の手法と一致することを示している。しかし、どのような合理的根拠のもとに (1.57) 式のごとき回帰関数の型をあらかじめ設定するのこの問題点がこの最小自乗評価法では残る。

特に、回帰関数をあらかじめ線形に限定し各変数のガウス分布特性を仮定する。問題の本質のみを浮き彫りにするため一変量の場合のみに考察を限定して、(1.57)式はまず次式のように表現される。いま、 $x$ 、 $y$ は正負の振幅変動領域をもち、ガウス分布特性を示すから、1.2.2 [2] [A]のスペシャルケースに相当し、(1.20) (1.21)式を利用する。すなわち、

$$\hat{y}(x) = \sum_{n=0}^m \sum_{n=0}^1 E_{nn} b_n \theta_n^{(1)}(x) \quad (1.62)$$

ここに

$$\begin{aligned} \theta_0^{(1)}(x) &= H_0\left(\frac{x - \mu_x}{\sigma_x}\right) = 1, \\ \theta_1^{(1)}(x) &= H_1\left(\frac{x - \mu_x}{\sigma_x}\right) = \frac{x - \mu_x}{\sigma_x} \end{aligned} \quad (1.63)$$

である。ただし、(1.55)式 ( $y(x) = y$ ) から  $b_n$  ( $n = 0, 1$ ) の値として容易に  $b_0 = \mu_y$ 、 $b_1 = \sigma_y$  をあらかじめ算定できる。従って、(1.62)式は次のごとく算定される。

$$\hat{y}(x) = \mu_y + \rho_{xy} \frac{\sigma_y}{\sigma_x} (x - \mu_x) \quad (1.64)$$

ここに、 $\rho_{xy}$  は  $x$ 、 $y$  間の線形相関係数である。かくて公知の最小自乗誤差評価により求めた線形回帰の結果と完全に一致している。従って、ここで提案する新たな回帰分析の一試みは最小自乗評価に基づく公知の線形回帰法 [1-4] を包含していることが分る。

### 1.3 実験的考察

本章で提案した回帰分析の新たな一試みと応答分布の予測法が持つ実際的な有効性を検証するため、住環境における室内外の実遮音

システムを具体例として採り上げ、実験的確認を行なった。

実験は複雑な実システムの一例として日常的稼動状態の大学研究室を採り上げ、その内と外で入出力騒音データを実測した。いまさらいうまでもなく、このような実環境でのシステムは、その構成周囲条件、入力状態、ともに極めて複雑であり、とても通常の手法で法則的に把握することは困難である。そして、この実システムの入出力間で互いの回帰関係を評価してその応答分布を予測するのである。特にその際の入力としては、最近カラオケ騒音が問題となっている実情を考慮し、ロックミュージックを採用してみた。入出力データは同期をとりながら、振幅では量子化幅 1 dB ごとに離散レベル化し、時間軸ではサンプリング周期 1 秒ごとに 700 個（回帰関係の算定用に 500 個、応答分布の予測実験として 200 個）を撮取した。

一つには簡単化のため、一つには入出力間の各相関情報を洩れなく利用しようとする本方法論を適用することから、対象としている遮音システムを 1 入力 1 出力システムとして取り扱う。そして、測定された入出力データは正変量のパワー変量であるので、その回帰関係として (1.45) 式の統計的ラゲール展開表示型の回帰表現を導入するのが自然である。さらに、公知の標準路線における最小自乗誤差評価を用いて回帰曲線を算定した場合と比較、検討を行なうため、パラメータに関する線形回帰モデルとして別途

$$\eta = a_1 + b_1 \xi \quad (1 \text{ 次回帰モデル}) \quad (1.65)$$

$$\eta = a_2 + b_2 \xi + c_2 \xi^2 \quad (2 \text{ 次回帰モデル}) \quad (1.66)$$

の 2 種類を導入し、自乗誤差評価  $\langle (\eta - (\text{右辺}))^2 \rangle \rightarrow$  最小化のもとに回帰パラメータ  $a_i$ 、 $b_i$  ( $i = 1, 2$ ) 及び  $c_2$  を算定した。その結果、1 次回帰モデルに対しては (1.64) 式と同様、 $a_1$ 、 $b_1$  の推定式が次のごとく与えられる。

$$\hat{a}_1 = \mu_\eta + \frac{\rho}{\eta} \xi \frac{\mu_\eta \sigma_\eta}{\sigma_\xi} \quad (= 5.40 \times 10^{-7}) \quad (1.67)$$

$$\hat{b}_1 = \frac{\rho}{\eta} \xi \frac{\sigma_\eta}{\sigma_\xi} \quad (= 3.92 \times 10^{-3}) \quad (1.68)$$

また、 $a_2$ 、 $b_2$ 、 $c_2$  は次の連立方程式を解いて推定される。

$$\begin{pmatrix} 1 & \langle \xi \rangle & \langle \xi^2 \rangle \\ \langle \xi \rangle & \langle \xi^2 \rangle & \langle \xi^3 \rangle \\ \langle \xi^2 \rangle & \langle \xi^3 \rangle & \langle \xi^4 \rangle \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{a}_2 \\ \hat{b}_2 \\ \hat{c}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \langle \eta \rangle \\ \langle \eta \xi \rangle \\ \langle \eta \xi^2 \rangle \end{pmatrix}$$

$$(\hat{a}_2 = 5.25 \times 10^{-7}, \quad \hat{b}_2 = 4.12 \times 10^{-3}, \quad \hat{c}_2 = -0.45)$$

(1.69)

この従来の評価法と本手法によりそれぞれ得られた回帰曲線を、 $\eta$  間における実測の散布図とともに Fig.1.1 に示す。ただし、展開項数を初項から第(n-1)番目の展開項まで採用した理論分布を第n近似と呼んでおく。いずれの回帰曲線も散布図の重心付近を貫いているが、これら回帰曲線の比較のみでその優劣を論ずるのはもともと不合理であると思われる。すなわち、本研究における最終目標の分布予測においてこそ互いの有効性を比較検討せねばならない。そこで、ここで得られた各回帰曲線を用いて、(本回帰分析の目的でもある)出力応答分布を予測した結果を、その累積分布表示  $Q(\eta)$

( $\equiv \int_0^\eta P_S(\eta) d\eta$ ) で Fig.1.2 及び Fig.1.3 に示す。Fig.1.2 においては、(1.45) 式 of 回帰モデルを入力  $\xi$  から出力  $\eta$  への変換関係とみて、この関係に異種のカラオケ騒音を代入しその応答出力分布を評価する手法と最小自乗法に基づく(1.65) (1.66) 式を変換関係とみて、その応答分布を予測した結果が示されている。両手法とも、分布の傾向をよく把握しているとはとても言えない。Fig.1.3 においては、本理論に基づく回帰関数を入出力間の変換関係として

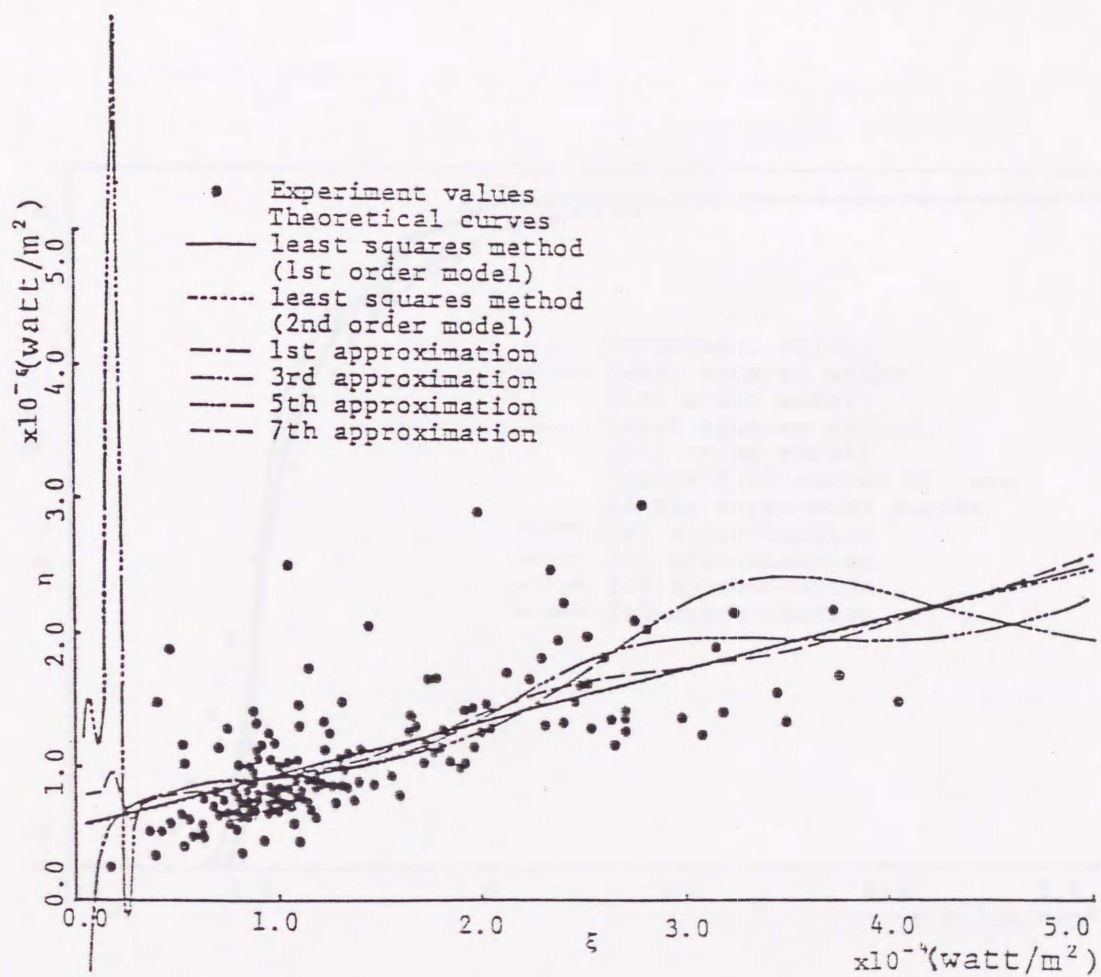


Fig.1.1 Regression curves on a power scale between the input and output signals for an indoor and outdoor sound environment.



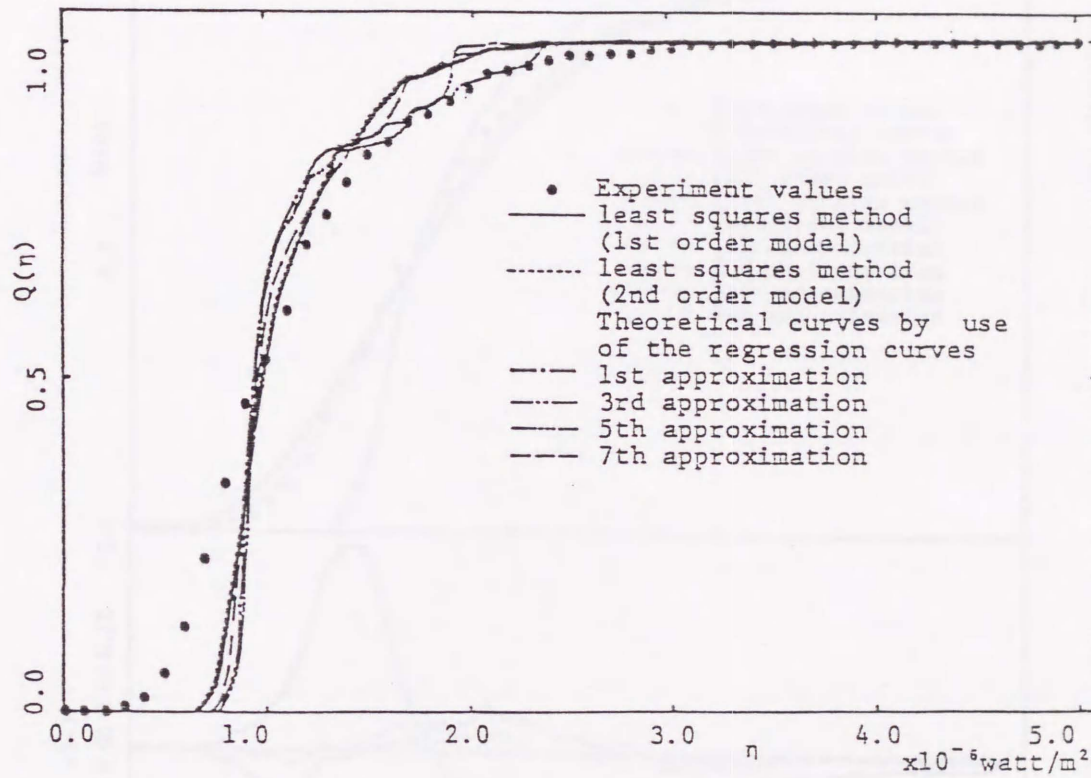


Fig.1.2 A comparison between theoretically predicted curves and experimentally sampled probability distribution for an indoor and outdoor sound environment.

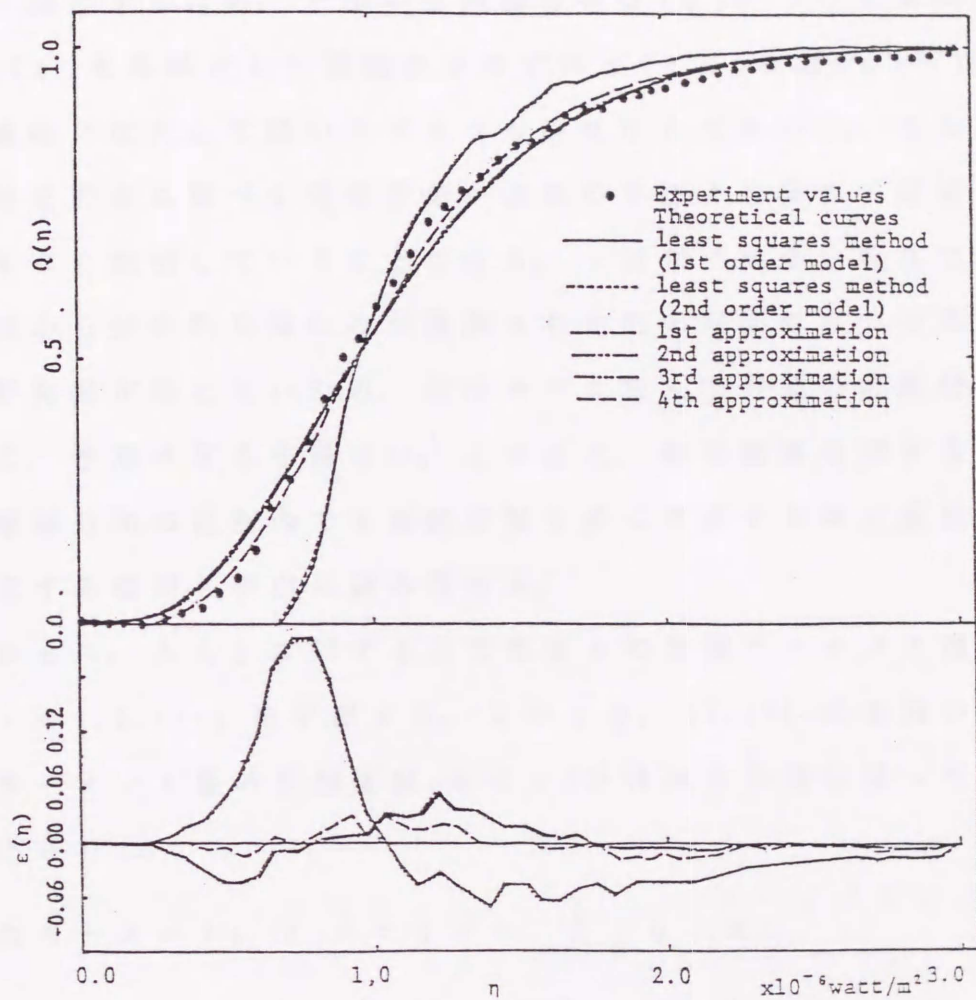


Fig.1.3 A comparison between theoretically predicted curves and experimentally sampled probability distribution for an indoor and outdoor sound environment.

直接用いず、(1.49)式のごとく入出力データに基づく平均演算により、その応答分布を予測した結果が、従来の手法と対比させて実験的頻度分布とともに示されている。特に、本手法の有効性をより明確に図示するため、予測の各累積分布 $Q(\eta)$ について実測累積分布 $Q_E(\eta)$ を基準とした理論からのずれ $\varepsilon(\eta) (\triangleq Q(\eta) - Q_E(\eta))$ を縦軸に拡大して描いたグラフも併せ示しておいた。その結果、本回帰分析法に基づく分布予測が従来の手法より極めて顕著に実測分布をよく説明していることが分る。(従来の回帰分析法では研究の当初から分析的立場のみが強調され目的志向型にたつ分布予測への解析姿勢が殆どないため、回帰モデルを入出力間の変換関係とみなして、予測せざるを得ない。この点に、特に留意を用する)また、本理論分布の範囲内でも展開項数を多く考慮するほど実験値によく漸近する傾向も明白に読み取れる。

さらに、入力 $\xi$ に対する出力応答 $\eta$ の各種モーメント情報 $\langle \eta^i \rangle$  ( $i = 1, 2, \dots$ )を予測する。このとき、(1.17)式を用いて、第 $r$ 次モーメント量の予測値 $M_r \triangleq \langle \eta^r \rangle$ は次の手順に従って具体的に算出された。

$$1 \text{ 次モーメント: } M_1 = \langle \eta \rangle = \sum_{i=0}^{\infty} q_{1i} R_i,$$

$$q_{10} = -s_{\eta} \sqrt{\frac{m}{\eta}}, \quad q_{11} = s_{\eta} \frac{m}{\eta},$$

$$R_i \triangleq \left\langle \frac{\sum_{m=0}^{\infty} A_{mi} \sqrt{\frac{\Gamma(m_{\xi}) m!}{\Gamma(m_{\xi} + m)}} L_m^{(m_{\xi} - 1)} \left( \frac{\xi}{s_{\xi}} \right)}{\sum_{m=0}^{\infty} A_{m0} \sqrt{\frac{\Gamma(m_{\xi}) m!}{\Gamma(m_{\xi} + m)}} L_m^{(m_{\xi} - 1)} \left( \frac{\xi}{s_{\xi}} \right)} \right\rangle_{\xi} \quad (1.70)$$

$$2 \text{ 次モーメント: } M_2 \triangleq \langle \eta^2 \rangle = \sum_{i=0}^{\infty} q_{2i} R_i,$$

$$q_{20} = \sqrt{2 \frac{m}{\eta} (m_{\xi} + 1)} s_{\eta}^2,$$

$$\begin{aligned}
 q_{21} &= -2s_{\eta}^2(m_{\eta} + 1)\sqrt{m_{\eta}}, \\
 q_{22} &= (m_{\eta} + 1)m_{\eta}s_{\eta}^2, \\
 &\cdot \\
 &\cdot \\
 &\cdot
 \end{aligned}
 \tag{1.71}$$

$$r \text{ 次モーメント: } M_r \triangleq \langle \eta^r \rangle = \sum_{i=0}^r q_{ri} R_i,$$

$$q_{rr} = (-1)^r s_{\eta}^r \sqrt{\frac{\Gamma(m_{\eta} + r)r!}{\Gamma(m_{\eta})}},$$

$$q_{r(r-1)} = (-1) q_{rr} \sqrt{r(m_{\eta} + r - 1)},$$

...

$$q_{r0} = (-1)^r \sum_{j=1}^r \sqrt{\frac{\Gamma(m_{\eta} + j)}{j! \Gamma(m_{\eta})}} q_{rj} \tag{1.72}$$

得られたモーメント推定結果は Table 1 に示す。1次モーメント（平均）においてはあまり優劣の差を認められない。しかし、2次以上のモーメントになるほど、本手法が公知の最小自乗法に基づく手法よりはるかに優れていることが明白に伺える。さらに、本理論のうちでも、確定的な結論を引き出すのは困難だが、一般的傾向として展開項数を多くとって近似度をあげたほうがよくなる傾向にあるといえる。

#### 1.4 結言

公知の標準路線における回帰分析法は、各変量のガウス分布特性、誤差の最小自乗評価、回帰関数を変換関係にとっての予測、ときに回帰関数の線形性など、人為的操作面上の簡便さを優先させるのが

Table 1.1 室内音響システムの応答出力に関する  
n 次モーメント量  $M_n$  の予測結果

		1次モーメント $M_1 = \langle \eta \rangle$ (watt/m <sup>2</sup> )	2次モーメント $M_2 = \langle \eta^2 \rangle$	3次モーメント $M_3 = \langle \eta^3 \rangle$	4次モーメント $M_4 = \langle \eta^4 \rangle$	5次モーメント $M_5 = \langle \eta^5 \rangle$
実測値		1.092E-06	1.490E-12	2.566E-18	5.580E-24	1.517E-29
算 出 値	最小自乗法 1	1.092E-06	1.308E-12	1.745E-18	2.615E-24	4.382E-30
	最小自乗法 2	1.092E-06	1.308E-12	1.742E-18	2.599E-24	4.317E-30
	第 1 次近似	1.092E-06	1.490E-12	2.440E-18	4.661E-24	1.017E-29
	第 2 次近似	1.092E-06	1.491E-12	2.441E-18	4.662E-24	1.018E-29
	第 3 次近似	1.092E-06	1.491E-12	2.441E-18	4.662E-24	1.018E-29
	第 4 次近似	1.100E-06	1.512E-12	2.620E-18	5.764E-24	1.582E-29
	第 5 次近似	1.109E-06	1.537E-12	2.682E-18	5.867E-24	1.567E-29
	第 6 次近似	1.099E-06	1.508E-12	2.594E-18	5.592E-24	1.518E-29

常である。すなわち、実現象がもつ複雑・多様さへの整合をこそ重視する解析姿勢においてはもちろん、応答の分布予測といった工学的要求へ目的志向型に接近する解析姿勢において、いくらか欠ける点があったようである。

本章では、既知の法則的關係では内部メカニズムを到底把握できない、極めて複雑・多様な実環境システムを考察対象に採った。そして、この実システムの複雑・多様さをできるだけ単純化せず、しかも工学的要求の分布予測へ目的志向型に整合させ得る回帰分析の一試みを提案した。具体的には、説明変数と目的変数間でその回帰モデルを線形・非線形のあらかじめ一定した関数様式の枠組で与えず、また、誤差評価においても最小自乗法など特定した評価法をあらかじめ採用しない。その上、応答分布の予測においても、この回帰関数を説明変数から目的変数への変換関係とみなし所与の異種入力をこれに代入してゆく通常のやり方を捨てた。そして、できる限り人為的単純化を避けようとするこれら問題点の改善に柔軟かつ普遍的に対処できるベイズ原理を研究の当初から導入した。

さらに、できるだけ任意の入力状態と任意の実システムに広く適用できるように、方法論上の普遍性を目ざしながらもなお、現象がもつ複雑多様さのさまざまな程度を秩序ある姿で逐次反映できるように、その回帰モデルには級数展開型の階層表現を計画的に導入した。特に、各変量の振幅変動が正負両領域にわたる場合に対し統計的エルミート展開型の回帰モデルを、その変動が非負の領域内に留まる場合には統計的ラゲール展開型の回帰モデルを提案し、最後に、回帰モデルの設定にとって最も本質的な情報の抽出に目を向け、2種変数間における線形・非線形の各種相関情報のみを、浮き彫りに反映できる回帰モデルを具体的に提案した。そして、本手法の一スペシャルケースに公知の標準路線におけるガウス分布形変数、線形回帰モデル、最小自乗誤差評価法に基づく回帰分析法が含まれ得るこ

とも併せ示した。

いうまでもなく、本手法はまだ研究の初期段階にある。従って、問題点として多くの将来課題を残している。例えば、1) 実用化のため、展開型の本回帰モデルにおいて、高次相関を反映した高次展開項を、いかに合理的または実用的に打ち切るのか、理論的見地のみならず実験的信頼度や現実との妥協も配慮してその各種対策法を見出すこと、2) 現象寄りや目的志向型の解析姿勢の上に、実観測のデジタル化に基づくコンピュータ処理に整合させた形態で、この回帰分析の試みを拡張してゆくこと、3) 個々の工学的要求や実現象の特殊性に応じたさまざまな近似化を施して、本手法をさらに実用的な形態へもってゆくこと、などである。





## 第2章 暗騒音混入下における回帰分析の一般化

### 2.1 緒言

通常、回帰分析法 [1-4] では、目的変数と説明変数間に線形または適当な非線形型の回帰関数をあらかじめ設定し、さらに回帰まわりのずれをすべて誤差とみなして、その誤差の2乗和を最小にしたり、あるいはガウス分布を前提にした手法の標準路線を採ることが多い。しかし、実現象においては、もちろん、このような人為的単純化を超えた複雑・多様さを豊富に持ち合わせている。従って、あらかじめ人為的に設定した回帰まわりのばらつきのうちにも、なお互いの高次相関に関するゆらぎの有効情報が潜在しているわけである。このような観点から、第1章では、従来のような人為的単純化をあらかじめ施さず、特に分布予測に整合した目的志向型の一回帰分析法とこれに基づく応答分布の予測法を提案した。その場合、回帰パラメータには目的変数と説明変数間における線形・非線形の各相関情報が階層的に反映されていた。しかし、有限個の実験的標本値からこれらの各パラメータを信頼性ある姿で算定するには、高次相関に直結したパラメータになるほど困難になることが多い。そこで、本章では、回帰関係としての一般化した関係様式をまず第1章に沿ってあらかじめ設定した後、これに内在する各種相関特性は未知パラメータとみなして同定する新たな手法を提案している。しかし、実環境システムにおいては、観測雑音が混入してくるのが避けられないために、この雑音対策も考慮する必要がある。そこで、以下の種々の誤差評価規範に従って、いくつかの同定法を提案している。まず、任意暗騒音混入下において、入力と出力間の線形・非線形の各種相関情報に基づくパラメータ同定法を考察している。つぎに、入力と出力間の相互情報量を最大にするパラメータが最良の推

定値となることから、Minimum エントロピー評価に基づく同定法を提案している。また、人間の主観的な要求によって、公知の最小自乗型誤差規範を襲用できる方向へ新たに変形した一同定法も提案している。さらに本手法の有効性を実験的に検証するため、室内外および室内音響システムにおいて、暗騒音の混入下で、このシステムに関する回帰パラメータを具体的に同定する手法と同定時とは異なった他の異種騒音入力を相加した場合の応答分布予測を行なっている。

## 2.2 理論的考察

実環境システムでの観測においては、もちろん暗騒音の混入が避けられず、回帰関係の評価においてもこれに対して何らかの対策を施す必要がある。ここでは、まず次のエネルギー加算原理に着目する。

$$z = y + v \quad (2.1)$$

ここで、 $z$  は観測値、 $v$  は定常の暗騒音で、 $y$  と  $v$  は統計的に独立とする。ただし、 $v$  の各統計量は入力信号のない折りに測定できるのであらかじめ既知としておく。従って、(1.13) 式 (または (1.54) 式) から  $X$  と  $y$  間 (または  $\xi$  と  $\eta$  間) の回帰関係を具体的に評価するには、 $z$  の観測に基づいて展開係数  $A_{m n}$  (または  $E_{m n}$ ) を求める。この展開係数  $A_{m n}$  (または  $E_{m n}$ ) を未知パラメータと見なして推定する際、以下のいくつかの推定法を提案する。

### 2.2.1 入出力相関情報に基づく回帰パラメータの同定

ここでは、暗騒音に汚された出力  $z$  と入力  $X$  の相関情報に基づき、何らかの方法で  $X$  と  $y$  の回帰関係を見出そうとする。このため、まず、入力  $X$  と出力  $z$  の結合確率分布  $P(X, z)$  を  $X$ 、 $z$  が個々に示すゆらぎ形態の支配的な姿を近似できる標準分布  $P_a(X)$  (多次元分布)、 $P_a(z)$  (一次元分布) を基幹として、次のように直交展開表現しておく。

$$P(X, z) = P_a(X) P_a(z) \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} g_{mn} \phi_m^{(1)}(X) \phi_n^{(3)}(z) \quad (2.2)$$

$$\begin{aligned} g_{mn} &= \langle \phi_m^{(1)}(X) \phi_n^{(3)}(z) \rangle \\ &= \langle \phi_m^{(1)}(X) \phi_n^{(3)}(y + v) \rangle \end{aligned} \quad (2.3)$$

ただし、 $\phi_n^{(3)}(z)$  は直交条件:

$$\int P_a(z) \phi_m^{(3)}(z) \phi_n^{(3)}(z) dz = \delta_{mn} \quad (2.4)$$

を満足する直交多項式である。ここで、展開係数  $g_{mn}$  は  $X$ 、 $z$  の実測データにより、実際的に求めることができる。この展開係数  $g_{mn}$  に基づき、何らかの操作を施すことにより雑音  $v$  の影響を除去して、パラメータ  $A_{mn}$  の推定を行なう。

#### [ 1 ] 統計的エルミート展開型分布表示による具体化

変数  $X$ 、 $z$  がそれぞれ正負にわたる振幅変動領域をもつとした場合をまず考察する。この時、よく知られた基幹の多次元分布

$P_{\theta}(X)$ として一次元ガウス分布の積を、 $P_{\theta}(z)$ として一次元ガウス分布を採用するのが合理的であろう。

$$P_{\theta}(X) = \prod_{i=1}^N \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_{x_i}} \exp\left(-\frac{(x_i - \mu_{x_i})^2}{2\sigma_{x_i}^2}\right) \quad (2.5)$$

$$P_{\theta}(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_z} \exp\left(-\frac{(z - \mu_z)^2}{2\sigma_z^2}\right) \quad (2.6)$$

ここで、 $\mu_{x_i}$ 、 $\sigma_{x_i}$ 、 $\mu_z$ 、 $\sigma_z$ はそれぞれ  $x_i$ 、 $z$ の各平均、各標準偏差を表わす。この場合、(1.7)、(2.4)式より直交多項式  $\phi_{\mathbf{m}}^{(1)}(X)$ 、 $\phi_n^{(3)}(z)$ はそれぞれ直ちに次のエルミート多項式 [11-13] で与えられる。

$$\phi_{\mathbf{m}}^{(1)}(X) = \prod_{i=1}^N \frac{1}{\sqrt{m_i!}} H_{m_i}\left(\frac{x_i - \mu_{x_i}}{\sigma_{x_i}}\right) \quad (2.7)$$

$$\phi_n^{(3)}(z) = \frac{1}{\sqrt{n!}} H_n\left(\frac{z - \mu_z}{\sigma_z}\right) \quad (2.8)$$

この時、(2.3)式における展開係数  $g_{\mathbf{m}n}$  は次のごとく具体的に表現される。

$$\begin{aligned} g_{\mathbf{m}n} &= \left\langle \left\{ \prod_{i=1}^N \frac{1}{\sqrt{m_i!}} H_{m_i}\left(\frac{x_i - \mu_{x_i}}{\sigma_{x_i}}\right) \right\} \frac{1}{\sqrt{n!}} H_n\left(\frac{z - \mu_z}{\sigma_z}\right) \right\rangle \\ &= \left\langle \phi_{\mathbf{m}}^{(1)}(X) \frac{1}{\sqrt{n!}} H_n\left(\frac{y - \mu_y + v - \mu_y}{\sigma_z}\right) \right\rangle \quad (2.9) \end{aligned}$$

ここで、エルミート多項式の加法定理：

$$\left(\frac{a_1^2 + a_2^2}{r!}\right)^{r/2} H_r\left(\frac{a_1 x_1 + a_2 x_2}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2}}\right)$$

$$= \frac{1}{k_1 + k_2 = r} \frac{a_{11}^{k_1}}{k_1!} \frac{a_{22}^{k_2}}{k_2!} H_{k_1}(x_1) H_{k_2}(x_2) \quad (2.10)$$

を利用することにより次の関係式が得られる。

$$\begin{aligned} H_n \left( \frac{y - \mu_y + v - \mu_v}{\sigma_z} \right) &= H_n \left( \frac{\sigma_y \frac{y - \mu_y}{\sigma_y} + \sigma_v \frac{v - \mu_v}{\sigma_v}}{\sqrt{\sigma_y^2 + \sigma_v^2}} \right) \\ &= \frac{n!}{\sigma_z^n} \sum_{r=0}^n \frac{\sigma_y^{n-r} \sigma_v^r}{(n-r)! r!} H_{n-r} \left( \frac{y - \mu_y}{\sigma_y} \right) H_r \left( \frac{v - \mu_v}{\sigma_v} \right) \quad (2.11) \end{aligned}$$

従って、(2.9) 式と(2.11) 式を用いることにより、展開係数  $g_{\mathbf{m}n}$  は次のごとく表現される。

$$\begin{aligned} g_{\mathbf{m}n} &= \frac{n!}{\sigma_z^n} \sum_{r=0}^n \frac{\sigma_y^{n-r} \sigma_v^r}{(n-r)! r!} \langle \phi_{\mathbf{m}}^{(1)}(\mathbf{X}) H_{n-r} \left( \frac{y - \mu_y}{\sigma_y} \right) \\ &\quad \cdot H_r \left( \frac{v - \mu_v}{\sigma_v} \right) \rangle \\ &= \sum_{r=0}^n \sqrt{\binom{n}{r}} \left( \frac{\sigma_y}{\sigma_z} \right)^{n-r} \left( \frac{\sigma_v}{\sigma_z} \right)^r \langle \phi_{\mathbf{m}}^{(1)}(\mathbf{X}) \frac{1}{\sqrt{(n-r)!}} \\ &\quad \cdot H_{n-r} \left( \frac{y - \mu_y}{\sigma_y} \right) \rangle \langle \frac{1}{\sqrt{r!}} H_r \left( \frac{v - \mu_v}{\sigma_v} \right) \rangle \quad (2.12) \end{aligned}$$

一方、 $\mathbf{X}$ 、 $y$  の結合確率分布表現式：(1.5) 式においても、同様に、基底の多次元分布  $P_{\mathbf{0}}(\mathbf{X})$  として一次元ガウス分布の積を、 $P_{\mathbf{0}}(y)$  として一次元ガウス分布を採用する。このとき、

$$P_{\mathbf{0}}(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi} \sigma_y} \exp \left( - \frac{(y - \mu_y)^2}{2\sigma_y^2} \right) \quad (2.13)$$

となる。ここで、 $\mu_y$ 、 $\sigma_y$  は  $y$  の平均、標準偏差を表わす。この場合、(1.8) 式より直交多項式  $\phi_n^{(2)}(y)$  は直ちに次のエルミート多

項式 [11-13] で与えられる。

$$\phi_n^{(1)}(y) = \frac{1}{\sqrt{n!}} H_n \left( \frac{y - \mu_y}{\sigma_y} \right) \quad (2.14)$$

また、(1.5) 式における展開係数  $A_{\mathbf{m}n}$  は次のごとく具体化される。

$$\begin{aligned} A_{\mathbf{m}n} &= \left\langle \left\{ \prod_{i=1}^N \frac{1}{\sqrt{m_i!}} H_{m_i} \left( \frac{x_i - \mu_{x_i}}{\sigma_{x_i}} \right) \right\} \frac{1}{\sqrt{n!}} H_n \left( \frac{y - \mu_y}{\sigma_y} \right) \right\rangle \\ &= \left\langle \phi_{\mathbf{m}}^{(1)}(\mathbf{X}) \frac{1}{\sqrt{n!}} H_n \left( \frac{y - \mu_y}{\sigma_y} \right) \right\rangle \end{aligned} \quad (2.15)$$

かくて、展開係数  $g_{\mathbf{m}n}$  の表現式 (2.12) と (2.15) を比較することにより、 $\mathbf{X}$ 、 $y$  間の回帰パラメータ  $A_{\mathbf{m}n}$  は暗騒音混入下における入出力相関情報を反映する展開係数  $g_{\mathbf{m}n}$  との間で、以下の関係が成り立つ。

$$g_{\mathbf{m}n} = \sum_{r=0}^n \sqrt{\binom{n}{r}} \left( \frac{\sigma_y}{\sigma_z} \right)^{n-r} \left( \frac{\sigma_v}{\sigma_z} \right)^r B_r A_{\mathbf{m}(n-r)} \quad (2.16)$$

$$B_r \triangleq \left\langle \frac{1}{\sqrt{r!}} H_r \left( \frac{v - \mu_v}{\sigma_v} \right) \right\rangle \quad (2.17)$$

上式に基づき、未知パラメータ  $A_{\mathbf{m}n}$  は次式のように逐次階層的に推定される。

$$A_{\mathbf{m}1} = \frac{\sigma_z}{\sigma_y} g_{\mathbf{m}1}$$

$$A_{\mathbf{m}2} = \left( \frac{\sigma_z}{\sigma_y} \right)^2 g_{\mathbf{m}2}$$

.

.

.

$$A_{\mathbf{m}j} = \left( \frac{\sigma_z}{\sigma_v} \right)^j \frac{1}{B_j} \left\{ g_{\mathbf{m}j} - r \sum_{\substack{j=0 \\ r=0}}^{j-1} \sqrt{\binom{n}{r}} \left( \frac{\sigma_v}{\sigma_z} \right)^r \left( \frac{\sigma_y}{\sigma_z} \right)^{n-r} \right. \\ \left. \cdot B_r A_{\mathbf{m}(n-r)} \right\} \quad (2.18)$$

## [2] 統計的ラグール展開型分布表示による具体化

変数  $X$ 、 $z$  がそれぞれ半無限区間  $[0, \infty)$  内でのみ不規則に変動する場合を考察する。このとき、基幹の多次元分布  $P_{\theta}(X)$  として一次元ガンマ分布の積を、 $P_{\theta}(z)$  として一次元ガンマ分布 [9] [11,12] を採用するのが合理的である。

$$P_{\theta}(X) = \prod_{i=1}^N \frac{x_i^{m_{x_i}-1} \exp\left(-\frac{x_i}{s_{x_i}}\right)}{\Gamma(m_{x_i}) s_{x_i}^{m_{x_i}}} \quad (2.19)$$

$$P_{\theta}(z) = \frac{z^{m_z-1} \exp\left(-\frac{z}{s_z}\right)}{\Gamma(m_z) s_z^{m_z}} \quad (2.20)$$

ここで、積率法から2種パラメータ  $m_{x_i}$ 、 $m_z$  と  $s_{x_i}$ 、 $s_z$  が次のように算定される。

$$\begin{aligned} m_{x_i} &\cong \mu_{x_i}^2 / \sigma_{x_i}^2, & s_{x_i} &\cong \sigma_{x_i}^2 / \mu_{x_i}, \\ \mu_{x_i} &\cong \langle x_i \rangle, & \sigma_{x_i}^2 &\cong \langle (x_i - \mu_{x_i})^2 \rangle, \\ m_z &\cong \mu_z^2 / \sigma_z^2, & s_z &\cong \sigma_z^2 / \mu_z, \\ \mu_z &\cong \langle z \rangle, & \sigma_z^2 &\cong \langle (z - \mu_z)^2 \rangle \end{aligned} \quad (2.21)$$

この場合、(1.7) (2.4) 式から直交多項式  $\phi_{\mathbf{m}}^{(1)}(X)$ 、 $\phi_n^{(3)}(z)$

がそれぞれ次式で与えられる。

$$\phi_{\mathbf{m}}^{(1)}(\mathbf{X}) = \prod_{i=1}^N \sqrt{\frac{\Gamma(m_{x_i}) m_i!}{\Gamma(m_{x_i} + m_i)}} L_{m_i}^{(m_{x_i} - 1)}\left(\frac{x_i}{s_{x_i}}\right) \quad (2.22)$$

$$\phi_n^{(3)}(z) = \sqrt{\frac{\Gamma(m_z) n!}{\Gamma(m_z + n)}} L_n^{(m_z - 1)}\left(\frac{z}{s_z}\right) \quad (2.23)$$

このとき、(2.2)式における展開係数  $g_{\mathbf{m}n}$  は次のごとく具体的に表現される。

$$\begin{aligned} g_{\mathbf{m}n} &= \left\langle \left\{ \prod_{i=1}^N \sqrt{\frac{\Gamma(m_{x_i}) m_i!}{\Gamma(m_{x_i} + m_i)}} L_{m_i}^{(m_{x_i} - 1)}\left(\frac{x_i}{s_{x_i}}\right) \right\} \right. \\ &\quad \left. \cdot \sqrt{\frac{\Gamma(m_z) n!}{\Gamma(m_z + n)}} L_n^{(m_z - 1)}\left(\frac{z}{s_z}\right) \right\rangle \\ &= \left\langle \phi_{\mathbf{m}}^{(1)}(\mathbf{X}) \sqrt{\frac{\Gamma(m_z) n!}{\Gamma(m_z + n)}} L_n^{(m_z - 1)}\left(\frac{z}{s_z}\right) \right\rangle \quad (2.24) \end{aligned}$$

ここで、ラゲール展開式の定義：

$$L_n^{(m-1)}(z) = \sum_{r=0}^n \frac{(-1)^r}{r!} \binom{n}{r} \frac{1}{n!} \frac{\Gamma(n+m)}{\Gamma(r+m)} z^r \quad (2.25)$$

により、展開係数  $g_{\mathbf{m}n}$  は次のごとく表現される。

$$\begin{aligned} g_{\mathbf{m}n} &= \sum_{r=0}^n \frac{(-1)^r}{r!} \binom{n}{r} \frac{\Gamma(m_z + n)}{\Gamma(m_z + r)} \sqrt{\frac{\Gamma(m_z) n!}{\Gamma(m_z + n)}} \\ &\quad \cdot \left\langle \phi_{\mathbf{m}}^{(1)}(\mathbf{X}) \left(\frac{y+v}{s_z}\right)^r \right\rangle \\ &= \sum_{r=0}^n \sum_{s=0}^r \frac{(-1)^r}{r!} \binom{n}{r} \binom{r}{s} \frac{\Gamma(m_z + n)}{\Gamma(m_z + r)} \sqrt{\frac{\Gamma(m_z) n!}{\Gamma(m_z + n)}} \end{aligned}$$



$$\cdot \frac{s_y}{s_z} \left\langle \phi_m^{(1)}(\mathbf{X}) v^{r-s} \left( \frac{y}{s_y} \right)^s \right\rangle \quad (2.26)$$

また、 $Y^j$  と  $L_i^{(\alpha)}(Y)$  の関係式:

$$Y^j = \sum_{i=0}^j (-1)^i \binom{j}{i} i! \frac{\Gamma(j+\alpha)}{\Gamma(i+\alpha)} L_i^{(\alpha)}(Y) \quad (2.27)$$

を用いることにより、展開係数  $g_{\mathbf{m}n}$  は (2.26) 式により次のごとく表現される。

$$g_{\mathbf{m}n} = \sum_{r=0}^n \sum_{s=0}^r \sum_{t=0}^s \frac{(-1)^{r+t} t!}{n!} \binom{n}{r} \binom{r}{s} \binom{s}{t} \cdot \frac{s_y}{s_z} \frac{\Gamma(m_z+n)}{\Gamma(m_z+r)} \frac{\Gamma(m_y+s)}{\Gamma(m_y+t)} \sqrt{\frac{\Gamma(m_z)n!}{\Gamma(m_z+n)}} \cdot \left\langle v^{r-s} \right\rangle \left\langle \phi_m^{(1)}(\mathbf{X}) L_t^{(m_y-1)} \left( \frac{y}{s_y} \right) \right\rangle \quad (2.28)$$

一方、 $\mathbf{X}$ 、 $y$  の結合確率分布表現式: (1.5) 式においても、同様に、基幹の多次元分布  $P_{\mathbf{g}}(\mathbf{X})$  として一次元ガンマ分布の積を、 $P_{\mathbf{g}}(y)$  として、一次元ガンマ分布を採用する。このとき、

$$P_{\mathbf{g}}(y) = \frac{y^{m_y-1} \exp\left(-\frac{y}{s_y}\right)}{\Gamma(m_y) s_y^{m_y}} \quad (2.29)$$

となる。ここで、積率法から2種パラメータ  $m_y$  と  $s_y$  が次のように算定される。

$$\begin{aligned} m_y &\cong \mu_y^2 / \sigma_y^2, & s_y &\cong \sigma_y^2 / \mu_y, \\ \mu_y &\cong \langle y \rangle, & \sigma_y^2 &\cong \langle (y - \mu_y)^2 \rangle \end{aligned} \quad (2.30)$$

この場合、(1.8)式から直交多項式  $\phi_n^{(2)}(y)$  は次のラゲール多項式で与えられる。

$$\phi_n^{(2)}(y) = \sqrt{\frac{\Gamma(m_y)n!}{\Gamma(m_y+n)}} L_n^{(m_y-1)}\left(\frac{y}{s_y}\right) \quad (2.31)$$

また、(1.5)式における展開係数  $A_{\mathbf{m}n}$  は次のごとく具体化される。

$$\begin{aligned} A_{\mathbf{m}n} &= \left\langle \left\{ \prod_{i=1}^N \sqrt{\frac{\Gamma(m_{x_i})m_i!}{\Gamma(m_{x_i}+m_i)}} L_{m_i}^{(m_{x_i}-1)}\left(\frac{x_i}{s_{x_i}}\right) \right\} \right. \\ &\quad \left. \cdot \sqrt{\frac{\Gamma(m_y)n!}{\Gamma(m_y+n)}} L_n^{(m_y-1)}\left(\frac{y}{s_y}\right) \right\rangle \\ &= \left\langle \phi_{\mathbf{m}}^{(1)}(\mathbf{X}) \sqrt{\frac{\Gamma(m_y)n!}{\Gamma(m_y+n)}} L_n^{(m_y-1)}\left(\frac{y}{s_y}\right) \right\rangle \quad (2.32) \end{aligned}$$

かくて、展開係数  $g_{\mathbf{m}n}$  の表現式 (2.28) と (2.32) を比較することにより、 $\mathbf{X}$ 、 $y$  間の回帰パラメータ  $A_{\mathbf{m}n}$  は暗騒音混入下における入出力相関情報を反映する展開係数  $g_{\mathbf{m}n}$  との間で、以下の関係が成り立つ。

$$\begin{aligned} g_{\mathbf{m}n} &= \sum_{r=0}^n \sum_{s=0}^r \sum_{t=0}^s \frac{(-1)^{r+t} t!}{n!} \binom{n}{r} \binom{r}{s} \binom{s}{t} \\ &\quad \cdot \frac{s_y^s}{s_z^r} \frac{\Gamma(m_z+n)}{\Gamma(m_z+r)} \frac{\Gamma(m_y+s)}{\Gamma(m_y+t)} \sqrt{\frac{\Gamma(m_z)n!}{\Gamma(m_z+n)}} \\ &\quad \cdot \sqrt{\frac{\Gamma(m_y+t)}{\Gamma(m_y)t!}} \langle v^{r-s} \rangle A_{\mathbf{m}t} \quad (2.33) \end{aligned}$$

上式に基づき、未知パラメータ  $A_{\mathbf{m}t}$  は次式のように逐次階層的に推定される。

$$\begin{aligned}
A_{\mathbf{m}1} &= \frac{s_z \sqrt{m_z}}{s_y \sqrt{m_y}} g_{\mathbf{m}1} + \left( \sqrt{m_y} - \frac{s_z m_z + \langle v \rangle}{s_y \sqrt{m_y}} \right) A_{\mathbf{m}0} \\
A_{\mathbf{m}2} &= \sqrt{\frac{m_z(m_z+1)}{m_y(m_y+1)}} \frac{s_z^2}{s_y} \left\{ g_{\mathbf{m}2} - \sum_{r=0}^1 \sum_{s=0}^r \sum_{t=0}^s \frac{(-1)^{r+t}}{2!} \right. \\
&\cdot \left( \begin{matrix} 2 \\ r \end{matrix} \right) \left( \begin{matrix} r \\ s \end{matrix} \right) \left( \begin{matrix} s \\ t \end{matrix} \right) \frac{s_y^s}{s_z^r} \frac{\Gamma(m_z+2)}{\Gamma(m_z+r)} \frac{\Gamma(m_y+s)}{\Gamma(m_y+t)} \sqrt{\frac{\Gamma(m_z)2!}{\Gamma(m_z+2)}} \\
&\cdot \left. \sqrt{\frac{\Gamma(m_z+t)}{\Gamma(m_z)t!}} \langle v^{r-s} \rangle A_{\mathbf{m}t} \right\} \\
&\cdot \\
&\cdot \\
&\cdot \\
A_{\mathbf{m}j} &= \left( \frac{s_z}{s_y} \right)^j \sqrt{\frac{\Gamma(m_z+j)}{\Gamma(m_z)j!}} \sqrt{\frac{\Gamma(m_y)j!}{\Gamma(m_y+j)}} \\
&\cdot \left\{ g_{\mathbf{m}j} - \sum_{r=0}^{j-1} \sum_{s=0}^r \sum_{t=0}^s \frac{(-1)^{r+t}}{j!} \left( \begin{matrix} j \\ r \end{matrix} \right) \left( \begin{matrix} r \\ s \end{matrix} \right) \left( \begin{matrix} s \\ t \end{matrix} \right) \right. \\
&\cdot \frac{s_y^s}{s_z^r} \frac{\Gamma(m_z+j)}{\Gamma(m_z+r)} \frac{\Gamma(m_y+s)}{\Gamma(m_y+t)} \sqrt{\frac{\Gamma(m_z)j!}{\Gamma(m_z+j)}} \\
&\cdot \left. \sqrt{\frac{\Gamma(m_y+t)}{\Gamma(m_y)t!}} \langle v^{r-s} \rangle A_{\mathbf{m}t} \right\} \tag{2.34}
\end{aligned}$$

### 2.2.2 Minimum エントロピー評価に基づく回帰パラメータの同定

入力  $\mathbf{X}$  と出力  $z$  の相互情報量  $I(\mathbf{X}, z)$  を最大 (すなわち条件付きエントロピー  $H(z | \mathbf{X})$  を最小) にするパラメータを最良の推定値として求める。すなわち、 $H(z | \mathbf{X})$  を最小にすることはシステムの入出力関係の不確実性を最小にすることを意味する。従って、(1.54) 式における回帰関係 (いま、 $\mathbf{X}$  と  $y$  間の回帰関係、すなわち

$\eta = y$ 、 $\xi = X$  の場合を考える)。

$$\langle y | X \rangle = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{n} E_{m n} b_n \theta_m^{(1)}(X) \quad (2.35)$$

のパラメータ ( $E_{m n}$ ) 推定に関する評価規範は次のように与えられる [16]。

$$I(X, z) \triangleq H(z) - H(z | X) \rightarrow \max \quad (2.36)$$

この場合、条件付きエントロピー  $H(z | X)$  は次のごとく表現される。

$$H(z | X) = - \int \int \cdots \int P(X, z) \log P(z | X) dX dz \quad (2.37)$$

また、 $H(z | X)$  は保測変換

$$P(z | X) = P_v(v) \Big|_{v = z - \langle y | X \rangle} \quad (2.38)$$

により、次式のごとく表現される。

$$\begin{aligned} H(z | X) &= - \int \int \cdots \int P(X, z) \log P_v(v) \Big|_{v = z - \langle y | X \rangle} \\ &\quad \cdot dX dz \end{aligned} \quad (2.39)$$

(2.36) 式の条件付エントロピー  $H(z | X)$  を最小にするための必要条件は

$$\frac{\partial H(z | X, E_{m 1})}{\partial E_{m 1}} = - \int \int \cdots \int \frac{\frac{\partial}{\partial E_{m 1}} P_v(v)}{P_v(v)} \Big|_{v = z - \langle y | X \rangle}$$

$$\int P(\mathbf{X}, z) d\mathbf{X} dz = 0 \quad (2.40)$$

となる。従って、回帰パラメータ  $E_{m1}$  に関する以下の評価規範を与えることができる。

$$\frac{\frac{\partial}{\partial E_{m1}} P_v(v) \Big|_{v = z - \langle y | \mathbf{X} \rangle}}{P_v(v) \Big|_{v = z - \langle y | \mathbf{X} \rangle}} = 0 \quad (2.41)$$

(2.41) 式の具体的解法としては、入力  $\mathbf{X}$  と出力  $z$  の逐次データ  $\{\mathbf{X}_k, z_k\}$  に基づき、公知の Robbins-Monro [17] の確率近似法を適用することにより、次の逐次推定アルゴリズムを導出することができる。

$$\hat{E}_{m1k} = \hat{E}_{m1(k-1)} + R_k \frac{\partial P_v(v_k)}{\partial E_{m1}} \cdot \frac{1}{P_v(v_k)} \Bigg|_{v_k = z_k - \sum_{m=0}^{\infty} E_{m1(k-1)} b_{1m} \theta_m^{(1)}(\mathbf{X}_k) - \sum_{m=0}^{\infty} E_{m0(k-1)} b_{0m} \theta_m^{(1)}(\mathbf{X}_k)} \quad (2.42)$$

ただし、 $R_k$  は次に示す対角行列である。

$$R_k \triangleq \text{diag}(r_{11}^{(k)}, r_{22}^{(k)}, \dots, r_{NN}^{(k)}) \quad (2.43)$$

各要素  $r_{ii}^{(k)}$  は Robbins-Monro による以下の収束条件を満たす。

$$\begin{aligned} (1) \quad r_{ii}^{(k)} > 0, & \quad (2) \quad \sum_{k=1}^{\infty} r_{ii}^{(k)} = \infty, \\ (3) \quad \sum_{k=1}^{\infty} (r_{ii}^{(k)})^2 < \infty & \quad (2.44) \end{aligned}$$

### 2.2.3 最小自乗誤差規範からの同定法

(1.54) 式から  $X$  と  $y$  間 (または  $\xi$  と  $\eta$  間) の回帰関係を具体的に評価するには、展開係数  $E_{m n}$  をあらかじめ評価する必要がある。ここで、 $y$  の各次モーメント量に関する次の誤差評価規範を導入する。

$$J = \langle (y^j - \langle y^j | X \rangle)^2 \rangle \quad (2.45)$$

すなわち、この  $J$  を最小にするパラメータ  $E_{m n}$  を求めるのである。未知パラメータ  $E_{i n}$  に関する微分を実行した後整理すると、次式が帰結される。

$$\langle \theta_i^{(1)}(X) y^j \rangle - \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^j E_{m n} b_{j n} \langle \theta_i^{(1)}(X) \theta_m^{(1)}(X) \rangle = 0 \quad (2.46)$$

$$(y^j = \sum_{i=0}^j b_{j i} \theta_i^{(2)}(y))$$

さらに、(1.51) 式の直交条件を用いて、

$$\langle \theta_i^{(1)}(X) y^j \rangle - \sum_{n=0}^j E_{i n} b_{j n} = 0 \quad (2.47)$$

を得る。ここで、暗騒音  $v$  が混入するため、 $z$  の観測に基づいて  $X$  と  $y$  間の回帰パラメータを推定するにあたり、まず次の関係に着目する。

$$\begin{aligned} \langle \theta_i^{(1)}(X) z^j \rangle &= \langle \theta_i^{(1)}(X) (y + v)^j \rangle \\ &= \sum_{s=0}^j \binom{j}{s} \langle v^{j-s} \rangle \langle \theta_i^{(1)}(X) y^s \rangle \end{aligned} \quad (2.48)$$

すなわち、(2.47)式における統計量  $\langle \theta_i^{(1)}(\mathbf{X}) y^j \rangle$  は

$$\begin{aligned} \langle \theta_i^{(1)}(\mathbf{X}) y \rangle &= \langle \theta_i^{(1)}(\mathbf{X}) z \rangle - \langle \theta_i^{(1)}(\mathbf{X}) \rangle \langle v \rangle \\ \langle \theta_i^{(1)}(\mathbf{X}) y^2 \rangle &= \langle \theta_i^{(1)}(\mathbf{X}) z^2 \rangle - 2 \langle \theta_i^{(1)}(\mathbf{X}) y \rangle \\ &\quad - \langle \theta_i^{(1)}(\mathbf{X}) \rangle \langle v^2 \rangle \\ &\quad \vdots \\ \langle \theta_i^{(1)}(\mathbf{X}) y^j \rangle &= \langle \theta_i^{(1)}(\mathbf{X}) z^j \rangle - \frac{j-1}{s=0} \binom{j}{s} \\ &\quad - \langle \theta_i^{(1)}(\mathbf{X}) y^s \rangle \langle v^{j-s} \rangle \end{aligned} \quad (2.49)$$

により、 $j$  について低次から高次へ階層的に求めていくことができる。同様に求めた統計量  $\langle \theta_i^{(1)}(\mathbf{X}) y^j \rangle$  を (2.47) 式に代入して、未知パラメータ  $E_{i j}$  は次式のように逐次階層的に推定される。

$$\begin{aligned} E_{i 1} &= \frac{1}{b_{11}} (\langle \theta_i^{(1)}(\mathbf{X}) y \rangle - E_{i 0} b_{10}) \\ E_{i 2} &= \frac{1}{b_{22}} (\langle \theta_i^{(1)}(\mathbf{X}) y^2 \rangle - E_{i 1} b_{21} - E_{i 0} b_{20}) \\ &\quad \vdots \\ E_{i j} &= \frac{1}{b_{jj}} (\langle \theta_i^{(1)}(\mathbf{X}) y^j \rangle - \sum_{n=0}^{j-1} E_{i n} b_{jn}) \end{aligned} \quad (2.50)$$

### 2.3 実験的考察

本章で提案した任意定常雑音の混入下における新たな回帰分析法

の実際的な有効性を検証するため、住環境における室内および室内外の実音響システムを具体例として採り上げ、実験を行なった。

### 2.3.1 室内音響システムへの実際的適用

実験は Fig. 2.1 に示すように大学内の音響実験室において、残響室→残響室内に次の2種類の遮音壁を設置して、このシステムに関する入出力データを測定した。i) 一重壁：面密度  $3.22 \text{ kg/m}^2$ 、厚さ  $1.2 \text{ mm}$  のアルミ板。ii) サウンドブリッジのある二重壁：二枚のアルミ板の間に間柱を入れた二重壁（二枚のアルミ板の間隔は  $50 \text{ mm}$ ）。

分布予測に用いる任意騒音入力としては、事前に市街地で実測し、いったんデータレコーダに記録しておいた道路交通騒音を有響室内で再生した。さらに、ノイズジェネレータから発生した白色雑音を暗騒音として採用してみた。(1.13) 式における  $x$  と  $y$  間の回帰関係を具体的に評価するには、理論の (2.34) 式を適用することにより、Fig. 2.2 の Flow chart に沿い回帰パラメータ  $A_{mn}$  を具体的に推定した。さらに、推定したパラメータ  $A_{mn}$  を用いて、(1.14) 式により、得られた回帰曲線を  $x$  と  $y$  間における実測の散布図とともに Fig. 2.3 に示す。Fig. 2.4 にサウンドブリッジのある二重壁の遮音システムに対し、その出力応答分布を予測した結果を累積分布表示で示す。その結果、全くの非ガウス分布特性を示す非ガンマ形のシステムに対し、しかも、暗騒音の混入下にもかかわらず、本回帰分析法に基づく分布予測が実測分布をよく説明していることが分かる。

次に、一重壁遮音システムに対し、(1.54) 式における  $x$  と  $y$  間の回帰関係を具体的に推定した。ここで、理論の (2.42) 式を適用することにより、回帰パラメータの逐次推定を行なった。(Fig. 2.5 を参照)。さらに、本理論に基づき応答分布を予測した結果が実験



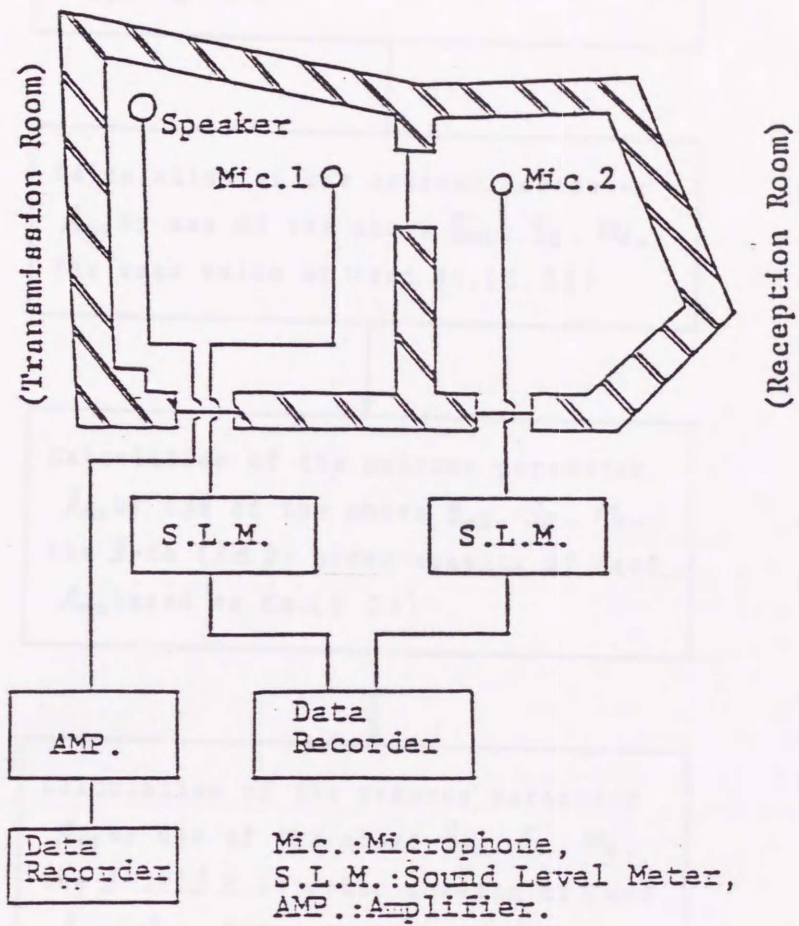


Fig 2.1 Block diagram of experimental arrangement.

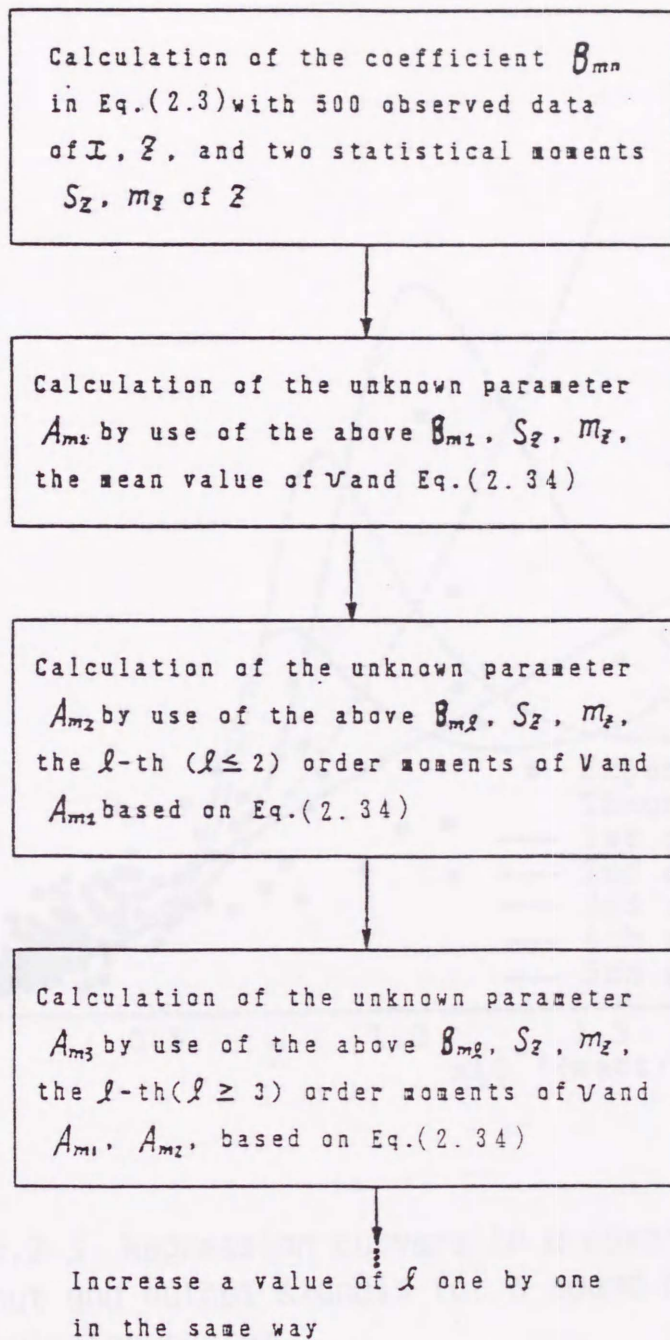


Fig.2.2 A flow chart for estimation procedure of regression parameters  $A_{mn}$ .

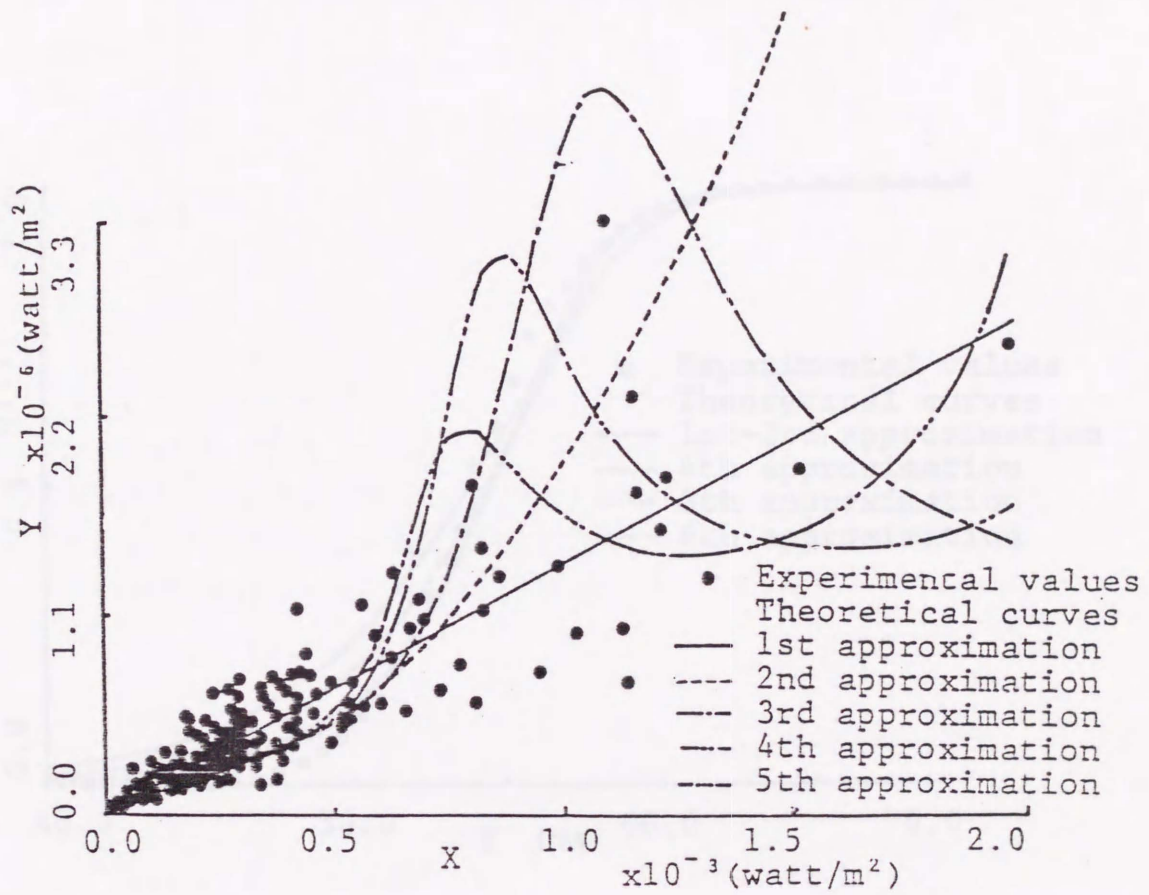


Fig.2.3 Regression curves in a power scale between input and output signals for a sound bridge type insulation system.

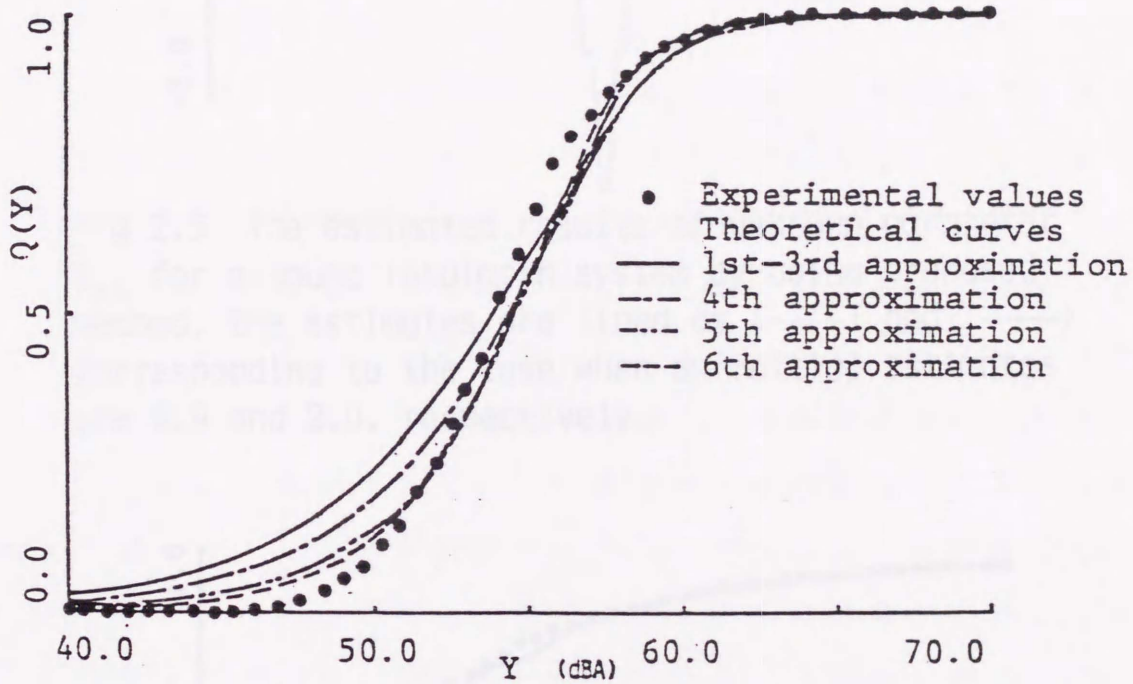


Fig.2.4 A comparison between theoretically predicted curves and experimentally sampled points on the output probability distribution for a sound bridge type insulation system.

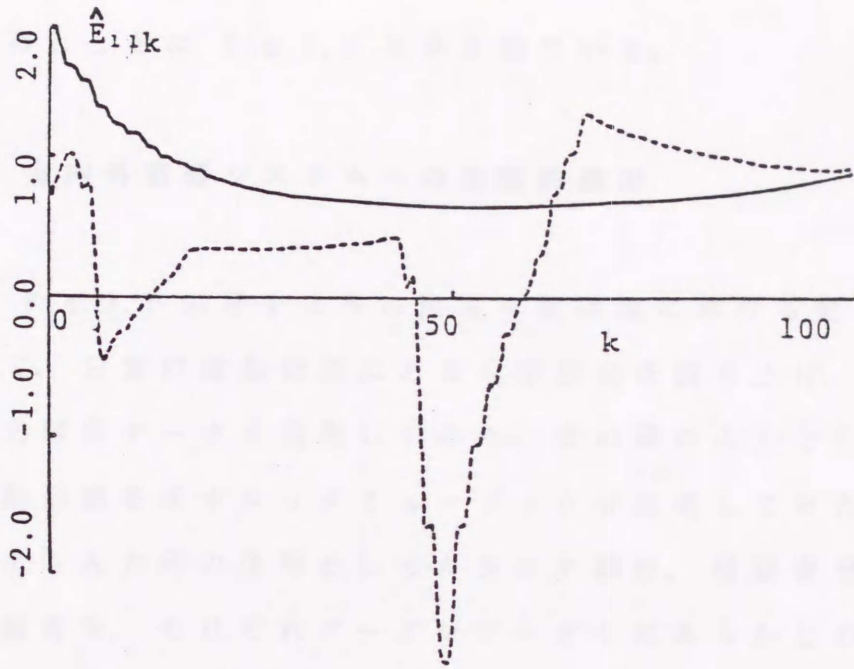


Fig 2.5 The estimated results of unknown parameter  $E_{11}$  for a sound insulation system by using proposed method, the estimates are lined as (----) and (—) corresponding to the case when an initial estimates are 0.9 and 2.0, respectively.

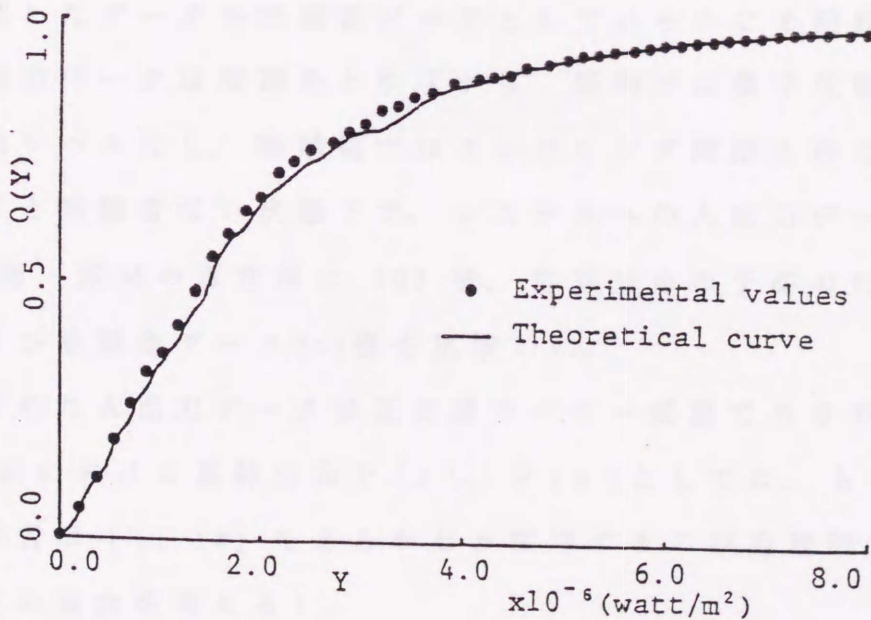


Fig 2.6 A comparison between theoretically predicted curves and experimentally sampled points on the output probability distribution for a sound insulation system

的頻度分布とともに Fig. 2.6 に示されている。

### 2.3.2 室内外音響システムへの実際的適用

実験は Fig. 2.7 に示すように複雑な音環境における実システムの一例として、日常的稼動状態にある大学校舎を採り上げ、その内と外で入出力騒音データを実測してみた。その際の入力としては複雑多様な変動形態を示すロックミュージックを採用してみた。すなわち、システム入力用の信号としてカラオケ騒音、暗騒音用の信号として交通騒音を、それぞれデータレコーダ1にあらかじめ録音し、各室内で再生して増幅した後、それぞれをスピーカ1とスピーカ2から流した。そして、音源側のマイク1および受信側のマイク2で受信し、それぞれ入力と出力として、レベルレコーダ2およびデータレコーダ2に記録した。同様な方法で、暗騒音のない（すなわち、スピーカ2から音が出てない）状態でデータを記録し、また暗騒音のみを流したデータを暗騒音データとしてあらかじめ記録した。この各入出力データは同期をとりながら、振幅では量子化幅1dBごとに離散レベル化し、時間軸ではサンプリング周期1秒ごとに暗騒音混入下と暗騒音ない状態下で、システムへの入出力データをそれぞれ700個（回帰の算定用に500個、応答分布の予測のために200個）および暗騒音データ250個を摂取した。

測定された入出力データは正変量のパワー変数であるので、(1.50)式における基幹分布 $P(x)$ 、 $P(y)$ としては、もちろんラゲール展開表示[11-13]をあらかじめ採用するのが合理的である（一変数の場合を考える）。

$$P(x) = \frac{x^{m_x - 1} \exp\left(-\frac{x}{s_x}\right)}{\Gamma(m_x) s_x^{m_x}}$$

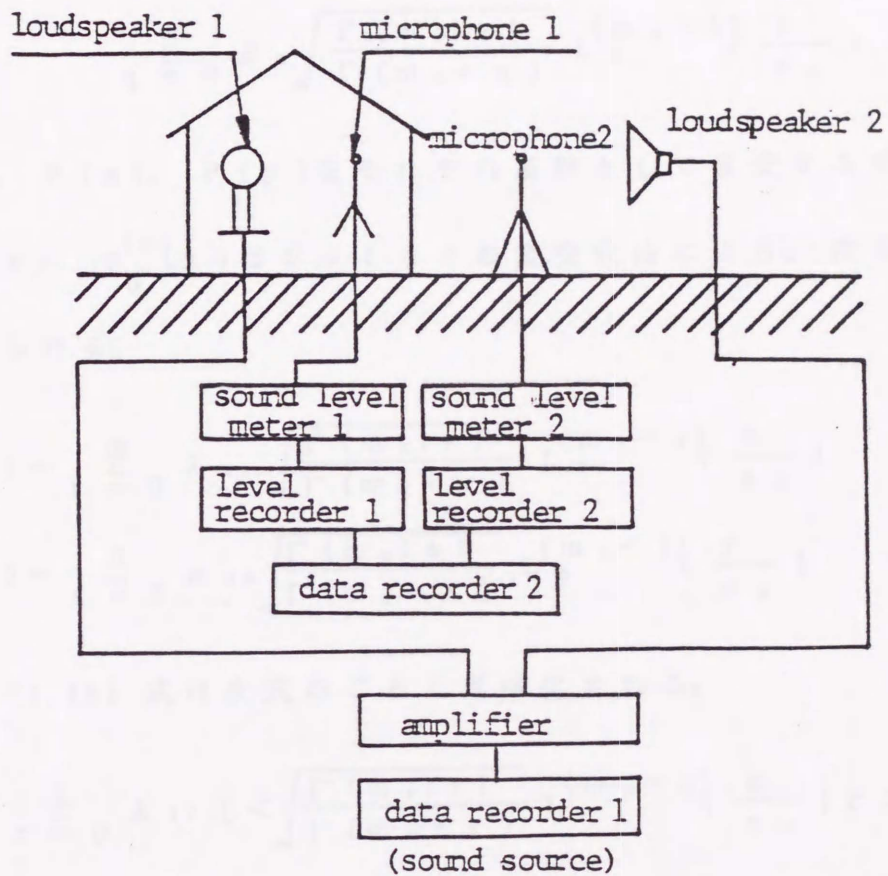


Fig 2.7 A schematic drawing of the experiment.

$$\cdot \sum_{p=0}^{\infty} \alpha_p \sqrt{\frac{\Gamma(m_x)p!}{\Gamma(m_x+p)}} L_p^{(m_x-1)}\left(\frac{x}{s_x}\right) \quad (2.51)$$

$$P(y) = \frac{y^{m_y-1} e^{-y/s_y}}{\Gamma(m_y) s_y^{m_y}} \cdot \sum_{q=0}^{\infty} \beta_q \sqrt{\frac{\Gamma(m_y)q!}{\Gamma(m_y+q)}} L_q^{(m_y-1)}\left(\frac{y}{s_y}\right) \quad (2.52)$$

この場合、 $P(x)$ 、 $P(y)$ をそれぞれ基幹として直交する多項

式： $\theta_m^{(1)}(x)$ 、 $\theta_n^{(2)}(y)$ はシュミットの直交化法により、次のご

とく与えられる。

$$\theta_m^{(1)}(x) = \sum_{r=0}^m \lambda_{mr} \sqrt{\frac{\Gamma(m_x)r!}{\Gamma(m_x+r)}} L_r^{(m_x-1)}\left(\frac{x}{s_x}\right) \quad (2.53)$$

$$\theta_n^{(2)}(y) = \sum_{s=0}^n \rho_{ns} \sqrt{\frac{\Gamma(m_y)s!}{\Gamma(m_y+s)}} L_s^{(m_y-1)}\left(\frac{y}{s_y}\right) \quad (2.54)$$

従って、(1.48)式は次式のごとく具体化される。

$$Q_{i1} = \sum_{r=0}^i \lambda_{ir} \left[ \left\langle \sqrt{\frac{\Gamma(m_x)r!}{\Gamma(m_x+r)}} L_r^{(m_x-1)}\left(\frac{x}{s_x}\right) z \right\rangle \right. \\ \left. - \left\langle \frac{\Gamma(m_x)r!}{\Gamma(m_x+r)} L_r^{(m_x-1)}\left(\frac{x}{s_x}\right) \right\rangle \langle v \rangle \right]$$

$$Q_{i2} = \sum_{r=0}^i \lambda_{ir} \left[ \left\langle \sqrt{\frac{\Gamma(m_x)r!}{\Gamma(m_x+r)}} L_r^{(m_x-1)}\left(\frac{x}{s_x}\right) z^2 \right\rangle \right. \\ \left. - \left\langle \sqrt{\frac{\Gamma(m_x)r!}{\Gamma(m_x+r)}} L_r^{(m_x-1)}\left(\frac{x}{s_x}\right) v^2 \right\rangle - 2Q_{i1} \right]$$

⋮  
⋮  
⋮

$$Q_{ij} = \sum_{r=0}^i \lambda_{ir} \left[ \left\langle \sqrt{\frac{\Gamma(m_x)r!}{\Gamma(m_x+r)}} L_r^{(m_x-1)}\left(\frac{x}{s_x}\right) z^j \right\rangle \right]$$



$$- \frac{j-1}{s=0} \binom{j}{s} Q_{is} \langle v^{j-s} \rangle \quad (2.55)$$

ただし、

$$Q_{ij} \triangleq \langle \theta_i^{(1)}(x) z^j \rangle \quad (2.56)$$

である。(2.52)式と共に、求めた各統計量を用いて、未知パラメータ  $E_{ij}$  は(2.50)式に沿って具体的に推定される。その結果はTable 2.1に示される。推定したパラメータ  $E_{ij}$  を用いて、(1.54)式に(2.51)、(2.53)式を代入することにより、 $x$ と $y$ 間の回帰関係は：

$$\hat{y}(x) = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} E_{mn} \left\{ \sum_{r=0}^m \lambda_{nr} L_r^{(m_x-1)} \left( \frac{x}{s_x} \right) \cdot \sqrt{\frac{\Gamma(m_x)r!}{\Gamma(m_x+r)}} \right\} b_{1n} \quad (2.57)$$

のごとく具体的に表される。さらに、公知の標準路線における最小自乗評価を用いて回帰曲線を算定した場合と比較・検討を行なうため、あらかじめパラメータに関する線形回帰モデルとして別途

$$y = a_1 x + b_1 \quad (1 \text{ 次回帰モデル}) \quad (2.58)$$

$$y = a_2 x^2 + b_2 x + c_2 \quad (2 \text{ 次回帰モデル}) \quad (2.59)$$

の2種類を導入した。ただし、 $a_i$ 、 $b_i$  ( $i=1, 2$ ) および  $c_2$  は自乗誤差評価  $\langle (y - (\text{右辺}))^2 \rangle \rightarrow$  最小化のもとに算定した。ここで、暗騒音が混入するため、(2.1)式を用いて(2.58)式と(2.59)式において、 $y$ のかわりに、2変量  $z$ 、 $v$  を導入した。その結果、 $z$ 、 $v$  は次の連立方程式を解いて推定される。

Table 2.1 パラメータ  $E_{ij}$  の推定結果

$B_{ij}$	$i=0$	$i=1$	$i=2$
$j=0$	1. 0 0	0. 0 0	0. 0 0
$j=1$	0. 0 0	0. 4 3	
$j=2$	0. 0 0		

Table 2.2 室内外音響システムの応答出力に関する  $L_x$  の推定結果

		$L_5$	$L_{10}$	$L_{50}$	$L_{90}$	$L_{95}$
実測値		56.9	57.6	59.9	62.6	63.3
最小自乗法 1		59.4	59.6	60.2	61.8	62.4
最小自乗法 2		判定不能	判定不能	60.2	61.4	62.2
(2.57) 式 により	第 1 次近似	59.4	59.6	60.2	61.8	62.4
	第 2 次近似	判定不能	判定不能	60.2	61.5	62.4
本 理 論	第 1 次近似	55.6	56.7	60.2	62.1	63.6
	第 2 次近似	55.6	56.7	60.2	62.9	63.6
	第 3 次近似	55.6	56.7	60.2	62.9	63.6

$$\begin{pmatrix} \langle x^2 \rangle & \langle x \rangle \\ \langle x \rangle & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 \\ b_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \langle z x \rangle - \langle v \rangle \langle x \rangle \\ \langle z \rangle - \langle v \rangle \end{pmatrix}$$

$$(\hat{a}_1 = 2.92 \times 10^{-3}, \quad \hat{b}_1 = 7.25 \times 10^{-7})$$

(2.60)

また、 $a_2$ 、 $b_2$ 、 $c_2$  は次の連立方程式を解いて推定される。

$$\begin{pmatrix} \langle x^4 \rangle & \langle x^3 \rangle & \langle x^2 \rangle \\ \langle x^3 \rangle & \langle x^2 \rangle & \langle x \rangle \\ \langle x^2 \rangle & \langle x \rangle & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_2 \\ b_2 \\ c_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \langle z x^2 \rangle - \langle v \rangle \langle x^2 \rangle \\ \langle z x \rangle - \langle v \rangle \langle x \rangle \\ \langle z \rangle - \langle v \rangle \end{pmatrix}$$

$$(\hat{a}_2 = 7.71, \quad \hat{b}_2 = -4.33 \times 10^{-4}, \quad \hat{c}_2 = 9.85 \times 10^{-7}) \quad (2.61)$$

この従来の評価法と本手法によりそれぞれ得られた回帰曲線を  $x$  と  $y$  間における実測の散布図とともに Fig. 2.8 に示す。いうまでもなく、これらの回帰曲線の比較のみでその優劣を論ずるのはもともと不合理である。すなわち、本研究における最終目標の分布予測においてこそ互いの有効性を比較検討せねばならない。そこで、(2.57) 式の回帰モデルを入力  $x$  から出力  $y$  への変換関係とみて、暗騒音の混入下における  $L_x$  値を推定した場合、最小自乗法に基づく(2.60) 式、(2.61) 式を変換関係とみて  $L_x$  値を推定した場合、さらに(1.56) 式の具体化した式を用いて  $L_x$  値を推定した場合が  $L_x$  の実測値とともに Table 2.2 に示される。

さらに、同定時とは異種のカラオケ騒音を入力させ、本理論に基づく(1.56) 式の具体化した式を用いて、その応答分布を予測した結果が従来の手法と対比させて実験的頻度とともに Fig. 2.9 に示される。その結果、暗騒音の混入下にもかかわらず、本回帰分析法に基づく分布予測が従来の手法より顕著に実測分布をよく説明していることが分かる。

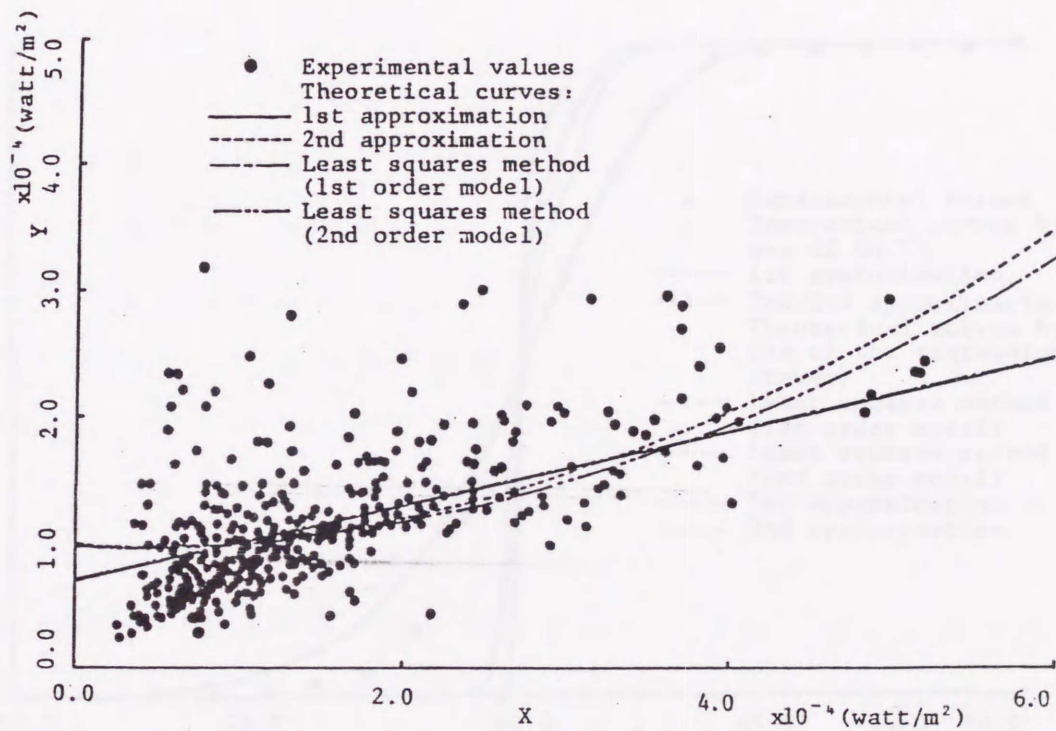


Fig.2.8 Regression curves in the energy variable between input and output signals for indoor and outdoor sound environments.

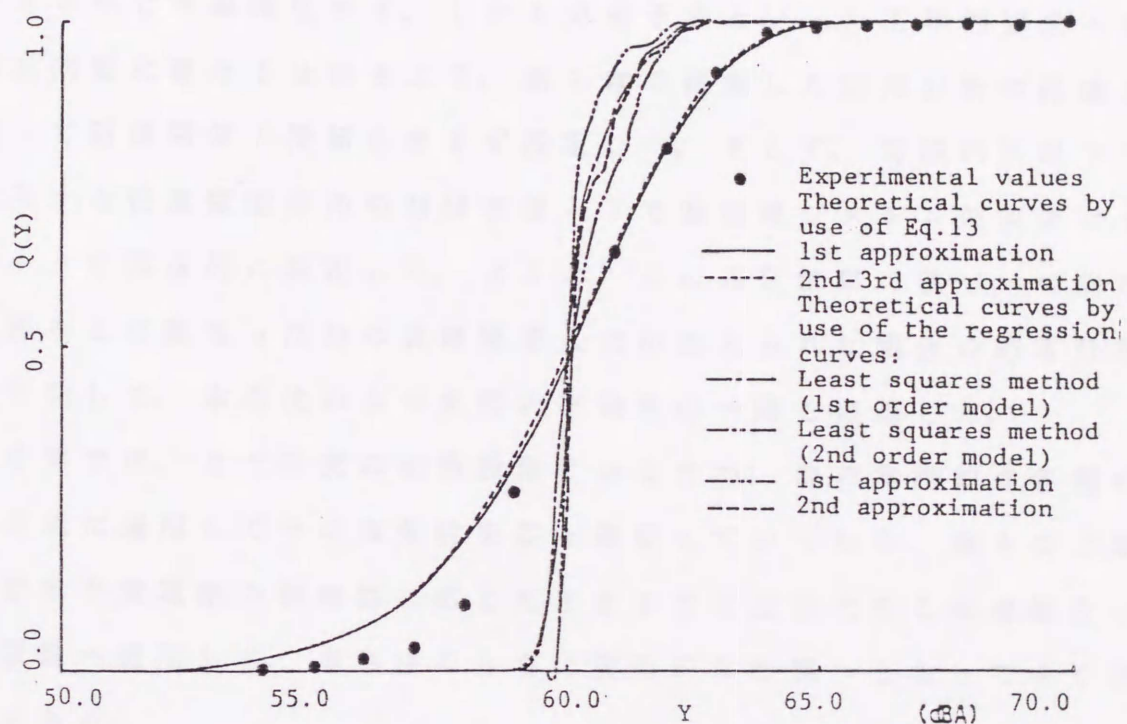


Fig.2.9 Comparison between theoretically predicted curves and experimentally sampled points on the output level probability distributions for the indoor and outdoor sound environments (sampled data: 200).

## 2.4 結言

本章では、入力が複雑多様な確率変動を示し、しかも、音環境システムのメカニズムが公知の法則的關係で直接説明されにくい場合に着目した。ここではガウス性、最小自乗評価、線形回帰といった従来の標準路線に沿って、まず実システムの複雑・多様さを人為的にあらかじめ単純化せず、しかも分布予測といった工学的要求へ目的志向型に整合させ得るよう、第1章で提案した回帰分析の路線に沿って回帰關係の枠組みをまず設定した。そして、實際的狀況下で混入する任意変動分布の暗騒音混入下で音環境システムの回帰パラメータを具体的に同定した。さらに、この同定結果に基づいて同定の折りとは異なった他の異種騒音入力加えられた場合の応答分布を予測して、本手法のもつ實際的有効性の一端も確認した。

本章では、まだ研究の初期段階にあるため、他の實際的な各種の音環境に適用してその有効性を益々確認していったり、個々の工学的要求や実現象の特殊性に応じたさまざまな近似化をこの複雑化した理論へ適用して、本手法をさらに実用的な形態へともってゆく必要がある。

第二部 階層化した広義デジタルフィルタに基づく  
動的な一状態推定法

# 第3章 非ガウス確率システムの動的な一状態推定法

## 3.1 概要

本章では、非ガウス確率システムの一状態、動的な一状態推定法を提案する。従来の非ガウス確率システムの一状態推定法は、非ガウス確率システムを一時的にガウス確率システムと見做して、カルマンフィルタを用いて推定する方法である。しかし、非ガウス確率システムは、非ガウス確率システムであるため、カルマンフィルタを用いて推定する方法は、非ガウス確率システムを推定する精度が低くなる。本章では、非ガウス確率システムを一時的にガウス確率システムと見做して、カルマンフィルタを用いて推定する方法を提案する。本章では、非ガウス確率システムを一時的にガウス確率システムと見做して、カルマンフィルタを用いて推定する方法を提案する。

## 第3章 非ガウス確率システムの動的な一状態推定法

本章では、非ガウス確率システムの一状態、動的な一状態推定法を提案する。従来の非ガウス確率システムの一状態推定法は、非ガウス確率システムを一時的にガウス確率システムと見做して、カルマンフィルタを用いて推定する方法である。しかし、非ガウス確率システムは、非ガウス確率システムであるため、カルマンフィルタを用いて推定する方法は、非ガウス確率システムを推定する精度が低くなる。本章では、非ガウス確率システムを一時的にガウス確率システムと見做して、カルマンフィルタを用いて推定する方法を提案する。本章では、非ガウス確率システムを一時的にガウス確率システムと見做して、カルマンフィルタを用いて推定する方法を提案する。

本章では、非ガウス確率システムの一状態、動的な一状態推定法を提案する。従来の非ガウス確率システムの一状態推定法は、非ガウス確率システムを一時的にガウス確率システムと見做して、カルマンフィルタを用いて推定する方法である。しかし、非ガウス確率システムは、非ガウス確率システムであるため、カルマンフィルタを用いて推定する方法は、非ガウス確率システムを推定する精度が低くなる。本章では、非ガウス確率システムを一時的にガウス確率システムと見做して、カルマンフィルタを用いて推定する方法を提案する。本章では、非ガウス確率システムを一時的にガウス確率システムと見做して、カルマンフィルタを用いて推定する方法を提案する。



## 第3章 非ガウス確率システムの動的な一状態推定法

### 3.1 緒言

実環境下での音響信号は、自然、社会から人間の自由意志まで多種多様な要因が絡んで、一般には任意非ガウス型の時間的変動を示す。そして、任意変動分布型の外来雑音が混入し、厳密には非定常性を示すのが常である。従って、このような現実的周囲条件下での状態量を評価するにあたっては、何らかの統計処理を施すことなしに到底合理的な評価をすることはできない。外来雑音の混入下で対象信号の変動状態を刻々と推定してゆく研究の代表的なものの一つに、公知のカルマンによるフィルタリング理論 [18] がある。しかし、これは、状態変動のガウス分布特性や最小自乗誤差の推定操作を前提とし、更に平均評価を主目的、(共)分散を誤差尺度に位置付けているなど、実状況下での上記課題に対処するにはあまりに操作的過ぎるといわねばならない。事実、我々が現実に遭遇する外来雑音の多くは非ガウス型の多様な分布形状を示している。実環境における現象を既成の理論的枠組みの内に無理にはめ込む人為性をいくらかでも和らげ、操作優先でなく現象優先の姿勢こそが本来的であるとの立場をとる。たとえ操作面で複雑化しても複雑多様な実現象へこそ整合した理論の設定を望むのであれば、上述の複雑さにできるだけでもれなく対応できる統一的な状態推定理論を設定することが不可欠である。

以上の実際的背景を考慮し、本章では、独立した任意変動分布の外来雑音が混入することにより汚された実確率システムに着目し、その逐次観測データの内から、潜在する対象の未知信号波形を動的に推定できる広義デジタルフィルタ [19] のプログラム論理を、特にカルマンフィルタを階層的に一般化した形態でまず導出する。すな

わち、本章では、ベイズ推定の観点に立ち、線形性とガウス分布特性の前提を取り外した、しかもパラメータ微分形で表された階層構造をもつ状態推定の一般理論をまず与えている。ここに導出した推定理論はカルマンフィルタにおけると同様観測値との一次相関情報を利用すること以外に、非ガウスの高次相関情報も積極的に利用している。もちろん、従来のカルマンフィルタをも一スペシャルケースに含んでいる。最後に、本手法のもつ実際的有効性の一端を検証するため、実際の室内外住環境における音響データに本手法を適用して、その実際的有効性も確認している。

### 3.2 理論的考察

#### 3.2.1 状態推定問題の定式化

いま、一般論として、次のシステム方程式および観測方程式に従う任意非ガウス型システムに着目する。

$$\mathbf{X}_{k+1} = \mathbf{F}_k(\mathbf{X}_k, \mathbf{u}_k) \quad (3.1)$$

$$y_k = G_k(\mathbf{X}_k, \mathbf{v}_k) \quad (3.2)$$

ただし、 $\mathbf{X}_k (\triangleq (x_{1k}, x_{2k}, \dots, x_{Nk}))$  および  $y_k$  それぞれ離散時刻  $k$  における  $N$  次元状態ベクトルおよび 1 次元観測値である。さらに、 $\mathbf{u}_k$  および  $\mathbf{v}_k$  は入力ベクトルおよび観測雑音ベクトルであり、互いに統計的に独立で、 $\mathbf{u}_k$ 、 $\mathbf{v}_k$  の各統計量はあらかじめ既知とする。 $\mathbf{X}_k$  の逐次推定アルゴリズムを導出するにあたり、まず推定の基本原理であるベイズ定理：

$$P(\mathbf{X}_k | Y_k) = \frac{P(\mathbf{X}_k | Y_{k-1}) P(y_k | \mathbf{X}_k, Y_{k-1})}{P(y_k | Y_{k-1})}$$

$$= \frac{P(X_k, y_k | Y_{k-1})}{P(y_k | Y_{k-1})} \quad (3.3)$$

に着目する。ただし、 $Y_k$  は時刻  $k$  までの観測値の集合  $\{y_1, y_2, \dots, y_k\}$  である。ここで、事前計画的に、例えばガウス型分布など、公知の標準分布関数を基幹にあらかじめ導入して、これら標準分布との具体的関連のもとに観測値の任意変動分布にも対処可能な状態推定の新たな展開表現をまず見出す。そして、通常の線形相関情報のみならず高次の非線形相関情報も積極的に利用して、(3.1)、(3.2) 式の拘束的状況に整合した推定アルゴリズムの導出を行なう。

### 3.2.2 パラメータ微分形の階層表現

本節では、ベイズ定理の新たな展開型表現を導出するため、まず多変量結合分布表現としてパラメータ微分形表示を導入する。いま、階差幅  $\mathbf{h} (\triangleq (h_1, h_2, \dots, h_s))$  をもつ  $s$  次元離散型確率変数  $\mathbf{z} (\triangleq (z_1, z_2, \dots, z_s))$  に着目し、その変動区間を  $[z_\alpha, z_\beta]$  ( $z_\alpha \triangleq (z_{\alpha 1}, z_{\alpha 2}, \dots, z_{\alpha s}), z_\beta \triangleq (z_{\beta 1}, z_{\beta 2}, \dots, z_{\beta s})$ ) とおく。一般に  $\mathbf{z}$  の確率分布  $P(\mathbf{z})$  は標準分布関数  $P_\theta(\mathbf{z})$  を基幹として、次のように直交展開表示される。

$$P(\mathbf{z}) = P_\theta(\mathbf{z}) \sum_{\mathbf{n}=\mathbf{0}}^{\infty} A_{\mathbf{n}} \phi_{\mathbf{n}}(\mathbf{z})$$

$$A_{\mathbf{n}} = \langle \phi_{\mathbf{n}}(\mathbf{z}) \rangle \quad (3.4)$$

ただし  $\mathbf{n} \triangleq (n_1, n_2, \dots, n_s)$ 、 $\sum_{\mathbf{n}=\mathbf{0}}^{\infty} \triangleq \sum_{n_1=0}^{\infty} \sum_{n_2=0}^{\infty} \dots \sum_{n_s=0}^{\infty}$  である。また、 $\phi_{\mathbf{n}}(\mathbf{z})$  は分布関数  $P_\theta(\mathbf{z})$  を重みとする正規直交多項式であり、正規直交条件：

$$z = z_{\alpha} \sum_{\mathbf{n}} z_{\alpha}^{\beta} \phi_{\mathbf{n}}(z) \phi_{\mathbf{m}}(z) P_{\mathbf{g}}(z) = \sum_{i=1}^S \delta_{m_i n_i} \quad (3.5)$$

を満足する ( $\mathbf{m} \equiv (m_1, m_2, \dots, m_s)$ )。ここで、 $\phi_{\mathbf{n}}(z)$  は Rodrigues の公式 [20] により、直交条件を満たすための関数  $V_{\mathbf{n}}(z)$  を用いて、次のように表現される。

$$\phi_{\mathbf{n}}(z) = \frac{K_{\mathbf{n}}}{P_{\mathbf{g}}(z)} \nabla_1^{n_1} \nabla_2^{n_2} \dots \nabla_s^{n_s} \{ P_{\mathbf{g}}(z) V_{\mathbf{n}}(z) \} \quad (3.6)$$

ただし、 $K_{\mathbf{n}}$  は  $\phi_{\mathbf{n}}(z)$  が正規直交多項式となるための規格化定数であり、 $\nabla_j$  は次式で新たに定義される後部階差演算子である。

$$\nabla_j f(z) \equiv \frac{1}{d_j} \{ f(z_1, z_2, \dots, z_j, \dots, z_s) - f(z_1, z_2, \dots, z_j - h_j, \dots, z_s) \} \quad (3.7)$$

同様に、前部階差演算子も次のごとく定義することができる。

$$\Delta_j f(z) \equiv \frac{1}{d_j} \{ f(z_1, z_2, \dots, z_j + h_j, \dots, z_s) - f(z_1, z_2, \dots, z_j, \dots, z_s) \} \quad (3.8)$$

ここで  $\mathbf{d} (\equiv (d_1, d_2, \dots, d_s))$  は階差表現に柔軟性をもたせて通常の微分演算にも連結できるように ( $\mathbf{d} = \mathbf{h} \rightarrow \mathbf{0}$ ) 新たに導入した任意定数である。(3.4)、(3.6) より  $P(z)$  は次のように表される。

$$P(z) = \sum_{\mathbf{n}=0}^{\infty} A_{\mathbf{n}} B_{\mathbf{n}} \nabla_1^{n_1} \nabla_2^{n_2} \dots \nabla_s^{n_s} P_{\mathbf{g}}(z) \quad (3.9)$$

$$P_{\mathbf{n}}(z) = K_{\mathbf{n}} V_{\mathbf{n}}(z) P_{\mathbf{g}}(z) / B_{\mathbf{n}}$$

ただし、 $B_{\mathbf{n}}$  は  $P_{\mathbf{n}}(z)$  が確率分布関数としての正規化条件を満足す

るように新たに導入した規格化定数であり次式で与えられる。

$$B_n = \sum_{z=\alpha}^{\beta} K_n V_n(z) P_n(z) \quad (3.10)$$

(3.9) 式より、純虚数ベクトル  $\theta (\triangleq (\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_s))$  を導入し、

$z$  の離散型特性関数  $M_z(\theta) \triangleq \langle \prod_{i=1}^s (1 + \theta_i h_i)^{z_i/h_i} \rangle$  は次のよ

うに表される (これは  $h \rightarrow 0$  のとき公知の連続変量における特性関

数  $M_z(\theta) \triangleq \langle \exp(\sum_{i=1}^s \theta_i z_i) \rangle$  と一致する)。

$$\begin{aligned} M_z(\theta) &\triangleq \sum_{z=\alpha}^{\beta} \prod_{i=1}^s (1 + \theta_i h_i)^{z_i/h_i} P(z) \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} A_n B_n \sum_{z=\alpha}^{\beta} \nabla_1^{n_1} \nabla_2^{n_2} \dots \nabla_s^{n_s} P_n(z) \\ &\quad \cdot \prod_{i=1}^s (1 + \theta_i h_i)^{z_i/h_i} \end{aligned} \quad (3.11)$$

確率変数  $z$  の存在範囲外においては、特性関数は定義されていないことからその確率はいうまでもなく 0 であり、従って自然な条件:

$$\begin{aligned} \nabla_j^r P_n(z_1, z_2, \dots, z_j, \dots, z_s) \Big|_{z_j = z_{\alpha j} - h_j} &= 0 \\ \Delta_j^m (1 + \theta_i h_i)^{z_i/h_i} \Big|_{z_j = z_{\alpha j} + h_j} &= 0 \\ (r, m = 0, 1, 2, \dots, j = 1, 2, \dots, s) \end{aligned} \quad (3.12)$$

を考慮しつつ、差分演算に関する公式 [21] (ただし演算子に新たに  $d$  を導入した点に留意):

$$\begin{aligned} &\nabla_j f(z) \cdot g(z) \\ &= \Delta_j \{ f(z_1, z_2, \dots, z_j - h_j, \dots, z_s) g(z) \} \\ &\quad - f(z) \Delta_j g(z) \end{aligned} \quad (3.13)$$

を (3.11) 式に繰り返し適用することにより、次の表現を得る (導出過程は 3.5 付録 1. 参照)。

$$M_{z_n}(\theta) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n B_n \prod_{i=1}^s (-1)^{n_i} h_i^{n_i} \left( \frac{h_i}{d_i} \right)^{n_i} M_{z_n}(\theta) \quad (3.14)$$

ただし、

$$M_{z_n}(\theta) = \sum_{z \in Z_n} P(z) \prod_{i=1}^s (1 + \theta_i h_i)^{z_i/h_i} \quad (3.15)$$

は確率分布  $P(z)$  に関する離散型特性関数であり、その定義からもともと  $j$  次の結合階乗キュムラント  $\kappa(j)(j_1, j_2, \dots, j_s)$  と

$$M_{z_n}(\theta) = \exp \left\{ \sum_{j=1}^{\infty} \frac{\kappa(j)(j_1, j_2, \dots, j_s)}{j_1! j_2! \dots j_s!} \prod_{i=1}^s \theta_i^{j_i} \right\} \quad (3.16)$$

なる関係がある ( $j = \sum_{i=1}^s j_i$ ; 低次のいくつかを 3.5 付録 2.

に示す)。基幹分布  $P(z)$  に関して、もし 2 次以上各次の結合階乗

キュムラント  $\kappa(j)(j_1, j_2, \dots, j_s)$  ( $j \geq 2$ ) が 1 次の結合階乗

キュムラント (平均)  $\kappa(1), i(0, 0, \dots, 0, \overset{i}{1}, 0, \dots, 0, 0)$  に独立した分布母数の場合には、直ちに次の関係が成立する (表現の簡易化のため以後は  $\kappa(1), i$  で表す)。

$$\prod_{i=1}^s \left( \frac{\partial}{\partial \kappa(1), i} \right)^{n_i} M_{z_n}(\theta) = \prod_{i=1}^s \theta_i^{n_i} M_{z_n}(\theta) \quad (3.17)$$

(3.14)、(3.15)、(3.17) 式より、結局、 $M_z(\theta)$  は次のごとく変形

される。

$$M_z(\theta) = \sum_{\mathbf{z}} z^{\mathbf{B}} \sum_{\mathbf{n} \neq \mathbf{0}}^{\infty} A_{\mathbf{n}} B_{\mathbf{n}} \prod_{i=1}^S (-1)^{n_i} \cdot \left( \frac{h_i}{d_i} \right)^{n_i} (1 + \theta_i h_i)^{z_i/h_i} \left( \frac{\partial}{\partial \kappa_{(1),i}} \right)^{n_i} P_{\mathbf{n}}(z) \quad (3.18)$$

かくて、積率母関数  $M_z(\theta)$  の定義 (3.11) と (3.18) 式を比較することにより、 $P(z)$  に関する次の新たなパラメータ微分形展開表現が得られる。

$$P(z) = P_a(z) + \sum_{\mathbf{n} \neq \mathbf{0}}^{\infty} A_{\mathbf{n}} B_{\mathbf{n}} \prod_{i=1}^S (-1)^{n_i} \cdot \left( \frac{h_i}{d_i} \right)^{n_i} \left( \frac{\partial}{\partial \kappa_{(1),i}} \right)^{n_i} P_{\mathbf{n}}(z) \quad (3.19)$$

特に、離散階差幅  $h = d \rightarrow 0$  の極限において、(3.19) 式は連続形の変量確率分布に対するパラメータ微分形の統一表現：

$$P(z) = P_a(z) + \sum_{\mathbf{n} \neq \mathbf{0}}^{\infty} A_{\mathbf{n}} B_{\mathbf{n}} \prod_{i=1}^S (-1)^{n_i} \cdot \left( \frac{\partial}{\partial \kappa_{1,i}} \right)^{n_i} P_{\mathbf{n}}(z) \quad (3.20)$$

となる。ただし、 $\kappa_{1,i}$  は連続変量に対する1次の結合キュムラント

$$\kappa_{1,i}(0, 0, \dots, 0, \overset{i}{1}, 0, \dots, 0) = \langle z_i \rangle_{\mathbf{z}_n} \quad (= \int z_i P_{\mathbf{n}}(z) d z)$$

### 3.2.3 状態推定に関する広義デジタルフィルタのアルゴリズム論理

考察対象が正負にわたる変動として近似的に取り扱うことができ

る場合、基準分布にはガウス分布関数を採用するのが実際的である。すなわち、(3.3)式における条件付き結合分布  $P(X_k, y_k | Y_{k-1})$  をパラメータ微分形を含んだ展開表現で具体化するとき、その基幹分布  $P_\theta(X_k | Y_{k-1})$  と  $P_\theta(y_k | Y_{k-1})$  には公知のガウス分布を採用する。

$$P_\theta(X_k | Y_{k-1}) = \prod_{i=1}^N N(x_{ik}; \dot{x}_{ik}, \Gamma_{ik}) \quad (3.21)$$

$$P_\theta(y_k | Y_{k-1}) = N(y_k; \dot{y}_k, \Omega_k) \quad (3.22)$$

ただし、

$$N(x; \mu, \sigma^2) \triangleq \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\left(-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right)$$

$$\dot{x}_{ik} \triangleq \langle x_{ik} | Y_{k-1} \rangle, \quad \Gamma_{ik} \triangleq \langle (x_{ik} - \dot{x}_{ik})^2 | Y_{k-1} \rangle,$$

$$\dot{y}_k \triangleq \langle y_k | Y_{k-1} \rangle = \langle G_k(X_k, \mathbf{v}_k) | Y_{k-1} \rangle,$$

$$\Omega_k \triangleq \langle (y_k - \dot{y}_k)^2 | Y_{k-1} \rangle$$

$$= \langle (G_k(X_k, \mathbf{v}_k) - \dot{y}_k)^2 | Y_{k-1} \rangle \quad (3.23)$$

である。このとき、(3.20)式より、 $P_\theta(X_k | Y_{k-1})$  に対するパラメータ微分形を持つ  $P(X_k, y_k | Y_{k-1})$  の展開型分布表現が次のごとく得られる。

$$P(X_k, y_k | Y_{k-1}) = P_\theta(X_k | Y_{k-1}) N(y_k; \dot{y}_k, \Omega_k)$$

$$+ \sum_{\substack{\mathbf{n} \neq \mathbf{0} \\ (n_1 + \dots + n_N + m \geq 1)}} \sum_{m=0}^{\infty} A_{\mathbf{n}} \cdot B_{\mathbf{n}} \frac{1}{\sqrt{m!}} H_m\left(\frac{y_k - \dot{y}_k}{\sqrt{\Omega_k}}\right)$$

$$\cdot \prod_{i=1}^N (-1)^{n_i} \left(\frac{\partial}{\partial x_{ik}}\right)^{n_i} P_\theta(X_k | Y_{k-1}) N(y_k; \dot{y}_k, \Omega_k) \quad (3.24)$$



ただし、

$$\begin{aligned}
 A_{\mathbf{n} m}^* &= \left\langle \left\{ \prod_{i=1}^N \frac{1}{\sqrt{n_i!}} H_{n_i} \left( \frac{x_{ik} - x_{ik}^*}{\sqrt{\Gamma_{ik}}} \right) \right\} \right. \\
 &\quad \cdot \left. \frac{1}{\sqrt{m!}} H_m \left( \frac{y_k - y_k^*}{\sqrt{\Omega_k}} \right) \middle| Y_{k-1} \right\rangle \\
 &= \left\langle \prod_{i=1}^N \frac{1}{\sqrt{n_i!}} H_{n_i} \left( \frac{x_{ik} - x_{ik}^*}{\sqrt{\Gamma_{ik}}} \right) \right. \\
 &\quad \cdot \left. \frac{1}{\sqrt{m!}} H_m \left( \frac{G_k(\mathbf{X}_k, \mathbf{V}_k) - y_k^*}{\sqrt{\Omega_k}} \right) \middle| Y_{k-1} \right\rangle, \\
 P_{\mathbf{n}}(\mathbf{X}_k | Y_{k-1}) &= K_{\mathbf{n}} V_{\mathbf{n}}(\mathbf{X}_k) P_{\theta}(\mathbf{X}_k | Y_{k-1}) / B_{\mathbf{n}}, \\
 B_{\mathbf{n}} &= \int K_{\mathbf{n}} V_{\mathbf{n}}(\mathbf{X}_k) P_{\theta}(\mathbf{X}_k | Y_{k-1}) d\mathbf{X}_k \quad (3.25)
 \end{aligned}$$

である。ここでエルミート多項式の定義 [13] :

$$\begin{aligned}
 \frac{1}{\sqrt{n!}} H_n \left( \frac{x - x^*}{\sqrt{\Gamma}} \right) &= \frac{1}{\sqrt{n!} N(x; x^*, \Gamma)} \\
 &\quad \cdot \left( \frac{d}{dx} \right)^n N(x; x^*, \Gamma) (\sqrt{\Gamma})^n (-1)^n \quad (3.26)
 \end{aligned}$$

および直交条件 [13] :

$$\begin{aligned}
 \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n!}} H_n \left( \frac{x - x^*}{\sqrt{\Gamma}} \right) \frac{1}{\sqrt{m!}} H_m \left( \frac{x - x^*}{\sqrt{\Gamma}} \right) \\
 \cdot N(x; x^*, \Gamma) dx = \delta_{nm} \quad (3.27)
 \end{aligned}$$

を  $\mathbf{h} = \mathbf{d} \rightarrow \mathbf{0}$  における (3.6) (3.5) 式 (このとき  $\nabla_j \rightarrow \partial / \partial z_j$ ,  $\Gamma \rightarrow \mathcal{J}$ ) とそれぞれ比較することにより、

$$K_{\mathbf{n}} = \prod_{i=1}^N \frac{1}{\sqrt{n_i!}},$$

$$V_{\mathbf{n}}(\mathbf{X}_k) = \prod_{i=1}^N (-1)^{n_i} (\sqrt{\Gamma_{ik}})^{n_i} \quad (3.28)$$

となり、従って、

$$B_{\mathbf{n}} = \prod_{i=1}^N \frac{(-\sqrt{\Gamma_{ik}})^{n_i}}{\sqrt{n_i!}}$$

$$P_{\mathbf{n}}(\mathbf{X}_k | Y_{k-1}) = P_{\mathbf{0}}(\mathbf{X}_k | Y_{k-1})$$

$$= \prod_{i=1}^N N(x_{ik}; \dot{x}_{ik}, \Gamma_{ik}) \quad (3.29)$$

を得る。以上の関係を (3.3) 式に代入することにより次の分布推移則を具体的に導出することができる。

$$P(\mathbf{X}_k | Y_k)$$

$$= \frac{P(\mathbf{X}_k, y_k | Y_{k-1})}{\int P(\mathbf{X}_k, y_k | Y_{k-1}) d\mathbf{X}_k}$$

$$= \prod_{i=1}^N N(x_{ik}; \dot{x}_{ik}, \Gamma_{ik})$$

$$+ \sum_{\mathbf{n} \neq \mathbf{0}} \frac{\sum_{m=0}^{\infty} A_{\mathbf{n}m} \frac{1}{\sqrt{m!}} H_m\left(\frac{y_k - y_k}{\sqrt{\Omega_k}}\right)}{\sum_{m=0}^{\infty} A_{\mathbf{0}m} \frac{1}{\sqrt{m!}} H_m\left(\frac{y_k - y_k}{\sqrt{\Omega_k}}\right)}$$

$$\cdot \prod_{i=1}^N \frac{(\sqrt{\Gamma_{ik}})^{n_i}}{\sqrt{n_i!}} \left(\frac{\partial}{\partial \dot{x}_{ik}}\right)^{n_i} N(x_{ik}; \dot{x}_{ik}, \Gamma_{ik}) \quad (3.30)$$

この展開型の統一的分布推移則をもとにするなら、多次元状態量  $\mathbf{X}_k$  についてのさまざまな統計学的評価が可能となる。いま、任意の統計量を  $\mathbf{X}_k$  の  $l$  ( $\equiv (l_1, l_2, \dots, l_N)$ ) 次多項式 (各  $x_{ik}$  ( $i = 1, 2, \dots, N$ ) について  $l_i$  次の多項式)  $f_l(\mathbf{X}_k)$  とするなら、次の推定アルゴリズムを得る。

$$\begin{aligned}
\hat{f}_l(\mathbf{X}_k) &\triangleq \langle f_l(\mathbf{X}_k) | Y_k \rangle \\
&= \langle f_l(\mathbf{X}_k) | Y_{k-1} \rangle_{\sigma} \\
&+ \sum_{\substack{l \\ n \neq 0}} \frac{\sum_{m=0}^{\infty} A_{nm} \frac{1}{\sqrt{m!}} H_n\left(\frac{y_k - \bar{y}_k}{\sqrt{\Omega_k}}\right)}{\sum_{m=0}^{\infty} A_{0m} \frac{1}{\sqrt{m!}} H_n\left(\frac{y_k - \bar{y}_k}{\sqrt{\Omega_k}}\right)} \\
&\cdot \prod_{i=1}^N \frac{(\sqrt{\Gamma_{ik}})^{n_i}}{\sqrt{n_i!}} \left(\frac{\partial}{\partial x_{ik}}\right)^{n_i} \langle f_l(\mathbf{X}_k) | Y_{k-1} \rangle_{\sigma}
\end{aligned} \tag{3.31}$$

ただし、

$$\begin{aligned}
\langle f_l(\mathbf{X}_k) | Y_{k-1} \rangle_{\sigma} &\triangleq \int \int \cdots \int f_l(\mathbf{X}_k) \\
&\cdot \prod_{i=1}^N N(x_{ik}; \bar{x}_{ik}, \Gamma_{ik}) dx_{1k} dx_{2k} \cdots dx_{Nk}
\end{aligned} \tag{3.32}$$

である。特に、推定式 (3.31) は、推定値が初項およびその逐次パラメータ微分で表されている。すなわち、任意推定量の統一的な推定アルゴリズムがパラメータ微分の機械的な操作手順のもとに構成されている。かくて、環境騒音システムの推定問題において、未知信号の多項式型各モーメント量からなる任意評価量(Weierstrassの多項式近似定理により閉区間内における任意の連続関数が多項式で近似できる点に留意)が、事前計画性を導入したアルゴリズムの形で推定され、プログラム論理のファームウェア化に必要な組織化、階層化、簡易化がまず獲得できる。

特に、平均、分散といった低次の統計量に着目するとき、(3.25)式における展開初項のガウス分布に関し、

$$\begin{aligned} \langle x_{ik} | Y_k^{-1} \rangle_{\theta} &\triangleq \int x_{ik} N(x_{ik}; \dot{x}_{ik}, \Gamma_{ik}) dx_{ik} \\ &= \dot{x}_{ik} \end{aligned} \quad (3.33)$$

$$\begin{aligned} \langle x_{ik}^2 | Y_k^{-1} \rangle_{\theta} &\triangleq \int x_{ik}^2 N(x_{ik}; \dot{x}_{ik}, \Gamma_{ik}) dx_{ik} \\ &= \dot{x}_{ik}^2 + \Gamma_{ik} \end{aligned} \quad (3.34)$$

であることから、これらに関し逐次のパラメータ微分を実行することにより、推定式が次のごとく具体的に導出される。

$$\begin{aligned} \hat{X}_{ik} &\triangleq \langle x_{ik} | Y_k \rangle \\ &= \dot{x}_{ik} + \frac{\sum_{m=0}^{\infty} A_{\theta} \dot{\theta} \cdots \theta^i \theta \cdots \theta_m \frac{1}{\sqrt{m!}} H_m \left( \frac{y_k - \dot{y}_k}{\sqrt{\Omega_k}} \right)}{\sum_{m=0}^{\infty} A_{\theta} \frac{1}{\sqrt{m!}} H_m \left( \frac{y_k - \dot{y}_k}{\sqrt{\Omega_k}} \right)} \\ &\quad \cdot (\sqrt{\Gamma_{ik}}) \left( \frac{\partial}{\partial x_{ik}} \right) x_{ik} \\ &= \dot{x}_{ik} + \frac{\sum_{m=0}^{\infty} A_{\theta} \dot{\theta} \cdots \theta^i \theta \cdots \theta_m \frac{1}{\sqrt{m!}} H_m \left( \frac{y_k - \dot{y}_k}{\sqrt{\Omega_k}} \right)}{\sum_{m=0}^{\infty} A_{\theta} \frac{1}{\sqrt{m!}} H_m \left( \frac{y_k - \dot{y}_k}{\sqrt{\Omega_k}} \right)} \sqrt{\Gamma_{ik}} \end{aligned} \quad (3.35)$$

$$\begin{aligned} P_{ik} &\triangleq \langle (x_{ik} - \hat{X}_{ik})^2 | Y_k \rangle \\ &= \dot{x}_{ik}^2 + \Gamma_{ik} + \frac{\sum_{m=0}^{\infty} A_{\theta} \dot{\theta} \cdots \theta^i \theta \cdots \theta_m \frac{1}{\sqrt{m!}} H_m \left( \frac{y_k - \dot{y}_k}{\sqrt{\Omega_k}} \right)}{\sum_{m=0}^{\infty} A_{\theta} \frac{1}{\sqrt{m!}} H_m \left( \frac{y_k - \dot{y}_k}{\sqrt{\Omega_k}} \right)} \\ &\quad \cdot \sqrt{\Gamma_{ik}} \left( \frac{\partial}{\partial x_{ik}} \right) (\dot{x}_{ik}^2 + \Gamma_{ik}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{\sum_{m=0}^{\infty} A_{\theta^1 \dots \theta^i \theta^2 \theta^1 \dots \theta^n} \frac{1}{\sqrt{m!}} H_n \left( \frac{y_k - y_k^*}{\sqrt{\Omega_k}} \right)}{\sum_{m=0}^{\infty} A_{\theta^1 \dots \theta^i \theta^1 \theta^1 \dots \theta^n} \frac{1}{\sqrt{m!}} H_n \left( \frac{y_k - y_k^*}{\sqrt{\Omega_k}} \right)} \\
& \cdot \frac{\Gamma_{ik}}{\sqrt{2}} \left( \frac{\partial}{\partial x_{ik}^*} \right)^2 (x_{ik}^* + \Gamma_{ik}) - \widehat{X}_{ik}^2 \\
& = x_{ik}^* + \Gamma_{ik} - \widehat{X}_{ik}^2 + 2x_{ik}^* \sqrt{\Gamma_{ik}} \\
& \cdot \frac{\sum_{m=0}^{\infty} A_{\theta^1 \dots \theta^i \theta^1 \theta^1 \dots \theta^n} \frac{1}{\sqrt{m!}} H_n \left( \frac{y_k - y_k^*}{\sqrt{\Omega_k}} \right)}{\sum_{m=0}^{\infty} A_{\theta^1 \dots \theta^i \theta^1 \theta^1 \dots \theta^n} \frac{1}{\sqrt{m!}} H_n \left( \frac{y_k - y_k^*}{\sqrt{\Omega_k}} \right)} \\
& + \sqrt{2} \Gamma_{ik} \frac{\sum_{m=0}^{\infty} A_{\theta^1 \dots \theta^i \theta^1 \theta^1 \dots \theta^n} \frac{1}{\sqrt{m!}} H_n \left( \frac{y_k - y_k^*}{\sqrt{\Omega_k}} \right)}{\sum_{m=0}^{\infty} A_{\theta^1 \dots \theta^i \theta^1 \theta^1 \dots \theta^n} \frac{1}{\sqrt{m!}} H_n \left( \frac{y_k - y_k^*}{\sqrt{\Omega_k}} \right)} \quad (3.36)
\end{aligned}$$

さらに、非ガウス性の統計的反映（歪度、尖度、・・・、など）をもつ母数の推定式も、関係：

$$\begin{aligned}
& \left\langle \frac{1}{\sqrt{n_i!}} H_{n_i} \left( \frac{x_{ik} - \widehat{X}_{ik}}{\sqrt{P_{ik}}} \right) \mid Y_{k-1} \right\rangle_{\theta} \\
& \cong \int \frac{1}{\sqrt{n_i!}} H_{n_i} \left( \frac{x_{ik} - \widehat{X}_{ik}}{\sqrt{P_{ik}}} \right) \\
& \quad \cdot N(x_{ik}; x_{ik}^*, \Gamma_{ik}) dx_{ik} \\
& = \frac{1}{\sqrt{n_i!}} \sum_{r_i=0}^{\lfloor n_i/2 \rfloor} (-1)^{r_i} (2r_i - 1)!! \\
& \quad \cdot \binom{n_i}{2r_i} \left( \sqrt{\frac{\Gamma_{ik}}{P_{ik}}} \right)^{n_i - 2r_i} \\
& \quad \cdot \sum_{q_i=0}^{\lfloor n_i - 2r_i \rfloor} \binom{n_i - 2r_i}{q_i} \left( \frac{x_{ik}^* - \widehat{X}_{ik}}{\sqrt{\Gamma_{ik}}} \right)^{n_i - 2r_i - q_i} (q_i - 1)!!
\end{aligned}$$

$$\hat{\alpha}_{n_i} \triangleq I_{n_i} \quad (3.37)$$

を用いて、逐次パラメータ微分形式で次のごとく算定される。

$$\begin{aligned} \hat{\alpha}_{n_i} &\triangleq \left\langle \frac{1}{\sqrt{n_i!}} H_{n_i} \left( \frac{x_{ik} - \hat{x}_{ik}}{\sqrt{P_{ik}}} \right) \mid Y_k \right\rangle \\ &= I_{n_i} + \frac{\sum_{m=0}^{n_i} A_{0 \dots 0 t_i 0 \dots 0 m} \frac{1}{\sqrt{m!}} H_m \left( \frac{y_k - y_k^*}{\sqrt{\Omega_k}} \right)}{\sum_{m=0}^{\infty} A_{0 \dots 0 m} \frac{1}{\sqrt{m!}} H_m \left( \frac{y_k - y_k^*}{\sqrt{\Omega_k}} \right)} \\ &\quad \cdot \frac{1}{\sqrt{t_i}} (\sqrt{\Gamma_{ik}})^{t_i} \left( \frac{d}{d x_{ik}} \right)^{t_i} I_{n_i} \end{aligned} \quad (3.38)$$

最後に、システム方程式（(3.1)式）を考慮することにより、逐次推定のアルゴリズムを完結させるために必要な（次の時点における）予測値が、一般的な  $r$  次多項式の関数  $g_r(X_{k+1})$ （前述した Weierstrass の多項式近似定理を参照）に対して次のごとく与えられる。

$$\begin{aligned} g_r^*(X_{k+1}) &\triangleq \langle g_r(X_{k+1}) \mid Y_k \rangle \\ &= \langle g_r(F_k(X_k, u_k)) \mid Y_k \rangle \end{aligned} \quad (3.39)$$

上式は (3.31) 式で与えられる推定値および  $u_k$  の事前統計情報を用いて具体的に評価できる。

システム方程式および観測方程式が特に線形で各状態変量の分布がガウス性を示す一スペシャルケースにおいては、本章で提案した状態推定アルゴリズムが公知のカルマンフィルタに一致することを確認できる（3.5 付録 3. を参照）。従って、本手法はパラメータ逐次微分形式の展開型分布表現を導入することにより、カルマンフィ

ルタを階層的に一般化した統一的推定手法となっていることがわかる。

### 3.3 実験的考察

ここでは、前節で導出した状態推定アルゴリズムの有効性を確認するため、以下に述べる室内音響と室外における道路交通騒音の状態推定問題について考察する。

#### 3.3.1 遮音パラメータの推定と出力応答分布の予測

いま、特に、エネルギー変量に着目するとき、公知のS.E.A法 [22] にも支えられて、任意遮音システムは次のような線形システムとしてまず表される。

$$y_k = \sum_{i=0}^{N-1} a_i \xi_{k-i} + v_k \quad (3.40)$$

ただし、 $\xi_{k-i}$ 、 $y_k$ 、 $v_k$  はそれぞれ、 $k-i$  時刻において遮音システムに入る入力騒音のインテンシティ、 $k$  時刻における透過出力騒音のインテンシティ および暗騒音である。また、 $a_i$  ( $i=0, 1, \dots, N-1$ ) は遮音システムのエネルギーシステムパラメータであり、システム次数  $N-1$  は既発表の次数選定法 [23] によりあらかじめ決定される。

推定対象の未知パラメータ  $a_i$  は本来一定値であるべきだから、コンピュータ利用の逐次推定に適した形で次のように定式化される。

$$\begin{aligned} a_{k+1} &= a_k \\ (a_k &\triangleq (a_0(k), a_1(k), \dots, a_{N-1}(k))) \end{aligned} \quad (3.41)$$

$$y_k = \sum_{i=0}^{N-1} a_i(k) \xi_{k-i} + v_k \quad (3.42)$$

さて、(3.41) 式をシステム方程式、(3.42) 式を観測方程式とみなし、本推定手法を適用することにより、パラメータ  $a_k$  の逐次推定を行なう。さらに、推定結果を用いて、あらかじめ別個に与えられた任意騒音入力 of 各データからシステムモデルの(暗騒音がない場合における)出力時系列:

$$\hat{y}_k = \sum_{i=0}^{N-1} \hat{a}_i(k) \xi_{k-i} \quad (3.43)$$

を逐次計算機上に発生させる。ただし、 $\hat{a}_i$  は先に推定した値である。この結果、この時系列モデルの出力データから累積頻度分布を直接算定することが可能となり、この累積分布に直結した実際の騒音評価量  $L_x$  も系統的に評価できる。

具体的な遮音システムとして、斜め2重壁(互いに  $90^\circ$  の角度をもたせた2枚のアルミ板からなる中空2重壁)採用し、音響実験室の残響室—残響室内にこの遮音壁を設置してシステムパラメータを推定と出力応答分布予測に関する実験を行なった。また、パラメータを推定するための入力信号および暗騒音として白色雑音を用いた。逐次推定の状況を Fig. 3.1 で示す。ただし、第1近似は(3.35)、(3.36) 式で  $m \leq 1$  ((3.36) 式の右辺第5項では  $m \leq 2$ ) にとった推定アルゴリズムによる推定結果であり、第2近似はさらに1項ずつ非ガウス展開項を考慮した場合の結果である。推定結果は暗騒音が存在しない理想状態で推定した既発表の結果[23]と同じ傾向を示している。さらに、この推定結果を用いて、同じ遮音システムに、今度は別途あらかじめ実測しておいた道路交通騒音の異種入力を加え、そのときの累積分布を予測した。Fig. 3.2 に予測結果を示す。



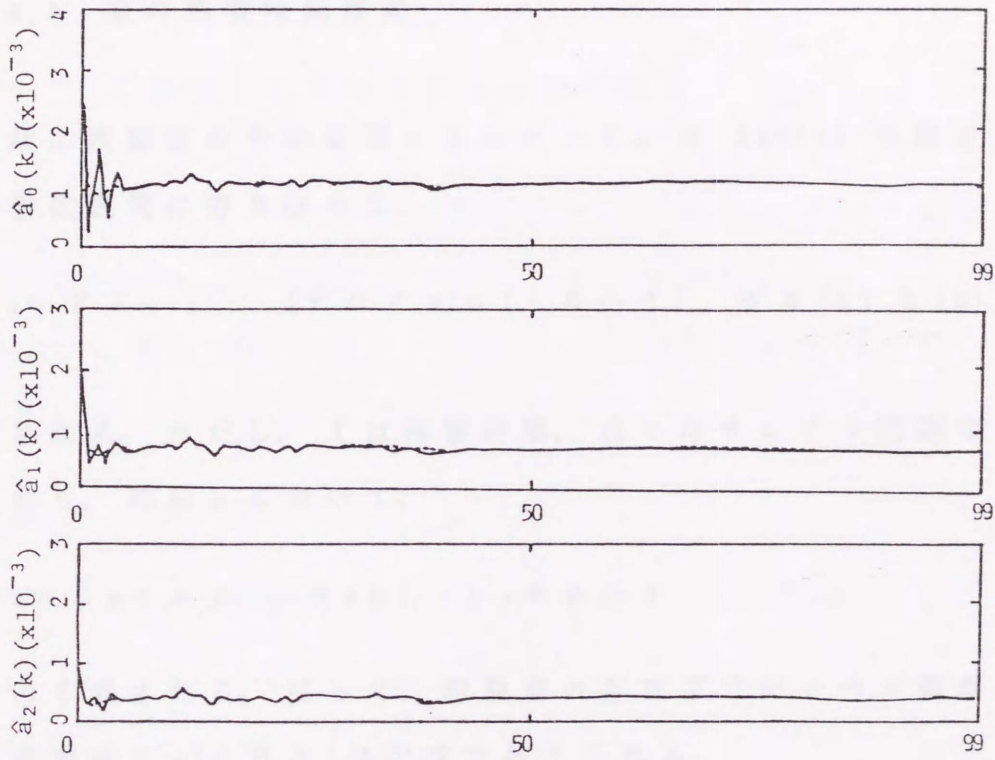


Fig.3.1 Estimated results of system parameter  $\mathbf{a}_k$  by use of the proposed method (----- 1st approx., ——— 2nd approx.).

ただし、横軸にはデシベル値をとって理論、実験の各累積分布を描いている。本手法による理論的予測分布は実測変動分布を実環境での許容幅±1 d B A以内でよくとらえていることがうかがえる。

### 3.3.2 室の残響時間推定

一般に残響室の平均音響エネルギー  $E_k$  は Sabine の微分方程式を離散化表現に書き改めて、

$$E_k = F E_{k-1} \quad (F \triangleq \exp(-\phi \Delta t), \quad \phi \triangleq (61 \ln 10) / T) \quad (3.44)$$

で表される。ただし、 $T$  は残響時間、 $\Delta t$  はサンプル間隔である。すなわち、時刻  $k$  において、

$$E_k = E_0 \exp(-\phi_k k), \quad \phi_k \triangleq \phi \Delta t \quad (3.45)$$

のごとく表される。従って、暗騒音の存在下でデシベル観測するとき、観測値  $y_k$  (d B A) は次式で与えられる。

$$y_k = 10 \log \left( \frac{E_0}{\varepsilon_0} \exp(-\phi_k k) + 10^{v_k/10} \right) \quad (3.46)$$

( $\varepsilon_0 \triangleq 10^{-12}$  [watt/m<sup>2</sup>])

ただし、 $v_k$  は時刻  $k$  における暗騒音レベル (d B A) である。さらに、推定すべき残響時間  $T$  が反映されたパラメータ  $\phi_k$  は本来一定値であるべきことから、(3.1) 式に対応した次のシステム方程式が得られる。

$$\phi_{k+1} = \phi_k \quad (3.47)$$

(3.47) 式をシステム方程式、(3.46) を観測方程式にみたてて、以上の推定問題に対し本理論を適用してその有効性を確認した。推定結果を Fig. 3.3 に示す。初期値にかかわらず真値  $\phi_k = 0.16$  ( $T = 4.3$  秒) に近づいていることが明白に読み取れる。

### 3.3.3 暗騒音に埋もれた対象騒音の推定

ここでは、工場騒音を暗騒音として、これに汚された道路交通騒音の推定問題を取り上げる。まず、現象の観測時系列における時間的相関性を基本情報として、対象とする道路交通騒音に関して、パワー変量でのシステム方程式が次式で与えられる [24]。

$$x_{k+1} = F x_k + G u_k \quad (3.48)$$

$$\left( F = \frac{1}{\log \left( \frac{1}{n} \log \frac{\rho_y(n)}{\rho_y(n-1)} \right)} \quad (n \geq 2), \right.$$

$$G = (1 - F^2) \left( \langle (y_k - \langle y_k \rangle)^2 \rangle - \langle (v_k - \langle v_k \rangle)^2 \rangle \right)^{1/2}$$

ただし、 $\rho_y(n)$  は暗騒音の混入した観測値  $y_k$  の 1 次相関係数である ( $\rho_y(n) = \langle (y_k - \langle y_k \rangle)(y_{k+n} - \langle y_{k+n} \rangle) \rangle / \langle (y_k - \langle y_k \rangle)^2 \rangle$ )。次に観測方程式は、パワーの加算原理に基づき、対象騒音 (道路交通騒音)  $x_k$  と暗騒音 (工場騒音)  $v_k$  の和として次式で表される。

$$y_k = x_k + v_k \quad (3.49)$$

ただし、 $x_k$  と  $v_k$  は異種騒音源であることから互いに統計的に独立であり、 $v_k$  の各統計量は事前に既知とする (各瞬時値が不明でも各統計情報は安定化する)。

実験は、あらかじめ個別に測定した工場騒音と道路交通騒音を合

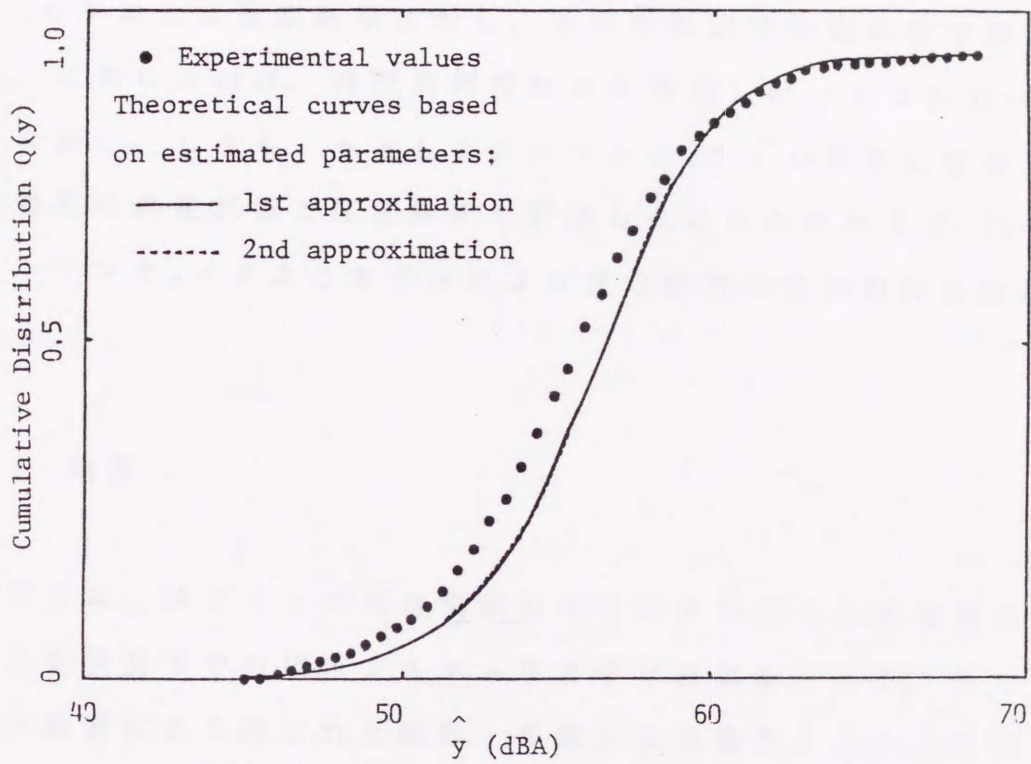


Fig.3.2 A comparison between theory and experiment for the cumulative distribution of transmitted signal.

成し、これを観測値として本手法により推定した結果と、あらかじめ既知である元の実測値を比較して、本手法の有効性を検証した。その結果を Fig. 3.4 に示す。推定値は実測値の変動の傾向をよくとらえていることがうかがえる。

Table 3.1 には、比較のため、本手法による推定結果と、カルマンフィルタによる推定結果に対し、それぞれ誤差分散の値で評価してみた。これによれば、時間的相関性から推定したいくつかのパラメータに対し、しかも、もともとカルマンフィルタの手法に整合した最小自乗形の誤差評価で推定誤差を評価したにもかかわらず、いずれもカルマンフィルタより本手法による推定結果の方が良好な結果を得ている。

### 3.4 結言

本章では、非ガウスの任意変動分布を示す独立した外来雑音が混入する実状況下での確率システムをまず考察対象とした。そしてこの外来雑音により汚された線形・非線形の実確率システムに対する逐次の観測データをもとに、潜在する対象の未知信号を動的に推定してゆく広義ディジタルフィルタのプログラム論理を、特に互いに関係を保ちながらも高次化へと階層性を示す展開表現の一般形式で導出した。具体的には、変動の任意非ガウス分布特性に対処でき、しかも、公知のカルマンフィルタを展開初項の基幹に取って、パラメータ微分の逐次形式で表された階層構造をもつ状態推定アルゴリズムの一般化表現を新たに導出した。その結果、本理論は、カルマンフィルタをスペシャルケースに含み、かつ観測値と信号間における（線形・非線形の）各種相関情報に直結した外来雑音の（低次および高次の）各統計情報も系統的に配慮した一般的な推定手法となっている。さらに、本手法の有効性は室内外におけるさまざまな住環

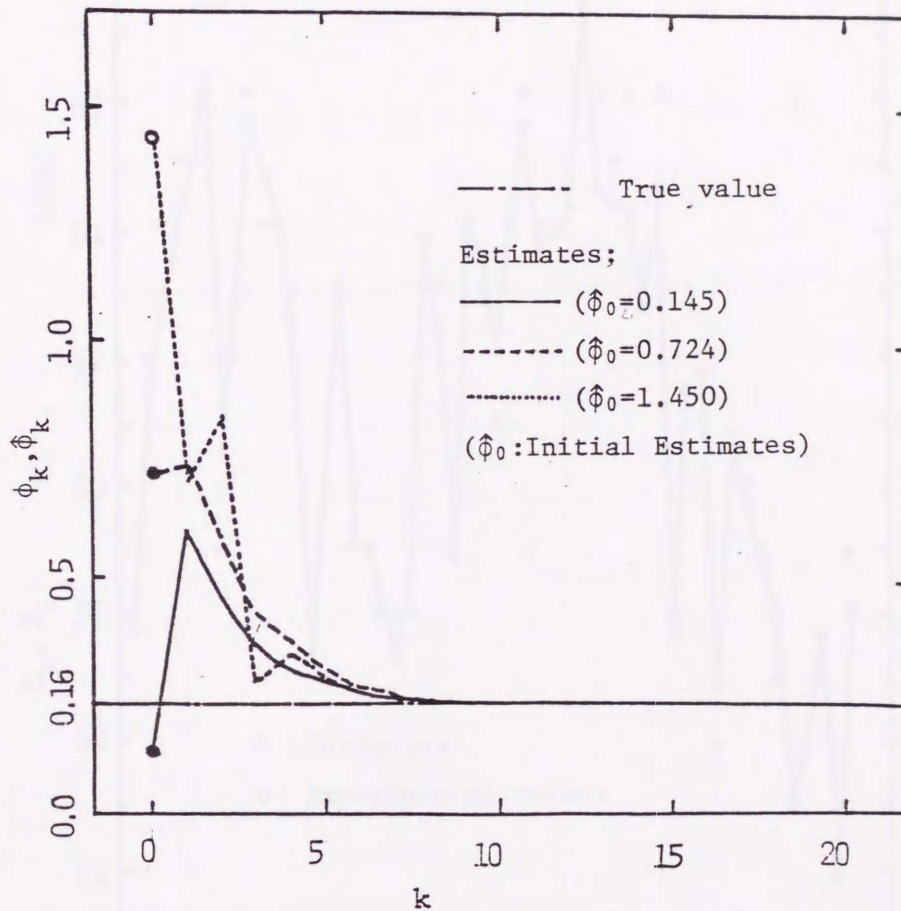


Fig.3.3 Estimated results of a reverberation time based on the noisy observations.

Fig.3.4 Estimated results of road traffic noise levels based on the noisy observations (with the standard deviation of  $v_k = 0.05$  dB). The estimate of  $\tau$  based on  $\tau = 0.16$  s.

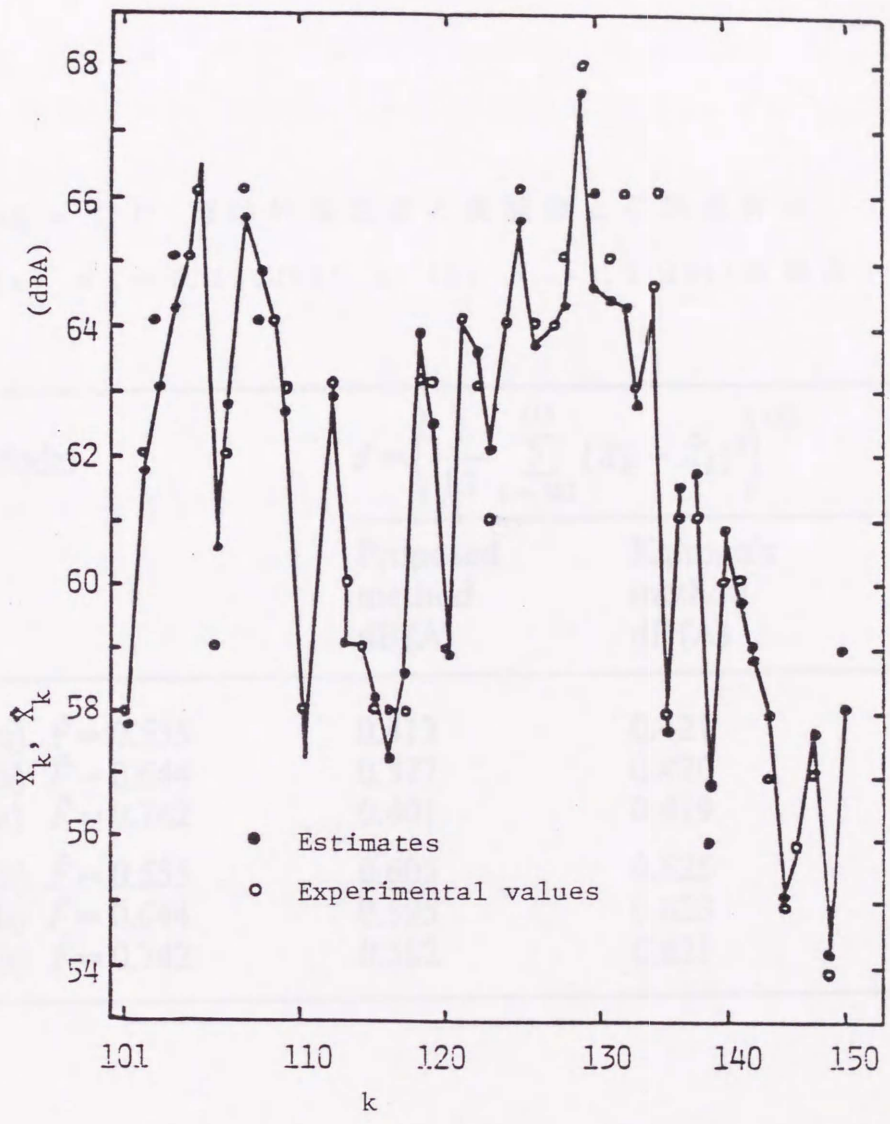


Fig.3.4 Estimated results of road traffic noise levels based on the noisy observations ( $\sigma_v$  (the standard deviation of  $v_k$ )=7.97(dBA),  $F$  (the estimate of  $F$  based on  $\rho_y(n)$  0.644)).

Table 3.1 理論的推定値と実験値との誤差評価

( (a)  $\sigma_v = 5.32$  (dBA) と (b)  $\sigma_v = 7.9$  (dBA) の場合 )

Model	$J = \left( \frac{1}{13} \sum_{k=101}^{113} (X_k - \hat{X}_k)^2 \right)^{1/2}$	
	Proposed method dB(A)	Kalman's method dB(A)
(a) $\hat{F} = 0.555$	0.413	0.421
(a) $\hat{F} = 0.644$	0.377	0.420
(a) $\hat{F} = 0.742$	0.401	0.419
(b) $\hat{F} = 0.555$	0.605	0.625
(b) $\hat{F} = 0.644$	0.595	0.623
(b) $\hat{F} = 0.742$	0.582	0.621



境の音響データに実際に適用することにより実験的にも確認した。

本手法は、推定アルゴリズムに逐次パラメータ微分型の系統的操作を導入した階層構造をもつ広義デジタルフィルタのプログラム論理としてはまだ研究の初期的段階にある。従って、今後この基礎研究の上に積み上げるべき多くの研究課題が残されている。例えば、1) 本推定法を現場における他のさまざまな実際的環境騒音・振動分野や異種分野へも適用し、ますますその有効性を確認してゆくこと、2) 推定・予測の一般性から生まれたプログラム論理の複雑さをさまざまな近似を通して実用的に簡易化してゆくこと、3) 展開級数表現をもつ本推定アルゴリズムにおいて展開項数の打ち切りに伴う推定精度の定量的評価法を確立すること、4) パラメータ微分型の機械的階層性に整合させて、マイコン利用に基づく推定手法のファームウェア化をはかることなど、が挙げられよう。

### 3.5 付録

#### 1. 離散型特性関数 (3.14) 式の算出

(3.11) 式において  $z$  に関する総和項を

$$I \cong \sum_{z=\alpha}^z \frac{\beta}{z^{\alpha}} \prod_{i=1}^S (1 + \theta_i h_i)^{z_i/h_i} \nabla_1^{n_1} \nabla_2^{n_2} \cdots \nabla_S^{n_S} P_n(z) \quad (3.A.1)$$

とおき、 $j=1$  に対する (3.13) 式に適用すると、次のごとく変形される。

$$\begin{aligned} I &\cong \sum_{z=\alpha}^z \frac{\beta}{z^{\alpha}} \prod_{i=1}^S (1 + \theta_i h_i)^{z_i/h_i} \nabla_1^{n_1} \nabla_2^{n_2} \cdots \nabla_S^{n_S} P_n(z) \\ &= \sum_{z=\alpha}^z \frac{\beta}{z^{\alpha}} \Delta_1 \left\{ \prod_{i=1}^S (1 + \theta_i h_i)^{z_i/h_i} \right. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \cdot \nabla_1^{n_1-1} \nabla_2^{n_2} \cdots \nabla_s^{n_s} P_{\mathbf{n}}(z_1 - h_1, z_2, \cdots, z_s) \} \\
& - z \sum_{\alpha=1}^{\beta} \Delta_1 \prod_{i=1}^s (1 + \theta_i h_i)^{z_i/h_i} \\
& \cdot \nabla_1^{n_1} \nabla_2^{n_2} \cdots \nabla_s^{n_s} P_{\mathbf{n}}(z) \quad (3.A.2)
\end{aligned}$$

ここで上式の第1項目に着目し、前部階差の定義式((3.8)式)を使用して $z_i$ に関し総和をとれば次のようになる。

$$\begin{aligned}
& z \sum_{\alpha=1}^{\beta} \Delta_1 \left\{ \prod_{i=1}^s (1 + \theta_i h_i)^{z_i/h_i} \right. \\
& \cdot \nabla_1^{n_1-1} \nabla_2^{n_2} \cdots \nabla_s^{n_s} P_{\mathbf{n}}(z_1 - h_1, z_2, \cdots, z_s) \} \\
& = z \sum_{\alpha=2}^{\beta} \frac{1}{d_1} \cdots z \sum_{\alpha_s}^{\beta_s} \frac{1}{d_1} (1 + \theta_1 h_1)^{z_{\beta_1}/h_1+1} \\
& \cdot \prod_{i=2}^s (1 + \theta_i h_i)^{z_i/h_i} \\
& \cdot \nabla_1^{n_1-1} \nabla_2^{n_2} \cdots \nabla_s^{n_s} P_{\mathbf{n}}(z_{\beta_1}, z_2, \cdots, z_s) \\
& - (1 + \theta_1 h_1)^{z_{\alpha_1}/h_1} \prod_{i=2}^s (1 + \theta_i h_i)^{z_i/h_i} \\
& \cdot \nabla_1^{n_1-1} \nabla_2^{n_2} \cdots \nabla_s^{n_s} P_{\mathbf{n}}(z_{\alpha_1} - h_1, z_2, \cdots, z_s) \} \\
& \quad (3.A.3)
\end{aligned}$$

結局、条件式(3.12)のもとに上式は0となる。同様な手順で $j=1$ に対する公式(3.13)と条件式(3.12)をさらに合計 $(n_i-1)$ 回繰り返し適用すれば、(3.A.1.1)式は次のように変形される。

$$I = z \sum_{\alpha=1}^{\beta} (-1)^{n_1} \Delta_1^{n_1} \prod_{i=1}^s (1 + \theta_i h_i)^{z_i/h_i}$$

$$\cdot \nabla_2^{n_2} \cdots \nabla_s^{n_s} P_{\mathbf{n}}(z) \quad (3.A.4)$$

変数  $z_2, \dots, z_s$  に対しても同様の計算を繰り返すと次式が得られる。

$$I = \sum_{z=1}^z \theta \prod_{i=1}^s (-1)^{n_i} \Delta_i^{n_i} (1 + \theta_i h_i)^{z_i/h_i} P_{\mathbf{n}}(z) \quad (3.A.5)$$

さらに、上式は、前部階差の定義式（演算子に  $d$  を新たに導入した点に留意）を順次適用して得られる関係式：

$$\Delta_i^{n_i} (1 + \theta_i h_i)^{z_i/h_i} = \left( \frac{\theta_i h_i}{d_i} \right)^{n_i} (1 + \theta_i h_i)^{z_i/h_i} \quad (3.A.6)$$

を用いると次のごとく変形される。

$$I = \prod_{i=1}^s (-1)^{n_i} \left( \frac{\theta_i h_i}{d_i} \right)^{n_i} (1 + \theta_i h_i)^{z_i/h_i} P_{\mathbf{n}}(z) \quad (3.A.7)$$

## 2. 結合階乗キュムラント表示

結合階乗キュムラントの最初のいくつかを列記すれば次のとおりである。

$$\kappa_{(1)}(0, 0, \dots, 0, \overset{i}{1}, 0, \dots, 0) = \langle z_i^{(1)} \rangle_{\mathbf{z}_n}$$

$$\kappa_{(2)}(0, 0, \dots, 0, \overset{i}{1}, 0, \dots, 0, \overset{j}{1}, 0, \dots, 0)$$

$$= \langle (z_i^{(1)} - \langle z_i^{(1)} \rangle) (z_j^{(1)} - \langle z_j^{(1)} \rangle) \rangle_{\mathbf{z}_n}$$

$$\kappa_{(3)}(0, 0, \dots, 0, \overset{i}{1}, 0, \dots, 0, \overset{j}{1}, 0, \dots, 0, \overset{s}{1}, 0, \dots, 0)$$

$$= \langle (z_i^{(1)} - \langle z_i^{(1)} \rangle) (z_j^{(1)} - \langle z_j^{(1)} \rangle) \cdot (z_s^{(1)} - \langle z_s^{(1)} \rangle) \rangle_{z_n} \quad (3.A.8)$$

ただし、 $\langle \cdot \rangle_{z_n} \triangleq \int_{z_n} P(z)$  であり、 $z^{(n)}$  は次式で定義さ

れる階乗関数である。

$$z^{(n)} = z(z-h)(z-2h)\cdots(z-(n-1)h) \quad (n \geq 1)$$

$$z^{(0)} = 1 \quad (3.A.9)$$

### 3. カルマンフィルタとの一致

ここでは解析的流れの本質のみに着目するため一変量形態で考察を進める。従って、システム方程式および観測方程式が次のような1次元線形システムで表されたとする。

$$x_{k+1} = A_k x_k + B_k u_k \quad (3.A.10)$$

$$y_k = C_k x_k + v_k \quad (3.A.11)$$

ここで、初期状態  $x_0$  および外来雑音  $u_k$ 、 $v_k$  は各々ガウス分布とする ( $p(v_k) = N(v_k; \bar{v}_k, R_k)$ )。このとき、 $x_k$ 、および  $y_k$  の条件付き確率分布は、

$$p(x_k | Y_{k-1}) = N(x_k; \dot{x}_k, \Gamma_k) \quad (3.A.12)$$

$$p(y_k | Y_{k-1}) = N(y_k; \dot{y}_k, \Omega_k)$$

$$y_k = C_k \dot{x}_k + \bar{v}_k, \quad \Omega_k = C_k^2 \Gamma_k + R_k \quad (3.A.13)$$

で与えられる。また、推定アルゴリズムにおける展開係数  $A_{nm}^{\cdot}$  は、エルミート多項式の加法定理を用いて、次のように  $x_k$  と  $v_k$  各々の各統計量に分離して、展開表現され得る。

$$\begin{aligned}
 A_{nm}^{\cdot} &= \frac{1}{\sqrt{n! m!}} \langle H_n \left( \frac{x_k - \dot{x}_k}{\sqrt{\Gamma_k}} \right) \right. \\
 &\quad \cdot H_n \left( \frac{C_k x_k + v_k - C_k \dot{x}_k - \bar{v}_k}{\sqrt{\Omega_k}} \right) | Y_{k-1} \rangle \\
 &= \frac{1}{\sqrt{n! m!}} \langle H_n \left( \frac{x_k - \dot{x}_k}{\sqrt{\Gamma_k}} \right) \right. \\
 &\quad \cdot H_n \left( C_k \sqrt{\frac{\Gamma_k}{\Omega_k}} \frac{x_k - \dot{x}_k}{\sqrt{\Gamma_k}} + \sqrt{\frac{R_k}{\Omega_k}} \frac{v_k - \bar{v}_k}{\sqrt{R_k}} \right) | Y_{k-1} \rangle \\
 &= \frac{1}{\sqrt{n! m!}} \sum_{j=0}^m \binom{m}{j} (C_k \sqrt{\frac{\Gamma_k}{\Omega_k}})^{m-j} \\
 &\quad \cdot \left( \sqrt{\frac{R_k}{\Omega_k}} \right)^j \langle H_n \left( \frac{x_k - \dot{x}_k}{\sqrt{\Gamma_k}} \right) H_{m-j} \left( \frac{x_k - \dot{x}_k}{\sqrt{\Gamma_k}} \right) \right. \\
 &\quad \cdot H_j \left( \frac{v_k - \bar{v}_k}{\sqrt{R_k}} \right) | Y_{k-1} \rangle \\
 &= \frac{1}{\sqrt{n! m!}} \sum_{j=0}^m \binom{m}{j} (C_k \sqrt{\frac{\Gamma_k}{\Omega_k}})^{m-j} \\
 &\quad \cdot \left( \sqrt{\frac{R_k}{\Omega_k}} \right)^j \langle H_n \left( \frac{x_k - \dot{x}_k}{\sqrt{\Gamma_k}} \right) H_{m-j} \left( \frac{x_k - \dot{x}_k}{\sqrt{\Gamma_k}} \right) | Y_{k-1} \rangle \\
 &\quad \cdot \langle H_j \left( \frac{v_k - \bar{v}_k}{\sqrt{R_k}} \right) \rangle \tag{3.A.14}
 \end{aligned}$$

ここでエルミート多項式の直交性を利用すると、

$$\begin{aligned}
 &\langle H_n \left( \frac{x_k - \dot{x}_k}{\sqrt{\Gamma_k}} \right) H_{m-j} \left( \frac{x_k - \dot{x}_k}{\sqrt{\Gamma_k}} \right) | Y_{k-1} \rangle \\
 &= (m-j)! \delta_{n, m-j} \tag{3.A.15}
 \end{aligned}$$

$$\langle H_j \left( \frac{v_k - \bar{v}_k}{\sqrt{R_k}} \right) \rangle = \delta_{j,0} \quad (3.A.16)$$

となる。すなわち、 $x_k$ 、 $v_k$ 、 $y_k$  がともにガウス分布を示すいまの場合、 $x_k$ 、 $y_k$  間の線形および非線形の各種相関情報式 (3.14) は結局、次のごとく単純な表示に変形される。

$$A_{nm}^* = \delta_{nm} C_k^n \left( \sqrt{\frac{\Gamma_k}{\Omega_k}} \right)^n \quad (3.A.17)$$

かくて、 $y_k$  の逐次観測に伴う対象信号  $x_k$  の逐次推定アルゴリズムは、いまの場合、(3.35)、(3.36) 式から (3.A.3.17) 式を用いて次のごとく導出される。

$$\hat{x}_k^* = x_k^* + \frac{\Gamma_k C_k}{\Omega_k} (y_k - C_k x_k^* - \bar{v}_k) \quad (3.A.18)$$

$$P_k = \Gamma_k - \frac{\Gamma_k^2 C_k^2}{\Omega_k} \quad (3.A.19)$$

これは公知のカルマンフィルタの状態推定式と全く一致している。

# 第4章 エネルギー-確率システムの動的な一状態推定法

## 4.1 概要

本章では、エネルギー-確率システムの動的な一状態推定法について、まず、エネルギー-確率システムの動的な一状態推定法の概要を説明する。次に、エネルギー-確率システムの動的な一状態推定法の具体的な推定法を説明する。最後に、エネルギー-確率システムの動的な一状態推定法の応用について説明する。

## 第4章 エネルギー-確率システムの動的な一状態推定法

本章では、エネルギー-確率システムの動的な一状態推定法について、まず、エネルギー-確率システムの動的な一状態推定法の概要を説明する。次に、エネルギー-確率システムの動的な一状態推定法の具体的な推定法を説明する。最後に、エネルギー-確率システムの動的な一状態推定法の応用について説明する。

以上の内容を踏まえ、本章では、エネルギー-確率システムの動的な一状態推定法について、まず、エネルギー-確率システムの動的な一状態推定法の概要を説明する。次に、エネルギー-確率システムの動的な一状態推定法の具体的な推定法を説明する。最後に、エネルギー-確率システムの動的な一状態推定法の応用について説明する。

## 第4章 エネルギー確率システムの動的な一状態推定法

### 4.1 緒言

実環境下で遭遇するほとんどの音響信号は、物理的要因はもちろん、社会的要因から人間自由意志に基づく主体的行動までがからみあって複雑な不規則変動を結果的に示している。そして、この信号の刻々の過渡的変動に加え、任意変動分布形の外来雑音や各種の変動要因が混入して、時々刻々不確定なランダム変動形態を示し、しかも長期的時間スケールで非定常性を示すのが常である。このような現実の環境騒音に対して一定の評価を行なうためには、何らかの統計処理を施すことなしには到底合理的な評価をすることができない。これら対象信号の変動形態を、外来雑音の混入下で刻々逐次、推定してゆく研究の代表的なものの一つに公知のカルマンによるデジタルフィルタ [18] がある。しかし、このフィルタは状態変動のガウス分布特性、あるいは最小自乗型の評価法を前提としている。その評価姿勢も平均のみを推定の主目的にとり、(共)分散をその誤差評価の目安に位置付けるといった単純理想化した評価姿勢を初めからとっている。上述した実状況下で遭遇する複雑さに対処するためには、これらの理想化はあまりに操作的過ぎると言わねばならない。われわれが現実に遭遇する外来環境騒音の多くは非ガウス形の多様な分布形状を示しており、その環境評価においても、 $L_{eq}$ 、 $L_x$  評価量など、ときにゆらぎ分布の端まで目を向ける必要がある。すなわち、上述の複雑多様な実システムに、より適合した一般化形態での状態推定理論を、あらかじめ設定しておくことが不可欠である [25, 27]。

以上のような実際的背景から、本章では、まず、騒音環境をいったんエネルギーシステムとして把握し、任意の分布形状を示す暗騒



音の混入下で、実音響システムの逐次計測データから、対象とする未知騒音のみを動的に推定する新たな手法を設定する。すなわち、特にエネルギーシステムに整合した広義デジタルフィルタの一設計理論を、現象の非ガウス性に沿い、階層的に逐次処理できる一般化形態でまず導出する。ここに提案した広義デジタルフィルタは、カルマンフィルタにおけると同様観測値との一次相関情報を利用する [18] こと以外に、非ガウス性の高次統計情報や非線形の多次相関情報も積極的に利用している。すなわち、実現象がもつ問題複合体としての特性 —— 変動特性の多様さと人間反応の非画一性 —— へできるだけ整合させ、その定量化における操作面上の困難さに少しでも系統性をもたせて対処しようとしている。最後に、単に新たなフィルタの提案に留まらず、本手法がもつ実際的有効性の一端を検証するため、実際の住環境で観測した音響データに本手法を適用して、その実際的有効性も実験的に確認している。

## 4.2 理論的考察

### 4.2.1 状態推定問題の定式化

考察対象として、任意非ガウス形音確率環境のエネルギー（またはパワー）システムに着目し、まず、次のシステム方程式・観測方程式の一般形態から考察を始める。

$$\mathbf{X}_{k+1} = \mathbf{F}_k(\mathbf{X}_k, \mathbf{u}_k) \quad (4.1)$$

$$y_k = G_k(\mathbf{X}_k, \mathbf{v}_k) \quad (4.2)$$

ただし、 $\mathbf{X}_k (\triangleq (x_{1k}, x_{2k}, \dots, x_{Nk}))$  および  $y_k$  それぞれ離散時刻  $k$  における  $N$  次元状態ベクトルおよび 1 次元観測値である。さらに、 $\mathbf{u}_k$  および  $\mathbf{v}_k$  は入力ベクトルおよび観測雑音ベクトルで、互いに

統計的に独立とする ( $u_k$ ,  $v_k$  の各統計量はあらかじめ既知)。  $X_k$  を逐次推定できるディジタルフィルタのプログラム論理を導出するにあたり、まず推定の基本原理であるベイズ定理:

$$\begin{aligned} P(X_k | Y_k) &= \frac{P(X_k | Y_{k-1}) P(y_k | X_k, Y_{k-1})}{P(y_k | Y_{k-1})} \\ &= \frac{P(X_k, y_k | Y_{k-1})}{P(y_k | Y_{k-1})} \end{aligned} \quad (4.3)$$

に着目する。ただし、 $Y_k$  は時刻  $k$  までの観測値の集合  $\{y_1, y_2, \dots, y_k\}$  である。すなわち、 $k$  時点における観測データ  $y_k$  の摂取が  $X_k$  の推定精度に分布全体としていかに逐次影響してゆくかに着目するのである。しかも、 $X_k$ ,  $y_k$  はエネルギー変量として正值のみのゆらぎを常に示すことから、平均  $\rightarrow 0$  のとき必ず平均まわりのあらゆるゆらぎ幅も同時に  $\rightarrow 0$  とならねばならぬ拘束があり、そのゆらぎ分布も非ガウス性を示している。よってこの正変量であるエネルギー確率システムの多様なゆらぎ形態を具体的に推定アルゴリズムの内に反映させるためには、ガンマ分布を展開初項にもつ公知の統計的ラゲール直交展開形の分布一般表現をまず採用するのが合理的である。一般に暗騒音に汚された刻々変動する観測データの内から、信号成分のみが抽出できるためには、信号と観測データ間に何らかの形での相関情報が潜在せねばならない。この相関情報には、カルマンフィルタが使われた線形の相関情報だけでなく、抽出できるか否かは別にするとしても高次の非線形相関情報も確実に潜在している。従って、これらの相関情報をできるだけ多く積極的に利用することが信号検出の精度向上に連なることが明白である。そのためには、非ガウス性を示す任意変動に対し、カルマンフィルタにおけるような平均、(共)分散の低次モーメント情報だけでなく、状態量や暗騒音の高次モーメント情報にも着目する必要がある。

本章における広義デジタルフィルタの設定においては、通常の線形相関情報のみならず、高次の非線形相関情報も積極的に利用しており、考察対象のシステム（(4.1)式）とそれに働きかける観測機構（(4.2)式）がもともともつ拘束的状况にも整合した状態推定のかなり一般的なプログラム論理となっている。

#### 4.2.2 パラメータ微分形に基づくパワー変動分布の階層表現

パワーシステムの逐次状態推定に整合した形態で、ベイズ定理と結びつくパワー変動分布の新たな展開形階層表示をまず導入する。状態変量がパワーであるL次元正領域確率変数  $z$  ( $\equiv (z_1, z_2, \dots, z_L)$ ,  $0 \leq z_i < \infty$ ,  $i = 1, 2, \dots, L$ ) に着目するとき、各変量間はそれがいかに複雑な変動形態をとり、かつ任意の非線形音響伝達系を通ろうと、とにかく、振幅値が半無限区間  $[0, \infty)$  内で不規則に変動していることはいうまでもない。各瞬時値間に多様な相関をもち、このような正領域の変動域をもつ確率変数  $z$  に関する結合確率密度関数  $P(z)$  は統計的ラゲール直交級数展開形の結合確率密度表示 [11, 12] :

$$P(z) = P_a(z) \left\{ 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{A_n}{n_1 + n_2 + \dots + n_L = n} \cdot \prod_{i=1}^L \phi_{n_i}(z_i) \right\}$$

$$P_a(z) = \prod_{i=1}^L P_{\Gamma}(z_i; m_i, s_i) \\ = \prod_{i=1}^L \frac{z_i^{m_i-1} \exp(-\frac{z_i}{s_i})}{\Gamma(m_i) s_i^{m_i}}$$

$$\phi_{n_i}(z_i) \equiv L \binom{m_i-1}{n_i} \left( \frac{z_i}{s_i} \right) \quad ( : \text{ラゲール陪多項式} )$$

$$m_i \triangleq \mu_i^2 / \sigma_i^2 \quad (\mu_i \triangleq \langle z_i \rangle, \quad \sigma_i^2 \triangleq \langle (z_i - \langle z_i \rangle)^2 \rangle)$$

$$s_y \triangleq \langle z_i \rangle / m_i, \quad n \triangleq (n_1, n_2, \dots, n_L) \quad (4.4a)$$

で一般的に表示できる。ただし、 $m_i$  が定数であることから、 $\mu_i \rightarrow 0$  のとき、 $\sigma_i$  も  $\rightarrow 0$  となる正領域内変動の拘束性が展開初項において既に反映されている。ここに、各展開係数は

$$A_n = \langle \prod_{i=1}^L \frac{\Gamma(m_i) n_i!}{\Gamma(n_i + m_i)} L_{n_i}^{(m_i-1)} \left( \frac{z_i}{s_i} \right) \right\rangle$$

$$A_{00 \dots 0 i 0 \dots 0} = A_{00 \dots 0 j 0 \dots 0} = 0 \quad (\forall i, j)$$

$$A_{00 \dots 0 i 0 \dots 0 j 0 \dots 0} = \frac{\rho_{ij}}{\sqrt{m_i m_j}}$$

( $\rho_{ij}$  は  $z_i, z_j$  間の一次相関情報である。)

(4.4b)

で与えられている。すなわち、初項は公知のガンマ分布 [13] の積であり、第2項以下に続く各展開係数のうちに変動波に内在する線形・非線形の各種相関効果を逐次階層的に反映している。いま、操作面上で少しでも簡易さが獲得できるように、分布関数  $P(z)$  の裏領域表現である  $z$  の積率母関数表示から解析を始める。すなわち、積率母関数：

$$m(\theta) \triangleq \langle \exp \left( \sum_{i=1}^L \theta_i z_i \right) \rangle = \int \int \dots \int e^{\theta^T z} p(z) dz$$
(4.5)

において ( $\theta \triangleq (\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_L)$ ,  $\theta_i$  は任意定数)、 $P(z)$  の位置に (4.4) 式を用いるならば、積分公式 [13]：

$$\int_0^\infty \left( \frac{z}{s} \right)^{n-1} e^{(-z/s)(1-s\theta)} L_n^{(m-1)} \left( \frac{z}{s} \right) d \left( \frac{z}{s} \right)$$

$$= \frac{\Gamma(n+m)(-s\theta)^n}{n! (1-s\theta)^{m+n}}$$
(4.6)

を各変量  $z_i$  ごとに順次適用することにより、まず、

$$\begin{aligned}
 m(\theta) &= \prod_{i=1}^L \frac{1}{(1 - s_i \theta_i)^{m_i}} \\
 &= \left\{ 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n_1 + n_2 + \cdots + n_L = n} (-1)^n \right. \\
 &\quad \cdot A_{n_i} \prod_{i=1}^L \frac{\Gamma(n_i + m_i)}{\Gamma(m_i) n_i!} \left( \frac{s_i \theta_i}{1 - s_i \theta_i} \right)^{n_i} \quad (4.7)
 \end{aligned}$$

の表示が算出される [28]。ここで、パラメータ  $m_i$ 、 $s_i$  のうち、 $m_i$  は確率変数  $z_i$  における変動の自由度またはゆらぎ率ともいふべきもので、一般に系のメモリー特性（例えば、平滑化時間  $T$ ）や現象変動の帯域幅  $w$  と強く結び付いて時に Shannon のサンプリング定理 [29] との関連で不連続値  $T w$  を示すこともある。一方、パラメータ  $s_i$  はパワー変動の平均的ゆらぎ形態と結び付いて常に連続値を示す。そこで、この  $s_i$  による微分関係：

$$\frac{\theta^n}{(1 - s \theta)^{m+n}} = \frac{\Gamma(m)}{\Gamma(n+m)} \left( \frac{\partial}{\partial s} \right)^n \frac{1}{(1 - s \theta)^m} \quad (4.8)$$

を導入する。(4.8) 式を (4.7) 式に代入することにより、結局次の新たなパラメータ微分形式における積率母関数表現を得る。

$$\begin{aligned}
 m(\theta) &= \left\{ 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n_1 + n_2 + \cdots + n_L = n} (-1)^n \right. \\
 &\quad \cdot A_{n_i} \prod_{i=1}^L \frac{s_i^{n_i}}{n_i!} \left( \frac{\partial}{\partial s} \right)^{n_i} \left. \right\} \prod_{i=1}^L \frac{1}{(1 - s \theta_i)^{m_i}} \quad (4.9)
 \end{aligned}$$

従って、再び積分公式 (4.6) 式を逆に適用して、次の表示を得る。

$$m(\theta) = \left\{ 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n_1 + n_2 + \cdots + n_L = n} (-1)^n \right.$$

$$\cdot A_{n_i} \prod_{i=1}^L \frac{s_i^{n_i}}{n_i!} \left( \frac{\partial}{\partial s_i} \right)^{n_i} \int \int \cdots \int e^{\theta^T z} p_{\theta}(z) dz \quad (4.10)$$

結局、 $P(z)$ は Levy の反転公式に基づき  $P(z)$ と  $m(\theta)$ 間の 1 対 1 対応から

$$P(z) = \left\{ 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\prod_{i=1}^L \frac{s_i^{n_i} \Gamma(m_i)}{\Gamma(n_i + m_i)} \left\langle L_{n_i}^{(m_i-1)} \left( \frac{z_i}{s_i} \right) \right\rangle \left( \frac{\partial}{\partial s_i} \right)^{n_i} \right\} \prod_{i=1}^L \frac{z_i^{m_i-1} \exp\left(-\frac{z_i}{s_i}\right)}{\Gamma(m_i) s_i^{m_i}} \quad (4.11)$$

の展開形階層表示で一般的に次のように与えられる。すなわち、振幅の正区間内にのみ変動領域をもつパワー変量に着目するとき、いったん標準的なガンマ分布形入力に対してあらかじめ解析を進めておこなうならば、階層形分布表示 (4.11) 式のもとに、一般の任意変動分布形入力に対する応答がガンマ分布形入力のパラメータ微分からなる機械的操作の形で階層的に算出されていくのである。

#### 4.2.3 状態推定に関する広義デジタルフィルタの アルゴリズム論理

考察対象が音環境のパワーシステムである場合、4.2.1 節で言及したごとく、パワー変量のもつ基本拘束が存在しており、ベイズ定理 (4.3) 式と結び付く  $X_k$ 、 $y_k$ の条件付き同時結合確率密度関数  $P(X_k, y_k | Y_{k-1})$ を前節と同様に (正変量に整合のとれた) ガンマ分布関数を初項としてまず直交展開表現する。

$$\begin{aligned}
P(\mathbf{X}_k, y_k | Y_{k-1}) &= P_{\theta}(\mathbf{X}_k | Y_{k-1}) P_{\theta}(y_k | Y_{k-1}) \\
&\cdot \prod_{n=1}^{\infty} \prod_{p=1}^{\infty} A_{n,p} \phi_n^{(1)}(\mathbf{X}_k) \phi_p^{(2)}(y_k)
\end{aligned}
\tag{4.12}$$

ただし、

$$\begin{aligned}
P_{\theta}(\mathbf{X}_k | Y_{k-1}) &= \prod_{i=1}^N P_{\Gamma}(x_{ik}; m_{ik}, s_{ik}) \\
P_{\theta}(y_k | Y_{k-1}) &= P_{\Gamma}(y_k; m_k, s_k) \\
\phi_n^{(1)}(\mathbf{X}_k) &= \prod_{i=1}^N L_{n_i}^{(m_{ik}-1)}\left(\frac{x_{ik}}{s_{ik}}\right) \\
\phi_p^{(2)}(y_k) &= L_p^{(m_k-1)}\left(\frac{y_k}{s_k}\right)
\end{aligned}
\tag{4.13}$$

$$\left( \prod_{n=1}^{\infty} \prod_{p=1}^{\infty} \prod_{n_1=1}^{\infty} \prod_{n_2=1}^{\infty} \cdots \prod_{n_N=1}^{\infty} \right), \quad n \triangleq (n_1, n_2, \dots, n_N)$$

$$m_{ik} \triangleq x_{ik}^2 / \Gamma_{ik}, \quad s_{ik} \triangleq \Gamma_{ik} / x_{ik},$$

$$x_{ik} \triangleq \langle x_{ik} | Y_{k-1} \rangle, \quad \Gamma_{ik} \triangleq \langle (x_{ik} - x_{ik})^2 | Y_{k-1} \rangle,$$

$$m_k \triangleq y_k^2 / \Omega_k, \quad s_k \triangleq \Omega_k / y_k,$$

$$y_k \triangleq \langle y_k | Y_{k-1} \rangle = \langle G_k(\mathbf{X}_k, \mathbf{v}_k) | Y_{k-1} \rangle$$

$$\begin{aligned}
\Omega_k &\triangleq \langle (y_k - y_k)^2 | Y_{k-1} \rangle \\
&= \langle (G_k(\mathbf{X}_k, \mathbf{v}_k) - y_k)^2 | Y_{k-1} \rangle
\end{aligned}
\tag{4.14}$$

である。このとき、(4.11) 式より、 $P_{\theta}(\mathbf{X}_k | Y_{k-1})$ に関するパラメータ微分の形態で  $P(\mathbf{X}_k, y_k | Y_{k-1})$  の分布表現が階層的に次のごとく展開表示される。

$$P(\mathbf{X}_k, y_k | Y_{k-1})$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{p=0}^{\infty} A_{n,p} \cdot L_p^{(m_k - 1)} \left( \frac{y_k}{s_k} \right) \\
&\cdot \prod_{i=1}^N \frac{(-1)^{n_i} s_{ik}^{n_i}}{n_i!} \left( \frac{\partial}{\partial s_{ik}} \right)^{n_i} P_{\Gamma}(x_{ik}; m_{ik}, s_{ik}) \\
&\cdot P_{\Gamma}(y_k; m_k, s_k) \tag{4.15}
\end{aligned}$$

ただし、(4.12) (4.15) 式における分布展開係数  $A_{n,p}$  は、次のように評価される。

$$\begin{aligned}
A_{n,p} &\triangleq \left\langle \prod_{i=1}^N \frac{\Gamma(m_{ik}) n_i!}{\Gamma(m_{ik} + n_i)} L_{n_i}^{(m_{ik} - 1)} \left( \frac{x_{ik}}{s_{ik}} \right) \right. \\
&\quad \cdot \left. \frac{\Gamma(m_k) p!}{\Gamma(m_k + p)} L_p^{(m_k - 1)} \left( \frac{y_k}{s_k} \right) \mid Y_{k-1} \right\rangle \\
&= \left\langle \prod_{i=1}^N \frac{\Gamma(m_{ik}) n_i!}{\Gamma(m_{ik} + n_i)} L_{n_i}^{(m_{ik} - 1)} \left( \frac{x_{ik}}{s_{ik}} \right) \right. \\
&\quad \cdot \left. \frac{\Gamma(m_k) p!}{\Gamma(m_k + p)} L_p^{(m_k - 1)} \left( \frac{G_k(X_k, V_k)}{s_k} \right) \mid Y_{k-1} \right\rangle \tag{4.16}
\end{aligned}$$

(4.15) 式を (4.3) 式に代入することにより、次の分布推移則を導出することができる。

$$\begin{aligned}
P(X_k \mid Y_k) &= \frac{P(X_k, y_k \mid Y_{k-1})}{P(y_k \mid Y_{k-1})} \\
&= \prod_{i=1}^N P_{\Gamma}(x_{ik}; m_{ik}, s_{ik})
\end{aligned}$$



$$\begin{aligned}
& + \sum_{n \neq 0}^{\infty} \frac{\sum_{p=0}^{\infty} A_{n p} \cdot L_p^{(m_k - 1)} \left( \frac{y_k}{s_k} \right)}{\sum_{p=0}^{\infty} A_{0 p} \cdot L_p^{(m_k - 1)} \left( \frac{y_k}{s_k} \right)} \\
& \cdot \prod_{i=1}^N \frac{(-1)^{n_i} s_{ik}^{n_i}}{n_i!} \left( \frac{\partial}{\partial s_{ik}} \right)^{n_i} P_{\Gamma}(x_{ik}; m_{ik}, s_{ik}) \quad (4.17)
\end{aligned}$$

階層的な表現形式をもつ、この展開形の統一的分布推移則に基づくなら、多次元状態変量  $X_k$  についてのあらゆる統計的評価が可能となる。いま閉区間内における Weierstrass の多項式近似定理 [30] により任意の連続関数を  $X_k$  の  $M$  ( $\equiv (M_1, M_2, \dots, M_N)$ ) 次多項式 (各  $x_{ik}$  ( $i = 1, 2, \dots, N$ ) について  $M_i$  次の多項式)  $f_M(X_k)$  で近似するなら、この関数形から構成された任意確率評価量に関して、次の推定アルゴリズムが導出される。

$$\begin{aligned}
\hat{f}_M(X_k) & \triangleq \langle f_M(X_k) | Y_k \rangle \\
& = \langle f_M(X_k) | Y_{k-1} \rangle_a \\
& + \sum_{n \neq 0}^M \frac{\sum_{p=0}^{\infty} A_{n p} \cdot L_p^{(m_k - 1)} \left( \frac{y_k}{s_k} \right)}{\sum_{p=0}^{\infty} A_{0 p} \cdot L_p^{(m_k - 1)} \left( \frac{y_k}{s_k} \right)} \\
& \cdot \prod_{i=1}^N \frac{(-1)^{n_i} s_{ik}^{n_i}}{n_i!} \left( \frac{\partial}{\partial s_{ik}} \right)^{n_i} \langle f_M(X_k) | Y_{k-1} \rangle_a \quad (4.18a)
\end{aligned}$$

ただし

$$\langle f_M(X_k) | Y_{k-1} \rangle_a \triangleq \int \int \cdots \int f_M(X_k)$$

$$\prod_{i=1}^N P_{\Gamma}(x_{ik}; m_{ik}, s_{ik}) dx_{1k} dx_{2k} \cdots dx_{Nk} \quad (4.18b)$$

である。特に、推定式 (4.18a) は、推定値が初項およびその逐次パラメータ微分で階層的に表されており、任意推定量の統一的な推定アルゴリズムがパラメータ微分の機械的な操作手順のもとに構成されている。かくて、環境騒音システムの推定問題において、未知信号の任意確率評価が、事前計画に基づくアルゴリズムの形で推定され、ファームウェア化に必要な推定アルゴリズムのプログラム論理において、簡単化と系統的組織性をまず獲得することができる。

特に、平均、分散といった低次の統計量に着目すると、

$$\begin{aligned} \langle x_{ik} | Y_k \rangle_{\theta} &\equiv \int x_{ik} P_{\Gamma}(x_{ik}; m_{ik}, s_{ik}) dx_{ik} \\ &= m_{ik} s_{ik} \end{aligned} \quad (4.19)$$

$$\begin{aligned} \langle x_{ik}^2 | Y_k \rangle_{\theta} &\equiv \int x_{ik}^2 P_{\Gamma}(x_{ik}; m_{ik}, s_{ik}) dx_{ik} \\ &= m_{ik}(m_{ik} + 1) s_{ik}^2 \end{aligned} \quad (4.20)$$

であることから、これらのパラメータ微分を実行することにより、次のごとく具体的な推定アルゴリズムが実現される。

$$\begin{aligned} \hat{x}_{ik} &\equiv \langle x_{ik} | Y_k \rangle = m_{ik} s_{ik} - s_{ik} \\ &\frac{\sum_{p=0}^{\infty} A_{\theta \dots \theta} \cdot \dots \cdot \theta_{i\theta \dots \theta p} L_p^{(m_{ik}-1)} \left( \frac{y_k}{s_{ik}} \right)}{\sum_{p=0}^{\infty} A_{\theta \dots \theta} \cdot \dots \cdot \theta_{\theta p} L_p^{(m_{ik}-1)} \left( \frac{y_k}{s_{ik}} \right)} \\ &\cdot \left( \frac{\partial}{\partial s_{ik}} \right) (m_{ik} s_{ik}) \end{aligned}$$

$$= m_{ik} \dot{s}_{ik} - m_{ik} \dot{s}_{ik}$$

$$\frac{\sum_{p=0}^{\infty} A_{\theta \dots \theta_1 \theta \dots \theta_p} L_p^{(m_{ik}-1)} \left( \frac{y_k}{s_{ik}} \right)}{s_{ik}}$$

$$\frac{\sum_{p=0}^{\infty} A_{\theta \dots \theta_p} L_p^{(m_{ik}-1)} \left( \frac{y_k}{s_{ik}} \right)}{s_{ik}} \quad (4.21)$$

$$P_{ik} \triangleq \langle (X_{ik} - \hat{X}_{ik})^2 \mid Y_k \rangle$$

$$= m_{ik}(m_{ik}+1) s_{ik}^2 - \hat{X}_{ik}^2 - 2m_{ik}(m_{ik}+1) s_{ik}^2$$

$$\frac{\sum_{p=0}^{\infty} A_{\theta \dots \theta_1 \theta \dots \theta_p} L_p^{(m_{ik}-1)} \left( \frac{y_k}{s_{ik}} \right)}{s_{ik}}$$

$$\frac{\sum_{p=0}^{\infty} A_{\theta \dots \theta_p} L_p^{(m_{ik}-1)} \left( \frac{y_k}{s_{ik}} \right)}{s_{ik}}$$

$$+ m_{ik}(m_{ik}+1) s_{ik}^2$$

$$\frac{\sum_{p=0}^{\infty} A_{\theta \dots \theta_2 \theta \dots \theta_p} L_p^{(m_{ik}-1)} \left( \frac{y_k}{s_{ik}} \right)}{s_{ik}}$$

$$\frac{\sum_{p=0}^{\infty} A_{\theta \dots \theta_p} L_p^{(m_{ik}-1)} \left( \frac{y_k}{s_{ik}} \right)}{s_{ik}} \quad (4.22)$$

さらに、非ガウス性の統計的反映をもつ母数（歪度、尖度と類

似 [31]）の推定式も、あらかじめ (4.21)、(4.22) 式から  $m_{ik}$ 、

$s_{ik}$  を推定しそれから計算される  $I_{ni}^*$  :

$$I_{ni}^* \triangleq \langle \frac{\Gamma(\hat{m}_{ik}) n_i!}{\Gamma(\hat{m}_{ik} + n_i)} L_{n_i}^{(\hat{m}_{ik}-1)} \left( \frac{X_{ik}}{\hat{s}_{ik}} \right) \mid Y_{k-1} \rangle$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{r_i=0}^{n_i} (-1)^{r_i} \binom{n_i}{r_i} \left( \frac{s_{ik}}{\hat{s}_{ik}} \right)^{r_i} \\
&\quad \cdot \frac{\Gamma(\hat{m}_{ik}) \Gamma(m_{ik}^* + r_i)}{\Gamma(m_{ik}^*) \Gamma(\hat{m}_{ik} + r_i)} \\
&(\hat{m}_{ik} \triangleq \hat{X}_{ik}^2 / P_{ik}, \quad \hat{s}_{ik} \triangleq P_{ik} / \hat{X}_{ik}) \tag{4.23}
\end{aligned}$$

を用いて、パラメータ微分形式で次のごとく階層的に与えられる。

$$\begin{aligned}
\hat{\alpha}_{n_i} &\triangleq \left\langle \frac{\Gamma(\hat{m}_{ik}) n_i!}{\Gamma(\hat{m}_{ik} + n_i)} L_{n_i}^{(\hat{m}_{ik}-1)} \left( \frac{x_{ik}}{\hat{s}_{ik}} \right) \mid Y_k \right\rangle \\
&= I_{n_i}^* + \sum_{t_i=1}^{n_i} \frac{\sum_{p=0}^{\infty} A_{\theta^1 \dots \theta^i \theta^1 \dots \theta^p} L_p^{(m_k^*-1)} \left( \frac{y_k}{s_k} \right)}{\sum_{p=0}^{\infty} A_{\theta^p} L_p^{(m_k^*-1)} \left( \frac{y_k}{s_k} \right)} \\
&\quad \cdot \frac{(-1)^{t_i} s_{ik}^{t_i}}{t_i!} \left( \frac{\partial}{\partial s_{ik}} \right)^{t_i} I_{n_i}^* \tag{4.24}
\end{aligned}$$

最後に、システム方程式 (4.1) 式を考慮することにより、逐次推定のアルゴリズムを完結させるために必要な (次の時点における) 予測値が、一般的な  $r$  次多項式型の連続関数  $g_r(\mathbf{X}_{k+1})$  に対して次式で与えられる (Weierstrassの多項式近似定理 [30] を参照)。

$$\begin{aligned}
g_r^*(\mathbf{X}_{k+1}) &\triangleq \langle g_r(\mathbf{X}_{k+1}) \mid Y_k \rangle \\
&= \langle g_r(\mathbf{F}_k(\mathbf{X}_k, \mathbf{u}_k)) \mid Y_k \rangle \tag{4.25}
\end{aligned}$$

上式は、(4.18) 式で与えられる推定値および  $\mathbf{u}_k$  の事前統計情報を用いて具体的に評価できる。以上によりパワーシステムに整合した

デジタルフィルタの具体的プログラムが完結する。

### 4.3 実験的考察

#### 4.3.1 暗騒音下の室内における残響曲線の推定

室内での残響時におけるエネルギー密度  $x(t)$  の時間的变化は、室内の拡散音場を仮定するならば、次式の微分方程式に従うことが Sabine の残響理論 [14] により知られている。

$$\frac{d x(t)}{d t} = F_a x(t), \quad F_a \triangleq \frac{6}{T \log e} \quad (4.26)$$

ここに、 $T$  は残響時間を表す。いま、データ処理の実際的情況を考慮して (4.26) 式にサンプリング周期  $\Delta t$  を導入し、離散時間表現のシステム方程式を次式のごとく表す。

$$x_{k+1} = F x_k, \quad F \triangleq \exp(-F_a \Delta t) \quad (4.27)$$

また、これと独立で白色かつ統計既知なる暗騒音  $v_k$  の混入を考慮し、観測方程式を次式のごとく与えるならば、一次元エネルギーシステムにおける状態推定問題となる。

$$y_k = x_k + v_k \quad (4.28)$$

ここで、未知状態変量  $x_k$ 、観測値  $y_k$  ならびに暗騒音  $v_k$  は共にエネルギー量であるので、その分布表現としてそれぞれ (4.4) 式の統計的ラゲール直交展開型一般分布を導入することが自然である。従って、前節でのアルゴリズムを適用するなら、システム方程式 (4.27)、観測方程式 (4.28) の考慮のもと、まず  $x_k$  および  $y_k$  の予測値、予測分散 ( (4.14) 式参照 ) が  $(k-1)$  時点での推定結果をも

とに、次のように算出される。

$$\begin{aligned} \dot{x}_k &= \langle F x_{k-1} | Y_{k-1} \rangle = F \hat{X}_{k-1} (\triangleq m_{ik} \dot{s}_{ik}) \\ (\hat{X}_{k-1} &\triangleq \langle x_{k-1} | Y_{k-1} \rangle) \end{aligned} \quad (4.29)$$

$$\begin{aligned} \Gamma_k &= \langle F^2 (x_{k-1} - \hat{X}_{k-1})^2 | Y_{k-1} \rangle \\ &= F^2 p_{k-1} (\triangleq m_{ik} \dot{s}_{ik}^2) \\ (p_{k-1} &\triangleq \langle (x_{k-1} - \hat{X}_{k-1})^2 | Y_{k-1} \rangle) \end{aligned} \quad (4.30)$$

$$\begin{aligned} \dot{y}_k &= \langle x_k | Y_{k-1} \rangle + \langle v_k \rangle = \dot{x}_k + m' s' \\ &(\triangleq m_{ik} \dot{s}_{ik}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Omega_k &= \langle (x_k - \dot{x}_k)^2 | Y_{k-1} \rangle + \langle (v_k - \langle v_k \rangle)^2 \rangle \\ &= \Gamma_k + m' s'^2 (\triangleq m_{ik} \dot{s}_{ik}^2) \end{aligned} \quad (4.31)$$

ただし、

$$m' \triangleq \langle v_k \rangle^2 / \langle (v_k - \langle v_k \rangle)^2 \rangle, \quad s' \triangleq \langle v_k \rangle / m'$$

であり、ここで、暗騒音  $v_k$  と状態変量  $x_k$  の変動が統計的に独立であることを考慮した。また、(4.15) 式の  $A_{n\theta}$  は次のように算出される。

$$\begin{aligned} A_{n\theta} &\triangleq \frac{\Gamma(m_{ik}) n!}{\Gamma(m_{ik} + n)} \\ &\cdot \sum_{r=0}^n \frac{(-1)^r}{n!} \binom{n}{r} \frac{\Gamma(m_{ik} + n)}{\Gamma(m_{ik} + r)} \left( \frac{F \hat{s}_{1k-1}}{s_{ik}} \right)^r \\ &\cdot \sum_{r_1=0}^n (-1)^{r_1} r_1! \binom{r}{r_1} \frac{\Gamma(\hat{m}_{1k-1} + r)}{\Gamma(\hat{m}_{1k-1} + r_1)} \end{aligned}$$

$$\cdot \langle L_{r_1}^{(\hat{m}_{1k-1}-1)} \left( \frac{x_{k-1}}{\hat{s}_{1k-1}} \right) | Y_{k-1} \rangle \quad (4.32)$$

$$A_{\dot{\theta}_m} \equiv \frac{\Gamma(\dot{m}_k) m!}{\Gamma(\dot{m}_k + m)}$$

$$\cdot \sum_{r_1=0}^m \frac{(-1)^{r_1}}{(m-r_1)! r_1!} \frac{\Gamma(\dot{m}_k + m_{i_1})}{\Gamma(\dot{m}_k + r_{i_1})}$$

$$\cdot \sum_{r_2=0}^{r_1} \binom{r_1}{r_2} \left( \frac{s_{i_k}}{s_k} \right)^{r_2} \left( \frac{s'}{s_k} \right)^{r_1-r_2}$$

$$\cdot \sum_{r_3=0}^{r_2} (-1)^{r_3} r_2! \binom{r_2}{r_3} \frac{\Gamma(\dot{m}_k + m)}{\Gamma(\dot{m}_k) r_3!} A_{r_3 \dot{\theta}_m}$$

$$\cdot \frac{r_1 - r_2}{r_4 = 0} (-1)^{r_4} \binom{r_1 - r_2}{r_4} \frac{\Gamma(m' + r_1 - r_2)}{\Gamma(m')} C_{r_4}$$

(4.33)

ただし、 $\hat{m}_{1k-1} \equiv \hat{x}_{k-1}^2 / p_{k-1}$ 、 $\hat{s}_{1k-1} \equiv p_{k-1} / \hat{x}_{k-1}$ であり、

$C_n \equiv (\Gamma(m') n! / \Gamma(m' + n)) \langle L_n^{(m'-1)}(v_k / s') \rangle$ である。

実験は工学部の有響室において行なった。まず、室内に2個のスピーカを設置し、一方から平均92dB(c)、他方から平均86dB(c)で、中心周波数500Hzのオクターブバンド白色ノイズを発生させ、室内が定常となった後、前者の音のみを切り、後者のほうを定常的な暗騒音とみなして、これに汚された残響曲線を有響室内の代表的な一点で観測した。さらに、残響が完全になくなった後、暗騒音のみのデータを採取してその統計量を評価した。続いて、同じ設定のもとに暗騒音(平均86dB(c))のない場合における残響曲線の観測を行ない、以上のデータをともにサンプリング周期1/30秒でサンプルし、エネルギー量へ変換して、それぞれ

観測値および真値、さらに暗騒音エネルギーの統計量を与える各データとした。

Fig. 4.1 に、前節に対する実験結果を示す。なお、第1、第2、第3近似は(4.18)式において広義デジタルフィルタの展開項を1、2、3次まで考慮した推定結果である。実験結果より、既に第1近似においてもかなり真値の傾向をとらえていることが確認される。また、近似の次数を上げた場合、初期値付近でやや振動傾向が見られる。いうまでもなく定常音を切った直後は残響エネルギーが暗騒音エネルギー（これは高次展開項に反映する）に対し支配的となる。従って、この初期状態では推定分布  $P(x_k | y_k)$  は(4.17)式において初項のみでも既に十分表現される。それにもかかわらず、高次展開項までの数値処理をアルゴリズムに沿いあえて施す結果（初期値の誤差の影響も加味されて）、途中一時的にこのような振動傾向が現れたものと思われる。

#### 4.3.2 任意遮音システムの同定と応答分布の予測

いま、任意分布形状を示す入力騒音が、任意遮音システムを通過し、しかも暗騒音に埋もれて観測される場合を考察する。この場合、遮音システムの同定および出力応答の確率評価を行なうには、もともと確率は、時間率で定義されるので周波数域より時間経過での変動形態に直結結び付く。すなわち、公知の周波数分析に基づく従来の手法とは全く対照的に、時系列的システムのパラメータ同定問題として評価するほうが、合理的と思われる。閉じた空間での遮音システムに着目するとき、公知の Statistical Energy Analysis (SEA) 法にも支えられて、任意遮音システムはエネルギー変量に関して線形系となることから、このシステムを次のように線形離散表現する。



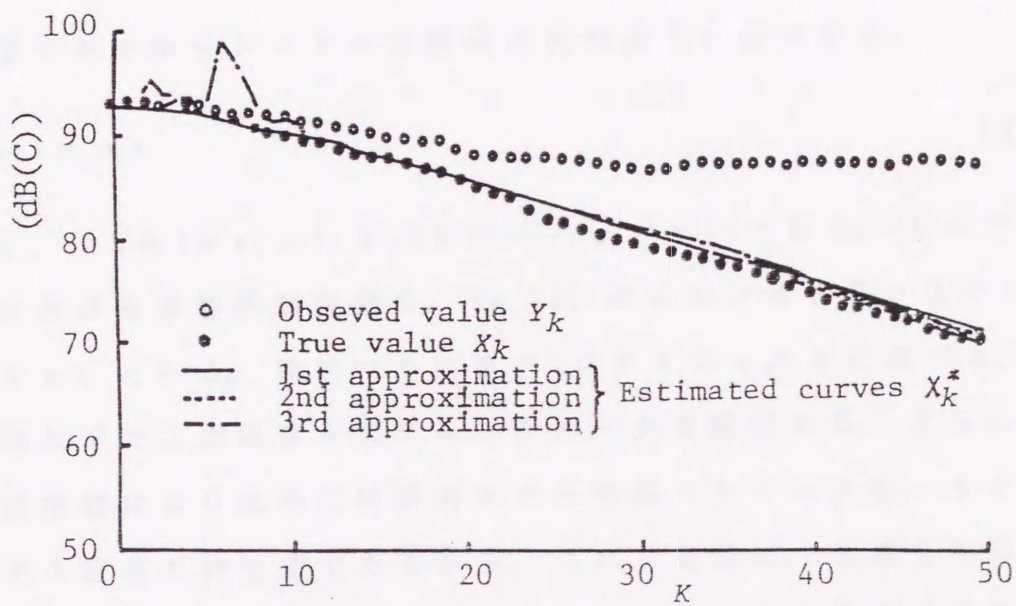


Fig.4.1 Estimated results of the reverberation curve based on the noisy observation.

$$y_k = \sum_{i=0}^s a_i(k) x_i(k) + v_k \quad (4.34)$$

ただし、 $x_i(k)$ 、 $y_k$  は時刻  $k$  において任意遮音システムへ入射する任意騒音入力およびこれに対する透過出力であり、 $x_i(k)$  の添字  $i$  はサンプリングでの  $k$  時点から  $i$  時点への過去を示す。また、 $v_k$  は暗騒音、 $a_i(k)$  ( $i = 0, 1, \dots, s$ ) は任意遮音システムパラメータであり、システム次数  $s$  は既知とする。推定対象の  $a_i(k)$  は本来一定であるからシステム方程式は次のように表される。

$$a_{k+1} = a_k \quad (4.35)$$

ただし、 $a_k \triangleq (a_0(k), a_1(k), \dots, a_s(k))$  である。よって一般理論における未知状態変量を、(4.35) 式における遮音システムパラメータ  $a_k$  とみる。前節での広義デジタルフィルタに基づき、暗騒音の混入下でこの遮音システムパラメータを推定する。さらに、この逐次推定により求めた時系列モデルの各パラメータは、もともとシステム固有の特性量であるから、これを基盤に、任意分布形状の実騒音入力が入力されたとき、その出力分布を（計算機上で）モデルシステムの出力データとして算出した後容易に予測できる。

実験は、大学内の音響実験室において、残響室—残響室に、既存の理論で評価が到底困難な次の2種類の遮音壁を設置して、この遮音システムに関する実験を行なった。(a) 斜め二重壁：互いに  $90^\circ$  の角度をもたせた二枚のアルミ板からなる中空二重壁。(b) サウンドブリッジのある二重壁：二枚のアルミ板の間に間柱を入れた二重壁（二枚のアルミ板の間隔は 50mm）。ただし、アルミ板はすべて面密度  $3.22 \text{ kg/m}^2$ 、厚さ  $1.2 \text{ mm}$  のものであり、試料取り付け面積は  $14.6 \text{ m}^2$ 、室容積は音源室  $50.2 \text{ m}^3$ 、受音室  $24.6 \text{ m}^3$  である。

分布予測に用いる任意騒音入力としては、事前に市街地で実測したデータレコーダに記録しておいた道路交通騒音を有響室内で再生した。その入力エネルギーデータおよび受信室側の出力エネルギーデータを互いに同期をとりながら逐次撮取した（サンプリング間隔1秒、データ数1000個）。さらに、ノイズジェネレータから発生した白色雑音を入力として同様の実験を行なった。そして出力を改めて無響室内で再生し、暗騒音として別の白色雑音を加えて逐次観測を行なった（サンプリング間隔1秒、データ数1000個）。このとき、本手法の有効性を明確にするため、透過出力と平均レベルがほぼ等しくなるよう、あえて高レベルでの暗騒音状態を実現させた。さらに、暗騒音の統計情報を得るために、暗騒音のみのデータをあらかじめ採取しておいた（サンプリング間隔1秒、データ数1000個）。

本実験で採用した各遮音システムの次数はあらかじめ別途の考察で求めており、ここでは既知であるとした（ $s = 2$ ）[23]。

各遮音システムに対し、理論の部で述べた方法を適用することにより、システムパラメータの逐次推定を行なった。結果の一例として、サンドブリッジのある二重壁遮音システムに対し、その逐次推定状況を Fig. 4.2 に示す。いくつかの異なる初期値を採用したにもかかわらず、ほぼ同じ推定結果を得ている。

上述の逐次推定における結果の  $\hat{a}_i$  を用いるなら、暗騒音が存在しない場合の遮音システムはエネルギー変量での線形システムであること、そのシステムモデルの出力は、計算機上で

$$\hat{z}_k = \sum_{i=0}^2 \hat{a}_i x_{k-i} \quad (4.36)$$

により計算される。推定アルゴリズムにおける展開表現を第1近似まで採用して、逐次パラメータの推定をまず行なった。次いで、実

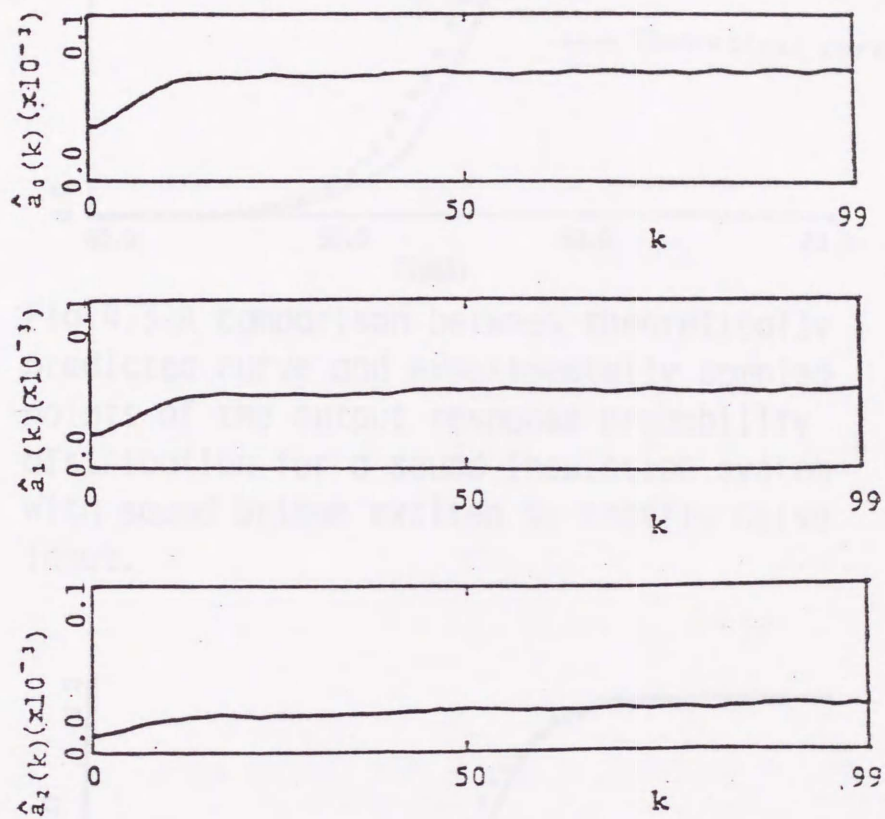


Fig.4.2 Estimated results for a system parameter  $\mathbf{a}(k)$  of a sound insulation system with sound bridge in the case of adopting an initial estimate  $\hat{\mathbf{a}}(0) = (0.0003, 0.0002, 0.0001)^T$ .

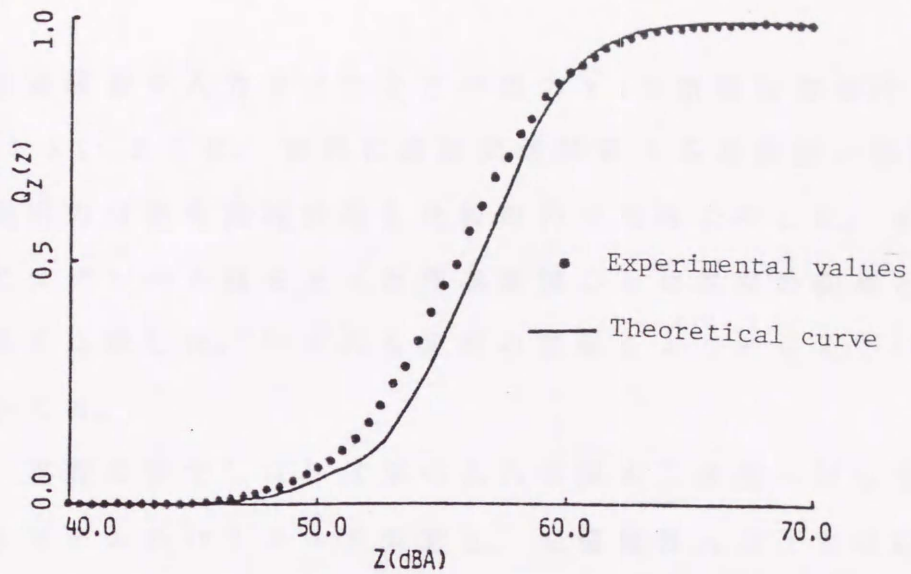


Fig 4.3 A comparison between theoretically predicted curve and experimentally sampled points of the output response probability distribution for a sound insulation system with sound bridge excited by traffic noise input.

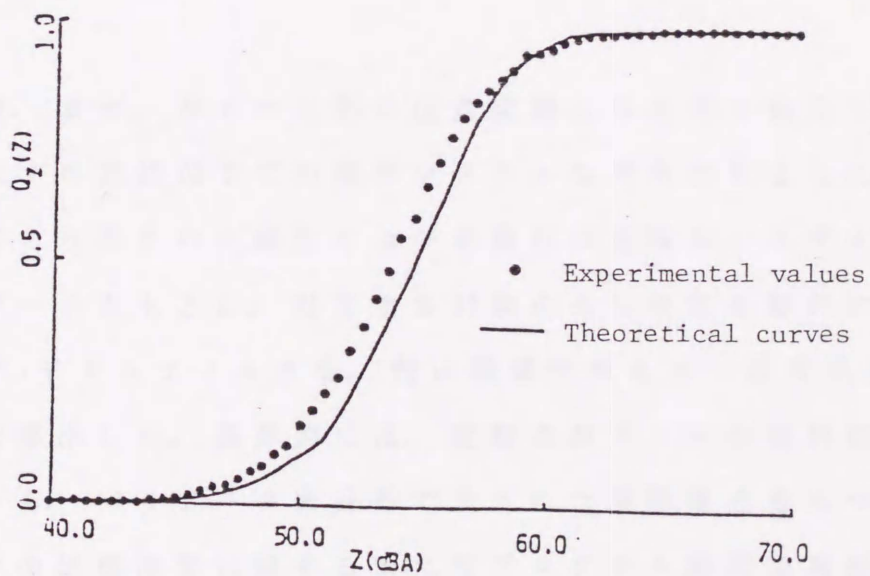


Fig 4.4 A comparison between theoretically predicted curve and experimentally sampled points of the output probability distribution for nonparallel double wall insulation system excited by traffic noise input.

際の道路交通騒音を入力させたときの出力 $\hat{z}_k$ の累積分布を行なった ( Fig.4.3 )。さらに、実際に道路交通騒音を各遮音壁に印加したときの実測出力分布を理論分布と比較の形で同時に示した。すなわち、横軸にはデシベル値をとった各遮音壁ごとに累積の実測と理論的予測結果を比較した。いずれも実測の変動をよくとらえていることがうかがえる。

さらに、実際の室でしばしば用いられる斜め二重壁に対しても同様の遮音システムのパラメータ同定と、交通騒音入力下での応答分布予測 ( 暗騒音が存在しない場合 ) を行なった ( Fig.4.4 )。全くの非ガウス分布特性を示す非ガンマ形のエネルギーシステムに対し、しかも、暗騒音の混入下にもかかわらず、理論はよく実験値を説明しており、本手法の有効性の一端が示されている。

#### 4.4 結言

本章では、まず、非ガウス形の任意変動分布を示す独立した外来騒音の混入する実状況下での確率システムを考察対象とした。そして、これにより汚された線形および非線形の実確率システムにける逐次計測データをもとに、潜在する対象の未知状態を動的に推定できる広義デジタルフィルタを、特に階層性をもつ一般形式のプログラム論理で導出した。具体的には、変動の非ガンマ分布特性に対処でき、しかも、パラメータ微分形で表された階層構造をもつデジタルフィルタの状態推定に関する新たなプログラム論理を具体的に提案した。

最後に、本手法のもつ実際的有効性の一端を検証するため、室内音響分野の実問題に着目した。すなわち、暗騒音が混入する実状況下で残響曲線を推定したり、遮音システムの音響パラメータを推定

したりする実際的問題に本手法を適用して、良好な推定結果を得た。

本手法は、推定アルゴリズム形式に、逐次パラメータ微分形の系統的操作を導入した階層構造をもつ広義デジタルフィルタの設定としては、まだ研究の初期的段階にある。従って、本推定手法を多くの実際的な他の騒音、振動現象へ適用したり、状態推定の一般性に基づくアルゴリズムの複雑さを実用的に簡易化したり、 $L_{eq}$  や  $L_x$  など騒音・振動の実際的評価量に関する推定問題へと発展させるなど、今後の課題がまだ多く残されている。

本書是作者多年從事教學工作的經驗總結，也是作者多年從事教學工作的經驗總結。本書是作者多年從事教學工作的經驗總結，也是作者多年從事教學工作的經驗總結。

本書是作者多年從事教學工作的經驗總結，也是作者多年從事教學工作的經驗總結。本書是作者多年從事教學工作的經驗總結，也是作者多年從事教學工作的經驗總結。

### 社 論

本書是作者多年從事教學工作的經驗總結，也是作者多年從事教學工作的經驗總結。本書是作者多年從事教學工作的經驗總結，也是作者多年從事教學工作的經驗總結。



本研究では、任意分布形状の暗騒音混入下において、実音響システムの逐次計測データに基づき、静的および動的な立場から情報欠損の少ない一状態推定法を考察した。各章において得られた成果を要約すると次のようになる。

第一部では、任意の確率分布形状を許す説明変数をもとに目的変数のもつ任意のゆらぎ分布全体が予測できる新たな一回帰分析法を提案した。そして、暗騒音の混入下で、新たに提案した回帰の未知パラメータを、三つの誤差評価規範に従って同定した。

第1章では、入力が複雑な確率変動を示し、しかも、音環境システムのメカニズムが公知の法則的關係で直接説明されにくい場合に着目した。そして、実現象のゆらぎが示す複雑さに対し、あらかじめ情報欠損を招くことのないよう、分布予測に整合した新たな回帰分析法を見出した。すなわち、できるだけ任意の入力状態と任意の実システムに広く適用できるように、その回帰モデルには級数展開型の階層表現を計画的に導入した。特に、各変量の振幅変動が正負両領域にわたる場合に対し統計的エルミート展開型の回帰モデルを、その変動が非負の領域内にのみ留まる場合には統計的ラゲール展開型の回帰モデルを提案した。最後に、2変量間における線形、非線形の各種相関情報のみを、浮き彫りに反映できる新たな回帰モデルを提案した。そして、本手法の一スペシャルケースに公知の標準路線における最小自乗誤差評価に基づく回帰分析法が含まれ得ることも併せ示した。さらに、室内外の実遮音システムにおいて、本手法を適用し、実験的にもその実際的有効性を確認した。

第2章では、実際的狀況下で混入する任意変動分布の暗騒音混入下で音環境システムの回帰パラメータを具体的に同定した。ここで、以下の三つの誤差評価規範に従って、同定法を提案した。まず、任意暗騒音混入下において、入力と出力間の線形・非線形の各種相關情報に基づくパラメータ同定法を考察した。つぎに、Minimum エントロピー評価に基づく同定法を提案した。さらに、公知の最小自乗型誤差規範を襲用できる方向へ新たに変形した一同定法も提案した。最後に、室内外および室内音響システムにおいて、暗騒音の混入下で、本手法を適用し、その実際的有効性を実験的にも確認した。

第二部では、独立した任意変動分布の外来雑音が混入することにより汚された実確率システムに着目し、その逐次観測データの内から、潜在する対象の未知信号波形を動的に推定できる広義デジタルフィルタのプログラム論理を導出した。

第3章では、非ガウスの任意変動分布を示す独立した外来雑音が混入する実狀況下での確率システムに着目した。そしてこの外来雑音により汚された実確率システムに対する未知信号を動的に推定してゆく広義デジタルフィルタのプログラム論理を導出した。すなわち、公知のカルマンフィルタを展開初項の基幹に採って、パラメータ微分の逐次形式で表された階層構造をもつ状態推定アルゴリズムの一般化表現を新たに導出した。もちろん、従来のカルマンフィルタも一スペシャルケースに含んでいる。さらに、室内外音響分野の実問題へ本手法を適用して、その実際的有効性を確認した。

第4章では、騒音環境を一旦エネルギーシステムとして把握し、任意の分布形状を示す暗騒音の混入下で、未知騒音のみを動的に推

定する新たな手法を設定した。ここでは、特にエネルギーシステムに整合した広義デジタルフィルタの一設計理論を、現象の非ガンマ性に沿い、階層的に逐次処理できる一般化形態で導出した。すなわち、変動の非ガンマ分布特性に対処でき、しかも、パラメータ微分形で表された階層構造をもつデジタルフィルタの状態推定に関する新たなプログラム論理を提案した。さらに、室内音響分野の実問題に着目し、これらの実際的狀況に整合した新たな信号処理法を理論ならびに実験的に考察した。

以上が本研究で得られた成果である。いうまでもなく、本手法はまだ研究の初期段階にある。従って、問題点として多くの将来課題を残している。すなわち、(a) 実用化のため、高次相関を反映した高次展開項を、いかに合理的または実用的に打ち切るのか、理論的見地のみならず、実験的信頼度や現実との妥協も配慮してその各種対策法を見出すこと、(b) 推定・予測の一般化から生まれたプログラム論理の複雑さをさまざまな近似を通して実用的に簡易化してゆくこと、(c) 各々の工学的要求や実現象の特殊性に応じたさまざまな近似化を施して、本手法をさらに実用的な形にもってゆくこと、などがあげられる。

特に、第1章、第2章では、実観測のデジタル化に基づくコンピュータ処理に整合させた形態で、この回帰分析の試みを拡張する課題が残されている。

また、第3、4章では、パラメータ微分型の機械的階層性に整合させて、マイコン利用に基づく推定手法のファームウェア化をはかる課題が残されている。

その他、各章でまだまだ多くの課題が残されているが、本論文で提示した任意暗騒音混入下のシステムに対する基礎的状态推定法は

環境騒音に対する合理的な評価法に役立つものと考えられる。また、本研究を基礎としてより有効な状態推定法が確立されることを期待する。

## 序

本書之編纂，其目的在於使讀者能迅速而正確地瞭解我國之經濟發展，並使讀者能對我國之經濟發展有正確之認識。本書之編纂，其目的在於使讀者能迅速而正確地瞭解我國之經濟發展，並使讀者能對我國之經濟發展有正確之認識。

本書之編纂，其目的在於使讀者能迅速而正確地瞭解我國之經濟發展，並使讀者能對我國之經濟發展有正確之認識。本書之編纂，其目的在於使讀者能迅速而正確地瞭解我國之經濟發展，並使讀者能對我國之經濟發展有正確之認識。

本書之編纂，其目的在於使讀者能迅速而正確地瞭解我國之經濟發展，並使讀者能對我國之經濟發展有正確之認識。本書之編纂，其目的在於使讀者能迅速而正確地瞭解我國之經濟發展，並使讀者能對我國之經濟發展有正確之認識。

## 謝 辭

以上之序言，係由本書之編纂者所撰。本書之編纂，其目的在於使讀者能迅速而正確地瞭解我國之經濟發展，並使讀者能對我國之經濟發展有正確之認識。

## 謝 辞

本研究が、筆者が広島大学工学部第二類電子制御研究室において太田光雄教授の下で行ったものであり、この間同教授には多大の御指導、ご鞭撻を賜りました。心から感謝を致します。

また、本論文をまとめるにあたり、同研究室の畠山一達助教授、生田顕助手には数多くの御討論、御助言をいただきました。その他、修道大学工学部広光清次郎教授、本学教育学部家政学科岩重博文助教授、大島商船高等専門学校山田寛助教授、近畿大学工学部宮田繁春助手には日頃有益なる御助言をいただきました。

本研究を行なうに際し、新述隆弘（現日本電信電話（株））、平原富士則（現日本電信電話（株））、村田祥二（現松下電気（株））の諸氏の御協力をいただきました。

以上の方々に対し、ここに心より感謝の意を表するとともに、厚くお礼申し上げます。



## 参考文献

- 1) N. R. ドレーパー, H. スミス (中村慶一訳): “応用回帰分析”, pp. 1-38, 森北出版 (1978).
- 2) F. S. Acton: “Analysis of Straight-Line Data”, John Wiley and Sons, New York (1959).
- 3) 竹内 啓: “数理統計学”, pp. 305-310, 東洋経済 (1973).
- 4) 奥野忠一, 久米 均, 芳賀敏朗, 芳沢 正: “多変量解析法”, pp. 1-24, 日科技連 (1977).
- 5) 古田修一, 堀 敦雄, 津田豊彦, 大宮正昭: “回帰分析による交通騒音の推定”, 音講論集, pp. 181-182 (1973).
- 6) 田村明弘, 後藤 滋: “重相関法による道路交通騒音の予測”, 音講論集, pp. 519-520 (1973).
- 7) 川畑清忠, 柚木謙一, 片側田勝海: “鹿児島市内道路交通騒音の重相関法による予測”, 音講論集, pp. 65-66 (1976).
- 8) 添田 喬, 太田光雄, 大松 繁: “数理統計の基礎と応用”, p. 30, 日新出版 (1980).
- 9) 宮沢光一: “近代数理統計学通論”, p. 11, pp. 51-53, 共立出版 (1954).



- 10) 伊藤 孝: “多変量解析の理論”, pp.12-18, 培風館 (1970).
- 11) M.Ohta and T.Koizumi: “General state-statistical treatment of the response of a non-linear input”, IEEE Trans. Inf. Theory, IT-14, pp.595-598(1968).
- 12) M.Ohta and M.Nakagami: “On the energy distribution on the brownian motion”, Pro. 7th Japan National Congress for Appl. Mech. pp.317-322 (1957).
- 13) 吉田 (他編): “応用数学便覧”, pp.397-399, 丸善 (1962).
- 14) 前川純一: “建築音響”, pp.397-399, 共立出版.
- 15) I. ガットマン, S. S ウイルクス (石井恵一, 堀 素夫共訳): “統計概論”, pp.92-94, 培風館 (1968).
- 16) S.Arimoto: “Modern Information Theory”, Koronasha, Tokyo (1978).
- 17) H.Robbins and S.Monro: “A stochastic approximation method”, Ann. Math. Statist., 22, 400-407 (1951).
- 18) R.E.Kalman: “A new approach to linear filtering and prediction problems”, Trans. ASME, J.Basic Eng., 82, pp.35-45 (1960).

- 19) 谷萩隆嗣: “ディジタル信号処理の理論 2 フィルタ・通信・画像”, pp.1-15, コロナ社 (1985).
- 20) 犬井鉄郎: “特殊関数”, p.41, 岩波書店 (1958).
- 21) 太田, 生田: “環境騒音の多変量状態に関する統計学的一般化の基礎理論と実験”, 音響誌, 39, 9, pp.592-603 (1983).
- 22) M. J. Crocker and A. J. Price: “Sound transmission using statistical energy analysis”, J. Sound Vib., 9, pp.469-486 (1969).
- 23) 太田, 山田: “任意遮音システムの出カエネルギー分布に関する最小自乗法からの簡易的予測法 — 白色打診入力下の時系列的同定と任意騒音入力下の分布予測”, 音響誌, 39, 11, pp.756-765 (1983).
- 24) 太田, 畠山, 高桑: “暗騒音下における対象騒音推定の一動的な手法 — カルマンフィルタの一改善と交通騒音への適用”, 音響誌, 38, 1, pp.2-12 (1982).
- 25) M. Ohta & H. Yamada: “New methodological trials of dynamic state estimation for the noise and vibration environmental system — establishment of general theory and its application to urban noise problems” ACUSTICA, 55.4, pp199-212 (1984).

- 26) 太田: “騒音・振動環境システムにおける種々の動的状態推定法 — I — 方法論的姿勢と一般理論の設定 — ”, システムと制御, 23, 10, pp.27-33 (1979).
- 27) 太田: “騒音・振動環境システムにおける種々の動的状態推定法 — II — エネルギーシステムの状態状態推定理論と住環境騒音への適用”, システムと制御, 23, 12, pp.26-33 (1979).
- 28) 太田, 山口: “ディジタルシュミレーションによる整流形任意非線形要素の任意不規則応答解析”, 制御工学, 14, 3, pp.156-165 (1970).
- 29) S.Goldman: “Information Theory”, Prentice-Hall, Inc. New-York (1953).
- 30) 河田: “応用数学概論II”, 岩波書店 (1952).
- 31) 太田: “任意非線形整流素子の一般的な不規則応答解析”, 応用物理学会誌, 33, 9, pp.632-641 (1964).



掲載論文リスト

- 1) 太田光雄, 桑原信也, 張兵, “二重壁遮音システムの特性改善に対する機能的—評価法——SEA法と最小2乗規範に基づく同定と分布予測——  
日本音響学会誌 42巻1号, pp.16-23(1986).
- 2) 太田光雄, 藤田幸史, 張兵, “雑音加算の任意確率入力に対する任意線形音響・振動系の確率応答と無雑音入力下の応答分布予測”,  
日本音響学会誌 42(1), pp.24-35(1986).
- 3) A. Ikuta, M. Ohta, and B. Chang, “A System Theory on State Estimation Considering the Working Ratio under the Existence of Observation Noise and Its Application to an Acoustical Environment”,  
Proceedings of the 25th SICE Annual Conference  
International Sessions pp.927-930 (Tokyo, July 1986).
- 4) 太田光雄, 藤田幸史, 張兵, “2種騒音間における回帰分析と分布合成の関係——dB線形化とLx利用の簡易評価——”,  
日本音響学会誌 43巻4号, pp.237-246(1987).
- 5) M. Ohta, Y. Fujita, N. Nakasako and B. Chang. “A Stochastic Theory on the Background Noise Correction Considered as an Equivalent Nonlinear Feedback System with Digitized Level Observations and Its Experiments”,

- 6) B. Chang, M. Ohta and K. Hatakeyama, "A Prediction of output Response Probability Using a Wide Sense Digital Filter in a Hierarchical Form for the Indoor and Outdoor Sound Environment",  
a) Proceedings of INTER-NOISE 87 (International Conference on Noise Control Engineering)  
pp. 1495-1498 (Beijing, Sep. 1987).  
b) Proceedings of SITA' 87 (10th Symposium on Information Theory and Its Applications)  
pp. 897-902 (Enoshima Island, Japan, Nov. 1987).
- 7) 太田光雄, 畠山一達, 生田顕, 張兵, "エネルギー確率システムの状態推定におけるデジタル・フィルタの階層化と音環境"  
電気学会論文誌, Vol. 108-C, No. 1, pp. 39-46 (1988).
- 8) 太田光雄, 張兵, "回帰分析に基づくゆらぎ分布情報の新たな一予測法と音環境への適用",  
広島大学工学部研究報告 37巻1号, pp. 1-8 (1988).
- 9) 太田光雄, 張兵, 高木尚光 "分布予測に整合した情報欠損を招かぬ一回帰分析法と音環境への適用 (連続レベル値観測の場合)",  
電子情報通信学会論文誌 A Vol. J72-A, No. 4,  
pp. 718-727 (1989).

- 1 0 ) 太田光雄, 高木尚光, 張兵, “確率情報に基づく暗騒音混入下のシステム同定と応答分布予測 —— カップルド・ルーム —— ” (技術報告)  
日本音響学会誌 45 卷 5 号, pp.391-394(1989).
- 1 1 ) M.Ohta, B.Chang and Y.Xiao, “Regression Analysis with Less Information Loss under the Existence of Background Noise”,  
THE TRANSACTIONS OF THE IEICE Vol. E72, No.5,  
pp.531-538(1989).
- 1 2 ) B.Chang, M.Ohta and A.Ikuta, “A Regression Analysis Matched to the Prediction of Response Probability Distribution Under the Existence of Additional Noise and Its Application to Acoustic Environment”,  
a) Proceedings of the 28th SICE Annual Conference  
pp.1279-1282 (Matsuyama, July 1989).  
b) Proceedings of the First China-Japan International Symposium on Instrumentation, Measurement and Automatic Control pp.415-423 (Beijing, July 1989)  
([A]の8)と理論のみ重複).
- 1 3 ) S.Miyata, M.Ohta and B.Chang, “A Computer Among Various Kinds of Fluctuation Probability Expressions Based on the dB Scale Measurement of Noise Environment Surrounding a Road Traffic and an Experiment”  
Proceeding of the First China-Japan International

Symposium on Instrumentation, Measurement and  
Automatic Control pp.537-545 (Beijing, July 1989).



参考論文

- 1 ) B. Chang, M. Ohta and K. Hatakeyama, "A Prediction of Output Response Probability Using a Wide Sense Digital Filter in a Hierarchical Form for the Indoor and Outdoor Sound Environment",
  - a) Proceedings of INTER-NOISE 87 (International Conference on Noise Control Engineering) pp. 1495-1498 (Beijing, Sep. 1987).
  - b) Proceedings of SITA' 87 (10th Symposium on Information Theory and Its Applications) pp. 897-902 (Enoshima Island, Japan, Nov. 1987).
  
- 2 ) 太田光雄, 畠山一達, 生田顕, 張兵, "エネルギー確率システムの状態推定におけるデジタル・フィルタの階層化と音環境"  
電気学会論文誌, Vol. 108-C, No. 1, pp. 39-46 (1988).
  
- 3 ) 太田光雄, 張兵, 高木尚光 "分布予測に整合した情報欠損を招かぬ一回帰分析法と音環境への適用(連続レベル値観測の場合)",  
電子情報通信学会論文誌 A Vol. J72-A, No. 4,  
pp. 718-727 (1989).
  
- 4 ) M. Ohta, B. Chang and Y. Xiao, "Regression Analysis with Less Information Loss under the Existence of Background Noise",  
THE TRANSACTIONS OF THE IEICE Vol. E72, No. 5,

pp. 531-538 (1989).

- 5) B. Chang, M. Ohta and A. Ikuta, "A Regression Analysis Matched to the Prediction of Response Probability Distribution Under the Existence of Additional Noise and Its Application to Acoustic Environment",
- a) Proceedings of the 28th SICE Annual Conference  
pp. 1279-1282 (Matsuyama, July 1989).
- b) Proceedings of the First China-Japan International Symposium on Instrumentation, Measurement and Automatic Control pp. 415-423 (Beijing, July 1989)
- ([A]の8)と理論のみ重複).