

論理的な図形認識を促す算数・数学科カリキュラム開発 (2)

—小学校第4学年における図形の性質化を促す実践的研究—

川崎 正盛 村上 良太 妹尾 進一 植田 敦三
松浦 武人
(研究協力者) 木村 恵子 高淵千香子
山中 法子 内田 武瑠

1. はじめに

わが国では、小学校算数科における図形の学習は図形の中に空間的に同時存在している性質を直観的・操作的な活動をとおして発見することが主題となるのに対して、中学校数学科における図形の学習は順序関係が埋め込まれた性質間の関係としての命題の真偽性を論証をとおして正当化することが主題となる。これらの両者の学習指導上の文脈の違いが、中学校数学科における論証理解の困難性に顕現している(岡崎・岩崎, 2003)。

論証理解の要件として、少なくとも、図形の性質および性質間の順序関係の意識化・対象化をあげることができるが、これらは単に中学校数学科における課題であるというだけでなく、小学校算数科における学習指導上の課題でもある。

本研究の最終的な目的は、岡崎・岩崎(2003)が提起する「算数から数学への移行」を促す学習指導の枠組みに基づき、義務教育9か年の図形領域のカリキュラムを開発することである。筆者ら(村上ほか, 2010)はすでに、「移行前期」における性質間の関係性への意識化を促す教材として「作図」が機能するかどうかを小学校5年の実践をとおして検討し、「移行前期」教材としての「作図」の有効性を例証する研究を行った。

本稿の目的は、小学校算数科における図形の性質の意識化を促すための小学校4年の図形指導の実際を検討することである。筆者らは本研究を性質間の関係性の意識化を巡って展開される「移行前期」としての図形指導を補完するものとして、また、小学校6か年の図形指導のカリキュラムを構想する上での基礎的研究

として位置づけている。

2. 図形の性質の意識化

本研究における図形の性質の意識化が促された児童の図形の捉え方とは、以下の2つの機能を含んだ思考ができることが、「図形の性質の意識化」がなされた理解の状態であるとして捉えている(植田ほか, 1984)。

- (i) 図形が性質の複合体としての記号として機能すること(シンボルとしての図形)
- (ii) さらに、ある特殊な1つの性質がすでに知っている性質の複合体としてのシンボルである図形に対するシグナルとして機能すること(シグナルとしての性質)

具体的に言えば、ある図形を提示されればその図形の性質を列挙することができるとともに、ある特殊な性質について言及すると、その性質を持っている図形のほかの性質を予想したり考えたりすることができるような図形認識を、図形の性質の意識化と捉えている。

3. 小学校及び中学校における図形指導のカリキュラム(案)

本稿では、暫定的ではあるが、接続という視点から小学校及び中学校における図形指導のカリキュラム(案)を表1のように設定した。もちろん、本案は今後の研究をとおして精査し修正を加えていかなければならないことは言うまでもない。

本研究グループは、小学校における移行前期と中学校における移行後期との間のスムーズな接続を図るた

Masamori Kawasaki, Ryouta Murakami, Shinichi Senoo, Atsumi Ueda, Taketo Matsuura, Keiko Kimura, Chikako Takabuchi, Noriko Yamanaka, Takeru Uchida: Improvement of cooperative creativity through learning in elective subject (Arithmetic/Mathematics) (2) —A practical research promoting characterization of figure in the fourth grade—

表1 小中9か年の図形指導のカリキュラム構想

学年	移行前期への接続			移行前期	移行後期	論証
	幼稚園+小学校1年	小学校2年	小学校3, 4年	小学校5, 6年	中学校1年	中学校2, 3年
必要な視点	形遊び, 造形 (就学前と1年との接続) ・図形に関する経験を豊かにする(描画経験) ・操作活動による経験的, 直観的な認識	性質 (構成要素および要素の関係) ・図形の基礎的な構成要素および性質の理解 ・操作活動による経験的, 直観的な認識	図形を性質として見る(性質の集合) ・操作活動による経験的, 直観的な認識 ・図形の性質の理解 ・図形の性質を使っての作図の弁別 ・四角形相互の関係	性質間の関係の意識化 ・四角形相互の関係 ・図形の性質を使っての作図の弁別	論理的に考察し表現する能力を培う ・図形の性質の顕在化 ・図形の性質間の関係の理解 ・数学的な推論の理解と論理的に表現すること	論理的に考察し表現する能力を育て, 伸ばす ・図形の性質間の理解と論理的に表現すること ・図形の性質間の関係の命題化 ・数学的な推論の理解と論理的に表現すること
方法	・操作活動を充実させ, 色板や三角, 四角, 丸などで, 形遊び, 造形遊びを行う	・なぜそれがその形になるのかを基礎的な構成要素に着目して説明していく活動 ・共通点と相違点を見つけていく活動	・図形の性質からその図形を分析したり, 考察したりする活動 ・図形の性質を明確にする活動 ・性質の共通点と相違点を見つける活動 ・図形を動的に見せる活動	・図形の性質からその図形を分析したり, 考察したりする活動 ・性質の共通点と相違点を見つける活動 ・図形の性質間の関連づけをする活動 ・論理的に説明する活動 ・経験的, 直観的な認識だけではなく, 一般化をする経験 ・図形を動的に見せる活動	・図形の対称性や図形を決定する要素に着目して自分で作図の手順を考え, その手順を順序よく説明する活動 ・作図した図形が条件に適するものか否かを振り返る活動 ・図形の性質間の関係の理解 ・図形の性質の証明を読んで新たな性質を見いだす活動 ・数学的な表現を用いて他者に説明し伝え合う活動	・図形の性質間の命題化 ・図形の性質の証明を読んで新たな性質を見いだす活動 ・数学的な表現を用いて他者に説明し伝え合う活動

め, 小学校段階を「移行前期への接続期」, 「移行前期」と大きく2つに区分し, 表1のように小中9か年の図形指導のカリキュラムを構想してみた。その際, 同じ教材を使っても移行前期と移行後期で扱い方を変え, 移行後期では, 他の図形に応用できるような活動を取り入れながら図形の定義化に焦点を当てる。移行前期ではその接続として, 図形の性質や性質間の関係への意識化を促す学習指導を積極的に位置づけることにより, 児童の図形の見方を高めることを重視する。これらの視点を加味して授業を設計すると, 以下の点において有効ではないかと考える。

- (ア) 図形領域における児童たちの知識と理解がより深まる。
- (イ) 移行後期に向けてスムーズに連携でき, 押し上げにもつながる。

3. 1 実験授業

単元最後の実験授業の目標を「既習の四角形を作ることとおして, 図形の性質を活用しながら性質の理解と意識化を深めることができる」と設定した。本実験授業は, サイコロを振り出た目に従って方眼上に無作為に2点を取り, その後, 自分で2点を選びいろいろな四角形を作り, できあがった四角形がなぜその形になるのかを説明するという活動を中心として展開した。

3. 2 評価材

本単元では, 前項で示したように, 四角形の対角線の性質を意識させる竹ひご, 四角形が性質の集合であ

ることを意識させるクイズ, 四角形の包摂関係を動的かつ視覚的に捉えさせる教具等を用いた活動を踏まえ, 既習の全ての四角形をそれらの性質を意識しながら作図する活動を行った。これらの一連の活動は, いずれも, 「図形の性質の意識化」をめざしたものである。上述したように, 筆者らは, 「図形の性質の意識化」を「ある図形を見れば, その図形の性質を列挙することができる」とともに, ある特殊な性質について言及すると, その性質を持っている図形のほかの性質を予想したり考えたりすることができるような図形認識」と捉えている。本単元の学習目標(望まれている結果)を児童がどの程度達成したのか, つまり, 「図形の性質の意識化」がどの程度なされたかを具体的に示すための評価材(承認できる証拠)として, 複数の四角形の中から特定の四角形を選択させるとともに選択の根拠を記述させるパフォーマンス課題を設定した。児童が記述した選択の根拠をループリックに基づき評価することで, 「図形の性質の意識化」の程度を評価することができると考えたからである。ここでは, ひし形を選択させるパフォーマンス課題と, その評価規準およびループリックを示す。

3. 2. 1 評価規準

評価規準は「図形の性質に基づいて, 図形を選択するとともに選択の根拠を説明することができる。」とした。表2のループリックでは, 基準Ⅳ以上の段階で評価規準を達成したものと見なす。基準Ⅳは, その記述語およびパフォーマンス事例が示すように, 選択を求められた図形(ひし形)の性質をあげ, それを根拠

表2 ルーブリック

評価基準	パフォーマンス事例
V ひし形の多様な性質に基づき、図形を選択するとともに選択の根拠を説明することができる。さらに、ひし形の性質と関連づけて、その他の図形の性質も捉えている。	・ひし形は (い) と (え)。理由は、4本の辺の長さが等しいし、対角線が、垂直に交わっていて、交わった点で2等分されているから。(あ) と (う) は、向かい合う辺の長さは等しいけれど、4本とも長さが等しくはないから。
IV ひし形の性質に基づいて、図形を選択するとともに選択の根拠を説明することができる。	・ひし形は (い) と (え)。理由は、向かい合った 2組の辺が平行で、全ての辺の長さが等しいから。 ・全ての辺の長さが等しいから。 ・対角線が垂直に交わって、それぞれ2等分されているから。
III ひし形の性質に基づいて図形を選択しようとしているが、図形を一部のみしか選択できていない。または、他の図形にも当てはまる性質を根拠としている。	・ひし形は (い)。理由は、4つの辺の長さが等しいから。 ・ひし形は (い)。理由は、対角線が垂直に交わっているから。
II ひし形 (またはその一部) を選択することはできているが、選択の根拠の説明が性質に基づくものではなく、感覚的である。	・ひし形は (い) だけ。きれいなダイヤモンドみたいな形をしているから。(え) は横に長すぎるから違うと思う。
I ひし形を選択することができておらず、根拠も感覚的である。	・(あ) だと思う。理由はよく分かりません。

として正確に選択することができている段階である。さらに基準Vにおいては、選択を求められた図形の性質と関連づけて他の図形の性質をも考えることができている段階である。これらを「図形の性質の意識化」がなされた状態を示すものとした。I～IIIはいずれも「図形の性質の意識化」に到っていない状態を示すものとした。

3. 2. 2 ルーブリック

台形、平行四辺形に関しても、同様のパフォーマンス課題、評価規準、ルーブリックを設定した。これらの評価材は、いずれも、本単元における「図形の性質の意識化」を促すための一連の学習活動の評価材として設定したものである。

4. 実験授業の実際と授業評価

4. 1 実験授業の実際

4. 1. 1 2点を1辺として見る(辺)→対角線として見る

児童たちが自力解決で四角形を見つけていく中で、見つけられなかった四角形に視点をしぼり、全体交流を行った。初めに出てきたのは、ひし形が見つけられなかったという意見だった。そこでひし形を見つけれなかった児童の考えを取り上げ、決定した2点をどのように見ていけばひし形が見つかるのかを交流していった。

T : できなかったのを教えてください。
何が皆が1番できなかった図形なのかを聞くよ。
正方形、長方形、平行四辺形、台形、ひし形。他

の4つは見つかったけど、ひし形だけ見つからなかった人？

S 7 : 他のは見つかったけど、ひし形だけ見つからなかった。

T : それでは、それを皆で考えていきましょう。S 7さんは、初めの2点はどこになったのかな？

S 7 : 2-2, 2-3です。

S 8 : できるよ。簡単だと思うよ。

T : 2つの点が近いのは、難しいよね。これでひし形できるよって人いる？

S 9 : はい。

T : それじゃあS 9さん、1つだけ点をうってくれる？

S 9 : ここ…どうですか？(図1)

T : さあみんなS 9さんの頭の中を読んで…。もう1つの点、どこにうつんだと思う？ ちょっと隣の人と話してみて。

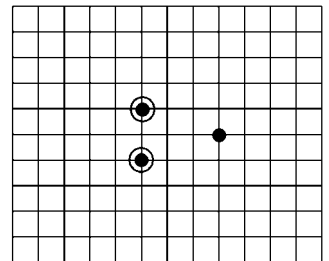


図1 初めにうった2点と1つだけうった点

任意の点2点のうち、1点だけ印をつけ、もう1点をどこにうつのかを全体に問うた。そうすることにより初めの2点を辺として見ていた児童たちから、「あっ」という声があがった。そこで、辺として見るだけでなく、対角線として見ることを全体で共有するため、前にあがったS 9児のもう1点をどこにうつのかを隣の人と交流し確認させた。

隣同士で確認をさせた後、1人の児童を前に出させて最後の1点をうたせた。その後、なぜひし形だと思うかを問いかけると児童たちから以下のような意見が出てきた。

T : S 9さんの代わりにやってください。

T : S 10さん。

S 10: どうですか？

S 全: いいです。

T : これひし形？ なんで？

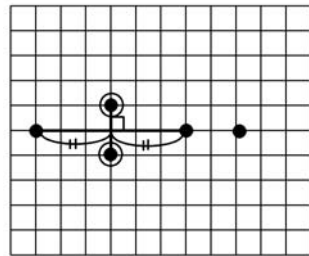


図2 児童がひし形の説明に使った対角線

S 11: だって…

T : 何か言おうとした。だって…？ 続き言ってみて。

S 11: その点とその点を結んだら…

T : 結んでみようか。なんでこれがひし形？ 説明して。だって…の続き言ってみようか。

S 11: こことこの点を結ぶとこの線と垂直に交わるからひし形だと思います。(図2)

T : 見える？ 今引いた線、なんて言ったけ？

S 全: 対角線。

T : 対角線がどうなってるの？

S 全: 垂直に交わっている。

児童たちは、辺としてみていたS 7児の捉え方と比較しながら、初めの2点を対角線として見るという新しい視点を見いだした。また、ひし形の理由をひし形の性質である「対角線が垂直に交わる」という既習の知識を用いて説明を行った。

T : なるほど、じゃあ、四角形を見つけるポイントを皆で考えていこう。

S 11さんは、ここを1つの線として見てたんだよね(辺)。1つはそれでいいね。1つの辺として見る。もう1つは対角線としてみる。

まだひし形できない？

S 12: こことここでも…。どうですか？

S 全: いいです。

T : これひし形？ なんで？

S 12: さっきS 11さんがやったように、頂点を結びます。ひし形っていうのは、全ての辺の長さが等しくて、対角線が垂直に交わっていて、対角線で交わった点が頂点まで二等分されているので、これもひし形だと思います。

最後にひし形の性質を用いて、なぜそれがひし形になるのかを説明させていった。すると、同じ性質からひし形が数種類見つかることに気付いていった。

4. 1. 2 四角形を動的な視点で見えていく過程とその応用

対角線で考えることを理解させた上で、垂直に交わった対角線を延ばしていくと正方形が見つかるという、ひし形と正方形の共通の「対角線が垂直に交わる」という性質を使いながら、四角形を動的に見えていく過程を経験させた。

T : まだある？

S 全: まだまだある。

T : そう考えたらまだ見えてくるよね。

こことここは？
これちがうか？…。

S 全: 正方形だ(図3)

T : じゃあここは？

S 全: ひし形。

T : こことここは？

S 全: ひし形。

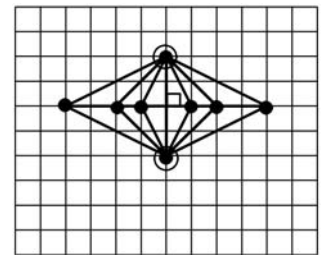


図3 ひし形と正方形を動的に見せた図

児童たちは、ひし形を見つけていく過程で正方形を見だし、同じ性質だということを確認した。また、動的な見方をする経験をつむことで他の四角形で共通の性質を使って見つけていくことができないかという、応用の考え方をさせるため、平行四辺形と長方形で考えさせた。

T : じゃあさっきS 7さんがやったやつ。今を使うと、長方形を見つけられなかった人のヒントになると思うよ。最初の点がここだったよね。これ1つの辺としてみるパターン。これ対角線で見たとしたら…。何か見える？

S 13: あっ長方形が見える。S 7さんがやったのと違う長方形。

T : 見えた人？ S 14さん。何が見えた？

S 14: 長方形。

S 14: ここに点をうったら、長方形。どうですか？

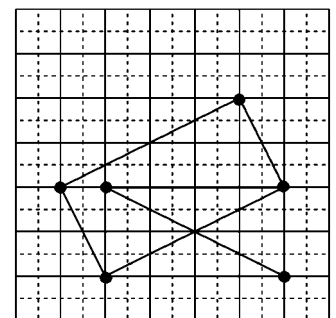


図4 長方形の2つのパターン

S全：いいです。

S15：1，2，3，4行って，1，2これとこれ長さが一緒（対角線）。

S15：なぜこれが長方形かと言うと，対角線の長さが二等分されていて，対角線の長さが全て一緒だから長方形。

T：これと同じような考え方で他の四角形が見えない？

ここまでにして，今自分がやったやり方で見つけられなかった四角形に挑戦してみよう。

ここまでの学習の中で，児童は，四角形の性質に目を向けて考えることができるようになってきている。見つけられなかった四角形を全体交流の中で確認したことを使いながら，再度自分の問題と向き合った。すると児童の中に，正方形と長方形，長方形と台形，正方形と台形なども，それぞれの性質の共通点と相違点を考えながら見つけていく姿が見られた。これらの姿から，今までは，四角形それぞれの性質を学びながらも感覚的・直観的に捉えていた四角形の性質について，図形は性質のかたまりであるという見方ができ，問題解決を行う上で今までの知識を活用しながら，さらに知識を深めていけたのではないかと考える。

4. 2 パフォーマンス課題の結果

パフォーマンスの結果を見ると，多くの児童が規準を達成できていた（表3）。これは，実験授業と実験授業までの授業設計において「図形の性質の意識化」を十分促すことができたことを示している。もちろん，少数ではあるが，規準に達しなかった児童もいる。基準Ⅲの児童の解答を分析してみると，どの子も図形を決定する性質に目を向けて解答はしているが，他の図形にも当てはまる性質をあげており，その図形を決定する性質の説明としては不十分だった。

第2章ですでに述べたように，本研究は，小学校高学年における移行前期としての主眼である「図形の性質間の関係の意識化」を促す前提として，中学年における「図形の性質の意識化」が必要であるという立場に立って計画された。すなわち，第4学年での「図形の性質の意識化」とおして形成された図形の捉え方が次の学年においても保持され，有効に機能していることが望まれる。そこで，「図形の性質の意識化」に対する本実践の有効性を検討するために，実験授業から6か月後に同一の児童（第5学年）を被験者として同じパフォーマンス課題を用いて調査を実施した。調査結果は表3の通りである。その結果，実験授業後と比較すると評価規準を達成した児童数に若干の減少は

見られるが，台形では77%，平行四辺形では94%，ひし形では77%の児童が評価規準を達成していた。現行の小学校の図形指導のカリキュラムでは，図形についての学習の間隔が大きく，学習内容に対する確かな定着を図ることが困難であると言われているが，本調査結果が示しているように，6か月後にもかかわらず，多くの児童が規準を達成しているという事実は，本実践が「図形の性質の意識化」に対して一定の効果があったことを示している。

5. 考察およびまとめ

本研究では，小学校高学年における移行前期の眼目である「図形の性質間の意識化」を促す図形指導の前提として，中学年（本研究では第4学年）における「図形の性質の意識化」を促す図形指導のあり方を検討することが目的であった。この目的に沿って，特に，図形の動的な取扱いおよび筋道を立てた説明を促す場の構成に留意して単元構成を行った。単元構成の有効性は，開発したパフォーマンス課題および評価規準に基づき単元終了直後と6か月後に実施した2回の評価により検討した。評価の妥当性を保証するために，複数の者で分析した。その結果，単元終了直後の評価では殆どの児童が「図形の性質の意識化」が促されていた。また，6か月後の評価結果から本単元構成の有効性が示唆されるという結果を得た。

表3 実験授業後と6か月後の結果の比較

台形							
	V	IV	III	II	I	その他	合計
実験授業後	2	28	1	0	0	0	31
6か月後	0	24	4	3	0	0	31

平行四辺形							
	V	IV	III	II	I	その他	合計
実験授業後	2	29	0	0	0	0	31
6か月後	0	29	0	2	0	0	31

ひし形							
	V	IV	III	II	I	その他	合計
実験授業後	1	25	4	0	0	1	31
6か月後	0	24	1	6	0	0	31

以下では，本実践研究の成果と課題を整理しておきたい。

第一の成果は，単元をとおして「図形の性質の意識化」を促すために開発した学習活動『竹ひご対角線』、『性質クイズ』等の有効性が示唆されたことである。『竹ひご対角線』の活動においては，四角形をただ単に与えるだけでは見えにくい対角線に目を向け，対角線から外側にできる四角形をイメージさせることができた。また，図形の動的な見方を積極的に取り入れることは，変化の中の普遍的な関係としての図形の性質の

意識化を促す上で有効に機能した。また、『性質クイズ』においても、言語情報から図形をイメージし、性質と図形のイメージを自由に行き来させることができた。このような結果は、図形の性質の意識化に向けての活動を意図的・計画的に設定していくことの必要性を示すものである。

第二の成果は、6か月後のパフォーマンス課題の結果が、単元終了後長い時間が経ったにもかかわらず、評価規準の達成状況が安定していたということである。この事実は、本単元の学習活動が図形の性質の意識化を促し、その定着を図る学習材であったことを示している。とりわけ、動的な見方を見童たちにさせることによって、性質の共通点と相違点を整理することができたことは、図形の性質を意識化において有効であった。このように、移行前期（小学校高学年）の学習の前提として、中学年で「図形の性質の意識化」を促す学習活動を図形指導の中に意図的に組み込んでいくことは小学校高学年における移行前期を充実させることになり、結果として中学校における論証指導へのスムーズな接続が可能になるとと思われる。

最後に、今後の課題としては、小学校の図形カリキュラムを「性質の意識化」、「性質間の関係の意識化」という視点からさらに分析するとともに、適切な学習材の開発をとおして小中9か年の図形カリキュラムを構想し実質化していくことである。また、パフォーマンス課題の改善も今後の大きな課題である。例えば平行四辺形を選ぶ問題の中に正方形を含めることなどにより、指導者が当初期待した学習目的だけに限定することなく、児童が学習の成果を十分に発揮できる評価のあり方について検討したい。

引用・参考文献

Gattegno, C. (1963), For the Teaching of Mathematics, Volume Two, Educational

Explorers Company.

国立教育政策研究所教育課程研究センター (2009), 『平成21年度全国学力・学習状況調査解説資料 小学校算数』

前田隆一 (1979), 『算数教育論—図形指導を中心として—』, 金子書房

松浦武人 (2001), 「私の育てたい学力—「図形」の領域—」, 『算数授業研究』, 第19号, pp.12-13

松浦武人 (2009), 「学習指導要領の図形領域 (平面図形) における重点課題とその解決の方策」, 『新しい算数研究』, No.461, pp. 6-9

文部科学省 (2008), 『小学校学習指導要領解説 算数編』, 東洋館出版社

村上良太・川崎正盛・妹尾進一・木村恵子・松浦武人・植田敦三 (2010), 「論理的な図形認識を促す算数・数学科カリキュラムの開発 (1) —小学校5学年における移行を促す算数での実践的研究—」, 全国数学教育学会誌『数学教育学研究』, 第16巻, 第1号, pp.73-85

岡崎正和・岩崎秀樹 (2003), 「算数から数学への移行教材としての作図—経験的認識から論理的認識への転化を促す理論と実践—」, 日本数学教育学会誌『数学教育学論究』, vol.80, pp. 3-27

高本誠二郎・岡崎正和 (2008), 「図形の論理的位置づけの初期の様相について—論証への移行を目指した中学1年『平面図形』のデザイン実験 (1) —」, 全国数学教育学会誌『数学教育学研究』, 第14巻, pp.41-50

植田敦三・平林一栄・石田忠男・川崎昭三・竹内恒夫・中村洋志・鈴木 悟・川崎道広・佐々木徹郎 (1984), 「数学的概念の認識過程についての基礎研究 (VI) —統・論証理解への道—」, 『広島大学教育学部学部附属共同研究体制研究紀要』, 第12号, pp.23-29