

相関均衡の解概念に基づく ネットワーク形成に関する数理モデルの構築

神原 李佳* · 林田 智弘** · 西崎 一郎***

Construction of Mathematical Model for Network Formation
Based on Solution Concept of Correlated Equilibrium

Rika KAMBARA, Tomohiro HAYASHIDA and Ichiro NISHIZAKI

Abstract: Berninghaus *et al.* (2007) slightly modify the mathematical model of network formation by Bala and Goyal (2000), and show that a periphery-sponsored star network is a strict Nash equilibrium. To examine the validity of this model, they also conduct laboratory experiments, and obtain inconsistent results with the theoretical prediction. In this paper, assuming implicit coordination of players in network formation processes, we give an explanation for the behavior of the experimental subjects from a point of view of the notion of correlated equilibria.

Key words: network formation, Nash equilibrium, correlated equilibrium, decision making

1. はじめに

社会における人間の行動や意思決定に関して、これまでに多くの数学モデルによる分析がなされている。特に、ゲーム理論はそのような分析ツールとして、経済学だけでなく社会科学、生物学や工学など幅広い分野で適用されている。ゲーム理論では、意思決定者をプレイヤーとよび、複数のプレイヤーがそれぞれ合理的に行動する場合に、プレイヤー間の相互作用を考慮して解析的にプレイヤーの意思決定が分析される。さらに、複数のプレイヤー間の相互作用関係をグラフモデルにより表現したネットワークに対して、形成されるネットワークの構造だけでなく、その安定性や効率性などに関心が集められており、ゲーム理論を基礎とした数理モデルを用いた様々な社会現象に対する説明が試みられている^{4, 5, 10}。

ネットワーク形成分析に関する従来研究として、Myerson¹⁴⁾は、協力ゲームにおける利得の配分方法であるShapley値の拡張として、ネットワーク構造を考慮した利得の配分方法を提案した。Aumann and Myerson³⁾は、ネットワークの構造だけでなくその形成過程にも依存する利得の配分方法を提案した。Jackson and Wolin-

sky¹⁰⁾は、2人のプレイヤーの合意の下にリンクが形成されるネットワーク形成に関する数理モデルにおいて、ネットワークの安定性と効率性を定義し、完全ネットワーク、空ネットワーク、スターネットワークは安定的であるが、必ずしも効率的にはならないことを示した。Currarini and Morreli⁷⁾、Mutuswami and Winter¹³⁾は、プレイヤー同士の交渉を考慮することで、効率的なネットワークが形成される可能性があることを示した。また、Bala and Goyal⁴⁾は、相手の合意なしに一方的にリンクが形成されるネットワーク形成モデルに関して、リンクを形成したプレイヤーのみが利得を得ることができる一方向フローモデルと、リンクの両端のプレイヤーが利得を得ることができる二方向フローモデルの2つの数理モデルを考察し、一方向フローモデルでは空ネットワークとリングネットワークが狭義ナッシュ均衡となり、二方向フローモデルでは空ネットワークと中心支持スターネットワークが狭義ナッシュ均衡となることを示した。

このような数理モデルの妥当性を検証するために被験者実験が行なわれており、Callander and Plott⁶⁾は、

* 広島大学 大学院工学研究科 複雑システム工学専攻 博士課程前期 学生

** 広島大学 大学院工学研究院 電気電子システム数理部門 助教

*** 広島大学 大学院工学研究院 電気電子システム数理部門 教授

Bala and Goyal⁴⁾の数理モデルの一方方向フローモデルにおいて、被験者の行動は数理モデルの予測に従うことを示した。同様に、Falk and Kosfeld⁸⁾はBala and Goyal⁴⁾の数理モデルに対する被験者実験を行い、二方向フローモデルにおいて数理モデルの予測とは一致しないネットワーク形成が観測されたことを報告している。また、Berninghaus *et al.*⁵⁾はBala and Goyal⁴⁾の数理モデルを部分的に変更した数理モデルに対して、周辺支持スターネットワークが狭義ナッシュ均衡であることを示した。さらに、そのモデルに対応する被験者実験を行った結果、周辺支持スターネットワークの形成は確認されたが、一旦は複数のプレイヤーが均衡戦略から逸脱し、再び、異なる中心プレイヤーをもつ周辺支持スターネットワークが形成される過程が観測された。

このような被験者の行動に対して、被験者は複数の基準に基づいて試行錯誤的に意思決定を行なっていると考え、適応型人工エージェントを用いたシミュレーション分析により、被験者は目先の利益に捉われているのではなく、長期的に累積された利得を最大化するように行動していることが示されている^{11, 12)}。

本論文では、被験者間の暗黙の合意を考慮して、相関均衡の解概念に基づいて、Berninghaus *et al.*の被験者実験で観測された被験者の行動を説明することができる新たな数理モデルを考察する。相関均衡はAumann^{1, 2)}によって提案された解概念であり、すべてのプレイヤーが共通に観測できる偶然機構があるとき、それが生成する偶然事象に基づいてすべてのプレイヤーの戦略の組が決定される戦略を相関戦略といい、相関戦略に従うことがナッシュ均衡になっているとき、その相関戦略を相関均衡という。相関戦略においては、それぞれのプレイヤーが各自で戦略を決定するのではなく、すべてのプレイヤーが偶然事象に基づいて戦略を決定するため、プレイヤー間で戦略を調整しなければならない。したがって、相関均衡の解概念は、プレイヤー間である種の合意が形成されるための条件であると解釈できる。

本論文の構成は次の通りである。2節では、ネットワーク形成に関する数理モデルと被験者実験の概要を述べる。3節で、本論文で提案する数理モデルを示した後、4節で、数理モデルにおける数値例を示し、5節でまとめと今後の課題を述べる。

2. ネットワーク形成

本節では、ネットワーク形成に関する数理モデルとBerninghaus *et al.*⁵⁾の被験者実験について簡単に紹介する。

2.1 ネットワーク形成に関する数理モデル

プレイヤーの集合を $N = \{1, 2, \dots, n\}$, $n \geq 3$, プレイヤー i の純戦略を $s_i = (s_{i1}, \dots, s_{ii-1}, s_{ii+1}, \dots, s_{in}) \in S_i$ とし, $s_{ij} \in \{0, 1\}$, $\forall j \in N \setminus \{i\}$ とする。 $s_{ij} = 1$ ならば、プレイヤー i はプレイヤー j に能動リンクを形成しているといい、プレイヤー j はプレイヤー i から受動リンクを形成されているという。また、 $\bar{s}_{ij} = \max\{s_{ij}, s_{ji}\}$ とする。すべてのプレイヤーの純戦略集合は $S = \prod_{i \in N} S_i$ であり、すべてのプレイヤーの戦略プロファイル $s = (s_1, \dots, s_n) \in S$ で表されるリンクの集合を $L(s) = \{ij \mid s_{ij} = 1, i, j \in N\}$ とすると、ネットワーク g はプレイヤーの集合とリンクの集合の組 $g = (N, L(s))$ により定義する。

定義 1 (パスとコンポーネント). 任意のネットワーク $g = (N, L(s))$ において、 $\bar{s}_{ij} = 1$ 、あるいはプレイヤーの集合 $\{j_1, \dots, j_m\}$ に対して $\bar{s}_{ij_1} = \bar{s}_{j_1j_2} = \dots = \bar{s}_{j_mj} = 1$ が成り立つならば、 i から j へのパス ($i \xrightarrow{g} j$) が存在するという。

また、ネットワーク $g = (N, L(s))$ において、少なくとも1本のリンクをもっているプレイヤーの集合を $N(g) = \{i \mid \exists j \text{ such that } \bar{s}_{ij} = 1\}$ とすると、 g の部分ネットワーク $g' = (N', L'(s'))$, $N' \subseteq N$, $L'(s') \subseteq L(s)$ が以下の条件を満たすとき、 g' をネットワーク g のコンポーネントという。1. $i, j \in N(g')$, $i \neq j$ を満たす任意のプレイヤー i, j 間にパスが存在する。2. $i \in N(g')$, $j \notin N(g')$ を満たす任意のプレイヤー i, j 間にパスが存在しない。

すなわち、互いにパスを持つプレイヤーの集合と、それらのプレイヤーにより形成されるリンクの集合の組により、コンポーネントは定義される。また、コンポーネント $g' = (N', L'(s'))$ における任意のプレイヤー i, j 間のリンクを削除すると、 g' がコンポーネントではなくなるとき、 g' は最小であるという。また、ただ一つのコンポーネントによって構成されるネットワーク g は連結しているといい、連結ネットワークが最小であるとき g を最小連結ネットワークという。

$\bar{s}_{ij} = 1, \forall i, j \in N, i \neq j$ となるようなネットワーク $g^c = (N, L^c(s))$ を完全ネットワークといい、リンクが存在しないネットワーク $g^\emptyset = (N, \emptyset)$ を空ネットワークという。完全ネットワークと空ネットワークの例を図1に示す。

完全ネットワークに対して、 $s_{ij} = 1$ かつ $s_{ji} = 0$, $\forall i, j \in N, i \neq j$ が成り立つとき、 $g^{minc} = (N, L^{minc}(s))$ を最小完全ネットワークといい、 $s_{ij} = 1, \forall i, j \in N, i \neq j$ が成り立つとき、 $g^{maxc} = (N, L^{maxc}(s))$ を最大完全ネットワークという。すなわち、最小完全ネットワークはす



図 1: 完全ネットワークと空ネットワーク

すべてのプレイヤー間にいずれか一方方向のリンクが形成されているネットワークであり、最大完全ネットワークはすべてのプレイヤー間に両方向のリンクが形成されているネットワークである。

また、 $\bar{s}_{ij} = 1$ かつ $\bar{s}_{jk} = 0, \forall j \in N \setminus \{i\}, \forall k \in N \setminus \{i, j\}$ となるようなネットワーク $g^s = (N, L^s(s))$ をスターネットワークという。スターネットワークにおいて、 $s_{ij} = 1$ かつ $\bar{s}_{jk} = 0, \forall j \in N \setminus \{i\}, \forall k \in N \setminus \{i, j\}$ となるようなネットワーク $g^{cs} = (N, L^{cs}(s))$ を中心支持スターネットワークといい、 $s_{ji} = 1$ かつ $\bar{s}_{jk} = 0, \forall j \in N \setminus \{i\}, \forall k \in N \setminus \{i, j\}$ となるようなネットワーク $g^{ps} = (N, L^{ps}(s))$ を周辺支持スターネットワークという。中心支持スターネットワークと周辺支持スターネットワークの例を図 2 に示す。



図 2: スターネットワーク

定義 2 (利得関数). 任意のネットワーク $g = (N, L(s))$ において、各プレイヤー $i \in N$ に対して実数値 $\pi_i: S \rightarrow \mathbb{R}$ を割り当てる実数値関数 $\pi_i, \forall i \in N$ をプレイヤー i の利得関数という。

ネットワーク $g = (N, L(s))$ において、プレイヤー i 以外のプレイヤーの戦略の組を s_{-i} とすると、

$$\pi_i(s_i, s_{-i}) \geq \pi_i(s'_i, s_{-i}), \forall i \in N, \forall s'_i \in S_i \quad (1)$$

が成り立つとき、 s_i は s_{-i} に対するプレイヤー i の最適反応であるといい、戦略の組 s_{-i} に対するプレイヤー i の最適反応の集合を $BR_i(s_{-i})$ とする。

定義 3 (ナッシュ均衡ネットワーク). ネットワーク $g = (N, L(s))$ に対して、 $s_i \in BR_i(s_{-i}), \forall i \in N$ が成り立つ

とき、 g をナッシュ均衡ネットワークといい、プレイヤーはナッシュ均衡を形成している。特に、すべてのプレイヤーに対して式 (1) の不等号が強意に成立するとき、 g を狭義ナッシュ均衡ネットワークという。

Berninghaus *et al.* の実験結果を説明するために、ネットワーク構造指標として距離測定⁵⁾を定義する。

定義 4 (距離測定). ネットワーク $g = (N, L(s))$ に対して、特定のネットワーク $g^* = (N, L^*(s^*))$ との構造的な違いを示す指標を距離測定 $d(g; g^*)$ という。

周辺支持スターネットワーク g^{ps} との距離測定を次のように定義する。

$$d(g; g^{ps}) = \begin{cases} |P(i^*) - \max_{j \neq i^*} \{P(j)\} - (n-1)| \\ \quad : i^* \text{ exists and } P(i^*) > \frac{n-1}{2} \\ n-1 : \text{otherwise} \end{cases} \quad (2)$$

ここで、 $P(i)$ はプレイヤー i の受動リンク数を示し、 i^* は受動リンク数が最大である唯一のプレイヤーとし、受動リンク数が最大であるプレイヤーが複数存在する場合は、 i^* は存在しないものとする。

距離測定は各プレイヤーの受動リンク数に基づくネットワーク構造に関する指標である。式 (2) より、受動リンク数が最大であるプレイヤーが存在し、かつその受動リンク数が過半数以上であるとき、最大受動リンク数と 2 番目に多い受動リンク数の差をとることで距離測定を求める。また、受動リンク数が過半数以上であるプレイヤーが存在しないときは、距離測定は $n-1$ である。

周辺支持スターネットワークにおいて、中心プレイヤーの受動リンク数は $n-1$ で、その他のプレイヤーの受動リンク数は 0 となることから、 $d(g; g^{ps}) = 0$ ならば、ネットワーク g は周辺支持スターネットワークであり、 $1 \leq d(g; g^{ps}) \leq n-1$ ならば、ネットワーク g は周辺支持スターネットワークとは異なる構造をしていると考えられる。

$N_i^a(s) = \{j \mid s_{ij} = 1, j \in N, j \neq i\}$ をプレイヤー i の能動隣人、 $N_i^p(s) = \{j \mid s_{ji} = 1, j \in N, j \neq i\}$ を i の受動隣人、 $N_i^{ind}(s) = \{k \mid s_{ij} = 1 \text{ and } \bar{s}_{jk} = 1, j, k \in N, j, k \neq i\}$ を i の間接隣人とする。 $N_i(s) = N_i^a(s) \cup N_i^p(s) \cup N_i^{ind}(s)$ を i の隣人とする。

プレイヤー i の利得は式 (3) で定義される。

$$\pi_i(s) = a|N_i(s)| - c|N_i^a(s)| \quad (3)$$

ここで、 a と c はそれぞれプレイヤーの情報価値とリンクコストであり、リンク形成もしくは削除は一方的に行うことができるものとする。式 (3) より、リンクコストはリンク形成を提案するプレイヤーが支払うが、利得

は両端のプレイヤーが得ることができるものとする。また, Berninghaus *et al.*⁵⁾ によって次の命題が示されている。

命題 1. $c < (n-1)a$ かつ $n > 3$ ならば, 周辺支持スターネットワークは狭義ナッシュ均衡ネットワークである。

2.2 被験者実験

Berninghaus *et al.*⁵⁾ は, 離散時間実験と連続時間実験の 2 種類の被験者実験を行った。両方の実験において, 被験者は意思決定として他の被験者に対してリンクを形成, あるいは削除するかを決定する。

離散時間実験では, 被験者は 1 グループ 6 人で構成されるグループに分けられ, 10 グループで 15 期間ネットワーク形成を繰り返す。期のはじめに, 被験者は他の被験者へのリンクを選択し, すべての被験者が意思決定するとネットワーク構造が更新され, 次の期へと移る。被験者には, 情報価値とリンクコストと現在の期における利得, そして前期のネットワークが与えられ, それらを基に被験者は意思決定を行う。情報価値とリンクコストを $(a, c) = (3, 2)$ とし, 初期ネットワークを最大完全ネットワークとする。このとき, すべての被験者の初期利得は 5 となる。

離散時間実験の主な結果として, 多くのグループにおいて, 数理モデルで狭義ナッシュ均衡ネットワークであるとされていた周辺支持スターネットワークの形成が確認された。しかし, ナッシュ均衡ネットワークを形成した後, 一部均衡から逸脱するグループもあった。離散時間実験において, 15 期間にわたって毎期の距離測定 $d(g; g^{ps})$ を調べた結果を表 1 に示す。

表 1 より, 3 グループが周辺支持スターネットワークを形成し, 2 グループにおいて $d(g; g^{ps}) = 1$ となり, 周辺支持スターネットワークに近い構造を持つネットワークを形成した。周辺支持スターネットワークを形成するのに要した期間は, 最も早いグループはグループ 5 であり, 9 期であった。周辺支持スターネットワークを形成したグループのうち, 2 グループは周辺支持スターネットワークを離れたが, 残りの 1 グループは周辺支持スターネットワークを維持した。また, $d(g; g^{ps}) \leq 1$ となるグループ数が期を増すごとに単調増加していたことから, 被験者は周辺支持スターネットワークを形成する方法を集団レベルで学習するように見える。

連続時間実験では, 被験者は 8 グループですべての被験者が最初の意思決定をした時点から, 30 分間ネットワーク形成を繰り返す。被験者は実験中であれば, いつでもリンクの形成, 削除ができる。ネットワーク構造や情報価値, リンクコストの情報リアルタイムですべて

表 1: 離散時間実験における各グループの距離測定

期	グループ									
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	4	5	4	3	5	4	5	4	4	4
2	4	4	4	2	4	5	4	5	4	5
3	5	5	5	5	4	4	4	2	5	5
4	5	5	4	5	2	2	5	3	3	3
5	5	3	5	5	2	1	5	4	5	3
6	4	4	3	5	2	3	4	4	5	2
7	5	4	5	4	1	1	3	2	5	1
8	4	4	4	5	1	1	5	3	3	1
9	5	5	4	5	0	1	4	2	4	0
10	4	3	4	4	0	0	5	1	4	0
11	5	3	4	4	0	0	4	1	4	0
12	3	4	4	4	0	2	5	2	5	1
13	5	3	5	3	0	1	5	1	4	0
14	4	5	5	1	0	0	5	2	3	0
15	5	3	4	1	0	0	4	1	2	0

の被験者に与えられる。連続時間実験においても, 情報価値とリンクコストは $(a, c) = (3, 2)$ とされ, 実験が終わった後に 30 分間の被験者の累積利得に応じて報酬が支払われる。

結果として, 離散時間実験と同様に周辺支持スターネットワークが形成されたが, その後, 中心プレイヤーが交替し, 数種類の周辺支持スターネットワークの形成が確認された。表 2 に, 連続時間実験における各グループの振る舞いとして, 周辺支持スターネットワークにおける異なる中心プレイヤー数と, 最初の周辺支持スターネットワークを形成するまでに要した時間を示す。

表 2: 連続時間実験における各グループの振る舞い

グループ	中心プレイヤー数	時間 (分)
1	2	8
2	3	13
3	1	3
4	2	21
5	4	10
6	3	18
7	6	11
8	0	-
平均	3	12

表2より, 7グループが少なくとも1つの周辺支持スターネットワークを形成し, そのうち, 6グループにおいて周辺支持スターネットワークの中心プレイヤーが交替した. 周辺支持スターネットワークを形成するのに要した時間は, 最も早いグループで3分, 平均時間は実験時間の4割に相当する12分であり, この時間はすべてのプレイヤーが協調して周辺支持スターネットワークを形成するために必要な準備期間であると解釈できる.

Berninghaus *et al.* ⁵⁾ の被験者実験結果として, 利得関数が式(3)で与えられるとき, 数理モデルで予測されていた狭義ナッシュ均衡ネットワークである周辺支持スターネットワークの形成が確認された. また, 実験の初期はどのグループも周辺支持スターネットワークを形成していない期間があり, 段階的に周辺支持スターネットワークに近いネットワークを形成していることから, グループ全体で周辺支持スターネットワークを形成する方法を学習する段階を必要としていると考えられる. したがって, 実験初期において, 戦略集合に対して被験者間でなんらかの暗黙の合意が形成され, 被験者はその合意に従って意思決定を行ったと解釈することもできる. そこで, 本論文では, 暗黙の合意形成を考慮した解概念である相関均衡に基づいて数理モデルを構築する.

3. ネットワーク形成と相関均衡

相関均衡は, 1974年に Aumann ^{1, 2)} が提案した概念であり, ナッシュ均衡を拡張した解概念である. すべてのプレイヤーが共通に観測できる偶然機構があるとき, それが生成する偶然事象に基づいて各プレイヤーが選ぶ戦略を相関戦略 $\psi: S \rightarrow \mathbb{R}$ といい, 次式で定義される.

$$\psi(s) \geq 0, \text{ and } \sum_{s \in S} \psi(s) = 1$$

すなわち, すべてのプレイヤーの戦略プロファイル $s \in S$ に割り当てられた確率分布 ψ を相関戦略という.

ネットワーク形成においては, 形成されたネットワークをすべてのプレイヤーが共通に観測し, そのネットワークにおいて得られる利得に基づいて各プレイヤーは次の戦略を決定する. したがって, すべてのプレイヤーが相関戦略 ψ に従うことは, それぞれ特定の確率 $\psi(s)$ で個々の戦略プロファイル $s \in S$ に従うことを意味する.

定義5 (相関均衡). ネットワーク $g = (N, L(s))$ に対して,

$$\sum_{s \in S} \psi(s) \pi_i(s_i, s_{-i}) \geq \sum_{s \in S} \psi(s) \pi_i(s'_i, s_{-i}), \quad \forall i \in N, \forall s'_i \in S_i \quad (4)$$

が成り立つとき, 相関戦略 ψ を相関均衡という. 特に, すべてのプレイヤーに対して式(4)の不等号が強意に成立するとき, ψ を狭義相関均衡という.

ある1人のプレイヤー以外のすべてのプレイヤーがある相関戦略に従うと仮定したとき, そのプレイヤーが現在の戦略から逸脱することで期待利得を増加させることができない状況がすべてのプレイヤーに対して成り立つとき, その相関戦略が相関均衡である. 混合戦略によるナッシュ均衡は, プレイヤーごとの周辺確率分布により定義されるが, 相関均衡はすべてのプレイヤーの戦略集合に対する同時確率分布により定義されるため, すべてのプレイヤー間での合意形成を考慮した解概念であるといえる. 例えば, 交差点の信号は, 歩行者やドライバーが共通に観測できる偶然機構であり, (歩行者用信号, ドライバー用信号) が(青, 赤)ならば歩行者は進みドライバーは止まり, (赤, 青)ならば歩行者は止まりドライバーは進むというルールは, 歩行者とドライバーの間で成立している相関戦略であるといえる.

Aumann ²⁾ は, 例題を用いてナッシュ均衡の凸結合は相関均衡となることを示しているが, ここではネットワーク形成の文脈で補題として証明する.

補題1. ナッシュ均衡を形成する戦略プロファイルに割り当てられた任意の相関戦略は相関均衡である.

証明. M をナッシュ均衡ネットワークの添字集合とすると, 任意の $m \in M$ に対してナッシュ均衡の定義より以下の式が成り立つ.

$$\pi_i(s_i^m, s_{-i}^m) \geq \pi_i(s_i, s_{-i}^m), \quad \forall i \in N, \forall s_i \in S_i \quad (5)$$

$\psi(s^m) \geq 0, \sum_{m \in M} \psi(s^m) = 1$ を満たす任意の相関戦略 $\psi(s^m), m \in M$ に対して, 以下の式が成り立つ.

$$\sum_{m \in M} \psi(s^m) \pi_i(s_i^m, s_{-i}^m) \geq \sum_{m \in M} \psi(s^m) \pi_i(s_i, s_{-i}^m), \quad \forall i \in N, \forall s_i \in S_i \quad (6)$$

ゆえに, 相関戦略 ψ は相関均衡であり, 補題1が成り立つ. \square

系1. 狭義ナッシュ均衡を形成する戦略プロファイルに割り当てられた任意の相関戦略は狭義相関均衡である.

補題1において, 式(5)と式(6)の不等号がすべてのプレイヤーとすべての戦略に対して強意に成立するとき, g を狭義ナッシュ均衡, ψ を狭義相関均衡ということから系1が成り立つ. また, 証明において, 利得関数(3)の特殊性が利用されていないので, 補題1と系1は一般的なゲームにおいても成り立つ.

定理 1. 利得関数を式 (3) とする . $c < (n-1)a$ かつ $n > 3$ ならば, 周辺支持スターネットワークは狭義ナッシュ均衡ネットワークであり, それ以外に狭義ナッシュ均衡ネットワークは存在しない .

証明. 命題 1 より, $c < (n-1)a$ かつ $n > 3$ ならば, 周辺支持スターネットワークは狭義ナッシュ均衡ネットワークである⁵⁾ .

利得関数が式 (3) のとき, ネットワーク $g = (N, L(s))$ においてプレイヤー i の隣人ではないプレイヤーの集合を $N'_i(s) = N \setminus N_i(s)$ として, $N'_i(s) = \emptyset, \forall i \in N$ が成り立つとき, ネットワーク g を隣人ネットワークとよぶ . 隣人ネットワークであれば, すべてのプレイヤー間にパスが存在するので, 連結ネットワークでもある . また, 隣人ネットワーク $g = (N, L(s))$ における任意のプレイヤー i, j 間のリンク ij を削除すると, g が隣人ネットワークではなくなるとき, g を最小隣人ネットワークとよぶ .

狭義ナッシュ均衡ネットワーク $g = (N, L(s))$ は連結ネットワークではないとする . このとき, $N' \subset N, L'(s') \subset L(s)$ となるコンポーネント $g' = (N', L'(s'))$ と, 孤立したプレイヤー j または異なるコンポーネント $g'' = (N'', L''(s'')), N'' \subset N, N' \cap N'' = \emptyset$ が存在する . プレイヤー $i \in N'$ が孤立プレイヤー j または $j \in N''$ にリンクを形成すると, 少なくとも $a - c$ の利得を増加させることができ, 仮定より $a - c > 0$ である . したがって, 狭義ナッシュ均衡ネットワーク g は連結ネットワークである . また, 狭義ナッシュ均衡ネットワーク $g = (N, L(s))$ は隣人ネットワークではないとすると, プレイヤー $i \in N$ がプレイヤー $j \in N'_i(s)$ にリンクを形成すると, 少なくとも $a - c > 0$ の利得を増加させることができる . したがって, 狭義ナッシュ均衡ネットワークならば $N'_i(s) = \emptyset, \forall i \in N$ であり, 隣人ネットワークである . また, g が最小隣人ネットワークではないと仮定すると, あるプレイヤー i に対してリンク ij を削除すると, 少なくとも $c > 0$ の利得を増加させることができるので, g は狭義ナッシュ均衡ネットワークではない . ゆえに, 狭義ナッシュ均衡ネットワークは最小隣人ネットワークである .

g が最小隣人ネットワークであると仮定すると, すべてのプレイヤーに $n - 1$ 人の隣人が存在し, 任意のプレイヤー i に対して次の 3 種類のリンクが存在しうる . (a) $s_{ji} = 1$, (b) $s_{ij} = 1$ and $s_{jk} = 1$, (c) $s_{ij} = 1$ and $s_{kj} = 1$, $s_{ik} = 0, \forall j, k \in N \setminus \{i\}$. ここで, (b) において, k は i の隣人であるがその逆は成り立たない (すなわち i は k の隣人ではない) ので (b) が成立する g は最小隣人ネットワークではない . ゆえに, g が

最小隣人ネットワークならばすべてのプレイヤーは (a) と (c) のリンクによって連結している . (a) の条件より, $s_{ji} = 1$ and $s_{ik} = 1$ が成り立つ可能性があるが, これは (b) と同等になるので成り立たない . したがって, 任意のプレイヤー i は他のプレイヤーからリンクを形成されるのみ ((a1) $s_{ji} = 1$ and $s_{ik} = 0, \forall j, k \in N \setminus \{i\}$), あるいは他のプレイヤーにリンクを形成するのみ ((a2) $s_{ij} = 1$ and $s_{ji} = 0, \forall j \in N \setminus \{i\}$) のどちらかである . また, (c) は他のプレイヤーから 2 本のリンクを形成されていることと同等なので (a1) に含まれる . (a2) において, $s_{ij} = 1$ and $s_{ik} = 1, \exists k \in N \setminus \{i, j\}$ のとき, i は j の隣人であるが k は j の隣人ではないので g は最小隣人ネットワークではない . ゆえに, (a2) は他の 1 人のプレイヤーにのみリンクを形成することに限定される .

ゆえに, g が最小隣人ネットワークならば, すべてのプレイヤーは他のプレイヤーからリンクを形成されるのみ ((a1)), あるいは他の 1 人のプレイヤーにリンクを形成するのみのどちらかであり, そのようなネットワークは周辺支持スターネットワークのみである .

したがって, g が狭義ナッシュ均衡ネットワークであると仮定すると, 最小隣人ネットワークであり, そのようなネットワークは周辺支持スターネットワークのみである . ゆえに, 定理 1 が成り立つ . \square

Berninghaus *et al.* の命題 1 より, 周辺支持スターネットワークが狭義ナッシュ均衡ネットワークであることは示されているが, それ以外にも狭義ナッシュ均衡ネットワークが存在する可能性があるため, 定理 1 で Berninghaus *et al.* の命題 1 を改訂した . 定理 1 より, 利得最大化を目的とするプレイヤーは狭義ナッシュ均衡ネットワークである周辺支持スターネットワークを形成し, そのネットワークは安定的であると考えられる .

定理 2. 利得関数を式 (3) とする . $c < (n-1)a$ かつ $n > 3$ ならば, 周辺支持スターネットワークを形成する戦略プロファイルに割り当てられた任意の相関戦略は狭義相関均衡である .

定理 1 と系 1 より, 定理 2 が成り立つ .

4. 数値例

本節は, 構築した数理モデルにおいて狭義相関均衡が形成される数値例を示す .

4.1 数値例 1

狭義ナッシュ均衡ネットワークとそれ以外のネットワークの集合に対して割り当てられる確率分布が狭義相関均衡となる例を示す .

プレイヤー数を $n = 4$ とし, 図3のようなネットワークの集合 g^1, g^2, \dots, g^8 を考える.

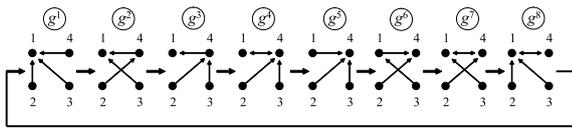


図 3: 狭義相関均衡の例 (1)

図3に示されるネットワークの集合では, g^1 および g^5 はそれぞれプレイヤー1と4を中心プレイヤーとする周辺支持スターネットワークであり, 例えば, $g^1 \rightarrow g^2 \rightarrow \dots \rightarrow g^8 \rightarrow g^1 \rightarrow \dots$ とネットワーク構造が変化した場合, 中心プレイヤーの交替が起こっている.

それぞれのネットワーク $g^k, k = 1, 2, \dots, 8$ に対応する戦略集合を s^k とする. $(a, c) = (3, 2)$ としたとき, g^1 と g^5 は狭義ナッシュ均衡ネットワークであり, 図3に示される例(1)において, $\psi^1(s^1) = \psi^1(s^5) = 0.35, \psi^1(s^k) = 0.05, k = 2, 3, 4, 6, 7, 8$ となる相関戦略 ψ^1 は狭義相関均衡である.

Berninghaus *et al.* の被験者実験⁵⁾では, プレイヤー数は図3で示す例と異なるが, 同様の中心プレイヤーの交替が観測された. 狭義相関均衡および相関均衡はプレイヤーの合意を示す均衡概念であることから, 被験者間に中心プレイヤーの交替に関する暗黙的な合意が形成されたといえる.

$\psi^2(s^1) + \psi^2(s^5) = 1, \psi^2(s^1) > 0, \psi^2(s^5) > 0, \psi^2(s^k) = 0, k = 2, 3, 4, 6, 7, 8$ を満たす相関戦略 ψ^2 も狭義相関均衡となることから, 狭義ナッシュ均衡ネットワークのみで構成される戦略プロファイルに割り当てられる任意の相関戦略は狭義相関均衡となる. これにより, 定理2に対する数値例を示すことができる.

4.2 数値例 2

狭義ナッシュ均衡ネットワークではないネットワークの集合に対して割り当てられる確率分布が狭義相関均衡となる例を示す.

プレイヤー数 $n = 4, (a, c) = (3, 2)$ とし, 図4のようなネットワークの集合を考える.

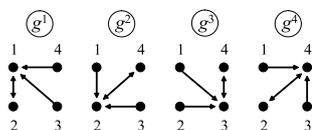


図 4: 狭義相関均衡の例 (2)

図4において, $g^k, k = 1, 2, 3, 4$ は狭義ナッシュ均衡

ネットワークではないが, $\psi^3(s^k) = 0.25, k = 1, 2, 3, 4$ となる相関戦略 ψ^3 は狭義相関均衡となる. 図4に示されるように, 狭義ナッシュ均衡ネットワークではないネットワークの集合に対して割り当てられる確率分布が狭義相関均衡となる場合もある.

5. おわりに

ネットワーク形成に関する Bala and Goyal の数理モデル⁴⁾では狭義ナッシュ均衡は安定的だったが, Berninghaus *et al.* の被験者実験⁵⁾では狭義ナッシュ均衡形成後, 均衡から逸脱するという数理モデルと矛盾する結果が観測された. 本論文では, 相関均衡^{1, 2)}の解概念に基づいて, Berninghaus *et al.* によるネットワーク形成に関する数理モデルの予測と異なる被験者の行動を説明することができる新たな数理モデルを構築した.

そして, 狭義ナッシュ均衡のみで構成される戦略プロファイルだけでなく, 狭義ナッシュ均衡と狭義ナッシュ均衡ではない戦略プロファイルに割り当てられる相関戦略も狭義相関均衡となる場合があることを示した. さらに, 狭義ナッシュ均衡ではない戦略集合のみで構成される戦略プロファイルに割り当てられる相関戦略も狭義相関均衡となる場合があることを示した.

今後の課題として, Berninghaus *et al.* の被験者実験以外の被験者実験や, Bala and Goyal の数理モデルに対して相関均衡を導入した場合の数理モデルの構築, さらに, 被験者実験による本論文で構築した数理モデルの検証などが考えられる.

参考文献

- 1) R.J. Aumann, "Subjectivity and Correlation in Randomized Strategies", *Journal of Mathematical Economics*, 1, pp.67-96, 1974.
- 2) R.J. Aumann, "Correlated Equilibrium as an Expression of Bayesian Rationality", *Econometrica*, 55, pp.1-18, 1987.
- 3) R.J. Aumann and R.B. Myerson, "Endogenous formation of paths between players and coalitions: an application of the Shapley value", In A. Roth(eds.): *The Shapley Value*, Cambridge University Press, pp.175-191, 1988.
- 4) V. Bala and S. Goyal, "A non-cooperative model of network formation", *Econometrica*, 68, pp.1181-1229, 2000.

- 5) S.K. Berninghaus, K.M. Ehrhart, M. Ott and B. Vogt, “Evolution of networks - an experimental analysis” , *Journal of Evolutionary Economics*, 17, pp.317–347, 2007.
- 6) S. Callander and C.R. Plott, “Principles of network development and evolution: an experimental study”, *Journal of Public Economics*, 89, pp.1469–1495, 2005.
- 7) S. Currarini and M. Morelli, “Network formation with sequential demands”, *Review of Economic Design*, 5, pp.229–250, 2000.
- 8) A. Falk and M. Kosfeld, “It’s all about connections: evidence on network formation”, *IEW Working paper*, 146, 2003.
- 9) N.P. Hummon, “Utility and dynamic social networks”, *Social networks*, 22, pp.221–249, 2000.
- 10) M.O. Jackson and A. Wolinsky, “A strategic model of social and economic networks”, *Journal of Economic Theory*, 71, pp.44–74, 1996.
- 11) 神原, 林田, 西崎, 片桐, “ネットワーク形成に関するエージェントベースシミュレーション分析”, 広島大学大学院工学研究科研究報告, 58, pp.1–8, 2009.
- 12) T. Hayashida, I. Nishizaki, H. Katagiri and R. Kambara, “Behavioral analysis in network formation using agent-based simulation systems”, *International Journal of Knowledge Engineering and Soft Data Paradigms*, (printing).
- 13) S. Mutuswami and E. Winter, “Subscription mechanisms for network formation”, *Journal of Economic Theory*, 106, pp.242–264, 2002.
- 14) R. Myerson, “Graphs and cooperation in games”, *Mathematics of Operations Research*, 2, pp.225–229, 1977.

平成 22 年 10 月 29 日 受理