日本教科教育学会誌
2006. 3　第28巻　第4号



# 数学理解の２軸過程モデルに基づく授業構成の原理と方法

広島大学大学院教育学研究科　小　山　正　孝

本稿の目的は，算数・数学科の授業において児童・生徒の理解の深化を促すために，数学理解の２軸過程モデルに基づく算数・数学科の授業構成の原理と方法を構築することである。

これまでの数学理解に関する理論的研究及び実践的研究の成果を踏まえて，まず，授業構成の原理として，P1［複雑な力動的過程としての理解過程］，P2［理解の階層的水準と学習段階の設定］，P3［個人的構成と社会的構成の重視］を挙げた。そして，授業構成の方法として，M1［理解の階層的水準の明確化］，M2［理解の程度の実態把握］，M3［理解の学習段階の具体化］を提案した。

**キーワード**：数学教育，数学理解，２軸過程モデル，授業構成，原理と方法

## １．はじめに－本稿の目的と方法－

筆者は数学教育における理解過程に関する研究において，５つの階層的水準と３つの学習段階をそれぞれ縦軸と横軸にもつ数学理解の「２軸過程モデル（Two-Axes Process Model）」を理論的に構築し，その妥当性と有効性に関する研究を行ってきている（小山，1992; Koyama, 1993; 小山，1997; Koyama, 1997）。その結果，教師が児童・生徒の数学理解を深化させる授業を構成し実践する際に２軸過程モデルがその枠組みとして有効に機能し得るということが明らかになった。他方で，数学教育における構成主義的認識論に立つ２軸過程モデルを，他の社会文化主義的認識論や相互作用主義的認識論などによって補完するとともに，算数・数学科の授業で扱う教材に応じてより具体化する必要があることも明らかになった。

そこで，本稿では，数学理解の２軸過程モデルに基づく算数・数学科の授業構成の原理と方法を構築することによって，算数・数学科の授業において児童・生徒の理解を深めるための，教師にとって有効な視点を提案することを目的とする。そのために，以下では，まず，理解研究における前提とねらい，数学理解の２軸過程モデルの概要を述べる。そして，これまでの数学理解に関する理論的研究及び実践的研究の成果を踏まえて，そのモデルに基づく算数・数学科の授業構成の原理と方法を提案する。

## ２．理解研究における前提とねらい

### (1) 理解の基本的なとらえ方

児童・生徒が算数・数学を理解するとはどういうことか。また，どのようなメカニズムで理解は深化するのか。これらの問いは理解研究において解明すべき究極的な問題で，かなり以前から精力的に研究されてきた数学教育研究の主要な問題の１つである。最近の数学教育研究では，認知心理学的なアプローチによってこの問題を解明しようとするものがその主流となっている。

筆者は，理解に関する認知心理学的研究の成果をもとに，「理解（understanding）」を次のようにとらえ，これらを理解研究の前提としている。

(1) あることを理解するとは，それを既有のシェマあるいは認知構造と認知的に関係づけることである。

(2) 理解は本質的には個人的な心的活動であり，複雑で力動的な現象である。

(3) 算数・数学の理解にはいくつかの階層的水準がある。

### (2) 理解のモデル化の必要性

理解するということは児童・生徒の内面的な複雑な活動であるから，それをとらえるためには，この内面的で直接見ることのできない理解という現象を，何らかの方法によって顕在化させることが必要である。その方法としては，例えば，児童・生徒に理解体験を記述させる想起法，認知的コン

フリクトによる方法，問題解決過程を観察する方法，面接者が個別に質問などして応答を引き出すインタビュー法，発語思考法やプロトコル分析法などがある。

これらのいろいろな方法を用いて多面的なアプローチを試みることが重要であるが，いかなる方法によっても，理解を直接とらえることはほとんど不可能であると言ってもよい。そのため，理解の構造や機能を間接的にとらえるための理論的・解釈的枠組みが必要になる。その枠組みは，原型としての理解の構造や機能をよりとらえやすくするものであるから，それを「理解のモデル（model of understanding)」と呼ぶことができる。そして，理解のモデルを構築すること，つまり理解のモデル化は，児童・生徒の数学理解を解明するために必要不可欠であると考える。

### (3) 理解のモデル化の観点

これまで，数学教育研究において理解のモデル化が試みられてきた。その結果いろいろなモデルが提案されているが，それらはモデル化の観点の違いから大きく２つの類型に分けられる。

第１の類型は，ある時点において児童・生徒が理解している状態，すなわち理解の様相を記述しようとするもので，「様相モデル（aspect model)」と呼ばれる。それに対して，第２の類型は，児童・生徒が理解しつつある過程を記述しようとするもので，「過程モデル（process model)」と呼ばれる。

さらに，数学理解のモデル化においては，理解する対象は何かということが重要なので，理解する対象が数学的内容（手続き，概念，性質，関係）である場合と，数学的形式（具体的表現，操作的表現，図的表現，言語的表現，記号的表現）である場合とに分けることができる。また，児童・生徒の主として頭の中の変化，つまり認知構造の変容に焦点を当てる場合と，主として観察可能なものの変化，つまり行動の変容に焦点を当てる場合とがある。

## ３．数学理解の過程モデルの具備すべき特性

### (1) 過程モデルの「記述性」と「規範性」

これまでに提案された過程モデルの多くは，算数・数学を理解するという内面的な現象がどのように起こっているかを記述できるという意味で，「記述性（descriptive characteristic)」を備えたものである。しかし，数学教育においては，このような数学理解の過程の実態を把握するだけでは十分とは言えない。なぜなら，数学教育は，本来，教師の教える活動と児童・生徒の学ぶ活動の２つ，すなわち教授活動と学習活動とによって成立するものだからである。したがって，数学理解の過程モデルが，「教授＝学習」活動としての数学教育において真に有効なものであるためには，上で述べた「記述性」だけでなく「規範性(prescriptive characteristic)」，すなわち児童・生徒に算数・数学を理解させるにはどのような状況を設定すればよいか，また，理解をどのような方向に深化させればよいか，などに対する教授学的原理を示唆し得るような特性をも備えていなければならない。

### (2) 反省的思考による理解の深化

筆者は，これら両方の特性を備えた，数学理解の過程モデルを構築しようと試みた。その際，注目すべきは児童・生徒の数学理解の深化における「反省的思考（reflective thinking)」の役割であり，特に次の３点が重要であると考える。①反省的思考は，学習者自身による活動や操作をその前提とする，②反省的思考の対象は，その活動や操作およびその結果である，③反省的思考の目的は，無意識的な活動や操作を意識化し，それを表現することである。このような反省的思考は，数学理解の階層的水準の上昇に必要不可欠であり，算数・数学の学習における児童・生徒の理解の深化にとって重要な役割を果たす。

## ４．数学理解の２軸過程モデルの概要

上述のような意味での「記述性」と「規範性」の両方を兼ね備えた数学理解の過程モデルを構築するためには，①数学理解はどのような水準に沿って深化するか，②ある水準において，どのように思考が展開するか，という２つの点を明らかにすることが重要である。このような考え方に立って，筆者は，児童・生徒の数学理解の深化の過程を解明し，その深化を促進するための１つの理論的枠組みとして，理解のいくつかの「階層的水準」と各水準における「学習段階」をそれぞれ縦軸と横軸にもつ，数学理解の「２軸過程モデル」を構築した。

このモデルの縦軸は理解水準に関するもので，数学的対象の理解，対象間の関係の理解，関係の一般性の理解などのいくつかの階層的水準から成る。一方，このモデルの横軸は学習段階に関するもので，各理解水準における以下のような３つの学習段階から成る。数学理解は必ずしも直線的にではないが，これらの段階を経て，ある水準から次の水準へと上昇（深化）し得ると考えられる。

(1) 直観的段階（Intuitive Stage）：学習者が具体物あるいは概念や性質などの数学的対象を操作する。直観的思考を働かせる段階。

(2) 反省的段階（Reflective Stage）：学習者が自らの無意識的な活動や操作に注意を向け，それらやその結果を意識化して，図や言葉などによって表現する。反省的思考を働かせる段階。

(3) 分析的段階（Analytical Stage）：学習者が表現したものをより洗練して数学的に表現したり，他の例で確かめたり，それらのつながりを分析したりすることによって，統合を図る。分析的思考を働かせる段階。

こうした２軸過程モデルのイメージを図に表すと図１のようになる。基本的には，縦軸の「階層的水準」は算数・数学科の１単元に対応し，各水準における横軸の「学習段階」は１～３時間程度の授業に適用できる。したがって，このモデルは，算数・数学科の教材や児童・生徒の実態に応じてさらに精緻化・具体化しなければならないが，教師が算数・数学科の授業を構成し実践する際，算数・数学の学習における児童・生徒の理解過程をとらえ，理解を深化させるための１つの有力な視座になり得ると考えている。

## ５．２軸過程モデルに基づく授業構成の原理

このような数学理解の２軸過程モデルに基づいて算数・数学科における授業構成を行うことによって，児童・生徒の数学理解の深化を促進することを考える。その授業構成の「原理(principles)」として，筆者がこれまでに行ってきた理論的研究と実践的研究（小山，1997; 小山他，2002; 2003）の結果，次の P1 ～ P3を挙げることができる。

P1: 算数・数学の理解を，全か無かというように二者択一的にではなく，複雑な力動的過程としてとらえる。[複雑な力動的過程としての理解過程]

P2: 算数・数学の理解の深化を促進するために，理解の階層的水準と学習段階の２軸を設定する。[理解の階層的水準と学習段階の設定]

P3: 教室で行われる算数・数学の教授学習活動としての授業においては，児童・生徒の個人的構成と社会的構成の両方の活動を重視する。[個人的構成と社会的構成の重視]

### (1) 原理Ｐ１について

まず，原理 P1は数学理解の２軸過程モデルに基づいて算数・数学科の授業構成を考える際の前提であり，算数・数学を理解するとはいかなることかについての基本的立場を述べたものである。算数・数学の学習における児童・生徒の理解について考えるとき，児童・生徒がある数学的な概念や性質などを完全に理解しているという状態は考えられないし，逆に，全く理解していないという状態も考えにくい。ある時点における児童・生徒の数学的な概念や性質などの理解はこれら両極の間のどこかに位置し，その理解は常に成長しつつあると考えられるのである。

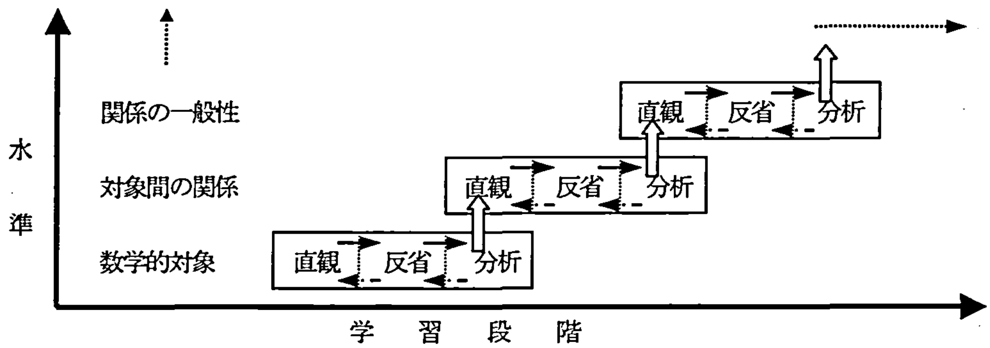



図１　２軸過程モデルのイメージ

例えば，数学教育における「理解論争」の契機となったSkemp (1976) の「関係的理解」と「用具的理解」の区別に示唆されるように，縦の長さが$L$，横の長さが$B$の長方形の面積$A$を求めるとき，例えば，ある児童が単に面積を求める公式$A=L\times B$に当てはめて面積を求めることができた（用具的理解）としても，その児童が長方形の面積を完全に理解しているとは言えない。なぜなら，その児童は長方形の面積$A$を求めるのになぜ$L\times B$でよいのかが分かって（関係的理解）いないかもしれないからである。逆に，別の児童が長方形の面積Aを求めることができなかったとしても，その児童が長方形の面積を全く理解していないとは必ずしも言えない。なぜなら，その児童は長方形の面積を求める公式を忘れて求められなかっただけで，２つの大きさの異なる長方形の面積を比べることはできるかもしれないからである。

また，算数・数学の理解が常に成長しつつある複雑な力動的過程であるということについては，例えば，Pirie & Kieren (1989) の数学的理解の「超越的再帰モデル」に関する研究で例証されている。Pirie & Kierenのモデルは，①する，②イメージをつくる，③イメージをもつ，④性質に気づく，⑤形式化する，⑥観察する，⑦構造化する，⑧創案するという８つの水準から成るが，このモデルを用いて生徒の数学的理解の成長が再帰的現象であり，決して直線的ではないものとして記述されているのである (Koyama, 1995)。

以上のことから，P1「算数・数学の理解を，全か無かというように二者択一的にではなく，複雑な力動的過程としてとらえること」を，数学理解の２軸過程モデルに基づく算数・数学科における授業構成の第１の原理とする。

**(2) 原理Ｐ２について**

次に，原理P2は数学理解の２軸過程モデルに基づく算数・数学科の授業構成にとってまさに中心的な原理である。算数・数学の学習において児童・生徒の理解の深化を促進するためには，どのような方向に深化させればよいか，また，どのような学習状況を設定すればよいか，が最も重要なこととなる。前者の目指すべき方向に関することが理解の階層的水準としての縦軸であり，後者の設定すべき学習状況に関することが各理解水準における学習段階としての横軸である。したがって，児童・生徒の算数・数学の理解を深化させるための授業構成においては，これら階層的水準と学習段階の２軸を設定する必要があると考えられる。

まず，数学理解の階層的水準としての縦軸を設定することの必要性は，数学的思考の特質による。例えば，van Hiele (1986) の「学習水準理論」においては，幾何学習における５つの階層的な思考水準（具体物，図形，図形の性質，命題，論理）が示されており，潜在的秩序を直観したとき思考水準は飛躍し，その結果，考察の対象が変化するという「方法の対象化」と呼ばれる数学的思考の特質がとらえられている。このvan Hieleの理論から，数学的対象（数や図形など），数学的対象の性質，数学的性質の関係としての命題，命題の関係としての形式論理というように，数学理解においてはいくつかの階層的水準があることが分かる。また，Sfard (1991) は，数や関数のような抽象的な数学的概念は２つの基本的に異なった仕方（構造的と操作的）でとらえられることを述べ，数学的概念作用 (mathematical conception) の二重性に着目し，特に代数的思考の本性と成長の過程をその歴史的観察に基づいて認識論的に分析することによって，操作的概念作用が構造的概念作用に先行すること，そしてこれら２つの概念作用が循環しながら数学的概念が発達する（具体物の集合，自然数，正の有理数，正の実数，実数，複素数）ことを明らかにしている。これら２つの理論が示している階層的水準は長期間の算数・数学の学習にみられるものである。したがって，それよりも短期間の算数・数学の学習においては，教材研究を通してさらに細かな階層的水準を明らかにし，それを縦軸に設定する必要がある。

次に，児童・生徒の数学理解の深化，つまり水準を上昇させるために，数学理解の各水準に学習段階としての横軸を設定することが必要となる。数学理解の２軸過程モデルにおいては，数学的思考の生産的で確実な展開に必要不可欠な直観と論理の相補性という関係に着目して「直観的段階」と「分析的段階」を設定し，それらの段階をつなぐものとして「反省的段階」を設けて反省的思考の重要な役割を反映させている。なぜなら，必ずしも直線的ではないが，これらの段階を経て，学

習者である児童・生徒の数学理解の水準が上昇すると考えられるからである。これら３つの段階は，van Hiele のいう「方法の対象化」を促すものであり，Sfard の言葉を借りれば「内面化，圧縮，具象化」の３つの階層的な段階を経ることに対応する。

以上のことから，P2「算数・数学の理解の深化を促進するために，理解の階層的水準と学習段階の２軸を設定すること」を，数学理解の２軸過程モデルに基づく算数・数学科における授業構成の第２の原理とする。

### (3) 原理Ｐ３について

そして，原理 P3は教室で行われる算数・数学の教授学習活動としての授業において必要不可欠な原理である。数学教育における理解過程に関するこれまでの研究や構成主義的認識論，社会文化主義的認識論及び相互作用主義的認識論とそれらに基づく研究（Sierpinska & Lerman, 1996; 中原 , 1999; 小山 , 2001）から，数学的概念や原理・法則などを理解するということは本質的には個々の児童・生徒の内面で生起する心的活動であり，複雑で力動的な過程であるが，独自の文化をもった教室で行われる算数・数学の教授学習においては，ある児童・生徒の理解過程はその教室の中の教師や他の児童・生徒との社会的相互作用の影響を受けることも明らかになってきている。

したがって，数学理解の２軸過程モデルに基づく算数・数学科における授業構成においては，数学的知識は伝達によって受動的に受け取られるものではなく認識主体によって能動的に構成されるものであるとする構成主義的認識論に立脚し，個々の児童・生徒の個人的構成活動を基本とする。そして，個々の児童・生徒をある文化や社会的状況に置かれている者とみて，数学的知識は社会的に生産され常に変化し得る社会的価値と結びついた社会的に統制される社会的知識であるとする社会文化主義的認識論，及び数学的知識の源と成長の過程としての発達と相互作用とは不可分なものであるとする相互作用主義的認識論の立場から補完することを考える。そして，数学理解の２軸過程モデルに基づく算数・数学科における授業構成においては児童・生徒同士や教師との相互作用を通しての社会的構成活動を組み込むこととする（小山他 , 2000)。上述の原理 P2の３つの学習段階との対応では，児童・生徒の個人的構成活動は直観的段階，反省的段階，分析的段階のいずれの段階でも必要であるのに対して，社会的構成活動は反省的段階と分析的段階における個人的構成活動をよりよく促進するのに必要であると言える。

以上のことから，P3「教室で行われる算数・数学の教授学習活動としての授業においては，児童・生徒の個人的構成と社会的構成の両方の活動を重視すること」を，数学理解の２軸過程モデルに基づく算数・数学科における授業構成の第３の原理とする。

## ６．２軸過程モデルに基づく授業構成の方法

以上のような３つの原理を基に，数学理解の２軸過程モデルに基づく算数・数学科における授業構成を行っていくことになるが，そのときの授業構成の方法としては，筆者がこれまで行ってきた理論的研究と実践的研究（小山 , 1997; 小山他 , 2002; 2003)の結果，次の M1 ～ M3を提案したい。

M1: 算数・数学科の授業で児童・生徒が学習する内容について，算数・数学科の学習指導要領などのカリキュラムを分析することによって，数学理解の階層的水準を明らかにする。[理解の階層的水準の明確化]

M2: 算数・数学科の授業で児童・生徒が学習する内容に対する理解の程度について，学習内容に応じた診断的評価や事前調査などを行うことによって，その実態を把握する。[理解の程度の実態把握]

M3: 数学理解の階層的水準と児童・生徒の理解の程度の実態把握を基に，算数・数学科の授業で児童・生徒が学習する内容についての教材研究を行い，３つの学習段階を具体化し，児童・生徒の個人的構成と社会的構成の両方の活動を授業に位置づける。[理解の学習段階の具体化]

### (1) 方法Ｍ１について

まず，方法 M1は算数・数学科の授業が目指すべき方向を明らかにすることである。それは，算数・数学科の学習指導要領などのカリキュラムを分析することによって，長期的にみれば児童・生徒が学習する数学的内容の体系を明確にすることであり，短期的には算数・数学科の単元や１時間ごとの授業のねらいを明確にすることにつながる。

| | | |
|---|---|---|
| 小学校１年： | 身近な立体<br>〈観察，構成〉 | もののの形 |
| 小学校２年： | ものの形<br>〈観察，構成〉 | 図形<br>〔三角形，四角形〕<br>〈かく，作る〉 |
| 小学校３年： | ものの形<br>〈観察，構成〉 | 図形を構成する要素<br>〔正方形，長方形，直角三角形〕<br>〈かく，作る，敷き詰める〉 |
| 小学校４年： | 図形<br>〈観察，構成〉 | 図形を構成する要素<br>〔二等辺三角形，正三角形〕<br>〔円，球〕<br>〈かく，作る，敷き詰める〉 |
| 小学校５年： | 図形の構成要素<br>及びそれらの<br>位置関係<br>（平面図形）<br>〈観察，構成〉 | 直線の平行や垂直<br>基本的な平面図形<br>〔平行四辺形，台形，ひし形〕<br>基本的な図形の簡単な性質<br>円周率<br>〈考察〉〈かく，作る，敷き詰める〉 |
| 小学校６年： | 図形の構成要素<br>及びそれらの<br>位置関係<br>（立体図形）<br>〈観察，構成〉 | 基本的な立体図形<br>〔立方体，直方体〕（見取図，展開図）<br>直線や平面の平行及び垂直<br>角柱及び円柱<br>〈考察〉〈かく，作る〉 |
| 中学校１年： | 平面図形や空間図形<br>〈観察，操作，実験〉 | ☆図形に対する直観的な見方や考え方<br>☆論理的に考察する基礎<br>〔線対称，点対称〕<br>・角の二等分線，線分の垂直二等分線，垂線の作図<br>・空間における直線や平面の位置関係<br>・空間図形を直線や平面図形の運動によって構成されているものととらえる<br>・扇形，柱体，錐体の計量 |
| 中学校２年： | 平面図形の性質<br>〈観察，操作，実験〉 | ☆基本的な平面図形の性質の理解を深める<br>・平行線や角の性質<br>・三角形の角の性質<br>☆数学的な推論の意義と方法を理解し，推論の過程を的確に表現する<br>・証明の意義と方法<br>・三角形の合同条件<br>・円と中心角の関係 |
| 中学校３年： | 平面図形の性質<br>〈観察，操作，実験〉 | ☆基本的な平面図形の性質の理解を深める<br>☆図形について見通しをもって論理的に考察し表現する<br>・三角形の相似条件<br>・平行線と線分の比<br>・三平方の定理とその利用 |

**図２　「図形」領域の学習における数学理解の深化の方向**

ここでは，その具体例として，小学校算数科と中学校数学科における「図形」学習に焦点化し，「図形」領域の学習指導要領（文部省，1999a; 1999b）を分析することによって，児童・生徒の数学理解の深化の目指すべき方向を明らかにしてみよう。算数・数学科における「図形」学習のねらいは，①基本的な平面図形や空間図形についての理解を深める，②論理的に考察し表現する能力を伸ばすことである。そして，「図形」領域の学習において児童・生徒の数学理解の深化の目指すべき方向は，図２のように整理できる。

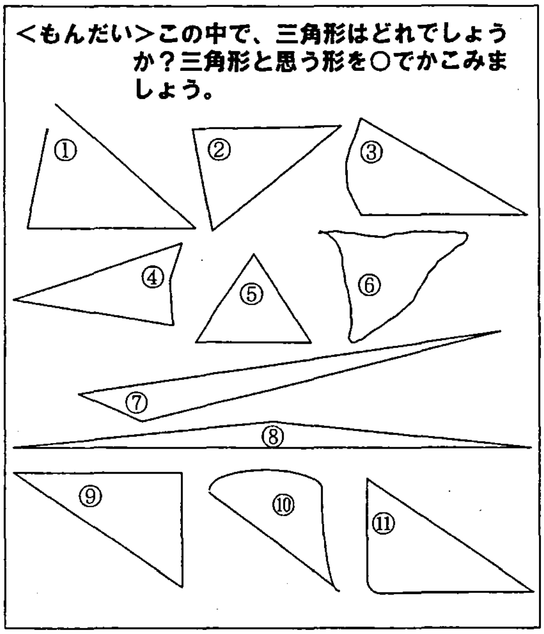
**(2) 方法Ｍ２について**

次に，方法M2は，方法M1によって明確になった数学理解の深化の目指すべき方向を考慮し，算数・数学科の授業で児童・生徒が学習する内容についての診断的評価や事前調査などを行うことに

よって，児童・生徒のその内容に関わる理解の程度などの実態を把握し，それを次の方法M3によって学習段階を具体化するための判断材料とすることである。児童・生徒の理解の実態にそぐわなければ，算数・数学科の授業において設定される学習状況があまりにも平易すぎたり逆に困難すぎたりして，児童・生徒の理解の深化に寄与しないということが考えられるからである。もちろん，児童・生徒によって理解の程度に差があることは十分に考えられる。すでに述べたように，理解は本質的には個人的な心的活動であり，複雑で力動的な現象であるから，むしろ，児童・生徒の理解の程度や理解の仕方に差があるのは自然なことであると言ってもよい。したがって，児童・生徒の数学理解の実態に応じて，一斉，小集団，個別のどの学習指導形態を採用するか，あるいはそれらをどのように組み合わせていくかが決められなければならない。いずれの学習指導形態を採用しようとも，大切なことは個々の児童・生徒に応ずる学習指導を行い，数学理解の深化を促すことである。

ここでは，その具体例として，小学校算数科における第2学年の「三角形と四角形」の学習に焦点化し，その学習に入る前に児童の三角形についての理解の程度を調べるために行った事前調査の方法とその結果から明らかになったことをみてみよう（小山他，2002, p.90)。

質問紙法により，右図のような11個の図形を第2学年の児童38名に提示し，三角形の同定を行わせた。




その結果，学習前の児童の実態として，以下のことが明らかになった。

ア．図形③，⑥，⑩を選択した児童が1名もいないことから，すべての児童が三角形を直線で構成されているものと理解している。

イ．図形①，⑪を選択した児童が2，3名いることから，3本の直線で構成されている場合には完全に閉じていない図形でも，あるいは1つの角が多少丸みをおびている図形でも，それを三角形であると判断する児童が少しいる。

ウ．図形②，⑨を選択した児童が30余名で，数名の児童が選択しなかったということから，図形の向きによっては（特に，典型的な上向きに置かれていない場合には），それを三角形と判断できない児童が数名いる。

エ．図形⑦，⑧を選択した児童が60%余で，約40%の児童が選択しなかったことから，図形の大きさによっては（特に，最も長い辺に対する高さが極端に小さく細長い場合には），それを三角形と判断できない児童が4割近くいる。

オ．図形④の凹四角形を選択した児童が約30%いることや，図形⑦，⑧の細長い三角形を選択しなかった児童が約40%いることから，児童が図形を同定する際の視点としては，頂点や辺などの構成要素の数よりも「概形としてのかたち」という全体的な見えの方が優位である。

### (3) 方法M3について

そして，方法M3では，数学理解の階層的水準と児童・生徒の理解の程度の実態把握を基に，算数・数学科の授業で児童・生徒が学習する内容についての教材研究を行い，3つの学習段階を具体化し，児童・生徒の個人的構成と社会的構成の両方の活動を授業に位置づける（中原，1995, pp.322-328)。実際の算数・数学科の授業はこれら3つの段階に沿って直線的に展開するとは限ら

ないので，１つの単元の学習においてこれら３つの段階が繰り返されながら児童・生徒の数学理解が深化していくように授業を構成していかなければならない。

ここでは，その具体例として，上述の事前調査によって明らかになった小学校第２学年の児童の三角形についての理解の実態を踏まえて行われた，単元「三角形と四角形」の授業構成を以下に述べる（小山他，2002, pp.90-92)。

指導計画（全11時間）

第１次　ジオボードで形をつくろう　…２時間

第２次　三角形・四角形を調べよう　…５時間

第３次　直角のある図形をつくろう　…４時間

**(1) 第１次の2/2時の授業構成**

実態調査から明らかになった「図形を概形で見る見方」から，本単元の目標である「図形を構成要素の数で見る見方」へと，児童の図形理解の深化を促すために，次の２つの点に着目して授業構成を行う。

① 第１学年で獲得した，図形をその機能で見る見方や概形で見る見方といった現在の自分自身の図形に対する認識をもとに，図形を分類・操作することができるような課題追究の場（学習状況）を工夫すること［主として個人的構成活動］

② 図形の多様な認識のよさを共有し，吟味することができるような社会的相互作用の場（学習状況）を工夫すること［主として社会的構成活動］

1）課題の提示と課題追究の場の工夫

本時（第１次の2/2時）においては，前時までのジオボード，ジオペーパーによる図形の構成活動［直観的段階］でつくりだされた多様な三角形,四角形の分類の仕方を課題として取り上げる。この段階における図形のとらえ方は児童によって個々ばらばらであり，そのズレは児童の今までの図形の見方の違いである，と考えられる。図形の多種多様な分類の仕方を課題として取り上げることで，図形の見方を児童自身にはっきりと意識させ［反省的段階］，授業後に，新たに加わった見方は何か，それによって図形のとらえ方はどう変わったかを明確にさせる［分析的段階］ことができるようにする。

2）図形の多様な認識を共有し，吟味することができる社会的相互作用の場の工夫

児童が分類する図形のとらえ方の中に数学的知識を発見させ，より価値ある数学的知識へと高めさせていくためには，児童から出てくる多様な分類の視点を意味づけたり，関連づけたりすることが大切である。そのための手だてとして，児童に多様な図形分類の視点を表出させ［反省的段階］，共通点や相違点を吟味させながら，全員が納得いく考えを創り出させる［分析的段階］ことが考えられる。

**(2) 第２次の3/5時の授業構成**

児童の凹四角形の理解の深化を促すために，自分自身の図形に対する認識を明らかにすることができる課題追究の場（学習状況）と，図形の多様な認識を共有し，吟味することができる社会的相互作用の場（学習状況）の２つに着目して，以下のようにして授業構成を行う。

1）課題の提示と課題追究の場の工夫

ア．児童に共有させる課題提示の場の工夫

本時（第２次の3/5時）においては，前時までのジオボードによる三角形や四角形の構成活動［直観的段階］でつくりだされた凹四角形のとらえ方を課題として取り上げる。この図形のとらえ方は児童によって個々ばらばらであり，そのズレは児童の図形の見方の違いである，と考えられる。凹四角形のとらえ方を課題として取り上げることで，図形の見方を児童自身にはっきりと意識させ［反省的段階］，授業後に，新たに加わった見方は何か，それによって図形のとらえ方はどう変わったかを明確にさせる［分析的段階］ことができるようにする。

イ．多様な学習具による課題追究活動の場の工夫

児童に「凹四角形は三角形か四角形か」という課題について，自分自身の図形の見方をはっきりさせるためには，学習具を限定せずに追究させる［直観的段階］ことが大切である。例えば，辺の数に着目した児童にとっては，辺の数がよく分かる数え棒で図形をつくりかえることで自分の見方がはっきりするであろう。また，課題の条件にあう他の図形を構成しようとする児童にとっては，頂点の位置を自由に変えて図形をつくることができる「ジオボード」や「ジオペーパー」という学

習具をつかった方が分かりやすいであろう。このように，多様な学習具を児童が自己選択できるように場を工夫することで，自身の図形のとらえ方を明確にさせることができる。

2）多様な凹四角形の認識を共有し，新たな図形認識の観点から凹四角形を吟味することができる社会的相互作用の場の工夫

児童が意味づける凹四角形のとらえ方の中に数学的知識を発見させ，より価値ある数学的知識へと高めさせていくためには，児童から出てくる多様な発想を意味づけたり，関連づけたりすることが大切である。そのための手だてとして，児童に図形の多様なとらえ方を表出させ［反省的段階］，共通点や相違点を吟味させながら，全員が納得いく考えを創り出させる［反省的段階］ことが考えられる。

## 7．おわりに

本稿では，教師にとって有効な視点として，数学理解の２軸過程モデルに基づく算数・数学科の授業構成の原理（P1～P3）と方法（M1～M3）を提案した。

**《授業構成の原理》**

P1: 算数・数学の理解を，全か無かというように二者択一的にではなく，複雑な力動的過程としてとらえること［複雑な力動的過程としての理解過程］

P2: 算数・数学の理解の深化を促進するために，理解の階層的水準と学習段階の２軸を設定すること［理解の階層的水準と学習段階の設定］

P3: 教室で行われる算数・数学の教授学習活動としての授業においては，児童・生徒の個人的構成と社会的構成の両方の活動を重視すること［個人的構成と社会的構成の重視］

**《授業構成の方法》**

M1: 算数・数学科の授業で児童・生徒が学習する内容について，算数・数学科の学習指導要領などのカリキュラムを分析することによって，数学理解の階層的水準を明らかにすること［理解の階層的水準の明確化］

M2: 算数・数学科の授業で児童・生徒が学習する内容に対する理解の程度について，学習内容に応じた診断的評価や事前調査などを行うことによって，その実態を把握すること［理解の程度の実態把握］

M3: 数学理解の階層的水準と児童・生徒の理解の程度の実態把握を基に，算数・数学科の授業で児童・生徒が学習する内容についての教材研究を行い，３つの学習段階を具体化し，児童・生徒の個人的構成と社会的構成の両方の活動を位置づけること［理解の学習段階の具体化］

これらの原理と方法の妥当性と有効性は，これまで筆者が行ってきた理論的研究と実践的研究によってある程度は例証されているが，まだ限られた数の事例研究にとどまっている。したがって，事例研究の数を増やしてこれらの原理や方法の有効性を実証的・実践的に検討し，より具体的でより精緻なものにすることが今後の課題である。

**附　記**　本稿は，平成17年度科学研究費補助金基盤研究（C）「数学理解の２軸過程モデルに基づく算数科授業改善に関する実践的研究」（研究代表者　小山正孝，課題番号 16530591）の研究費補助を受けて行われた研究の成果の一部である。

### 引用・参考文献

小山正孝（1992），「数学教育における理解のモデルについて」，岩合一男先生退官記念出版会編『数学教育学の新展開』，聖文社，pp.172-184.

小山正孝（1997），「数学学習と理解過程」，日本数学教育学会編『学校数学の授業構成を問い直す』，産業図書，pp.135-149.

小山正孝（2001），「教科教育学研究パラダイムの検討－数学教育学を事例として－」，日本教科教育学会編『新しい教育課程の創造－教科学習と総合的学習の構造化－』，教育出版，pp.164-174.

小山正孝，中原忠男，武内恒夫，赤井利行，宮本泰司，脇坂郁文（2000），「算数学習における理解過程に関する研究（Ⅰ）－数学理解の２軸過程モデルの理論的再検討－」，広島大学教育学部・関係附属学校園共同研究体制『研究紀要』，第28号，pp.117-123.

小山正孝，礒部年晃，中原忠男，赤井利行，中村武司（2002），「算数学習における理解過程に関する研究（Ⅱ）－第２学年における三角形と四角形の概念を中心に―」，広島大学学部・附属

学校共同研究体制機構『広島大学学部・附属学校共同研究紀要』，第30号，pp.89-98.

小山正孝，赤井利行，中原忠男，中村武司，礒部年晃（2003），「算数学習における理解過程に関する研究（Ⅲ）－第５学年における「台形の面積の求め方」を中心に－」，広島大学学部・附属学校共同研究体制機構『広島大学学部・附属学校共同研究紀要』，第31号，pp.115-122.

中原忠男（1995），『算数・数学教育における構成的アプローチの研究』，聖文社．

中原忠男（1999），「数学教育における構成主義的授業論の研究（Ⅱ）－「数学学習の多世界パラダイム」の提唱－」，全国数学教育学会誌『数学教育学研究』，第５巻，pp.1-8.

文部省（1999a），『小学校学習指導要領解説－算数編－』，東洋館出版社．

文部省（1999b），『中学校学習指導要領（平成10年12月）解説－数学編－』，大阪書籍．

Koyama, M. (1993), Building a Two-Axes Process Model of Understanding Mathematics, *Hiroshima Journal of Mathematics Education*, Vol. 1, pp.63-73.

Koyama, M. (1995), Characterizing Eight Modes of the Transcendent Recursive Model of Understanding Mathematics, 全国数学教育学会誌『数学教育学研究』，第１巻，pp.19-28.

Koyama, M. (1997), Research on the Complementarity of Intuition and Logical Thinking in the Process of Understanding Mathematics, *Hiroshima Journal of Mathematics Education*, Vol. 5, pp.21-33.

Pirie, S. and Kieren, T. (1989), A Recursive Theory of Mathematical Understanding, *For the Learning of Mathematics*, Vol. 9, No. 3, pp.7-11.

Sfard, A. (1991), On the Dual Nature of Mathematical Conceptions: Reflections on Processes and Objects as Different Sides of the Same Coin, *Educational Studies in Mathematics*, Vol.22, pp.1-36.

Sierpinska, A. and Lerman, S. (1996), Epistemologies of Mathematics and of Mathematics Education. In Bishop, A. et al. (eds.), *International Handbook of Mathematics Education*, Kluwer Academic Publishers, pp.827-876.

Skemp, R. R. (1976), Relational Understanding and Instrumental Understanding, *Mathematics Teaching*, No.77, pp.20-26.

van Hiele, P. M. (1986), *Structure and Insight: A Theory of Mathematics Education*, Academic Press.

## Principles and Methods for Designing Mathematics Lessons Based on the Two-Axes Process Model of Understanding Mathematics

by

Masataka KOYAMA
Department of Mathematics Education, Hiroshima University

The purpose of this paper was to identify the principles and methods for designing mathematics lessons based on the Two-Axes Process Model of understanding mathematics. As a result of theoretical and practical studies, three principles (Ps) and three methods (Ms) were identified for designing lessons to facilitate and deepen students' understanding of mathematics, as follows: P1 - recognizing mathematics understanding as a dynamic process; P2 - setting up clear levels of understanding and learning stages at a level; P3 - incorporating students' individual constructions and social construction; M1 - making clear levels of understanding related to a certain mathematical topic; M2 - assessing and evaluating students' understanding at a readiness; and M3 - planning in detail three learning stages as a dialectic process of individual and social constructions in a lesson.