

中学校数学科における「数と式」の学習指導の改善*

小山正孝**

要 約

平成20年3月28日に新中学校学習指導要領が告示され、その中学校数学科の解説が平成20年7月15日に公表された。そして、平成20年8月29日には、平成20年度全国学力・学習状況調査の結果が公表された。本稿では、こうした一連の流れを受けて、新中学校学習指導要領の数学科における「数と式」領域に焦点化し、その学習指導の改善について考察することとした。そのため、まず、新中学校学習指導要領の数学科の要点を指摘し、「数と式」指導の目標と内容を概観した。次いで、平成20年度全国学力・学習状況調査の結果から、「数と式」の内容に関する生徒の実態を中心に学習指導の成果と課題を確認した。そして、これらを踏まえ、(1)数学科における学習指導の基本的な考え方、(2)数の拡張と四則計算、(3)文字式と方程式、(4)文字式に表したり読み取ったりすること、(5)文字式でとらえ説明することの5つを視点として、中学校数学科における「数と式」の学習指導を改善するために、どのような考え方で何をなすべきか考察した。

キーワード：中学校学習指導要領、「数と式」領域、学習指導、授業改善

1. はじめに

平成18年2月22日に教育基本が改正され、平成19年6月27日には学校教育法の一部改正が行われた。そして、平成20年1月17日には、中央教育審議会が「学習指導要領等の改善について」答申を行った（中央教育審議会，2008）。これらの法改正や答申を受けて、平成20年3月28日に学校教育法施行規則が改正されるとともに、新しい中学校学習指導要領が告示され、平成24年4月1日から全面実施されることとなった（文部科学省，2008a）。また、平成20年6月13日には「移行措置」に関する規定等が公布・公示され、中学校数学科については全面実施に先だって、平成21年4月1日から移行措置として、数学科の内容を前倒して実施されることとなった。

その後、平成20年7月15日に新中学校学習指導要領の数学科の解説が公表された（文部科学省，2008b）。そして、平成20年8月29日には、平成19年度の第1回に引き続き実施された平成20年度全

国学力・学習状況調査の結果が公表された。

日本数学教育学会では、平成20年3月に新中学校学習指導要領が告示されたことを受けて、日本数学教育学会誌『数学教育』において「新教育課程に向けて」という特集を組み、学会誌第5号には永田（2008）、相馬（2008）、山口（2008）、第7号には正田（2008）、熊倉（2008）がそれぞれ掲載されている。

永田（2008）は、「なぜそのように変わるのか」を考えることを忘れては、中学校数学科の指導そのものが目指すべき方向を見失いかねない（p.14）との考えから、中学校学習指導要領を改訂した際の基本的な考え方を中心に、新中学校学習指導要領が目指す数学教育について述べている。山口（2008）は、「今日の知識基盤社会は、「生きる力」や「リテラシー」の育成を教育に求めている」（p.29）との認識の下に、数学教育の改善のポイントとして5点を指摘し、それらの視点から新中学校学習指導要領の数学科について考察している。それに対して、正田（2008）は、日本数学

*平成20年9月5日受付，平成20年9月15日決定

**広島大学大学院教育学研究科

教育学会の前身である日本中等教育数学会が創設された1918年から2008年までの90年間を3つの時期に区分して、それぞれの時期における学習指導要領改訂を反省し、平成20年以降の《第4期への期待として、目標、内容、方法についてバランスのとれた検討がなされることが必要であり、そのために、「数学的活動」の適切な解釈、位置づけが重要であることを指摘》(p.10)している。

他方、相馬(2008)は、新中学校学習指導要領の数学科の実施に当たって、「習得」と「活用」の関連を心配し、これらを分離させたり、習得だけを先行させたりするのではなく、「習得」と「活用」をバランスよく、同時に組み込んでいく授業として「活用させながら習得させる授業」(p.23)を提案している。また、熊倉(2008)は、これまでに実施された調査研究の結果を参照しつつ、新中学校学習指導要領の数学科の5つの特徴に注目し、《それらを生かす指導として、(1)「必要性」を理解させる指導、(2)読み取り説明する活動を取り入れた指導、(3)具体的な場面での活用を取り入れた指導、(4)レポート作成を取り入れた指導》(p.18)の4点について検討している。

本稿では、新中学校学習指導要領にかかわる教育課程やその指導についてのこうした論考と重なる部分はあるが、主として中学校数学科における「数と式」の学習指導の改善について考察してみたい。そのため、まず、新中学校学習指導要領の数学科の要点を指摘し、「数と式」指導の目標と内容を概観する。次いで、平成20年度全国学力・学習状況調査の結果から、「数と式」の内容に関する生徒の実態を中心に学習指導の成果と課題を確認する。そして、これらを踏まえ、(1)数学科における学習指導の基本的な考え方、(2)数の拡張と四則計算、(3)文字式と方程式、(4)文字式に表したり読み取ったりすること、(5)文字式でとらえ説明することを視点として、中学校数学科における「数と式」の学習指導を改善するために、どのような考え方で何をなすべきか考察することとする。

2. 「数と式」領域の概要

(1) 新中学校学習指導要領の数学科の要点

新中学校学習指導要領の数学科の第一の要点は、

その改善の基本方針にある。平成20年1月の中教審答申に示された《小・中・高等学校を通じて、発達の段階に応じ、算数的活動・数学的活動を一層充実させ、基礎的・基本的な知識・技能を確実に身に付け、数学的な思考力・表現力を育て、学ぶ意欲を高めるようにする》という改善の基本方針を踏まえて改訂が行われている(文部科学省、2008b, p.3)。

第二の要点は、中学校数学科の目標についてである。中学校数学科の目標については、a) 基礎的・基本的な知識及び技能を習得すること、b) それらを活用して問題を解決するために必要な思考力、判断力、表現力等をはぐくむこと、c) 数学の学習に主体的に取り組む態度を養うことの3つにバランスよく取り組むことが必要であると考え、①数学的活動の楽しさや数学のよさを実感することができるようにすること、②事象を数理的に考察し表現する能力を高めること、③活用して考えたり判断したりしようとする態度を育てることを主眼に、目標の改善が図られている(文部科学省、2008b, pp.7-8)。

第三の要点は、中学校数学科の内容についてである。中学校数学科の内容については、

- 《ア) 日常生活や社会において自立的に生きる基盤として不可欠であり常に活用できるようになっていることが望ましい内容
- イ) 義務教育以降の様々な専門分野における学習を深めていく上で共通の基盤として習得しておくことが望ましい内容

の二つの視点》(文部科学省、2008b, p.36)で内容が構成されている。より具体的には、領域構成を「数と式」、「図形」、「数量関係」の3領域(文部省、1999)から「数と式」、「図形」、「関数」、「資料の活用」の4領域に改めるとともに、各学年の内容に〔数学的活動〕(①数や図形の性質などを見いだす活動、②数学を利用する活動、③数学的に説明し伝え合う活動)が位置付けられている。

そして、第四の要点は、数学的活動や言語活動を充実し、確かな学力を確立するために、年間の標準授業時数が中学校では第1学年140単位時間、第2学年105単位時間、第3学年140単位時間とな

り、前回の平成10年12月改訂（文部省，1999）よりも第1学年と第3学年で週当たり1単位時間の増となった点である。

(2) 「数と式」の指導目標の概観

「数と式」の内容は、日常生活や社会における利用、数学科の他領域の学習などの基盤をなすものである。中学校数学科における「数」の指導目標は、次のア、イとなっている（文部科学省，2008b，pp.40-41）。

- ア 数の範囲の拡張と数の概念を理解する
- イ 新しく導入された数の四則計算の意味と方法を理解し、その計算ができる

「式」の指導目標としては、次のア～ウが示されている（文部科学省，2008b，pp.41-42）。

- ア 文字のもつ意味、特に変数の意味を理解する
- イ 文字を用いた式に表現したり、文字を用いた式の意味を読み取ったりする能力を育成する
- ウ 文字を用いた式の計算や処理に関する能力を育成する

(3) 「数と式」の指導内容の概観

中学校数学科では、「数」について次の内容を取り扱う（文部科学省，2008b，pp.43-44）。

- ア 第1学年
 - ・具体的な場面を通して正の数と負の数について理解し、その四則計算ができるようにするとともに、正の数と負の数を用いて表現し考察することができるようにする。

- イ 第3学年
 - ・正の数の平方根について理解し、それを用いて表現し考察することができるようにする。
（自然数の素因数分解を含む）

「式」については、次の内容を取り扱うこととなっている（文部科学省，2008b，pp.44-45）。

- ア 第1学年
 - ・文字を用いて数量の関係や法則などを式に表現したり式の意味を読み取ったりする能力を培うとともに、文字を用いた式の計算ができるようにする。
 - ・方程式について理解し、一元一次方程式を用いて考察することができるようにする。

イ 第2学年

- ・具体的な事象の中に数量の関係を見だし、それを文字を用いて式に表現したり式の意味を読み取ったりする能力を養うとともに、文字を用いた式の四則計算ができるようにする。
- ・連立二元一次方程式について理解し、それを用いて考察することができるようにする。

ウ 第3学年

- ・文字を用いた簡単な多項式について、式の展開や因数分解ができるようにするとともに、目的に応じて式を変形したりその意味を読み取ったりする能力を伸ばす。
- ・二次方程式について理解し、それを用いて考察することができるようにする。

以上のように、「数と式」指導の目標と内容については、前回（文部省，1999）のそれと大きな変更はないと思われるが、次のような特徴が相違点として指摘されている（文部科学省，2008b）。

《第1学年において、数量の関係や法則などを文字を用いて式に表現したり、式の意味を読み取ったりする能力を培うこと、第2，3学年において、文字を用いた式で数量や数量の関係をとらえ説明することができること、目的に応じて簡単な式を変形したり、その意味を読み取ったりする能力を養い伸ばすことが明示された。》（p.45）

《また、第1学年において、数の集合と四則計算の可能性を理解すること、大小関係を不等式を用いて表すこと、一元一次方程式の学習に関連して簡単な比例式を解くこと、第3学年において、解の公式を用いて二次方程式を解くことが新たに導入された。》（p.46）

3. 平成20年度全国学力・学習状況調査の結果

平成20年4月22日に、平成19年度に引き続き、平成20年度全国学力・学習状況調査が全国の国公私立の小学校第6学年の児童（約116万人）と中学校第3学年の生徒（約108万人）を対象に、国語科、算数・数学科について実施された。そして、その調査の結果が平成20年8月29日に公表された（文部科学省初等中等局学力調査室ほか，2008）。ここでは、その調査結果から、「数と式」の内容に関する生徒の実態を中心に学習指導の成果と課

題を確認しておきたい。

(1) 学力調査結果のポイント

国語科、算数・数学科についての全般的な結果として、次の2点が指摘されている(文部科学省初等中等局学力調査室ほか, 2008, p.2)。

- 今回出題している学習内容に関しては、知識・技能の定着に一部課題が見られ、知識・技能を活用する力に課題がある。
- 20年度調査は、19年度と比べるとやや難しい内容となっており、各教科の平均正答率が低くなっているが、過去の調査と同一の問題の正答状況等を踏まえると、学力が低下しているとは言えない。

中学校数学科の学習内容に関する調査結果のポイントはこれらと同様であるが、次の2点が指摘されている(p.7)。

- 数学A(知識)について、平均正答率が63.9%であり、今回出題した学習内容の知識・技能の定着に一部課題が見られる。
- 数学B(活用)について、平均正答率が50.0%であり、今回出題した学習内容に係る知識・技能を活用する力に課題がある。

(2) 学習状況調査結果のポイント

児童生徒質問紙による学習状況の調査結果については、次の2点に注目したい(p.16)。

- 算数・数学の勉強が好きな児童生徒の割合に、増加傾向がうかがえる。
- 算数・数学の授業で学習したことを普段の生活の中で活用できないか考える児童生徒の割合は、19年度と比べやや高くなっている。

また、学力と学習・指導との関連については様々な分析が行われているが、とりわけ次の4つの結果に注目したい(pp.17-18, p.30)。

- 算数・数学の問題の解き方が分からないとき、あきらめずにいろいろな方法を考える児童生徒、算数・数学の授業で、公式やきまりのわけ(根拠)を理解しようとする児童生徒の方が、算数・数学の正答率が高い傾向が見られる。
- 授業で自分の考えを発表する機会があると思う児童生徒の方が、正答率が高い傾向が見られる。
- 平均正答率が5ポイント以上全国平均を上回

る学校(A群)の方が、平均正答率が5ポイント以上全国平均を下回る学校(B群)より、児童生徒の思考を深めるような発問や指導をしていると回答している割合が高い傾向が見られる。

- 平均正答率が5ポイント以上全国平均を上回る学校(A群)の方が、平均正答率が5ポイント以上全国平均を下回る学校(B群)より、算数・数学の指導として、実生活における事象との関連を図った授業を行った割合が高い傾向が見られる。

(3) 「数と式」の内容に関する調査結果

以下では、中学校数学科における「数と式」の内容に関する調査問題に焦点化し、その結果をみてみよう。なお、各問題項目の()内の割合は正答率を表す。

中学校数学A問題

- 1(1) 異分母分数の減法の計算 (85.6%)
- 1(2) 最低気温の差を求める (77.6%)
- 1(3) 指数を含む正の数と負の数の計算 (71.8%)
- 2(1) 整式の加法と減法の計算 (82.9%)
- 2(2) 文字式の値を求める (71.6%)
- 2(3) 事象を式に表す (72.9%)
- 2(4) 文字式を目的に応じて変形する (55.0%)
- 2(5) 文字式の意味を読み取る (32.7%)
- 3(1) 一次方程式を解く (78.4%)
- 3(2) 一次方程式を立式する (60.5%)
- 3(3) 二元一次方程式の解の意味の理解 (59.1%)
- 3(4) 連立二元一次方程式を解く (77.3%)

中学校数学B問題

- 1 事象の数学的な解釈と判断(身長)の推定
 - 1(1) 言葉の式に代入して求める (72.7%)
 - 1(2) 女性の身長)の差を求める (49.2%)
 - 1(3) 男性と女性の身長)の差についての判断とその理由を説明する (19.6%)
- 2 発展的に考え、予想すること(位を入れかえた数)
 - 2(1) 問題場面を理解する (76.4%)
 - 2(2) 正しいことの説明を完成させる (39.7%)
(この問題の無解答率は、26.8%)
 - 2(3) 和を差に変えて、予想を述べる (49.2%)
(この問題の無解答率は、36.1%)

以上のように、数学A(知識)問題については、異分母分数の減法の計算(85.6%)、整式の加法と

減法の計算(82.9%)は比較的良好にできているが、とりわけ文字式の意味を読み取ること(32.7%)、文字式を目的に応じて変形すること(55.0%)については課題があることが分かる。他方、数学B(活用)問題については、解答時間不足の影響もあるが、「2(位を入れかえた数)」という「数と式」の活用問題では、正しいことの説明を完成させること(39.7%)、和を差に変えて、予想を述べること(49.2%)に課題があり、無解答率(それぞれ26.8%, 36.1%)が高いということが分かる。また、「1(身長を推定)」という「数量関係」の活用問題では、与えられた言葉の式をもとに、女性の身長を求めると(49.2%)、男性と女性の身長差についての判断とその理由を説明すること(19.6%)に課題があることが分かる。

4. 「数と式」の学習指導の改善

これらのことを踏まえ、以下では、5つ—(1)数学科における学習指導の基本的な考え方、(2)数の拡張と四則計算、(3)文字式と方程式、(4)文字式に表したり読み取ったりすること、(5)文字式でとらえ説明すること—を視点として、中学校数学科における「数と式」の学習指導の改善について考察してみよう。

(1) 数学科における学習指導の基本的な考え方

第2節で述べたように、新中学校学習指導要領の数学科においては、数学的活動を一層充実させ、a) 基礎的・基本的な知識及び技能を習得すること、b) それらを活用して問題を解決するために必要な思考力、判断力、表現力等をはぐくむこと、c) 数学の学習に主体的に取り組む態度を養うことの3つにバランスよく取り組むことが必要であると考えられている。

数学的活動とは、《生徒が目的意識をもって主体的に取り組む数学にかかわりのある様々な営みを意味している。》(文部科学省, 2008b, p.17)。このような意味での数学的活動については、それが《基本的には問題解決の形で行われる》(p.63)こと、《数学的活動は、数学を学ぶための方法であるとともに、数学的活動をすること自体を学ぶという意味で内容でもある。また、その後の学習や日常生活において、数学的活動を生かすことが

できるようにすることを目指しているという意味で、数学的活動は数学を学ぶ目的でもある。》(p.63, 下線は引用者)というように、数学的活動が方法・内容・目的の三重の側面をもつことが述べられている。

とりわけ、各学年の内容に位置付けられた〔数学的活動〕は、①数や図形の性質などを見いだす活動、②数学を利用する活動、③数学的に説明し伝え合う活動の3つであり、③の活動は①、②の活動と《一連のものとして扱われる必要がある》(文部科学省, 2008b, p.64)とされている。

数学的活動は基本的には問題解決の形で行われる。一般に問題を数学的に解決するとは、日常生活における事象に限らずより広い事象を数理的に考察し処理することであり、その数理的な考察・処理には次の2つがある(小山, 2003)。

ア 現実世界の問題を数学的に定式化し、数学的手法によって解を求め、これを現実に照らして解釈すること

イ 数学世界の中での関係をより簡潔な使いやすい形に表現し、手際よい方法で能率的に処理すること

このようにとらえると、上述の内容に位置付けられた〔数学的活動〕の①はイ、②はアとそれぞれ対応づけられる。したがって、新中学校学習指導要領の数学科において強調されている〔数学的活動〕の特徴は、これら2つの問題解決の過程に、③数学的に説明し伝え合う活動を組み込んでいる点にあるといえる。

このような数学的活動のとらえ方やその構造化については、正田(2008)の歴史的視点に立った論考や長崎ほか(2008)の4つの「算数・数学の力」(①算数・数学を生み出す力、②算数・数学を使う力、③算数・数学で表す力、④算数・数学で考え合う力)の構造化に関する研究を踏まえて、さらに明確にかつ精緻にする必要がある。しかしながら、本稿では、上で述べたことを中学校数学科における学習指導の基本的な考え方とし、第2節や第3節でみてきた事柄を踏まえて、「数と式」の学習指導の改善について考察することとする。

(2) 数の拡張と四則計算

第2節でみたように、中学校数学科では第1学

年で正の数と負の数, 第3学年で正の数の平方根を学習し, 数の範囲を拡張していくとともに, それらの四則計算の意味と方法を理解し, 計算ができるようにする。

中学校第1学年では, 小学校算数科における整数(0と自然数), 小数及び分数とその四則計算についての学習経験を踏まえて, 数の範囲を正の数と負の数にまで拡張する。このとき, 小学校算数科において, なぜ小数や分数が必要になったか, 小数や分数を学習して便利になったことは何か, それでもできないことは何か, などを生徒に振り返らせたい。こうした振り返りをさせて, 正の数と負の数を学習することによって, 減法がいつでも可能になるように数の範囲を拡張することの必要性を理解し, 正の数と負の数をいえることによって加法と減法を統一的に表すことができるというよさを実感できるであろう。そして, 数の範囲を拡張するときの考え方や数の集合と四則計算の可能性を理解し, それを問題解決に活用していこうとする積極的な態度もはぐくまれるであろう。

このような学習経験と数の範囲を拡張するときの考え方は, 第3学年で正の数の平方根について学習する際にも生かされるにちがいない。例えば, 1目盛りが1cmの方眼を使って, 生徒にいろいろな面積の正方形をかかせることを通して, 面積が 4cm^2 や 9cm^2 の正方形は簡単にかけること, 面積が 2cm^2 の正方形をかくことはできるがその1辺の長さが何cmかはよくわからないことなどに気付かせたい。このような問題意識が正の数の平方根という新しい数の必要性に結びつき, 正の数を2乗する(平方する)ことの逆演算を考え, 数の範囲を拡張していくときの考え方の理解を一層深めることにつながるであろう(小山, 2003, pp.100-101)。

平成20年度全国学力・学習状況調査の調査結果によれば, 第3節でみたように, 数学A(知識)調査の「 $1(2)7^{\circ}\text{C}$ と -3°C の差を計算して最低気温の差を求める問題」の正答率は77.6%である。このことから, 正の数と負の数の学習指導において, 具体的な事象と関連付けたり, 数直線を用いたりして, 正の数と負の数の意味や2つの数の差($7-(-3)$)を理解できるようにする必要があると考えられる。また, 同調査の「 $1(3)2 \times (-3^2)$

を計算する問題」の正答率は71.8%である。このことから, 指数を含む正の数と負の数の計算の学習指導においては, 例えば, -3^2 を「3を2乗して負の符号-(マイナス)をつける。」と説明するなど, 式から計算の手順を読み取り, 言葉で説明する活動を取り入れたり, 符号について誤りのある計算例を取り上げ, 指数の意味を確認した上で, 誤りを直す活動を取り入れたりする必要があると考えられる(文部科学省初等中等局学力調査室ほか, 2008, pp.196-197)。

(3) 文字式と方程式

第2節でみたように, 中学校数学科では第1学年で文字式の計算と一元一次方程式, 第2学年で文字式の四則計算と連立二元一次方程式, 第3学年で文字式の展開や因数分解と二次方程式を学習し, 変数としての文字の意味や方程式とその解の意味を理解していくとともに, 文字式の計算や処理ができるようにする。

新小学校学習指導要領の算数科においては, スパイラルな教育課程を編成するという考え方によって, a, x などの文字を用いた式を小学校第6学年で学習することになった(文部科学省, 2008c)。文字には, それを用いることによって, 数量及び数量の関係や法則を一般的かつ簡潔に表すことができるというよさがある。また, 数量の関係を文字を用いて方程式(一元一次方程式, 連立二元一次方程式, 二次方程式)を立式すれば, それが表す具体的な意味を離れて, 形式的に処理することができるというよさもある。

文字式の四則計算の学習指導においては, その四則計算も, 小学校算数科において学習した数と同じように, 加法及び乗法の交換法則や結合法則, 分配法則を活用することによってできることを理解させたい。そのためには, 中学校第1学年において, 例えば, $2(3x+5)-4(x-2)$ の計算過程のどこでどのような法則が用いられているかを指摘させるとよいであろう。さらに, 第1学年で, 例えば, 一元一次方程式 $2(5x+1)=62$ を解くことを学習する際にも, その等式変形の各ステップで4つの「等式の性質」のうちどの性質を用いているかをはっきりと意識させたい。このような「等式の性質」を活用する考え方は, 第2学年で

連立二元一次方程式を解くときにも生きてくるからである(小山, 2003, p.101).

さらに, 方程式の学習指導においては, 複雑なことや未知の事柄を既知の事柄や方法に帰着させる考え方を活用できるように指導することが大切である. 例えば, 第2学年で連立二元一次方程式を解くことを考えるとき, それを第1学年で学習した既知の一元一次方程式に帰着させることができれば解くことができる. したがって, 「等式の性質」を用いて1つの文字を消去して, 文字を1つだけ含む一元一次方程式を導き出すことを考えるのである. また, 第3学年で式 $(a+b)(c+d)$ の展開を考える際に, $a+b$ を M と置いて $M(c+d)$ を考えるのも, 既知の方法に帰着させる考え方である. さらに, 第3学年で二次方程式を解くことを考えるときも, この既知の事柄や方法に帰着させる考え方を活用できるようにしたい. 例えば, 二次方程式 $x^2-6x+8=0$ を, 因数分解することによって $(x-2)(x-4)=0$ というように2つの一次式の積が0なるから, $x-2=0$ または $x-4=0$ と考えて, 既知の一次方程式の解法に帰着させることができる. また, この二次方程式 $x^2-6x+8=0$ を, 平方の形 $(x-3)^2=1$ に変形することによって, 既知の平方根を求めることに帰着させることもできる. このような考え方は, 二次方程式の解の公式につながるもので, 生徒自身がこのような考え方を活用して二次方程式の解の公式の学習ができるように指導したい(小山, 2003, p.103).

平成20年度全国学力・学習状況調査の調査結果によれば, 第3節でみたように, 数学A(知識)調査の「2(1) $(5x-8)-2(x-3)$ を計算する問題」の正答率は82.9%である. このことから, 文字式の計算の学習指導においては, 計算の結果が正しいかどうかを, 具体的な数を代入して確かめる習慣を生徒に身に付けさせる必要があると考えられる(文部科学省初等中等局学力調査室ほか, 2008, p.199). また, 数を代入して文字式の値を求める「2(2) $a=4, b=-3$, のとき, 式 ab の値を求める問題」の正答率は71.6%である. このことから, 数を代入して文字式の値を求めることの学習指導においては, 例えば, $2n, ab$ など乗

法の記号を省略して書かれた式を, それぞれ, $2 \times n, a \times b$ と読み解くことをさせる必要があると考えられる(文部科学省初等中等局学力調査室ほか, 2008, p.200).

さらに, 同調査の「2(4) 等式 $x+2y=6$ を y について解く問題」の正答率は55.0%である. これと同様の問題が平成13年度小中学校教育課程実施状況調査でも出題されている. その問題は, 長方形の図が示され, $l=2(a+b)$ を a について解く問題であり, その通過率は40.2%であった(国立教育政策研究所教育課程研究センター, 2003, p.108). こうした結果から, 文字式を目的に応じて変形することの学習指導においては, 文字式をできるだけ具体的な事象と関連付けてとらえられるようにするとともに(文部科学省初等中等局学力調査室ほか, 2008, p.203), 例えば, 「等式…を a について解け」といった数学独特の言い回しの意味を理解できるように配慮する必要があると考えられる.

(4) 文字式に表したり読み取ったりすること

新中学校学習指導要領の数学科においては, 第2節でみたように, 「数量の関係や法則などを文字を用いて式に表現したり, 式の意味を読み取ったりする能力」を培い, 養い伸ばすことが明示されている. 中学校数学科では数量の一般的な関係や法則を文字式に表したり, 表された文字式からその意味を読み取ったりして, そのよさを実感し, 文字式を積極的に活用できるようになることが大切だと考えられるからである.

平成20年度全国学力・学習状況調査の調査結果によれば, 第3節でみたように, 数学A(知識)調査の「2(3) n を自然数とするとき, いつでも奇数になる式を選ぶ問題」の正答率は72.9%である(文部科学省初等中等局学力調査室ほか, 2008, p.201). また, 同調査の「2(5) $3a+4b$ で表される事象を選ぶ問題」の正答率は32.7%である(p.204). これらの結果から, 事象を文字式に表すこと, とりわけ文字式の意味を読み取ることに課題があることが分かる.

新中学校学習指導要領の数学科の解説では, 第1学年で「文字式を用いて表したり読み取ったりする」ことの例が, 美術館の入館料を題材にして

示されている(文部科学省, 2008b, p.73). これとは別に, 平面図形の面積の求め方を題材にして, 第2学年で「文字式を用いて表したり読み取ったりする」ことの例が考えられる.

例えば, 生徒は三角形の面積の求め方を小学校算数科で学習しており, 三角形の面積は(底辺)×(高さ)÷2で求められることを知っている. そこで, 中学校数学科においては, こうした学習を踏まえて, 文字を使って三角形の面積を S , 底辺の長さを b , 高さを h とすると, $S = \frac{1}{2}bh$ と表すことができるようにする. そして, この三角形の面積を求める公式(文字式)を, 「等式の性質」を用いて変形することによって, 面積 S と底辺の長さ b がわかっている場合に, 高さ h を求める式 $h = \frac{2S}{b}$ を導くこと(h について解くこと)ができるようにする. さらに, 三角形の面積の公式 $S = \frac{1}{2}bh$ は, 括弧を用いたり交換法則や結合法則を用いたりして, $S = \frac{1}{2}(bh)$, $S = \left(\frac{1}{2}b\right)h$, $S = \left(\frac{1}{2}h\right)b$, $S = 2\left(\frac{1}{2}h\right)\left(\frac{1}{2}b\right)$ などと, 異なった表し方をすることができる. これらの異なった文字式が, それぞれどのような求め方を表しているかを生徒に読み取らせ, それを図にかいたり三角形の紙を折ったりする活動を通して理解できるようにする. このような活動を通して, 生徒が, 既知の長方形に帰着させて三角形の面積を求めるときのいろいろな求め方を文字式に表したり, 文字式からそれぞれの求め方を読み取ったりできるように指導することが大切である(小山, 2003, p.103).

(5) 文字式でとらえ説明すること

このように「文字式を用いて表したり読み取ったりする」ことと密接に関連するが, 新中学校学習指導要領の数学科においては, 第2節でみたように, 「文字を用いた式で数量や数量の関係をとらえ説明することができること, 目的に応じて簡単な式を変形したり, その意味を読み取ったりする能力」を養い伸ばすことが明示されている. それは, 中学校数学科における言語活動の充実という基本方針のもとに, 「数と式」の学習指導においても論理的な思考力や数学的な表現力, コミュニケーション能力等をはぐくむことを目指してい

ると考えられる. 文字式は数学の言葉であり, それは思考にとっても表現にとっても重要である.

中学校数学科においては, 事象の中に数量の関係を帰納や類推によって見だし, それを文字式を用いて一般的に説明することができるように指導することが大切である. 例えば, 第2学年で, 「偶数と奇数の和は, 偶数か奇数か」と問い, $4+5=9$, $4+7=11$, $16+13=29$ などいくつかの具体的な例でやってみて, 帰納によって「奇数になりそうだ」と予想する. しかしながら, このようにしてすべてを確認することはできないから, 「いつでも?」という疑問が生まれる. この時点で, 文字式を用いて一般的に説明することの必要性が意識されるであろう.

偶数は2で割り切れる数, 奇数は2で割って1余る数という偶数・奇数の定義から, 2つの自然数を表す文字 m , n , を用いることによって, 一般的に偶数は $2m$, 奇数は $2n+1$ と表される. したがって, 偶数と奇数の和は $2m+(2n+1)$ と表され, これを変形すると $2(m+n)+1$ となり, $m+n$ は自然数だから, $2(m+n)+1$ は奇数である. このようにして, 偶数と奇数の和はいつでも奇数である, ということが説明できるように指導したい. ここでは, 偶数と奇数を同じ文字 m を用いて表すと, それは連続する2つの偶数と奇数の和しか表せないということに注意させたい. また, 上の文字式の変形は結合法則や分配法則に基づいていることや, 偶数になるか奇数になるかを示すことが目的であるから, その目的に応じて変形していることを理解させたい. また, 「偶数と奇数の和は, いつも奇数になる。」ことが説明できたことに満足せず, 条件を変えて, 偶数と偶数の和はどうか, 奇数と奇数の和はどうなるかを考えて, 文字式を用いて一般的に説明してみようとして生徒自ら試みるような, 自立的な探究学習ができるように指導したいものである(小山, 2003, p.102).

さらに, 第3学年では, 例えば, 連続する2つの自然数の2乗の差をいくつかの具体例で計算し, その結果から帰納によって, 「連続する2つの自然数の2乗の差は, 奇数である。」と予想し, この予想がつねに成り立つことを論理的に確かめるために, 次のように文字を用いて, 示すべき目的

に応じた文字式の変形をすることができるように指導することが大切である。連続する2つの自然数を、 $n, n+1$ とすると、2乗の差は $(n+1)^2 - n^2$ と表すことができる。これを、乗法公式を用いて計算すると、 $2n+1$ となる。よって、連続する2つの自然数の2乗の差は奇数であるといえる。さらに、このような説明における文字式の変形の過程を振り返って、 $2n+1 = (n+1)+n$ であることから、「連続する2つの自然数の2乗の差は、それら2つの数の和に等しい。」ということを読み取ることができるように指導したい。

このような、中学校第2, 3学年における「文字を用いた式でとらえ説明する」ことの具体的な例が、新中学校学習指導要領の数学科の解説にも示されている(文部科学省, 2008b, p.106, p.135)。

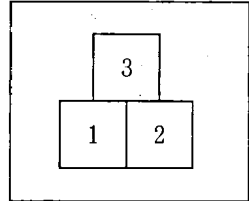
平成20年度全国学力・学習状況調査の調査結果によれば、第3節でみたように、数学B(活用)調査の「2. 発展的に考え、予想すること(2けたの自然数と、その数の十の位の数と一の位の数を入れかえた数の和)」の問題では、「2(2) その和は11の倍数になるという予想が正しいことの説明を完成させる問題」の正答率は39.7%である。また、同調査の「2(3) 和を差に変えて、予想を『～は・・・になる。』という形で答える問題」の正答率は49.2%である。そして、これらの問題の無解答率はそれぞれ26.8%, 36.1%となっている(文部科学省初等中等局学力調査室ほか, 2008, p.262)。

これらの結果から、中学校数学科における「数と式」の学習指導においては、「文字を用いた式でとらえ説明する」ことについての大きな課題を克服するための改善が求められているといえる。その学習指導の改善について考える際には、新中学校学習指導要領の数学科の解説に述べられている次のことに留意する必要がある。

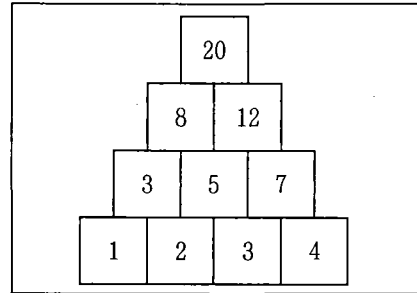
《文字を用いた式で数量及び数量の関係をとらえ説明できることを理解できるようにするためには、文字を用いた式を使って、ある命題が成り立つことを説明する場面で、文字を用いて表現したり、文字を用いた式の意味を読み取ったり、計算したりする学習が総合的に行われることが重要である。》(文部科学省, 2008b, p.106)

こうした学習が総合的に行われ得る例として、中学校第3学年の「数と式」領域にかかわる〔数学的活動〕として例示されている「速算法(簡便算)の仕組みを明らかにし、新たな速算法とその仕組みを考える活動」(文部科学省, 2008b, pp.156-157)がある。また、これとは別の例として、以下のような〔数学的活動〕が考えられる。

右図のような□の積み上げ方を基本にして壁を作り、その下段の□の中に数を入れ、上段の□の中に下の2つの数の和を入れていく。この



とき、例えば、下図のような4段の壁で、1段目の4つの□の中に{1, 2, 3, 4}の数を入れて(ただし、順番は自由)、2段目から4段目までの各□の中に、上で述べた約束に従って数を入れていく場合について考えてみよう。



生徒に1段目の□の中に入れる4つの数の順番をいろいろと変えて実際にやってみさせることで、例えば、「4段目の□の中に入る数を最も大きくするには、1段目の□の中に{1, 2, 3, 4}の4つの数をどのように入れるとよいか。」「4段目の□の中に24が入るようにするには、どうすればよいか。」などの疑問をもつ者がいるであろう。後者の疑問については、試行錯誤の後に、文字式を用いて以下のように解くことが考えられる。

1段目の4つの□の中に入れる数を、左から順に、文字を用いて a, b, c, d とすると、1段目の□の中には{1, 2, 3, 4}の4つの数を入れるから、その和は必ず10になる。このことを文字式で表すと、 $a+b+c+d = 10$ となる。

また、4段目の□の中に入る数を文字式で表す

と、 $a+3(b+c)+d$ と表される。よって、4段目の□の中に24が入るようにするには、

$$\begin{cases} a+b+c+d = 10 \\ a+3(b+c)+d = 24 \end{cases}$$

を満たす a, b, c, d の値を求めればよい。

ここで、 $a+d$ を X 、 $b+c$ を Y と置き換えると、上の連立方程式は X, Y の連立二元一次方程式に帰着させて解くことができる。

$$\begin{cases} X+Y = 10 \\ X+3Y = 24 \end{cases}$$

後は、 X, Y のそれぞれの値から、 a, d の値と、 b, c の値を求めて、その順番を考えればよい。

付記

本稿は、平成20年度科学研究費補助金(基盤研究(C), 研究代表者・小山正孝, 課題番号19530816)の交付を受けて行われた研究の成果の一部である。

引用・参考文献

- 熊倉啓之 (2008), 「新学習指導要領の特徴とそれを生かす指導」, 日本数学教育学会誌『数学教育』, 第90巻第7号, pp.18-26.
- 国立教育政策研究所教育課程研究センター (2003), 『平成13年度小中学校教育課程実施状況調査報告書—中学校数学—』, ぎょうせい.
- 小山正孝 (2003), 「数学的な見方や考え方を自ら磨いていける生徒」, 『CD-ROM版中学校数学科教育実践講座 理論編—考えることの楽しさを知る「数学的活動」の実現—』, ニチブン, pp.98-105.
- 正田實 (2008), 「流行と激動のなかに不易を見出そう」, 日本数学教育学会誌『数学教育』, 第90巻第7号, pp.10-17.
- 相馬一彦 (2008), 「考える力と知識・技能を『バ
- ランスよく, 同時に』—『活用させながら習得させる授業』を一」, 日本数学教育学会誌『数学教育』, 第90巻第5号, pp.23-28.
- 中央教育審議会 (2008), 「幼稚園, 小学校, 中学校, 高等学校及び特別支援学校の学習指導要領等の改善について(答申)」, 文部科学省ホームページ.
- http://www.mext.go.jp/a_menu/shotou/new-cs/index.htm
- 長崎栄三ほか (2008), 「算数・数学教育の目標としての『算数・数学の力』の構造化に関する研究」, 日本数学教育学会誌『算数教育』, 第90巻第4号, pp.11-21.
- 永田潤一郎 (2008), 「新しい中学校学習指導要領が目指す数学教育」, 日本数学教育学会誌『数学教育』, 第90巻第5号, pp.14-22.
- 文部省 (1999), 『中学校学習指導要領(平成10年12月)解説—数学編—』, 大阪書籍.
- 文部科学省 (2008a), 『中学校学習指導要領』, 文部科学省ホームページ.
- http://www.mext.go.jp/a_menu/shotou/new-cs/index.htm
- 文部科学省 (2008b), 『中学校学習指導要領解説—数学編—』, 文部科学省ホームページ. (同上)
- 文部科学省 (2008c), 『小学校学習指導要領』, 文部科学省ホームページ. (同上)
- 文部科学省初等中等局学力調査室(教育水準向上プロジェクトチーム)・国立教育政策研究所教育課程研究センター研究開発部学力調査課 (2008), 「平成20年度全国学力・学習状況調査—調査結果について—」, 国立教育政策研究所ホームページ.
- <http://www.nier.go.jp/08chousakekka/index.htm>
- 山口武志 (2008), 「知識基盤社会において求められる学力と新教育課程」, 日本数学教育学会誌『数学教育』, 第90巻第5号, pp.29-36.