実践研究

高等学校における発展的な問題作りの授業*

− 大学入試問題を活用した取り組み −

菅野　栄光**, 下村　哲***, 今岡　光範***

要　約

本稿では，高等学校における，発展的な数学の内容と生徒のコミュニケーション活動を取り入れた，数学の問題作りの授業実践について述べる．具体的には，「数学Ⅲ」の積分法の内容の大学入試問題を原問題として，生徒自らが数学の問題を作り，クラスのみんなで解きあうという活動の実践であり，生徒が数学の問題をより深く分析し，楽しみながら数学に親しむ機会になることをめざした．生徒が作成した問題をめぐって，コメント用紙のやり取りや問題作成者による解説，それに対する質疑応答を行い，ネゴシエーションも生かした授業展開を図ることで，日常的な問題演習の授業の中で，生徒の創作的な面を引き出すことを試みた．

キーワード：問題作り，数学的活動，発展的な扱い，大学入試問題

1．はじめに

高校数学の最終段階である「数学Ⅲ」は，微分法・積分法の内容を通して，代数，図形，関数の考えを統合するものであり，多くの内容を含んでいる．それゆえ，じっくりと取り組ませたい科目である．しかし，そこではある程度の計算力が要求されることや，大学入試を控え時間的に制約される面もあることなどから，実際には，問題演習を主体とした，効率性を優先する授業になりがちである．

問題を通して数学の内容を理解することは，数学の勉強法として優れた方法である．しかし，「習熟と暗記に傾斜した無媒介的で個人主義的な勉強を，媒介された活動と共同学習にもとづく意味と関係の構成という学びへと転換することが授業改革の中心課題である」（佐藤，2004）という指摘にも見られるように，型通りの問題演習による反復学習だけではない，創造性の基礎を培うような授業への転換が求められている．

自ら問題を解決し，新しい知見を得るために主体的で創造的な思考を働かせる，そのような力を育むための優れた方法として，生徒による数学の問題作りを生かす授業が考えられる．

平林（1984）やブラウン−ワルター（1990）らによる「算数・数学教育のシツエーション」を生かした問題設定は，問題作りの基本的な方法を提示している．また，島田・澤田・橋本・長崎（1979-1984）[注]らを中心として，生徒の発展的な思考を育てる，問題作りの授業の体系的な研究が行われている．斎藤（1986）は，創造性の育成をめざして，高校生による問題作りの実践とその分析を行っている．

著者らは，これまで，理系の高校生による図形領域（座標と方程式，ベクトル，複素数平面）や関数領域（微分法，積分法，微分法の応用）での問題作り（今岡，2001，下村・今岡・向谷・菅野，2003），文系の高校生による数列の内容に関する問題作り（下村・今岡・菅野，2006）の実践研究を行ってきた．

これらの先行研究を踏まえ，「数学Ⅲ」の積分法の内容に関する大学入試問題を活用して，次の(a)〜(c)の過程を含む問題作りの授業を行った．

(a)　生徒が，原問題として入試問題を分析し，それをもとにして自ら数学の問題を作る．

(b)　作られた問題をクラスのみんなで解きあい，

*平成19年5月28日受付、平成19年6月5日決定

**愛知県立半田高等学校
***広島大学大学院教育学研究科

コメント用紙のやり取りを行う．

(c) 問題作成者に問題を解説してもらい，それに対する質疑応答を通して考えを発展させる．

入試問題は，生徒にとって身近な存在であり，数学的に工夫された面白い要素を含んでいることが多い．吉田（2003）は，入試問題の背景を探ることもよい数学的活動につながると指摘している．本稿では，入試問題のそのような要素を生かした問題設定の授業実践を示し，生徒が作った問題の分析を行う．また，作成された問題をめぐる生徒のやりとりを通して，生徒どうしが相互に作用し合い，個人の考えをより広いものに変容・適応させていくことが期待できる．本実践での，そのような活動における，生徒のネゴシエーションの様子も記述する．これらを通して，高校数学における問題作りの活動の可能性とその効果を論ずる．

2．問題作りの授業の工夫

(1) 授業計画と指導目標

次のように，問題作りを伴う授業を計画した．

【実施年月】

平成17年11月14日 〜 平成18年2月15日

【対象生徒】公立高等学校３年生

（男子23名，女子8名，計31名）

【生徒の状況】

理系の大学進学希望者が多く，数学Ⅰ・A・Ⅱ・B・Ⅲ・Cはすべて履修済みである．問題集の演習問題などで復習をしているところで，学習意欲は全般的に高い．また，31名のうち11名は，平成17年２月に，微分法（数学Ⅲ）の内容に関する問題作りの授業を経験している．そのときは，生徒それぞれが一人１題の微分法の計算問題を作成し，教師が分類整理し小テストの形にまとめ，みんなでそれを解くといった，計算法の習熟をねらった試みであった．

【実施計画と指導目標】

① 課題の形で，積分法（数学Ⅲ）の範囲における入試問題の分析および問題作りを行う．

（平成17年11月14日〜平成17年12月21日）

- 数学の問題を自分で作ることの大変さと面白さを経験させる
- 既習内容の理解を深めさせる
- 入試問題の豊富な数学の内容を鑑賞し，それを創作活動に生かす面白さにふれさせる

② 作成された問題を解きあい，出題者による解説を聞く．

（平成18年1月25日〜平成18年2月15日）

- 作られた問題に対する興味や関心を高める

③ コメント用紙を交換する．

（平成18年1月25日〜平成18年2月15日）

- 数学的なコミュニケーション能力の向上を図る

(2) 課題の提示とワークシートの工夫

平成17年11月14日に２枚のワークシートを配付した．１枚は入試問題の分析用（課題①）であり，もう１枚は，課題①で扱った問題を原問題とした問題作り用（課題②）である．どちらも，教師によるワークシートの記入例を用意した．また，生徒の意欲や関心を高めるために，分析した入試問題や作成した問題の難易度について，易しい段階を１として５段階で生徒に評価させるようにした．

> 課題①．大学入試問題の中から，積分計算の表れる問題（数学Ⅲの範囲）を数題解け，その際は，問題集や参考書，志望大学の過去問から選んでもよいものとする．その中から，自分が最も面白いと感じた問題１題について深く分析せよ．

課題①（ワークシート記入例）

問題

不定積分 $\int \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}dx$ を $t=\sqrt{x^2+1}+x$ と置換することにより求めよ。

（　　　　）大学　（　　　）年度入試問題

出題内容（　置換積分　）　難易度　★★☆☆☆

３年　　組　　番　氏名　記入例

枠からはみ出さないように，濃いペンで記入して下さい。

《なぜこの問題を選んだのか》

$1\pm x^2$ を含む式の積分を目にすることは多い。

一般に，$\frac{1}{x^2+a^2}$ には $x=a\tan t$ という置換をする。

本問では，$\sqrt{x^2+A}$ を含む積分ということで，$\sqrt{x^2+A}+x=t$ といった置換を考える。この置き換えがどう有効に働くのか．また，他の置換は考えられないのか考察したい。

この原問題のように，$1\pm x^2$ を含む式の積分を目にすることは多い．その積分の方法はいろいろあるが，この原問題では，$\sqrt{1+x^2}$ を含む積分ということで，$\sqrt{1+x^2}+x=t$ といった置き換えを指示している．この置換以外にも，$x=\tan\theta$ と置換する方法もある．また，$f(x)$ の原始関数 $F(x)$ の逆関数を $g(x)$ とするとき，$x=g(t)$ と置換すると，$\int f(x)dx=\int dt$ となることを利用する方法もある．ここでは，後者を利用して，原問題の別解を考え，それをもとにした問題作りの例を提示した．それが次の課題②の記入例である．

> 課題②．課題①において自分の分析した大学入試問題を参考にして，数学Ⅲの範囲において積分の計算に関する面白い問題を工夫して１題作成せよ．ただし，数値等は各自考え，教科書や問題集にある問題や，他人と全く同一の問題はあり得ないものとする．また，作成した問題には解答（説明）を与えること．

課題②（ワークシート記入例）

問題
(1) $y=x+\sqrt{x^2+1}$ と $y=x-\sqrt{x^2+1}$ のグラフをかけ。
(2) 関数 $y=\dfrac{e^x-e^{-x}}{2}$ の逆関数を求めよ。
(3) 不定積分 $\displaystyle\int\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}dx$ を $x=\dfrac{e^t-e^{-t}}{2}$ という置き換えを利用して求めよ。

（　　　）大学（　　　）年度入試問題をもとにした作問
出題内容（逆関数，置換積分）　難易度 ★★★☆☆
3年　組　番 氏名 記入例

枠からはみ出さないように，濃いペンで記入して下さい。

《どのような発想でこの問題を組み立てていったか》工夫した点，着眼点など

一般に，$f(x)$ の原始関数 $F(x)$ の逆関数を $g(x)$ とするとき，
$x=g(t)$ と置換すると，$\int f(x)dx=\int dt$ となる。
$\left(\because \int f(x)dx=\int F'(x)dx=\int F'(g(t))g'(t)dt=\int\{F(g(t))\}'dt=\int dt\right)$
本問では $\dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}}$ の原始関数 $\log(x+\sqrt{x^2+1})$ の逆関数が $\dfrac{e^x-e^{-x}}{2}$ である。
なお，(1)は，$x\pm\sqrt{x^2+1}$ の正負の判断が後で必要となることと，
「点がとりやすいように…」という教育的配慮からつけ加えた…のだが。

原問題のように，いきなり置き換えを指示し，不定積分を求めよ，ではなくて，(2)で置き換えに使った関数の逆関数を求めさせるようにした．ここで出てくる逆関数 $y=\log(x+\sqrt{x^2+1})$ が実は最終的に(3)で求める不定積分である．解いた生徒はこの結果に「あれ？」と思うはずである．そして，意欲的な生徒は，被積分関数の逆関数で置換することが何か特別な意味を持っているのではないかと探求を始めるであろう．そのようなことをねらいとして作問した．

生徒に，このような記入例をそえてワークシート2枚を渡し，約1ヶ月の間，これまでのように問題演習をこなしながら，問題の構想を練るように指示した．ワークシートの提出期限は2学期末の平成17年12月21日とした．ワークシートを渡してから提出までの間を比較的長めにとったのは，生徒が問題作りのヒントをいろいろ探したり構想を練ったりすることを期待したことによる．

平林（1984）は，「問題はシツエーション（situation）から生まれてくる」と述べている．その意味で，生徒に一つの入試問題を提示し，「それと同じような問題を作りなさい」というやり方はしなかった。受験を間近に控えた生徒達の，個々の学習に即して問題設定を行う，そのシツエーションを大事にしたかったからである．

記入例では，多様な置換の仕方によって解決が可能な積分の問題を原問題として準備した．生徒に記入例を示したとき，「自分で入試問題を解いてみて，多様な解き方が考えられる問題や，より一般化できそうな問題に出合ったら，単に問題そのものを解決して終わりにせず，条件を変えたり，扱う対象を違うものにしたりして，そこから新しい問題を生み出してみよう」と促した．原問題となる入試問題は，そのような側面を可能にするものが望ましいと考える．また，次のような点も望ましい条件であろう．

(a) 数学的内容が豊富である．
(b) 問題の程度が生徒の能力に応じて適切であり，基本的な内容がうまく生かされている．
(c) 問題の設定が明快であり，生徒に親近感を抱かせる．

平成18年1月25日から生徒作成による問題の演習や解説を始めたのと同時に，課題③として次のようなワークシート（コメント用紙）の提出を求めた．

> 課題③．他の人が作った問題の中で，インパクトの強かった問題についてコメントせよ．その際，次のようなことに触れるとよい．『この問題のこんなところに感心した』『私だったらこう作る』，『類題発見しました○○年の△△大学の入試問題です』『さしでがましいようですが，こうアレンジするともっと良かったのではないですか』など．

提出はその都度とし，最低でも一人２回は提出することとした．また，コメント用紙は予備のものを教室に多く用意しておき，必要な者は何回でも提出してよいことにした．生徒から生徒へ直接渡すのではなく，必ず授業担当教員を経由して，コピーをとった後に出題者に渡るようにした．その際，教員が有益なことが書かれていると判断したコメント用紙は，印刷して全員に配付し公開するようにした．

３．作成された問題と授業の展開

平成17年12月21日にワークシートを回収し，冬休み，センター試験を挟んで，平成18年１月25日から個別学力検査（２次試験）に向けての問題演習を再開した．この日から授業終了の平成18年２月15日までの12時間の授業の中で，問題集の問題による演習と並行して，生徒が作った問題による演習および出題者による解説を行った．

提示の仕方としては，一枚のプリントに両面印刷で，課題①は模範解答つきで，その裏面に課題②を解答なしで印刷したものを配付した．次の時間までに渡されたプリントをそれぞれが解いてきて，その上で出題者が黒板で説明するのを聞くといった流れで進めた．

原問題となった入試問題が解答つきで載っているので，生徒はそれを解いたり読んだりすることで，まずは普段の問題演習と同様の学習ができる．同時に，クラスの友達がどんな種類の入試問題を選んだのか興味深く思うであろうし，そのことが種々の問題に対する関心を増し，学習意欲につながる面もあると考えた．また，作成された問題を解くことによって，出題者が原問題をもとにどのように創意工夫して問題を作成したのか，それを鑑賞しながら，数学が創られていくものであることを感じて欲しいと願った．

以下，作成された問題を四つ例示する．①②は原問題の式を変えて作成したもの，③④は長さを面積に変えたり，関数の次数を上げたりして作成したものである．なお，生徒は出題大学や出題年度なども記入していたが，ここではその部分は表示しないことにする．生徒が出した難易度の評価は右下の括弧の中に記す．

＜生徒が参照した入試問題①＞

> 定積分 $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x + \sin x}{1 + \cos x \sin x} dx$ を求めよ．

（難易度３）

＜生徒が作成した問題①＞

> 定積分 $\int_0^{\pi} \frac{\sin x - \cos x}{\sin 2x + 1} dx$ を求めよ

（難易度２）

出題者の生徒は原問題の解法で行われている $t = \sin x - \cos x$ という置換に面白みを感じ，その発想を生かして作問を試みたものと考えられる．ワークシートには，「この置換をすることによって，$\frac{dt}{dx} = \cos x + \sin x$ から分子が消え，簡単になる」という点に感心したという記載があった．残念ながら，作成された問題では被積分関数が $x = \frac{3}{4}\pi$ で不連続になっており，積分区間に配慮が欲しかった．しかしながら，入試問題の解法のポイント部分をうまく取り込んで問題を作成した点は評価できる．

＜生徒が参照した入試問題②＞

> (1) $x \geqq 0$ で定義された関数 $f(x) = \log(x + \sqrt{1+x^2})$ について．
> 導関数 $f'(x)$ を求めよ．
> (2) 極方程式 $r = \theta$ $(\theta \geqq 0)$ で定義される曲線の $0 \leqq \theta \leqq \pi$ の部分の長さを求めよ．

（難易度記述なし）

＜生徒が作成した問題②＞

> (1) $f(x) = \log(x + \sqrt{1+x^2})$ とする
> $f'(x)$ を求めよ．
> (2) 極方程式 $r = \frac{1}{\theta}$ で定義される曲線の $\pi \leqq \theta \leqq 2\pi$ の部分の長さを求めよ．

（難易度記述なし）

この問題は，原問題②(2)の極方程式 $r=\theta$ のような簡単な形で，曲線の長さが計算可能なものをめざして作問を試みたものである．仮定における条件などの属性に着目し，それを「〜でなければどうか？」という発想で変えていき，新しい問題を作り出すというWhat-If- Not(ブラウンーワルター，1990）の工夫が生かされている．

<生徒が参照した入試問題③>

> 円C：$x^2+y^2=9$ の内側を半径1の円Dが転がる．時刻tにおいてDは点$(3\cos t, 3\sin t)$でCに接している
> (1)時刻t=0において(3,0)にあったD上の点Pの時刻tにおける座標$(x(t), y(t))$を求めよ．$0\leqq t\leqq\frac{2}{3}\pi$とする．
> (2)(1)の範囲で点Pの描く曲線の長さを求めよ．

（難易度4）

⇩

<生徒が作成した問題③>

> 円C $x^2+y^2=9$ の内側を半径1の円Dが転がる Dは時刻tにおいて$(3\cos t, 3\sin t)$でCに接している．D上のPが(3,0)から描く曲線とCとで囲まれた図形の面積を求めよ。

（難易度4）

この例は，原問題がハイポサイクロイドの曲線の長さを求めるものであったが，その曲線の長さを面積の観点に変えて作成した問題である．サイクロイドやハイポ（エピ）サイクロイドは，弧長や面積などが求積できる曲線なので，問題を作り変えていろいろと考えることができる題材である．問題作成者は黒板における解説で，円D上の点Pは最初（3，0）にあったものとして面積を求めていた．（右上の③の解答）ある生徒はそれに対して，はじめの点Pの位置を（1，0）として考えた別解をあげていた．（右下の③の別解）別の生徒は，大円の半径をa，小円の半径をbと一般化して，弧長や面積を求める公式を自分で作り出し，発表した．問題作成者や他の生徒は感心して聞いていた．

<生徒が参照した入試問題④>

> 放物線 $y=x^2-x$ と直線 $y=x$ で囲まれた部分を、直線 $y=x$ の周りに1回転させてできる回転体の体積を求めよ。

（難易度4）

⇩

<生徒が作成した問題③の解答>

$A(3,0)$，$B(3\cos t, 3\sin t)$

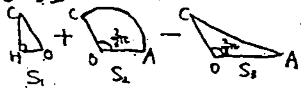
Dの中心をQとすると、$\overset{\frown}{AB}=\overset{\frown}{BP}=3t$ より

$\angle BQP=3t$ である．よって

$\overrightarrow{OP}=\overrightarrow{OQ}+\overrightarrow{QP}=2\begin{pmatrix}\cos t\\ \sin t\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}\cos(-2t)\\ \sin(-2t)\end{pmatrix}$

$=(2\cos t+\cos 2t,\ 2\sin t-\sin 2t)$

Cから垂線CHを下ろすと求める面積は

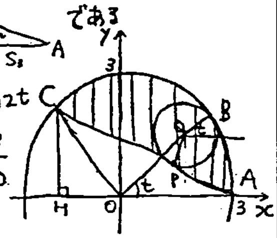


である

$x'(t)=-2\sin t-2\sin 2t$

$C\left(-\frac{3}{2}, \frac{3\sqrt{3}}{2}\right)$ より

x	$-\frac{3}{2}\to 3$
t	$\frac{2}{3}\pi\to 0$



$S_3=\int_{-\frac{3}{2}}^{3} y\,dx=\int_{\frac{2}{3}\pi}^{0}(2\sin t-\sin 2t)(-2\sin t-2\sin 2t)\,dt$

$=\left[t-\sin 2t-\frac{1}{3}\sin 3t+\sin t+\frac{1}{4}\sin 4t\right]_0^{\frac{2}{3}\pi}$

$=\frac{2}{3}\pi+\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{\sqrt{3}}{8}=\frac{9\sqrt{3}}{8}+\frac{2}{3}\pi$

$S_1=\frac{3}{2}\times\frac{3\sqrt{3}}{2}\times\frac{1}{2}=\frac{9\sqrt{3}}{8}$　$S_2=3\times 3\times\pi\times\frac{1}{3}=3\pi$

よって求める面積は $\frac{9\sqrt{3}}{8}+3\pi-\frac{9\sqrt{3}}{8}-\frac{2}{3}\pi=\frac{7}{3}\pi$

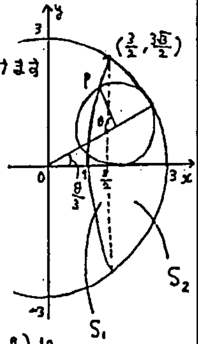
<作成問題③のコメント用紙による別解>

はじめのPの位置を(1,0)としたら，

$\begin{cases} x=2\cos\frac{\theta}{3}-\cos\frac{2}{3}\theta \\ y=2\sin\frac{\theta}{3}+\sin\frac{2}{3}\theta \end{cases}$ 次のように解けます

$dx=\frac{2}{3}\left(\sin\frac{2}{3}\theta-\sin\frac{\theta}{3}\right)d\theta$

x: $1\to\frac{3}{2}$ で $\theta: 0\to\pi$



$S_1=2\int_1^{\frac{3}{2}} y\,dx$

$=2\int_0^{\pi}\left(2\sin\frac{\theta}{3}+\sin\frac{2\theta}{3}\right)\frac{2}{3}\left(\sin\frac{2}{3}\theta-\sin\frac{\theta}{3}\right)d\theta$

$=\frac{4}{3}\int_0^{\pi}\left(\sin^2\frac{2}{3}\theta-2\sin^2\frac{\theta}{3}+\sin\frac{2}{3}\theta\sin\frac{\theta}{3}\right)d\theta$

$=\frac{4}{3}\int_0^{\pi}\left(\frac{1}{2}-\frac{\cos\frac{4}{3}\theta}{2}-1+\cos\frac{2}{3}\theta-\frac{1}{2}\cos\theta+\frac{1}{2}\cos\frac{\theta}{3}\right)d\theta$

$=\frac{4}{3}\left[-\frac{\theta}{2}-\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\sin\frac{4}{3}\theta+\frac{3}{2}\sin\frac{2}{3}\theta-\frac{1}{2}\sin\theta+\frac{1}{2}\cdot 3\sin\frac{\theta}{3}\right]_0^{\pi}$

$=-\frac{2}{3}\pi+\frac{9\sqrt{3}}{4}$

$S_2=\pi 3^2\frac{\frac{2\pi}{3}}{2\pi}-\frac{1}{2}\cdot 3^2\sin\frac{2}{3}\pi=3\pi-\frac{9\sqrt{3}}{4}$

$S_1+S_2=-\frac{2}{3}\pi+\frac{9\sqrt{3}}{4}+3\pi-\frac{9\sqrt{3}}{4}=\frac{7}{3}\pi$

求める面積は3倍だから 7π

以上です。
引く部分を積分するのは好みじゃないので，というか面倒になったので
こういうふうになりました。

＜生徒が作成した問題④＞

曲線C: $y=x^3-x$, 直線ℓ: $y=x$ とし、第1象限における Cとℓの交点をAとする。曲線C, 直線ℓ, およびAにおけるℓの垂線で囲まれた部分をℓのまわりに1回転させてできる回転体の体積を求めよ。

（難易度４）

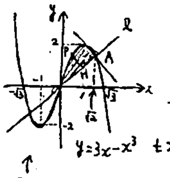
この例は，作成された問題に不備があり，その間違いも含めて，生徒の様々なやり取りが活発になされた問題である．④の原問題は，ある図形で囲まれた領域をx軸やy軸のまわりではなく，斜めの直線$y=x$のまわりに回転させたときの立体の体積を求める問題である．出題者が紹介した原問題の解答は，放物線上の点から回転軸である直線に垂線を下ろし，その長さを回転体の断面の円の半径と考えるものであった．この生徒は，同じ方針で解ける問題として，関数を２次関数から３次関数に変えたものを考えた．しかし，想定した関数とは違う式を問題文に書いてしまったために若干の混乱が生じた．この生徒が黒板で解説した図を見た他の生徒達は，グラフから見てきっとこの関数の式はこうであろうと考え，問題を作り変えて解き直したのである．このあたりの生徒どうしのかかわり方を，コメント用紙のやり取りの様子と絡めて紹介する．

作成された問題④に対しては，多くの生徒からコメント用紙が提出された．全員が作成者の努力に敬意を払いつつ，質問あるいは修正案を述べていた．次にあげたコメント用紙の一つめ(a)は出題者が示した解答の図から関数の式を修正して考えたものである．また，「この問題を考えることで，本来の‘積分’のもつ意味がわかった」とも書いている．二つめ(b)は，問題は修正せずに，そのままの式で考えたものであるが，円錐の側面積を足し合わせることで立体の体積を考えることができると主張している．

他のコメントの中には，「カラーコーンの積み重ねのような積分です」と紹介したものもあった．異なった解法の紹介は他にも多数見られた．このようなコメントのやり取りは，内容に対する理解を深めるとともに，生徒の数学的思考に広がりをもたらす上で効果的であったと考える．その証として，そのようなコメントを目にした他の多数の生徒が「とても刺激になった」という感想を寄せていたことがあげられる．

＜生徒のコメント用紙(a)＞

まず，問題どおり解こうと思ったら囲まれた部分がありませんでした。解答を見てみたら，どうも $y=x-x^3$っぽいのですが，これだと $x>0$ では $x-x^3<x$ となってしまい，やはり無理だったので行きづまってしまいました。そこで，$y=3x-x^3$ ですすめていきます。



見にくい図でごめんなさい

あとはオリジナルの解答のように解いていく

$$PH=\frac{|x^3-2x|}{\sqrt{2}}$$

$t^2=\frac{1}{2}\{x(x^2-4)\}^2$ で，$0\leqq x\leqq\sqrt{2}$ より，$t>0$ から，$t=\frac{x(4-x^2)}{\sqrt{2}}$，$dt=\frac{4-3x^2}{\sqrt{2}}$

t が $0\to2$ のとき，x は $0\to\sqrt{2}$

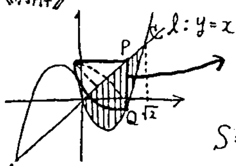
$$V=\int_0^{\sqrt{2}}\pi PH^2\,dt$$
$$=\int_0^{\sqrt{2}}\pi\frac{x^6-4x^4+4x^2}{2}\cdot\frac{4-3x^2}{\sqrt{2}}dx$$
$$=\frac{64}{105}\pi \ //$$

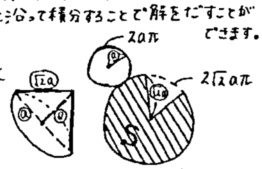
となり，偶然かどうかわかりませんが，オリジナルの答と一致しました。この問題を考えてみて，本来の「積分」のもつ意味(?)というがわかった。PHをtの長さ分だけ足していくということを見て，公式で積分計算をするマニュアル化していた自分の考えを改めることができたと思います。

＜生徒のコメント用紙(b)＞

[redacted]ちゃんの解答は，直線ℓに沿って積分することで回転体の体積を求めていますよね。では，x軸に沿って積分することで解答することはできないのでしょうか？ 実は，円錐の側面積を足し合わせることで，立体の体積が求まるという考えを利用して，x軸に沿って積分することで解をだすことができます。

《別解》





$$S=\frac{2a\pi}{2\sqrt{2}a\pi}\cdot\pi(\sqrt{2}a)^2=\sqrt{2}\pi a^2$$

ℓ上の点 $P(x, x)$, C上の点 $Q(x, x^3-x)$ とすると，線分PQを直線ℓのまわりに1回転させると，円錐形となり，その側面積 $S(x)$

$S(x)=\frac{\pi}{\sqrt{2}}(2x-x^3)^2$ $(\because \sqrt{2}a=x-x^3+x=2x-x^3)$ とすると，

よって求める体積は，$V=\int_0^{\sqrt{2}}S(x)dx=\frac{\pi}{\sqrt{2}}\int_0^{\sqrt{2}}(x^6-4x^4+4x^2)dx$

$=\left[\frac{x^7}{7}-\frac{4}{5}x^5+\frac{4}{3}x^3\right]_0^{\sqrt{2}}\pi/\sqrt{2}=\pi\left(\frac{8}{7}-\frac{16}{5}+\frac{8}{3}\right)=\frac{64}{105}\pi$ //

確かに一致しましたね!!

では，余力のある方は以下の問題にも挑戦してみて下さい。

曲線 $y=\sin x\ (0\leqq x\leqq\pi)$ と２直線 $y=x$，$x+y=\pi$ とで囲まれた図形を直線 $y=x$ の周りに１回転してできる立体の体積を求めよ。

先のコメント用紙(b)の最後に，「この問題にも挑戦してみて下さい」として，参考書の他の問題が紹介されている．こういったクラスのみんなが

共通して所持している参考書や問題集のページや問題番号をあげて，参考になる問題を紹介するといったことは他のコメント用紙やワークシートにも見られた．問題作りの取り組みを通して，協同意識も芽生えたのではないかと考える．

特筆すべきこととして，今回の実践においては，‘コメントに対するコメント返し’が行われた場面が多かったことである．コメントに若干でも質問事項が含まれるときに多く，こういったコメント返しが起きたようである．

以上の作問例と授業展開に見られるように，問題作りのよさは，能動的な数学の学習になることである．たとえ小さな工夫でも，作成者にとっては自分の大きな工夫なのである．さらに，生徒のネゴシエーションを生かせば，数学的なコミュニケーションの場が作れる．作問には面白い発想があったり問題の不備があったりする．それを全員の学習で高めていける可能性を含んでいる．

また，生徒に原問題の選択を任せる自由な設定においては，あえて自分の不得意な内容から題材を選び，その克服をめざす生徒がしばしば見られる．これも問題作りの効用の一つであろう．

問題作りの授業は，こういったよさがある反面，取り組みに一定の時間を必要とし，授業担当者の負担は少なくない．また，単に問題を作らせて終わるのでは，効果も薄い可能性がある．教科書や問題集を活用した体系的な学習活動とのバランスを考えながら，効果的に行う必要があろう．

4．事後調査と分析

平成18年2月13日，今回の問題作りのまとめとして，事後調査を行った．

Q１　問題作りは難しかったですか？

Q２　問題作りは楽しかったですか？

Q３　問題作りはためになりましたか？

Q４　問題作りをすることによって，学習したという充実感をもちましたか？

Q５　いろいろ工夫し考えることによって，考えることの大切さがわかったような気がしましたか？

Q６　問題作りをときどき授業でやってほしいですか？

Q７　問題作りに熱心に取り組みましたか？

Q８　いろいろな関数を積分することは面白いですか？

Q９　友人の作った問題を解くのは，教師が作った問題を解くよりも意欲がわきますか？

Q10　今まで，与えられた問題について，その問題が作られた背景について考えたことがありますか？

Q11　今回の問題作りによって，問題が作られた舞台裏・背景にまで興味を持つようになりましたか？

Q12　作成者による問題の解説は，興味深く聞くことができましたか？

	とても Yes	どちらかといえばYes	どちらかといえばNo	とても No
Q１	54%	46%	0％	0％
Q２	25%	32%	36%	7％
Q３	50%	46%	4％	0％
Q４	39%	46%	11%	4％
Q５	61%	32%	0％	7％
Q６	32%	32%	36%	0％
Q７	43%	21%	25%	11%
Q８	21%	36%	36%	7％
Q９	43%	36%	21%	0％
Q10	4％	14%	46%	36%
Q11	36%	43%	18%	4％
Q12	46%	43%	11%	0％

結果を端的にいえば，「問題作りは難しいが，楽しく，ためになり，充実感が得られる」ということであろう．例えば，Q10とQ11の結果に注目してみる．Q10で‘与えられた問題について，その問題が作られた背景について考えたことがある’と答えた生徒は18%に過ぎないのに対して，問題作りを通して，Q11では79%の生徒が‘問題が作られた舞台裏・背景にまで興味を持つようになった’と回答している．問題を分析した後に，そこから自分で新たな問題を作ろうとすることによって，問題を作る側の立場や制約，苦労や楽しみが伝わったのであろう．Q12では，実に89%もの生徒が‘作成者による問題の解説は，興味深く聞く

ことができた’と回答している．これは，生徒どうしのコミュニケーション，学び合いが活発になされたことを示している．以下は生徒の問題作りについての感想である．

- 受身になりがちな高校の授業の中で，こういうことをやるのはよいことだと思います．
- 印象に残る．「～さんがあんなこと言ってたなぁ」というのがあればイメージしやすい．（複数）
- 問題にコメントするのが楽しかったです．（複数）
- 特に積分の場合は，積分できる関数の形が限られているため，問題作りには工夫が必要だった．
- 1問作るのにとても時間がかかることを身にしみて感じました．とすると，大学の2次試験は相当時間をかけて作られたものなんだなぁ….
- まわりのみんながハイレベルな問題を作るのに感心した．自分も頑張ろうと思った．（複数）
- 他人に説明するのを前提に解答やコメントを作成するのはとても責任感があって，いつも以上に念入りに下調べをしたりして，楽しかったです．

5．まとめ

本稿での，高校数学における問題作りの授業実践から，次のことが指摘できる．

1．問題作りを通して，与えられた問題や過去の大学入試問題を解き理解するという行為を，創作的な面を取り入れた活動にすることができる．また，今回の取り組みにおいて，解法や重要なポイントがよく記憶に残ったという生徒が多かった．問題作りの活動が，数学の問題に対する生徒のより深い分析にもつながったものと考えられる．

2．コメント用紙のやり取りやその公開によって，数学の問題に対する多様な見方が伝わり，数学的な知識・理解の共有化とコミュニケーションの場が生まれた．

3．作成された問題をクラス全員で解き，意見を出し合うことによって，学習者個人だけでは生じにくい数学的アイデアが，ネゴシエーションの所産として生じた．また，問題を作成した生徒による黒板を使った解説は，教師による説明に比べて，新鮮なものとして受け止められていた．

4．生徒にとって，積分計算を含んだ問題作りは，微分の場合よりも困難を伴うようである．しかし，自分の作った問題が公開されるという前提が強い意欲となって働き，熱心に取り組む様子が窺えた．

今後も，高校数学におけるカリキュラムや授業時間数などの現実を踏まえた問題作りの実践を行い，有意義な活動のあり方を考察して行きたい．

注

昭和53年度「算数・数学科の問題の発展的な扱いによる評価方法のケース・スタディー」（代表者，島田茂），54年度「算数・数学科の授業における発問のストラテジーの研究」（代表者，澤田利夫，以下同様），55年度「算数・数学科の問題の発展的な扱いによる指導とその評価方法に関する開発研究」，56年度「算数・数学科の問題の発展的な扱いによる学習成果の評価方法に関する開発研究」，57年度「算数・数学科の問題の発展的な扱いによる評価と指導法の体系化に関する研究」，58年度「算数・数学科の問題の発展的な扱いによる数学的な考え方の評価方法の開発に関する研究」．

引用・参考文献

ブラウン，S.I.・ワルター，M.I.共著／平林一栄監訳（1990）．『いかにして問題をつくるか―問題設定の技術―』，東洋館出版．

平林一栄（1984）．「問題解決から問題設定へ」，『日本数学教育学会論文発表会論文集』，pp.69-72.

今岡光範（2001）．「高校生・大学生による数学の問題作り」，『全国数学教育学会誌，数学教育学研究』，第7巻，pp.125-131.

斎藤昇（1986）．「問題創作学習における学習者の関心―創造力育成を目指して―」，『日本数学教育学会誌』，第68巻，第5号，pp.24-33.

佐藤学（2004）．『習熟度別指導の何が問題か』，岩波書店，p.65.

下村哲・今岡光範・向谷博明・菅野栄光（2003）．「高校生による数学の問題作り―高校3年生を対象として―」，『全国数学教育学会誌，数学教育学研究』，第9巻，pp.243-253.

下村哲・今岡光範・菅野栄光（2006）．「高校生による数学の問題作り（II）―数列の問題作りを通して―」，『全国数学教育学会誌，数学教育学研究』，第12巻，pp.215-225.

吉田明史 監修（2003）．『創造性の基礎を培う数学的活動実践事例集』，学校図書．