広島大学　学部・附属学校共同研究機構研究紀要
〈第38号　2010．3〉

算数学習における理解過程に関する研究（X）

― 第５学年における「面積」の概念形成を中心に ―

前田　一誠　　小山　正孝　　山口　武志　　朝川　佳子

１　はじめに

本研究は，算数学習における子どもの理解過程を，理論的・実証的に解明しようとするものである。これまでの数学の理解過程に関する研究[1)][2)]によって，数学的概念や原理・法則などを理解するということは，本質的には，個々の子どもの心的活動であり，複雑で力動的な過程であるが，他方では，教室で行われる算数学習においては，子どもの理解過程はその子どもと教師，子ども同士の社会的相互作用の影響を受けることが明らかになってきている。そこで，本研究では，算数学習における理解過程を，これら個人的側面と社会的側面の両方を視野に入れて解明することを目的とする。

そのために，まず本研究の第１報[3)]では，理論的研究として，小山が構築した数学理解の２軸過程モデルについて，このモデルの根底にあるパラダイムや認識論と，数学理解の階層的水準と学習段階をそれぞれ縦軸と横軸に設定することの妥当性を，文献解釈的方法によって再検討した。そして，第２報[4)]では，その実証的研究として「図形」領域の学習において，小学校第２学年の子どもが三角形や四角形の概念を学習する際の理解過程に焦点を当て，事前調査，授業実践，事後調査を通して，これらの図形についての子どもの理解過程を実証的に解明した。また，第３報[5)]では，「量と測定」領域の授業実践を通して，小学校第５学年の子どもが台形の面積の求め方を学習する際の理解過程を実証的に明らかにした。さらに，第４報[6)]では，「数と計算」領域の授業実践を通して，小学校第５学年の子どもが分数と小数，整数の包摂関係を学習する際の理解過程を実証的に解明した。第５報[7)]では，「量と測定」領域における理解過程について，第３学年「重さ」の概念形成を中心に解明した。第６報[8)]では，「数と計算」領域において，第１学年「ひきざん」の概念形成について，きまりを見つけ活用していく際の理解過程に焦点を当てて解明した。第７報[9)]では，「数と計算」領域において，第１学年「たし算（２）」の「繰り上がりのあるたし算」における計算の意味の理解過程に焦点をあてて解明した。第８報[10)]では，「量と測定」領域における理解過程について，第４学年「角」の概念形成を中心に解明した。そして，前号の第９報[11)]では，「量と測定」領域における理解過程について，第４学年「面積」における数学的モデルの作成を中心に解明してきた。

そこで，本研究の第10報である本稿では，これまでの研究成果をもとに，小学校第５学年の子どもが「面積」の概念を形成する際の理解過程を実証的に解明することを目的とする。

２　授業の計画

(1) 研究の概要

【授業学年】広島大学附属小学校　１部５年
（男子19名　女子20名　計39名）

①　単元名　面積

②　単元目標

○基本的な図形（平行四辺形や三角形など）の求積活動に興味をもち，長方形や正方形などの既習図形に帰着させて，進んで求積方法を考えようとする。
（関心・意欲・態度）

○平行四辺形や三角形などの面積を，等積変形や倍積変形の考えを使って，既習図形に変形して求めることができる。（数学的な考え方）

○平行四辺形や三角形などの図形の面積を，必要な長さを測り，公式を使って求めることができる。（表現・処理）

○求積公式を使った平行四辺形や三角形などの面積の求め方について，底辺と高さの関係を理解することができる。（知識・理解）

③　指導計画（全12時間）

Kazushige Maeda, Masataka Koyama, Takeshi Yamaguchi, Yoshiko Asakawa: Research on the process of understanding in elementary school mathematics learning（X）- Focusing on fifth graders' conception of area -

第１次　三角形・平行四辺形・台形の面積を求める。…７時間

第１時　既習の図形の２倍または半分として三角形の面積を考える。（等積変形・倍積変形の意味についての理解）…①

第２時　三角形の面積の求め方を考える。…①

第３時　三角形の求積公式の根拠を考える。…①

第４時　平行四辺形の面積の求め方を考える。…①

第５時　平行四辺形の求積公式の根拠を考える。…①

第６時　台形の面積の求め方を考える。…①

第７時　台形の求積公式の根拠を考える。…①

第２次　面積の求積方法について習熟する。…５時間

第８時　底辺と高さとの関係について考える。…①

第９時　対角線が直交する四角形（ひし形）の面積の求め方を考える。…①

第10時　同じもの同士を差し引いたものの面積の関係について考える。…①

第11・12時　三角形・平行四辺形・台形・複合図形の面積を求める。…②　本時２／２

⑵ 事前検討

①　教材分析（単元について）

本単元は，未習の図形の面積を求めるために，既習図形に帰着させて，等積変形・倍積変形の考えを使いながら，底辺と高さの関係をつかみ，それに着目しながら簡単な求積方法をつくり出していくことになる。このことを通して，既習に帰着させながら新たな求積方法をつくり出す学び方や数理を活用する。そして，創造性を育む視点からは，アイデアをお互いに伝え合い，自他の考えが影響し合う対話活動を通して，新たな考えをつくり上げていくことのおもしろさを感じ取らせることをねらいとしている。

具体的には，①平行四辺形や三角形などの図形を変形して，その面積を求めること，②等積変形・倍積変形をはじめとして図形を変形させ，既習図形の２倍または半分として図形の面積を考えること，③三角形・平行四辺形・台形の求積方法（公式）を知り，底辺と高さの関係から，その根拠を考えることである。

本単元の指導に当たっては，図形の具体物を用いて，子どもたちがこれまでに経験してきている図形を変形する活動を繰り返しながら，平行四辺形や三角形などの面積の求積活動を設定する。そして，この求積活動を，大きく２つの段階に分けて設定する。

まず最初の段階としては，面積の大小比較において図形を等積変形・倍積変形しながら，二等分して見る活動を通して，既習の図形である長方形・正方形と三角形との倍関係に気づかせる。その後，既習の正方形や長方形の面積の求め方に帰着させながら，平行四辺形や三角形などの求積方法を考えるとともに公式をつくり，それを用いることができるようにしたい。その際，子どもたちが，既習図形への帰着と底辺と高さの関係をよりつかみやすくするために，図形の提示及び操作は，ドット図を用いることとする。

次の段階では，台形，ひし形，多角形の面積を求める活動，面積から底辺や高さを求める逆思考の活動，図形の中に既習図形を見つけて公式を用いながら面積を求める活動を設定する。これによって，さまざまな図形の面積の求積を工夫しながら行わせ，求積方法の習熟を図りながら，数理を活用する力を身に付けさせていきたい。

②　児童の実態

本学級の子どもたちは，本単元までに，数量について，もとになる大きさ（単位量）のいくつ分で表すことができるという単位の考えを学習してきている。また，普遍単位を用いて量を数値で表すことも学習してきている。この他にも，面積の既習事項としては，長方形と正方形について，面積の単位とその求積方法（公式を含む）も身に付けてきている。さらに，「図形」領域における学習では，三角形・四角形（平行四辺形・台形・ひし形など）の性質について学習してきている。その結果，長方形と正方形そのものについての求積方法は，ほとんどが理解しているが，単位の考えを用いた求積の意味の説明や複合図形の求積になると苦手意識をもつ子どもが見られる。

これらの要因として，単位の考えについては理解しているものの，状況に応じて単位を適当な基準量に換えて考えたり，適当な基準量を見いだす活動が不十分だと考えられる。複合図形の求積と図形の見方については，図形を直接に観察・構成・分解する操作活動の経験そのものとそれぞれの操作活動において図形を多面的に見る経験がさらに必要である。そこで，三角形と四角形の具体物を用いて構成・分解する活動と子どもたちが多面的に図形を捉えて求積活動を行う場面とを設定し，面積の求積方法の理解を深めたい。

３　理解過程を重視した授業のデザイン

これらの事前検討を受けて授業を構想した。本研究実践では，第５学年「面積」の学習場面において，垂直や平行に着目しながら，直角三角形を組み合わせて四角形をつくり，三角形や四角形の性質や面積の求め方を活用しながら，面積が最も大きくなる四角形を考えることを通して，面積の求め方と図形の見方を豊かにすることをねらいとした授業を行うこととした。

そのため，直角三角形４つ（図１）を提示する。この４つを使って，いろいろな四角形をつくらせる。ま

た，つくった四角形で面積が最も大きいのはどの四角形かを考えさせる。

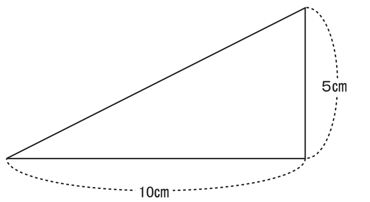


図１

その後，つくり出された四角形を交流していく。つくり出したそれぞれの図形について，面積を考え，求め方を交流するのである。子どもたちは，これまでに身に付けてきた面積公式を使って求めていくが，比較・求積活動を繰り返していく中で，単位面積を１㎠から，問題図形そのものである直角三角形（25㎠）へと変換させ，それが何枚分かで面積を求めていくようにする。この場面こそが，本時学習がねらいとする面積の求積方法が深まるところである。最後に，追求方法及び結果の共通点について話し合い，本時学習を以下のようにまとめる。

・面積公式を使えば，面積が求められた。
・もとになる図形を決めて，それが何枚あるかと見ていけば面積が求められた。

本授業は，以下の２点を中心的な手だてとして授業を構成した。なぜなら，次の点に着目した授業づくりを行うことが，子どもの理解過程を大切にした授業づくりを行うことになると考えるからである。

○導入における〔意識化〕の場面で，四角形の面積のとらえ方についての不整合な状況とそれについての互いの考えを伝え合う活動を設定する。 ○対話活動を活性化させるための教師の発話と子どもの対話に切り込んでいく発問を工夫する。

４　第５学年「面積」における授業の実際と考察
ー本時（第２次第12時）の実際と考察ー

＜本時の目標＞

垂直や平行に着目しながら，直角三角形を組み合わせて四角形をつくり，三角形や四角形の性質や面積の求め方を活用しながら，面積が最も大きくなる四角形を考えることを通して，面積の求め方と図形の見方を豊かにする。

＜本時の授業の流れ＞

〔意識化〕

まず，底辺が10㎝，高さが５㎝の直角三角形（図１）を提示し，この直角三角形の面積（25㎠）を確認した。この後，「この直角三角形４枚を使って，どんな四角形がつくれるか？」となげかけた。直角三角形４枚分の面積の「正方形」「平行四辺形」「長方形」をつくることができた。この際，子どもたちは，底辺と高さの垂直関係や長さの関係に着目しながら，三角形の求積公式を用いていた。授業の実際は次の通りである。

T　（図１※直角三角形を黒板に貼る。）
C　直角三角形だ。
C　たぶん…。
T　確かめてみる？
C　（黒板上の図形に三角定規をあてて直角であることを確かめる。）やっぱり。
T　面積わかる？
C　わからない。だって辺の長さがわからないから。辺の長さを教えて。
T　どの辺？
C　垂直になってるところ。
T　（辺の長さ10㎝と５㎝を板書する。）
C　簡単だよ。
（三角形の求積公式を用いて面積を求め始める。）
T　（もう３枚，同じ直角三角形を貼る。）
C　きっと，（この４枚を）組み合わせた面積を求めるんだ。
C　それいいね。
T　じゃあ○○くんのをもらって…，（問題を黒板に書いて確認する。※問題文を音読する。）
C　たくさんできるよ。
C　でも，数は限られる。（無限ではないという意味。）
T　やってみて。
C　（黒板上で正方形をつくった。）
C　正方形だ。
C　だって，（できた正方形の辺を指しながら）この四角形は，どの辺も10㎝になるよ。
C　他にもあるよ。（黒板で四角形をつくりだす。）
C　まだある。
C　裏返してもいいの？じゃあ，他にもできるよ。（黒板で四角形をつくりだす。）

⋮

このように全体で交流していきながら，以下の４つの四角形（正方形・平行四辺形・長方形・ひし形）が黒板上につくられた（図２）。

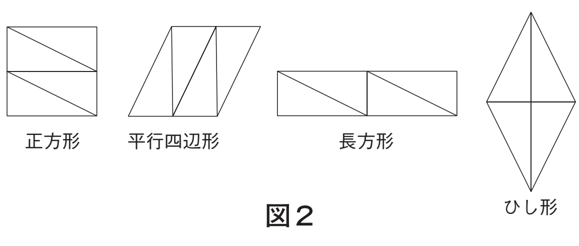


図２

〔操作化〕

この段階は，つくり出された４つの四角形（図２）で，面積が最も大きいのはどれかと問うた。子どもたちからは，これまでと同様に，公式を用いて面積を求める方法とあわせて，直角三角形が何枚あるかとみる方法が出てきた。そこで，「これら（４種類）の四角形よりも大きい四角形はできないか。」と投げかけた。また，この段階では，必要に応じて，個人で考えをつくる時間と小グループでの話し合いを設定し，相互作用の機会が多くなるようにした。

図３は，これまでの図形と面積が等しいという意見と，中の空白部分（正方形）を面積に含めるとその分だけ面積が大きくなるという意見とに分かれて話し合いが進んでいった。この話し合いにおいては，早々に教師が，「空いた部分も面積に入れる」という合意を図り，子どもたちの意識を求積活動へと焦点化した。

求積活動の中で，もとになる図形を直角三角形として，それがいくつあるかという考えが出てきた。この考えは，これまでの求積方法の観点を変更して面積を求めようとする考えであり，基礎・基本を活用する姿として評価できる。そこで，「中の空白の部分も面積として見ていくと，図３と図４は，図２よりも面積がどのくらい大きいのか。」という観点を示し，本時のめあてへとつないでいった。

この段階では，図３と図４の２つの図形の面積を求めることに焦点化した。それは，子どもの意識の流れ，活動の流れによるところも大きいが，直角三角形のいくつ分という見方が容易にできる図形であり，その後，６枚分や７枚分になる図形を考えることへとつながっていくと考えたからである。

それぞれの求積方法を出し合う中で，話し合いの中心となったことは，「中の空白の部分の面積は何平方センチメートルか。」ということであった。

図３については，次のような考えが出てきた。「直角三角形の２辺の長さ（10㎝と５㎝）を利用して，正方形の１辺の長さを求める」という考えである。その後，中の正方形の面積は，直角三角形と等しい25㎠だという発言が出てきたので，それを拾って，「直角三角形の５枚分」と板書した。このように，交流を通して，図形の見方とともに，単位面積を柔軟に変えて見ていくという面積の求め方を深めていった。

その後，図４の面積の求め方について，多様な考えが出された。

こうした授業の実際は次の通りである。

T　この４つの四角形は，どれが一番広い？
C　（一瞬沈黙した後で，口々に）どれも同じだよ。
T　どうして？
C　黄色い三角形（直角三角形のこと）は，同じ面積なんだから，それがどこに行っても，それが４つっていう条件は変わらないんだから，面積は変わらないと思います。
C　どれも100㎠になるよ。
T　（「４枚分」「100㎠」と板書する。）
T　じゃあ，これより広い四角形はできないんだね。
C　うん，できない。
C　いや，できるよ。
C　この直角三角形を使うんでしょ。無理無理。
C　重ねなかったらできるよ。
T　言ってることわかる？
C　わかる。（黒板で図を使って説明）○○くんが言ってるのは，三角形を２枚重ねたら，面積が小さくなるから，（図２とは）ちがう大きさのものができると言ってるんだと思います。
T　面積は小さくなるんだよね。じゃあ，大きいのはできない？
C　４枚でしょ？できないよ。
C　あっ！間に空間つくったらできるよ。
C　（周りの子）あっそうか。できるね。
T　○○くんが，「間に空間つくったら」って言ってる意味わかる？
C　わかるわかる。
T　例えばどういうもの？（指名）
C　（黒板で図３をつくる。）
C　（黒板で図４をつくる。）

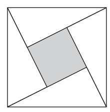


図３

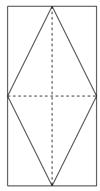


図４

T　これ（図２）とこれ（図３・４）は同じ？
C　○○くんたちがつくった四角形（図３・４）は，中の空いてるところの空間を面積として数えるのであれば，○○くんや○○さんがつくったもの（図２）よりかは，はるかに大きいと思います。
C　（周りの子どもたちも頷く。）
T　もし，この空間も入れるとしたら，はるかに大きいんだね。どのくらい大きいの？面積がわかるの？自分で考えてごらん。※個人追究活動

⋮

T　この図（図３）の面積は？
C　125㎠になる。
T　どうして○○くんが，125㎠になると言ったかわ

かる？

C　（真ん中の空いた部分の）の正方形の面積は，一辺が５㎝なので，５×５で25㎠になります。

C　ということは，空いた部分の正方形は，直角三角形と面積が等しいから，この形の面積は，直角三角形が５枚分と同じことになるよ。

T　（「25×５＝125」「５枚分」と板書する。）
じゃあ，この図形（図４）の面積は？
※この後，以下の求め方が出された。

・20×10＝200（長方形の求積公式を使う方法）
・100＋100＝200
（図２の正方形が２つ分と見て求める方法）
・50×４＝200（直角三角形を２枚組み合わせてできる長方形が４つ分あると見て求める方法）
・25×８＝200
（直角三角形が８枚分と見て求める方法）
・10×10÷２×４（直角三角形を２枚組み合わせてできる二等辺三角形が４つ分あると見て求める方法）

〔協定化〕

この段階では，多様に出てきた求積方法の共通点について考えさせた。

子どもたちは，これまでのことを振り返り，基準となる面積をつくり出し，それがいくつ分あるかと見ていることに気がついた。

最後に，解決してきたことを整理する段階として，話し合いが決着したところを見計らって，「だったら，この図形（図４）の面積が一番大きいのか。これより面積が大きい形はつくれないか。」と投げかけた。その後，グループで検討する時間を再度設定した。その中で，別の図形が出てきた。それぞれの図形，面積及び求め方が説明（紹介）されていった。その中で,「直角三角形の○枚分」という発言がなされたので，板書したり，褒めたりして考えがさらに強化されるように努めた。

こうした授業の実際は次の通りである。

T　ここまでに出てきた求め方に共通してることってある？

⋮

※小グループでの話し合いを仕組んだ。

⋮

C　全部，この三角形（直角三角形）を１つの単位として見ていると思います。

C　でも，この形（図３）では，ここの（真ん中の空いてる部分＝正方形）部分は，形がちがうから，単位として見てはいないと思うよ。

C　（正方形と直角三角形は）面積はたまたま一緒なんだけど，正方形を基準にはしてはいないと思います。

C　（正方形を直角三角形に変形させて）このように，正方形だって，変形すると直角三角形になるから，基準として見ていいと思います。

C　長方形の面積の公式を使っている求め方は，当てはまらないと思います。

C　いろいろ切り刻んで形を変えたら，どんなことでも言えるけど…。

T　じゃあ，つながり（共通点）は，ないってこと？

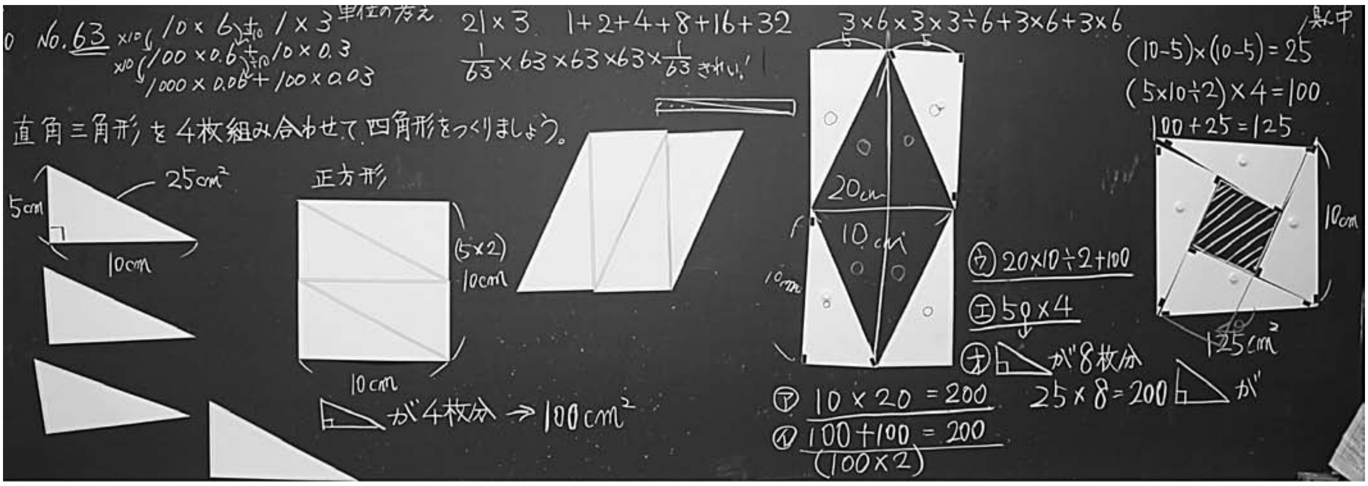
C　いや，やっぱりあるよ。

C　長方形の面積の公式だって，その他の求め方だって，ある形を基準にしてそれがいくつあるかと見ているところです。

C　なるほど。そうだよね。

T　それが共通点でいいかな。

C　それでいいよね。



本時の板書

５ 結　　論

本稿では，高学年の「量と測定」領域の学習において，小学校第５学年の子どもが，これまでに学習して身に付けてきている面積の普遍単位である１㎠，１㎡の正方形を敷き詰めて，その個数を数えて面積を表すという基本的な見方から，提示された問題事象（図形）を変形させ，既習図形やその求積方法にあてはめて，面積の求め方を考えていくという「面積」の概念を形成する際の理解過程を実証的に解明することを目的とした。子どもの理解過程を重視した算数科授業を構成するために，課題把握の場面で，四角形の面積のとらえ方についてつくり出した不整合な状況とそれについての互いの考えを伝え合う活動を設定した。

本実践において，直角三角形を組み合わせて新たな図形をつくり出す活動と求積活動とを組み合わせたことは，図形の構成要素（辺・頂点），垂直・平行，底辺，高さといった多様な観点から図形を見ることにもなり，図形の見方を豊かにすることへとつながった。また，これまでに身に付けてきた正方形（１㎠）がいくつあるかという求積方法だけでなく，単位面積を正方形から，直角三角形へと変えて，そのいくつ分で考えていくような活動を仕組んだことは，面積の求め方を柔軟にし，面積の概念を発展させることにつながった。本時の学習場面は，発展的な内容だったこともあり，固定化された学習指導過程（問題解決過程）を，教師主導で進めていくのではなく，子どもがそれまでに身に付けてきている概念を引き出し，それを相互作用によって，子どもの意欲や問題意識に応じて展開していった。

以上のように，本実践では，数式や図，言語などを用いながら，面積が最大となる根拠を説明し伝え合う算数的活動を工夫することによって，図形の見方を豊かにすることができたとともに，面積の概念に関する理解の深化をもたらしたと考えている。この点において，本実践における教材や指導展開が有効であったと考える。

しかし，子どもがもっている概念を引き出し，それに寄り添いながら授業を展開していくことは，結果としてつくりだされた概念が個々によって別々のものになったり，曖昧になる危険性がある。授業の終末場面，つまり本研究で〔協定化〕と呼んでいる場面での教師の役割や場面そのもののあり方を検討する必要があることが明らかになった。

本事例研究においても，本研究の第２報～第９報の事例と同様に，算数学習において個人的構成と社会的構成の両方が行われて，はじめて教室における集団での一斉学習場面における個々の子どもや子どもたち相互の理解が深化し得るということが示唆される。

本研究テーマに関する一連の研究（第１報～第９報）では，数学理解の２軸過程モデルを理論的根拠としながら，算数学習における理解過程に関する実証的研究を進めて行った。そして，このモデルの根底にあるパラダイムや認識論と，数学理解の階層的水準と学習段階の妥当性についても，これまでの実証的研究によって明らかになってきている。

さらに多数の抽出児の継続的観察記録をとり，子どもの理解過程を実証的に解明することが今後の課題である。

参考文献

１）小山正孝（1997）「数学学習の理解過程」，日本数学教育学会編『学校数学の授業構成を問い直す』，産業図書，pp.135－149.

２）Koyama, M.(1997), Research on the Complementarity of Intuition and Logical Thinking in the Process of Understanding Mathematics. *Hiroshima Journal of Mathematics Education*, Vol.5, pp.21－33

３）小山正孝，中原忠男，武内恒夫，赤井利行，宮本泰司，脇坂郁文（2000）「算数学習における理解過程に関する研究（Ⅰ）―数学理解の２軸過程モデルの理論的再検討―」，『広島大学教育学部・関係附属学校園共同研究体制研究紀要』，第28号，pp.117－123.

４）磯部年晃，小山正孝，中原忠男，赤井利行，中村武司（2002）「算数学習における理解過程に関する研究（Ⅱ）―第２学年における三角形と四角形の概念形成を中心に―」，広島大学学部・附属学校共同研究機構『広島大学学部・附属学校共同研究紀要』，第30号，pp.89－98.

５）赤井利行，小山正孝，中原忠男，中村武司，磯部年晃（2003）「算数学習における理解過程に関する研究（Ⅲ）―第５学年における『台形の面積の求め方』を中心に―」，広島大学学部・附属学校共同研究機構『広島大学学部・附属学校共同研究紀要』，第31号，pp.115－122.

６）磯部年晃，小山正孝，中原忠男，赤井利行，片桐毅（2004）「算数学習における理解過程に関する研究（Ⅳ）―第５学年における『分数と小数，整数の包摂関係』を中心に―」，広島大学学部・附属学校共同研究機構『広島大学学部・附属学校共同研究紀要』，第32号，pp.181－188.

７）片桐毅，小山正孝，中原忠男，赤井利行，磯部年晃（2005）「算数学習における理解過程に関する研

究（Ⅴ）―第３学年における『重さ』の概念形成を中心に―」，広島大学学部・附属学校共同研究機構『広島大学学部・附属学校共同研究紀要』，第33号，pp.217－223.
8）磯部年晃，小山正孝，中原忠男，赤井利行，今村孝子（2006）「算数学習における理解過程に関する研究（Ⅵ）―第１学年『繰り下がりのあるひき算』における式理解を中心に―」，広島大学学部・附属学校共同研究機構『広島大学学部・附属学校共同研究紀要』，第34号，pp.327－332.
9）今村孝子，小山正孝，中原忠男，赤井利行，磯部年晃，榎野純（2007）「算数学習における理解過程に関する研究（Ⅶ）―第１学年『繰り上がりのあるたし算』における計算の意味理解を中心に―」，広島大学学部・附属学校共同研究機構『広島大学学部・附属学校共同研究紀要』，第35号，pp.135－142.
10）榎野純，小山正孝，岩崎秀樹，磯部年晃，今村孝子（2008）「算数学習における理解過程に関する研究（Ⅷ）―第４学年における『角』の概念形成を中心に―」，広島大学学部・附属学校共同研究機構『広島大学学部・附属学校共同研究紀要』，第36号，pp.221－228.
11）磯部年晃，小山正孝，山口武志，榎野純，朝川佳子（2009）「算数学習における理解過程に関する研究（Ⅸ）―第４学年『面積』における数学的モデルの作成を中心に―」，広島大学学部・附属学校共同研究機構『広島大学学部・附属学校共同研究紀要』，第37号，pp.359－364.